arXiv:2512.14184v1 [cs.CG] 16 Dec 2025

†约翰斯·霍普金斯大学计算机科学系几何计算中心，马里兰州巴尔的摩，邮编21218。电子邮箱：barequet@cs.jhu.edu（该作者目前任职于以色列理工学院—IIT计算机科学学院，以色列海法，邮编32000）

‡特拉维夫大学数学科学学院，以色列特拉维夫，邮编69978。电子邮箱：sariel@math.tau.ac.il

[1]自然地，将同一问题中的数字替换为 *rational* 后，该问题也同样是 3SUM-难的。

问题 3.2（SegContPnt （包含点的线段））。给定一个由 n 个实数组成的集合 P，以及一个由 $m = O(n)$ 个实数区间组成的两两不相交区间集合 Q，是否存在一个实数（平移）v，使得 $P + v \subseteq Q$?

在下一节中，我们将 P 和 Q 分别解释为实数轴上的点集和线段集（或者更一般地说，两个线段集）。因此，我们将第二个问题称为“包含点的线段”。

定理 3.3。 3sum' $\ll_n$ EqDist 和 3sum' $\ll_n$ SegContPnt。

证明：设 (A, B, C) 是 3sum' 的一个实例，其中 $|A| = |B| = |C| = n$。不失一般性地，假设 $A \cup B \cup C \subseteq (0,1)$（这可以通过仿射变换实现）。我们通过将每个数 $c_i \in C$ 映射为一对差为 $3 - c_i$ 的数，构造一个由 $2n$ 个数构成的集合 P。具体而言，

$$P = \{100i, 100i + 3 - c_i \mid c_i \in C, i = 1, \ldots, n\}.$$

我们还定义如下数集：

$$Q = A \cup \{3 - b \mid b \in B\}.$$

我们证明，(P, Q) 是 EqDist 问题的一个对应实例。

首先，假设 3sum' 实例存在一个解，即存在一个三元组 $a \in A$, $b \in B$ 和 $c_i \in C$，使得 $a + b = c_i$。那么， EqDist 实例也存在一个解：$(100i + 3 - c_i) - (100i) = (3 - b) - a$。现在假设 EqDist 实例存在一个解，即 $p_1, p_2 \in P$ 和 $q_1, q_2 \in Q$，使得 $p_1 - p_2 = q_1 - q_2$。显然，p_1 和 p_2 必须对应于同一个 $c_i \in C$，否则它们之间的差至少为 97，而 q_1 与 q_2 之间的差至多为 3。此外， $|p_1 - p_2| > 1$，因此 q_1 和 q_2 不可能对应于 A 中的一对点，也不可能对应于 B 中的一对点；若是如此，则 $|q_1 - q_2| < 1$。所以，存在数 $100i, 100i + 3 - c_i \in P$（其中 $c_i \in C$）以及 $a, 3 - b \in Q$（其中 $a \in A, b \in B$），使得 $(100i - 3 - c_i) - (100i) = (3 - b) - a$。这意味着 $a + b = c_i$ 是 3sum' 实例的一个解。因此，我们有 3sum' $\ll_n$ EqDist。

通过向 Q 添加两个新区间，很容易将 EqDist 实例扩展为 SegContPnt 实例：

$$Q' = [-100(n-1), -94] \cup Q \cup [100, 100(n-1) + 6].$$

（此处，每个原始点 $q \in Q$ 均解释为区间 $[q, q] \in Q'$。）这两个附加区间的长度和位置经过选择，使得每个区间只能包含 P 的 $(n-1)$ 对的某个平移（但不能包含 n），并且即使是这两个新区间的并集也无法包含 P 的任何平移。

回想一下，对于满足 $a + b = c_i$ 的三元点组 $a \in A$, $b \in B$, $c_i \in C$，交集 $P + a - 100i \cap Q$ 中有两个元素（q_1 和 q_2）与之对应，反之亦然。首先，假设 SegContPnt 实例存在一个解。我们证明 EqDist 实例也存在一个解，这意味着相应的 3sum' 实例存在一个解。每个新区间的长度均为 $100n - 194$，因此单个区间无法覆盖 P 的任何平移，其极端数值之间的距离至少为 $100n - 98$。两个新区间之间的间隔长度为 194，因此即使将它们合并，也无法覆盖 P 的任何平移。因此，在有效平移中，Q 的至少一个原始数值与 P 的一个平移后数值重合。后一个数值对应于某个 $c_i \in C$。由于

我们先排除后一种情况。 $W(\mathcal{A})$ 较宽的一端（由 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{C}$ 上的点构成）的宽度为 $(0.9-0.1)/100 = 0.008$，而 $W(\mathcal{B})$ 的宽度为 $(1-0)/100 = 0.01$。简单计算可知，要使 $W(\mathcal{A})$ 较宽的一端包含在 $W(\mathcal{B})$ 较窄的一端内，就必须将其向上平移至少 1.2（绕原点旋转后沿 y 轴平移），这样会使 $W(\mathcal{A})$“穿入” $W(\mathcal{B})$ 较宽的一端，从而排除这种变换。

那么，考虑前一种情况，即将 o 映射到其附近的一个点。$W(\mathcal{A})$ 的两条极端边（长度为 1 的线段 $o\,f(0.1)$ 和 $o\,f(0.9)$）与 $W(\mathcal{A})$ 的内部（位于 $f(\min\ A)$ 和 $f(\max\ A)$ 之间）之间隔着两个长度小于 1 的区域。因此，要使 $W(\mathcal{A})$ 包含在 $W(\mathcal{B})$ 中的变换，必须将 $W(\mathcal{A})$ 的两条极端边映射到 $W([f(0)\ f(0.2)])$ 和 $W([f(0.8)\ f(1)])$ 内。现在可以进一步连续地刚性移动变换后的 $W(\mathcal{A})$，使原点在复合变换下保持不变，同时 $W(\mathcal{A})$ 的像仍包含在 $W(\mathcal{B})$ 中。然而，由于现在 o 保持不变，复合变换实际上就是一次旋转。回想一下，我们已在上文证明，ConvPolyContRot 实例有解，当且仅当SegContPnt 实例有解。因此
SegContPnt $\lll_{n\log n}$ ConvPolyContRigidMot。 ■

ConvPolyContRot 问题可以通过围绕 P 原点进行 P 角度扫描，在 $O(n^2\log n)$时间内求解。在旋转过程中，我们维护Q 与旋转后的 P之间的交点。当 P 与 Q 之间的某个交点与多边形的某个顶点重合时，其对应的旋转角就是该算法的事件。目标是跟踪一个事件（如果存在），使得旋转后的 P 完全包含于 Q中。

5. 线段集之间的豪斯多夫距离

本节将证明，计算两个平面线段集在平移下的最小豪斯多夫距离是 3sum-难的。注意，我们允许线段为“无限长”，即直线。

定义 5.1. 设 A 和 B 是 $\mathbb{R}^2$[2]中的两个紧子集。从A 到 B 的单向豪斯多夫距离定义为

$$\delta'(A,B) = \max_{a\in A}\min_{b\in B}||a-b||$$

[2]为简便起见 为便于阐述，我们用定义多边形的 ar 的长度来衡量其“宽度” c.

[3]这一版本的 SegContPnt 是由 S.R. Kosaraju 介绍给作者的。