arXiv:2512.14224v1 [math.RT] 16 Dec 2025

关于球面代数的注记*

KARIN ERDMANN 和 ADAM SKOWYRSKI

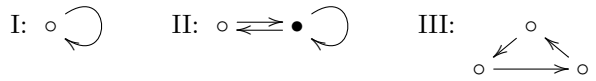
Abstract. 我们对四周期的驯化对称代数进行分类；这类代数与 [7] 中引入的球面代数密切相关。本文针对双正则 Gabriel 箭图这一自然出现的特殊情形给出分类。

1. 引言

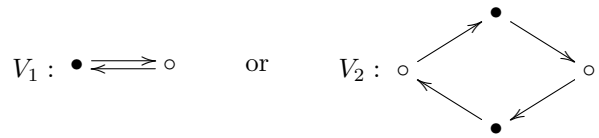
这是对所有单模均具有四周期的驯化对称代数进行分类这一项目的一部分，这类代数称为 TSP4 代数。TSP4 代数包括大多数加权曲面代数（WSA），以及 [5], [7], [10], [11], [12], [13] 中引入并研究的其他各种代数。

这些代数是温和型的，这意味着代数的 Gabriel 箭图（即普通箭图）中，以任一顶点为起点或终点的箭不能太多。此外，由于代数是对称的，其箭图没有源点或汇点。具有 2-正则 Gabriel 箭图（即每个顶点恰有两条箭射出、两条箭射入）的 TSP4 代数已在 [6] 中分类。目前的工作是对 Gabriel 箭图为双正则的情形进行分类，即每个顶点射出的箭数与射入的箭数相等（正则），且均不超过 2。等价地，每个顶点要么是 2- 顶点（两条箭射出且两条箭射入），要么是 1- 顶点（一条箭射出且一条箭射入）。

我们注意到，2-正则情形下的分类 [6] 基于 WSA 的第一个（简化）定义 [5], ，其中权重受到限制，从而使代数的 Gabriel 箭图上具有三角剖分结构。在这种情形下，对于任意 TSP4 代数 $\Lambda = KQ/I$，其 Gabriel 箭图 Q 是由有限个以下三种类型的块粘合而成：



这里，所谓粘合，是指每个顶点 ∘都恰好与另一个块中的一个顶点 ∘ 粘合。一般而言 [7], ，加权曲面代数 Λ 是一个商代数 $\Lambda = KQ/I$，其中 Q 是由有限个 I–III 型块粘合而成，或者等价地说， Q是一个三角剖分箭图（另见第 2.1 节）。理想I 取决于所选权重，并且 Q 中的某些箭可能不是 Q_Λ Λ 的 Gabriel 箭图中的箭（称为虚箭）。根据 [7], ，我们得出结论：任意加权曲面代数 Λ 的 Gabriel 箭图都是由有限个 I–III 型块和两种新型块粘合而成，其形式如下：



类型为 V_1、V_2 的块，分别可由一个 II 型块移除一个虚环得到，或由两个三角形粘合后移除一个由虚箭组成的 2-环得到（另见 [3] 的引言）。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：16D50、16E30、16G20、16G60。

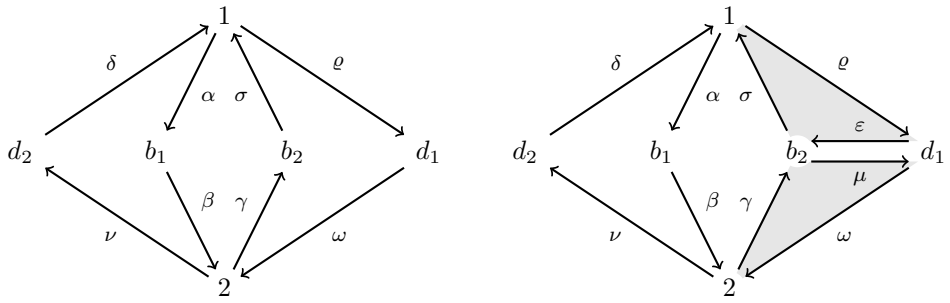
Key words and phrases. 对称代数、温和代数、周期代数、加权曲面代数。

* 本研究得到波兰国家科学中心研究资助项目编号 2023/51/D/ST1/01214 的支持

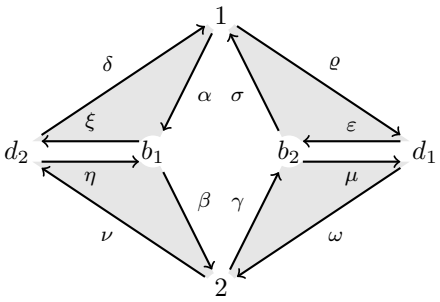
双正则情形下分类工作的第一步，是了解代数 Gabriel 箭图中 1-顶点的位置。在 [3] 中，我们成功证明，对于任意具有双正则 Gabriel 箭图 Q 的 TSP4 代数 $\Lambda = KQ/I$，其中每个 1-顶点 Q 都包含在一个类型为 V_1 或 V_2 的块中。这证实了如下猜想：所有这类代数都应具有与 WSA 相同的 Gabriel 箭图，但要证明这一点还需要多做一些工作。在一个正在进行的项目中，我们试图证明，每个具有双正则箭图的 TSP4 代数都是 WSA（但存在 [6] 中所述的一些例外），或者是所谓的高阶球面代数 HSA [11], ；后者不是 WSA，但具有球面箭图（由两个下文讨论的 V_2, 型块粘合而成）。事实证明，证明自然分为两种情形：第一种情形涵盖了所有 Gabriel 箭图不同于球面箭图（或所谓的三角形箭图）的代数；本文不讨论三角形箭图（关于这种情形的详情，见 [4, 第 6.5] 节）。

本文讨论第二种情形，即对具有球面箭图的 TSP4 代数进行分类。更准确地说，我们证明此类代数要么是 WSA，要么是 HSA。另一篇相关论文 [4] 致力于对第一种情形进行分类，因此本文应被视为补上了一种缺失情形，从而完成一般情形下的分类。这是单独处理这些箭图的两个原因之一。

这里，我们区分以下两种“球面”箭图，分别记作 Q^S 和 $Q^{S'}$。



第一种是两个 V_2 型块的粘合，第二种是一个 V_2 型块与两个三角形（III 型块）的粘合。箭图 Q^S 称为球面箭图，而$Q^{S'}$称为近球面箭图。二者都是以下箭图 Q 的子箭图，该箭图如 [7, 中所述定义球面代数，见例 3.6]。



我们回顾一下， Q是一个三角剖分箭图，其箭的置换 f 由四个 3-循环¯给出（对应于四个阴影三角形中的箭旋转）。随后得到的置换 $g = f$（其中 (–) 是箭集合上的对合；详情见第 2.1 节）有两个长度为四的轨道：

$$(\alpha\ \beta\ \gamma\ \sigma) \text{ and } (\rho\ \omega\ \nu\ \delta)$$

以及两个长度为二的轨道：$(\xi\ \eta)$ 和 $(\varepsilon\ \mu)$。设 $m_\bullet$ 和 $c_\bullet$ 分别是三角剖分箭图 (Q, f) 的权重函数和参数函数，并设 $\Lambda = KQ/I$ 是相应的加权曲面代数 $\Lambda = \Lambda(Q, f, m_\bullet, c_\bullet)$。

那么，视权重 $n = m_\xi$ 和 $n' = m_\xi$而定， Λ 的 Gabriel 箭图及其关系可能有所不同。关于一般情况下 I 中关系的精确描述，请参阅第 2.1 节。

我们不考虑具有 $n,\ n' \geqslant 2$ 的 WSA，因为此时 $Q_\Lambda = Q$ 是 2-正则的，而具有此 Gabriel 箭图的所有 TSP4 代数已在 [6] 中分类。当 $n = n' = 1$ 时，箭 $\xi,\ \eta,\ \varepsilon,\ \mu$ 均为虚箭，且 Λ 的 Gabriel 箭图为 Q^S。此时 Λ 由 Q^S 给出，其容许理想由以下交换关系生成

$$
\begin{aligned}
&(S1a)\ \beta\nu\delta = a(\beta\gamma\sigma\alpha)^{m-1}\beta\gamma\sigma, && (S1b)\ \nu\delta\alpha = a(\gamma\sigma\alpha\beta)^{m-1}\gamma\sigma\alpha,\\
&(S2a)\ \delta\alpha\beta = b(\delta\rho\omega\nu)^{m'-1}\delta\rho\omega, && (S2b)\ \alpha\beta\nu = b(\rho\omega\nu\delta)^{m'-1}\rho\omega\nu,\\
&(S3a)\ \sigma\rho\omega = a(\sigma\alpha\beta\gamma)^{m-1}\sigma\alpha\beta, && (S3b)\ \rho\omega\gamma = a(\alpha\beta\gamma\sigma)^{m-1}\alpha\beta\gamma,\\
&(S4a)\ \omega\gamma\sigma = b(\omega\nu\delta\rho)^{m'-1}\omega\nu\delta, && (S4b)\ \gamma\sigma\rho = b(\nu\delta\rho\omega)^{m'-1}\nu\delta\rho,
\end{aligned}
$$

以及以下零关系

$$
\begin{aligned}
&(Z1)\ \alpha\beta\nu\delta\alpha = 0, \quad (Z2)\ \nu\delta\alpha\beta\nu = 0, \quad (Z3)\ \beta\nu\delta\rho = 0, \quad (Z4)\ \delta\alpha\beta\gamma = 0, \quad (Z5)\ \beta\nu\delta\alpha\beta = 0,\\
&(Z6)\ \delta\alpha\beta\nu\delta = 0, \quad (Z7)\ \beta\gamma\sigma\rho = 0, \quad (Z8)\ \delta\rho\omega\gamma = 0, \quad (Z9)\ \gamma\sigma\rho\omega\gamma = 0, \quad (Z10)\ \rho\omega\gamma\sigma\rho = 0,\\
&(Z11)\ \omega\gamma\sigma\alpha = 0, \quad (Z12)\ \sigma\rho\omega\nu = 0, \quad (Z13)\ \sigma\rho\omega\gamma\sigma = 0, \quad (Z14)\ \omega\gamma\sigma\rho\omega = 0, \quad (Z15)\ \sigma\alpha\beta\nu = 0,\\
&\qquad\qquad (Z16)\ \omega\nu\delta\alpha = 0,
\end{aligned}
$$

其中 $m = m_\alpha$、 $m' = m_\rho$、 $a = c_\alpha$ 和 $b = c_\rho$ （我们可以假设其他参数均为 1）。这类代数有时称为球面代数。

如果 n, n' 中有一个等于 1，不妨设 $n = 1$ and $n' \geqslant 2$，那么 Λ 的 Gabriel 箭图就是近球面箭图，其中有两个虚箭 ξ, η，而 Λ 的容许理想仍由交换关系和零关系生成。我们有以下交换关系：

$$
\begin{aligned}
&(S'1a)\ \beta\nu\delta = a(\beta\gamma\sigma\alpha)^{m-1}\beta\gamma\sigma, && (S'1b)\ \nu\delta\alpha = a(\gamma\sigma\alpha\beta)^{m-1}\gamma\sigma\alpha,\\
&(S'2a)\ \delta\alpha\beta = b(\delta\rho\omega\nu)^{m'-1}\delta\rho\omega, && (S'2b)\ \alpha\beta\nu = b(\rho\omega\nu\delta)^{m'-1}\rho\omega\nu,\\
&(S'3a)\ \mu\omega = a(\sigma\alpha\beta\gamma)^{m-1}\sigma\alpha\beta, && (S'3b)\ \rho\varepsilon = a(\alpha\beta\gamma\sigma)^{m-1}\alpha\beta\gamma,\\
&(S'4a)\ \varepsilon\sigma = b(\omega\nu\delta\rho)^{m'-1}\omega\nu\delta, && (S'4b)\ \gamma\mu = b(\nu\delta\rho\omega)^{m'-1}\nu\delta\rho.
\end{aligned}
$$

其中 m, m', a, b 的定义与球面代数中的相同。本情形中的零关系为 $(Z'1) - (Z'20)$，其中 $(Z'1) - (Z'6)$ 与 $(Z1)$-$(Z6)$ 相同；$(Z'7)$-$(Z'16)$ 则由相应的关系 $(Z7)$-$(Z16)$ 将路径 $\sigma\rho$ 和 $\omega\gamma$ 分别替换为箭 μ 和 ε 得到，此外还有关系 $(Z'17)$-$(Z'20)$： $\sigma\rho\omega = 0,\ \omega\gamma\sigma = 0,\ \gamma\sigma\rho = 0,\ \rho\omega\gamma = 0$

使这项研究颇具意义的另一项重要性质是，在球面箭图 Q^S 上，除了球面代数之外，还存在其他结构的 TSP4 代数。正如我们先前提到的，存在所谓的高阶球面代数（HSA），它们是 TSP4 代数，但不是 WSA。这些代数由球面箭图 Q^S （该箭图是双正则的，但不是 2-正则的）以及修改后的关系集给出（详情见第 5 节）。在 [11] 中，HSA 是通过一个倾斜复形构造的，这表明它与我们称为高阶四面体代数（HTA）的代数导出等价；但该文并未对所有具有这一箭图的 TSP4 代数进行分类（另一种利用突变研究 HSA 的方法见 [12, 第 5], 节）。此外，这也将展示一般情形中所用的方法。

我们的第一个结果如下。

定理 1.1。 假设 Λ 是一个具有 *Gabriel* 箭图 Q^S 的 *TSP4* 代数。那么以下情形之一成立：*(a)* Λ 同构于一个加权曲面代数 KQ/I （不同于奇异球面代数），

其中 Q 是具有四个虚箭 ξ、η、ε、μ 的球面箭图。*(b)* Λ 同构于一个高阶球面代数 $S(m、\lambda)$，其中 $m>1$。

我们通过证明以下定理来补全这一图景。

定理 1.2. 假设 Λ 是一个 *Gabriel* 箭图为 $Q^{S'}$ 的 *TSP4* 代数。那么 Λ 同构于一个加权曲面代数 KQ/I，其中 Q 是有两个虚箭 ξ、η 的球面箭图。这些代数与前一定理 *(a)* 部分中的加权曲面代数属于同一个族。

箭图 Q^S 由两个 V 型块 $_2$，粘合而成；不失一般性，经过标记后，我们可以将这些块取为

$$(1,\ b_1,\ 2,\ d_2)\ \text{ and }(1,\ d_1,\ 2,\ b_2).$$

箭图 $Q^{S'}$ 由一个 V 型块 $_2$，（即 (1，b_1，2，d_2）和两个 III 型块（阴影三角形）粘合而成。

我们简要介绍分类策略。首先，考虑一个 TSP4 代数 Λ，其 Gabriel 箭图为 Q^S 或 $Q^{S'}$，并先确定 Λ 满足的极小关系。接着，我们描述不可分解投射模 Λ- 模的基，由此得到它们的维数。在每种情况下，都存在一个唯一的 WSA 或 HSA（分别对应）Λ，满足相同的关系。然后，我们将定义一个满射代数同态 ψ：$\Lambda\to\Lambda$，并证明它是一个同构。

本文结构如下。第 2 节介绍 WSA，并讨论由代数为温和型这一事实所导致的涉及长度为 ≤ 3 的路径的极小关系。随后，我们描述决定单模上环的正合列，并说明如何利用这些正合列明确处理代数的极小关系。

第 3 节确定 2-顶点处投射模的显式极小关系和张成集。极小关系中出现两个标量参数。第 4 节讨论其中至少一个标量为零的情形，并在此情形下证明定理 1.1。第 5 节确定两个标量均非零时的代数，并证明这些代数是记作 $S(\lambda,\ m)$ 的 HSA（其中 $m\ge 2$），或者在$m=1$时是 WSA。最后一节完成定理 1.2 的证明。

致谢。 两位作者感谢 MFO Oberwolfach 的“研究伙伴”项目、牛津数学研究所和尼古拉·哥白尼大学数学与计算机科学学院的热情接待。第二作者获得了波兰国家科学中心研究资助，编号为 2023/51/D/ST1/01214。

2. 预备知识

一般背景请参见 [1]。我们始终假设代数是基本且对称的。回顾一下，Λ 的 Gabriel 箭图 Q_Λ（即普通箭图）以与单模一一对应的顶点 Q_0 为顶点，而箭 $i\to j$ 对应于 $e_i(J/J^2)e_j$ 的一组基，其中 $i,\ j\in Q_0$。

假设 Λ 是基本且对称的，其 Gabriel 箭图为 Q_Λ。那么 Λ 是 KQ_Λ 的因子代数。设路径 Q_Λ 以箭 $\tau\colon i\to j$ 开始，在 Λ 中非零，并且在此性质下极大，则它必以 i 结束（因为 Λ 是对称的）。我们可以选取这样一条路径 W_τ，其在 Λ 中的像张成了 $e_i\Lambda$ 的底。我们将选取这样一条路径，使其为从 i 到 i 的循环路径 X_τ 的幂，并且该循环路径不是更短路径的幂。代数是对称的，因此这类路径 W_τ 的所有旋转在 Λ 中也非零，并且属于其底。我们采用以下约定：若 p 和 q 是长度相同的路径 r，且满足 $p-cq\in J^{r+1}$，其中某个 $0\ne c\in K$，则记作 $p\equiv q$。

对于箭图 Q 中的一条路径 ρ，如果路径 ρ 是 I 的极小生成元集中的某个关系的一个项，我们将使用记号 $\rho\prec I$。

2.1. **加权曲面代数**。我们回顾 [8] 中的定义。加权曲面代数由一个表示 $\Lambda = KQ/I = \Lambda(Q,\ f,\ m_\bullet,\ c_\bullet)$ 定义；定义该代数的数据 $(Q,\ f,\ m_\bullet,\ c_\bullet)$ 包括一个三角剖分箭图 $(Q,\ f)$、一个权函数 $m_\bullet$ 和一个参数函数 $c_\bullet$。

若在每个顶点都有两条箭射出、两条箭射入，则箭图 Q 称为 2-正则。这样的箭图在箭上具有一个对合 $\alpha \to \bar{\alpha}$，其中 $\bar{\alpha} \neq \alpha$ 是从同一顶点出发的两条箭。三角剖分箭图是一个二元组 $(Q,\ f)$，其中 Q 是一个（有限）2-正则箭图，f是箭的一个置换，满足$f(\alpha)$从 α终止的顶点出发，并且 $f^3 = \mathrm{id}$。置换 f唯一确定一个置换 g，使得 $g(\alpha) := f(\alpha)$。权函数是一个函数 $m_\bullet : Q_1 \to \mathbb{N}^*$，在 g-环上为常数；参数函数是一个函数 $c_\bullet : Q_1 \to K^*$，在 g-环上也为常数。令 n_α 表示 α的g-轨道长度。我们假设对所有箭 α，都有 $m_\alpha n_\alpha \geq 2$。若 $m_\alpha n_\alpha = 2$，则 α 是一条虚拟箭。

对于箭 α，我们用 A_α 表示沿 α 的 g-环的长度为 $m_\alpha n_\alpha - 1$ 的路径。一般而言，若 $\bar{\alpha}$ 是虚的且不是环，则假设 $m_\alpha n_\alpha \geq 3$；若 $\bar{\alpha}$ 是虚环，则假设 $m_\alpha n_\alpha \geq 4$。给定这些数据，若 I 由以下关系生成，则 $\Lambda = KQ/I$ 是加权曲面代数：

(i) 对 Q 的所有箭 α，$\alpha f\alpha - c_{\bar{\alpha}} A_{\bar{\alpha}}$；(ii) 对所有箭 α，$\alpha f(\alpha) g(f(\alpha))$，除非 $f^2(\alpha)$ 是虚的，或除非 $f(\bar{\alpha})$ 是虚的且 $m_{\bar{\alpha}} = 1$，$n_{\bar{\alpha}} = 3$。(iii) 对 Q 的所有箭 α，$\alpha g(\alpha) f(g(\alpha))$，除非 $f(\alpha)$ 是虚的，或除非 $f^2(\alpha)$ 是虚的，且 $m_{f(\alpha)} = 1, n_{f(\alpha)} = 3$。

注意，$m_{\bar{\alpha}} n_{\bar{\alpha}} = 2$（也就是说，$\bar{\alpha}$ 是虚箭，）等价于 $A_{\bar{\alpha}} = \bar{\alpha}$。这些关系表明，$\bar{\alpha}$属于 J^2，因此不是 Λ的 Gabriel 箭图的一部分。事实上，Q 是 Q_Λ 与虚箭集合的不交并。我们注意到，在本文的设定中，置换 g 不会有 3- 循环，并且（ii）和（iii）中的第二种例外情况不会出现。我们还假设，对于所有虚箭 θ，$c_\theta = 1$。

此外，注意引言中定义的球面（及近球面）代数也属于这种情况，其中会出现虚箭。例如，观察可知，交换关系（$S1ab$）$-$（$S4ab$）是将 $\beta\nu$、$\delta\alpha$、$\omega\gamma$和 $\sigma\rho$分别替换关系（i）中的虚箭ξ、η、ε和 μ（并对所有虚箭 θ删除关系 $\theta f(\theta) - \theta$）后得到的。零关系（$Z1$）$-$（$Z16$）则是通过类似的替换从关系（ii）和（iii）中得到的。

2.2. **长度为 ≤ 3的路径**。首先，我们回顾 [2], 中的以下结果；该结果也是识别极小关系的主要工具。以下始终假设 Λ是一个 TSP4 代数。

引理 2.1。假设 $\sigma\tau$ 是路径代数 KQ^S 中的一条路径，$i \to j$，其中 σ、τ 是箭。若 $\sigma\tau$ 出现在某个极小关系中，则必然存在一条从 j 到 i 的箭。

这意味着，Q^S 的 1-顶点之间的任意长度为二的路径都不可能出现在该代数的极小关系中。然而，该代数必须是温和型的，因此得到如下结果。

引理2.2。*(a)* 给定 Q^S 中的两条长度为三的路径，它们都从 i 到 j。那么必然存在某个涉及这两条路径的极小关系。
(b) 对于 $Q^{S'}$ 的情形，如果这些路径不涉及 ε 或 μ，同样成立。

证明。我们给出从一个 1-顶点出发的此类路径的论证，设该顶点为 b_1。考虑由 $\beta\gamma\sigma$ 和 $\beta\nu\delta$ 形成的子箭图。如果不存在涉及这两条长度为三的路径的极小关系，则该子箭图是野遗传的，从而 Λ是野的。对于终止于一个 1-顶点的此类路径，类似的论证同样有效。□

引理2.3. 假设 Λ 具有*Gabriel* 箭图 $Q^{S'}$。则我们有：
(a) 不属于三角形$(\sigma, \rho, \varepsilon)$ 或(μ, ω, γ) 之一的长度为二的路径，不会出现在极小关系中。

(b) 属于某个三角形的任何长度为二的路径，都必须出现在某个极小关系中。于是它属于 J^3。

证明。 (a) 部分由引理 2.1 可直接得到。对于 (b)，我们考虑幂等代数 $e\Lambda e$，其中$\sim e = 1 - e_{d_2} - e_{b_1}$。该代数的箭图为 Q，其顶点集由从 Q_0 中移除 b_1 和 d_2得到。由于$\alpha\beta$，$\nu\delta \neq I$，Q 的方块 ($\alpha\ \beta\ \nu\ \delta$) 周围的箭发生了改变，因此我们只有 $\widetilde{\nu} = \nu\delta$： $2 \to 1$ 以及$\sim\widetilde{\alpha} = \alpha\beta$： $1 \to 2$，而不在该块周围的箭仍然是幂等代数的箭。因此 Q 是 2-正则的。

现在注意到 $\rho\omega \neq I$，因此由 [6, 命题 4.2] 可知 $\rho\varepsilon \prec I$，因为 $e\Lambda e$ 是一个具有 2-正则 Gabriel 箭图的温和代数。同样地，由于 $\varepsilon\mu \neq I$，我们得到 $\varepsilon\sigma \prec I$。于是，根据 [2, 引理 4.3]，$\sigma\rho \prec I$。关于第二个三角形中路径的论证是类似的。□

2.3. **四周期**。取一个单模 S_i，假设它的 Ω-周期为四，且 $\Omega^3(S_i) \cong \Omega^{-1}S_i \cong P_i/S_i$，其中 $P_i = e_i\Lambda$ 是顶和底均与 S_i 同构的不可分解投射模。这意味着存在一个如下形式的正合列，其中投射模为 P 和 P'

$$0 \to \Omega^{-1}(S_i) = P_i/S_i \to P' \to P \xrightarrow{d} \mathrm{rad}P_i = \Omega(S_i) \to 0$$

并且 $\Omega^2(S_i)$ 与 d 的核同构。若 i 是一个 1-顶点，且 τ 是从 i 出发的箭，则 $\mathrm{rad}P_i = \tau\Lambda$，并且 $P_i/S_i = \tau^*\Lambda$，其中 τ^*是以 i为终点的箭。若 i是一个 2-顶点，则 $\mathrm{rad}P_i = \tau\Lambda + \bar{\tau}\Lambda$，并且 $P_i/S_i \cong (\tau_1^*,\ \tau_2^*)\Lambda$，其中 τ，$\bar{\tau}$从 i 出发，而 τ_1^*，τ_2^*以 i为终点。那么，从 i出发的极小关系产生 $\Omega^2(S_i)$ 的极小生成元。当 i 是一个 1-顶点时，这样的关系只有一个；否则则有两个。我们将在当前设定下详细说明 1-顶点的情形，稍后再写出 2-顶点的情形。

$e_{b_1}\Lambda$ 的根同构于 $\beta\Lambda$，且 $e_{b_1}\Lambda/S_{b_1}$ 同构于 $\alpha\Lambda$。因此，上述正合列具有如下形式

$$0 \to \alpha\Lambda \to P_1 \to P_2 \to \beta\Lambda \to 0$$

我们有一个涉及从顶点 b_1 到顶点 1 的长度为三的路径的极小关系，由此得到以下极小关系：

$$r_1(\beta\nu\delta) + r_2(\beta\gamma\sigma) + \beta E = 0 \quad \text{and} \quad r_1(\nu\delta\alpha) + r_2(\gamma\sigma\alpha) + E\alpha = 0$$

其中 $r_i \in K$ 不同时为零，且 $E \in e_2J^4e_1$ （若 Q^S，误差项 E 属于 J^6）。

3. 极小关系与不可分解投射模

本节描述关系和投射模生成元的一般形式。

3.1. **极小关系**。 如上所见，涉及以1-顶点为起点或终点的长度为三的路径的极小关系总是成对出现；对每个1-顶点应用这一点，可得如下结论。

命题 3.1。 设 Λ 是一个 *TSP4* 代数，其 *Gabriel* 箭图为 Q^S。那么不妨假设，包含于 I 中的涉及长度为三的路径的极小关系，在标号意义下如下：

$$(1a)\ \beta\nu\delta - c(\beta\gamma\sigma) + \beta E = 0, \qquad (1b)\ \nu\delta\alpha - c(\gamma\sigma\alpha) + E\alpha = 0,$$
$$(2a)\ \delta\alpha\beta - d(\delta\rho\omega) + \delta F = 0, \qquad (2b)\ \alpha\beta\nu - d(\rho\omega\nu) + F\nu = 0,$$
$$(3a)\ \sigma\rho\omega - c(\sigma\alpha\beta) + \sigma G = 0, \qquad (3b)\ \rho\omega\gamma - c(\alpha\beta\gamma) + G\gamma = 0,$$
$$(4a)\ \omega\gamma\sigma - d(\omega\nu\delta) + \omega H = 0, \qquad (4b)\ \gamma\sigma\rho - d(\nu\delta\rho) + H\rho = 0.$$

这里 c、$d \in K$ 和 E、F、G、H 是 J^6 中的元素。

当 Λ 是一个 *Gabriel* 箭图为 $Q^{S'}$ 的 *TSP4* 代数时，我们也可以假设极小关系 *(1a)*、*(1b)* 和 *(2a)*、*(2b)* 成立。

证明。 回顾一下，我们对块的选取方式是：一个块周围的长度为三的路径都应出现在某个极小关系中（引理 2.2(a)；另见 [2, ..方块引理]）。我们利用 1-顶点处单简单模对应的正合列。如上所述，第二重 syzygy 的生成元对应于极小关系。取单模 S_{b_1}，相关恒等式列于 2.3。我们要求 $\beta\nu\delta$ 出现在某个极小关系中，因此 $r_1 \neq 0$，并且可以取 $r_1 = 1$ 和 $r_2 = -c$。同样，利用 S_{d_2} 对应的正合列可得恒等式 (2a) 和 (2b)，其中标量记为 $-d$。类似地，利用另外两个单模可以写出恒等式 (3ab) 和 (4ab)，其标量分别为 $-c_1$ 和 $-d_1$。

当 Gabriel 箭图为 Q^S 时，我们必须证明 $c = c_1$ 和 $d = d_1$。为此，我们使用 S_1 的正合列，其形式为

$$0 \to (\delta, \sigma)\Lambda \to P_{d_2} \oplus P_{b_2} \to P_{b_1} \oplus P_{d_1} \to \alpha\Lambda + \rho\Lambda \to 0.$$

我们注意到，方程 (2b) 和 (3b) 产生了 $\Omega^2(S_1)$ 的两个线性无关的极小生成元。目前我们不需要明确写出误差项，它们属于 J^7。令 $F\nu = \alpha A + \rho B$，且 $G\gamma = \alpha A' + \rho B'$，我们得到生成元

$$(\beta\nu + A, -d(\omega\nu) + B) \text{ and } (-c_1(\beta\gamma) + A', \omega\gamma + B').$$

令 M 为矩阵，其列向量是 $\Omega^2(S_1)$ 的生成元。那么我们有 $M\binom{\delta}{\sigma} = 0$，由此得到以下两个极小关系

$$\beta\nu\delta - c_1(\beta\gamma\sigma) + A\delta + A'\sigma = 0, \text{ and } \omega\gamma\sigma - d(\omega\nu\delta) + B'\sigma + B\delta = 0.$$

现在，使用 方程 (1a) 和 (4a)，我们推得 $c_1 = c$ 和 $d_1 = d$。证明至此完成。 □

这个命题给出了 V 型块周围长度为三的路径的显式极小关系。因此，为了寻找投射模的基，我们将使用不绕 V 型块的路径（在 $Q^{S'}$ 的情况下，也不绕三角形的路径）。我们设

$$X_\alpha := \alpha\beta\gamma\sigma, \quad \text{and} \quad Y_\rho := \rho\omega\nu\delta.$$

这些路径的旋转也采用类似的记号，例如 $X_\beta = \beta\gamma\sigma\alpha$。

3.2. **投射模的张成集**。 (1) 利用长度为三的路径所对应的极小关系，以及关于长度为二的路径的信息，我们可以归纳确定 $e_1\Lambda$ 和 $e_2\Lambda$ 的根商的张成集。对于 $Q^{S'}$ 的情形，我们利用三角形周围的长度为二的路径属于 J^3 这一点，见引理 2.3(b)。我们较为详细地考察 $e_1\Lambda$ 的情形； $e_2\Lambda$ 的情形类似。第一个根商的基由 e_1， α 和 ρ 的陪集构成。接下来， $e_1J^2 = \langle\alpha\beta,\ \rho\omega\rangle + e_1J^3$ 和 e_1J^3 由 $\alpha\beta\gamma,\ \alpha\beta\nu,\ \rho\omega\nu,\ \rho\omega\gamma$ 生成。

考虑 $\alpha\beta\nu$，它要么属于 J^7 （若 $d = 0$），要么就是 $\alpha\beta\nu \equiv \rho\omega\nu$。我们保留 $\rho\omega\nu$ 作为生成元，不需要 $\alpha\beta\nu$。考虑 $\rho\omega\gamma$。它要么属于 J^7 （若 $c = 0$），要么就是 $\rho\omega\gamma \equiv \alpha\beta\gamma$。我们保留 $\alpha\beta\gamma$ 作为生成元，不需要 $\rho\omega\gamma$。这表明 e_1J^3 由 $\alpha\beta\gamma$ 和 $\rho\omega\nu$ 生成，进而 e_1J^4 模 J^5 由 X_α 和 Y_ρ 生成。重复这一过程，我们得到一个张成集，它由 X_α^n 和 Y_ρ^n 的所有初始子单项式以及 $n \in \mathbb{N}$ 构成。现在我们可以确定 $e_1\Lambda$ 的底层元素。设 m， m' 为极大的，使得 $W_\alpha := X_\alpha^m \neq 0$ 且 $W_\rho := Y_\rho^{m'} \neq 0$。由 Λ 对称可知，它们必张成 $e_i\Lambda$ 和 $W_\alpha \equiv W_\rho$ 的底。因此， $e_1\Lambda$ 由 W_α 和 W_ρ 的初始子单项式张成。将 W_α 的长度为 t 的初始子单项式记作 $[W_\alpha]_t$，则张成集为

$$\{[W_\alpha]_t \mid 0 \leq t \leq 4m\} \cup \{[W_\rho]_s \mid 1 \leq s < 4m'\}.$$

$e_2\Lambda$ 有一个类似的张成集。

（2）对 W_α 和 W_ρ 进行旋转，可得到其他不可分解投射模的底层元素。我们将以 τ 开头的底层元素记为 W_τ，其中 τ 是任意一条箭。此外，我们将 A_τ 记为

W_τ 的初始子单项式，使得对于满足 $g(\tau^*) = \tau$ 的箭 τ^*，有 $A_\tau\tau^* = W_\tau$。稍后我们将看到，A_τ 是 WSA 表示中出现的元素。

推论 3.2. 设 E、F、G 和 H 是命题 *3.1* 中恒等式里的元素。我们可以将 E 和 G 取为 X_α 和 X_γ 的幂的线性组合；并将 F 和 H 取为 Y_ρ 和 Y_ν 的幂的线性组合。

证明。例如，考虑元素 E，它以 βE 和 $E\alpha$ 的形式出现，因此利用上述张成集，我们可以按所述方式取它。□

引理 3.3. ***(a)*** 假设 $c \neq 0$ 和 $d = 0$，则 $m = 1$。类似地，若 $c = 0$ 和 $d \neq 0$，则 $m' = 1$。***(b)*** 若 $d = 0$，则 $m' > 1$；若 $c = 0$，则 $m > 1$。***(c)*** 若 c、d 均非零，则 $X_\alpha \equiv Y_\rho$。对于箭图 $Q^{S'}$，这意味着 $m = 1 = m'$。

证明。(a) 设 $c \neq 0$ 和 $d = 0$，则由命题 3.1 的 (1a) 和 (2b)，可得

$$(\alpha\beta\gamma\sigma)\alpha \equiv (\alpha\beta\nu\delta)\alpha \equiv -F\nu\delta\alpha \in J^9$$

因此它属于 $J^9 \cap e_1\Lambda e_{b_1}$，而 $J^9 \cap e_1\Lambda e_{b_1}$ 是所有 $X_\alpha^j\alpha$ 构成的集合的张成空间。但此时 $X_\alpha\alpha = \sum c_j X_\alpha^j\alpha$，这意味着 $X_\alpha\alpha$ 与一个单位元的乘积为零，故 $X_\alpha\alpha = 0$。因此 $X_\alpha = W_\alpha$ 且 $m = 1$。(a) 的另一部分证明类似。

(b) 假设 $d = 0$，并反设 $m' = 1$。则 $F = 0$，由恒等式 (2a) 得到 $\delta\alpha\beta = 0$。于是 $\delta\alpha J = 0$，且 $\delta\alpha$ 属于底。但它属于 $e_{d_2}\Lambda e_{b_1}$，因此为零，这与引理 2.1 矛盾。另一种情形同理可证。

(c) 假设 c，d 均非零，则由 (1a) 和 (2b) 可得 $X_\alpha \equiv Y_\rho$。假设我们有 $Q^{S'}$。那么 $\sigma\rho \in J^3$（见引理 2.3(b)），由此可知 $Y_\rho\rho \in J^6$。它也属于 $e_1\Lambda e_{d_1}$，因此它是元素 $Y_\rho^j\rho$ 的线性组合。证明中 (a) 部分所使用的论证表明，$Y_\rho\rho = 0$ 且 $m' = 1$。由于 $X_\alpha \equiv Y_\rho$，我们也有 $m = 1$。□

注意，在 m 或 m' 为 1 的情况下，W_α 和 W_ρ 的适当初始子单项式在不同的顶点（2 除外）处结束，因此它们线性无关，因为不存在涉及路径 $\alpha\beta$，$\rho\omega$ 的交换关系。因此，引理 3.3 表明，上述 $e_1\Lambda$ 和 $e_2\Lambda$ 的张成集是基，除非 c，d 均非零且该代数的 Gabriel 箭图为 Q^S。现在我们分别讨论各种情况。

4. c 或 d 为零，或箭图为 Q^S 时的证明

在这种情况下，3.2 中的张成集是基，并且我们得到关于 m，m' 的条件，如引理 3.3 所述。由此，我们现在可以确定 1-顶点处投射模的基。

引理 4.1. 假设 c 或 d 至少有一个为零，则投射模 P_{b_1}、P_{b_2} 以及 P_{d_1}、P_{d_2} 有如下基

$$\{[W_\beta]_t \mid 0 \leq t \leq 4m\} \cup \{\beta\nu\}, \quad \{[W_\sigma]_t \mid 0 \leq t \leq 4m\} \cup \{\sigma\rho\}$$

and

$$\{[W_\delta]_t \mid 0 \leq t \leq 4m'\} \cup \{\delta\alpha\}, \quad \{[W_\omega]_t \mid 0 \leq t \leq 4m'\} \cup \{\omega\gamma\},$$

分别地。对于 Q^S 的情形，投射模 P_{b_1} 和 P_{d_2} 有相同的基。

证明。这是张成集的证明，与 3.2 中的类似论证相同。证明给定环在底中的初始子单项式线性无关，是一道简单的练习。例如，$\{[W_\beta]_t \mid 0 \leq t4m\}$ 中的路径彼此独立。由于 $\beta\nu$ 终止于不同于 W_β 的子单项式所终止的顶点，因此所示集合是一个基。其他情形也类似。□

回顾我们的 c 关于底层元素和极大子路径的约定，因此例如 $W_\beta = A_\beta\alpha$.

推论 **4.2.** 我们有以下零关系 $A_\beta\rho = 0$、 $A_\delta\gamma = 0$、 $A_\omega\alpha = 0$ 和 $A_\sigma\nu = 0$。

证明。 考察 $e_{b_1}\Lambda$ 的基可知， A_β 张成 $e_{b_1}J^{4m-1}$。因此， $A_\beta\rho \in e_{b_1}J^{4m}$ 由 W_β张成。于是，对某个标量 λ，有 $A_\beta\rho = \lambda W_\beta$ 。将 e_{b_1} 后乘可得 $\lambda = 0$。其他恒等式同理成立。□

在 Q^S的情况下，我们还有另一个推论。

引理 4.3. ***(a)*** 空间 $e_{b_1}\Lambda e_{d_1}$ 和 $e_{d_2}\Lambda e_{b_2}$ 为零。此外， $e_{b_1}\Lambda e_{d_2}$ 和 $e_{d_1}\Lambda e_{b_2}$ 是一维的。***(b)*** 类型 V_2 块周围的所有长度为三的路径都属于该代数的第二底。

证明。(a) 维数可直接得出。
(b) 我们详细说明其中一种情形。考虑路径 $\beta\nu\delta$。利用引理 4.1 中 P_{b_1} 的基，我们得出 $\beta\nu\delta$ 是路径 $[W_\beta]_t$、 $t \geqslant 0$ 的线性组合，这些路径都以 1 为终点。因此，我们在 Λ 中有如下关系

$$\beta\nu\delta = [W_\beta]_t(1 + C),$$

其中 $[W_\beta]_t$ 是该线性组合中长度最短的 W_β 的初始子单项式，并且 $C \in e_1Je_1$。因此， $1 + C$ 是一个单位元，故我们可以写成

$$\beta\nu\delta = c_\beta(\beta\gamma\sigma\alpha)^{m_1-1}\beta\gamma\sigma,$$

对于某个 $m_1 \in \{1, \ldots, m\}$ 和某个标量 $c_\beta \in K^*$。现在可得 $m_1 = m$，否则我们会得到 $\beta\nu\delta\alpha\beta\gamma = c_\beta X_\beta^{m_1}\beta\gamma \neq 0$，于是 $\delta\alpha\beta\gamma$ 是 $e_{d_2}\Lambda e_{b_2}$ 中的非零元素，这与 (a) 矛盾。因此， $\beta\nu\delta = c_\beta A_\beta$ 确实属于第二底（也使用 $\beta\nu\delta\rho \in e_{b_1}\Lambda e_{d_1} = 0$），而 $\beta\nu\delta\alpha = c_\beta W_\beta$ 属于底。使用投射左模 Λe_{d_2} 的类似基，可以证明 $\alpha\beta\nu = c_\rho A_\rho$ 属于第二底，而 $\alpha\beta\nu\delta$ 属于底。其余两种旋转的证明类似。同样的论证也适用于第二个块 V_2 中的路径（在 $Q^{S'}$ 的情况下）。□

我们只指出，(b) 在 $Q^{S'}$ 的情况下也成立，但这需要用到后文给出的基的描述（见引理 6.1）。

下面证明定理 1.1 的一部分。

命题 4.4. 假设 Λ 的 ***Gabriel*** 箭图具有 Q^S 的形式，且 c、d 中至少一个为零。那么代数 Λ 同构于一个 ***WSA***，其虚箭为 ξ、η 和 μ、ε，并且 f。重数为 $m_\alpha = m$ 和 $m_\rho = m'$，且 $m_\xi = 1 = m_\mu$。

证明. 不失一般性，我们可以假设 $c = 0$，因此 $m > 1$，由引理 3.3(b) 得出。应用引理 4.3(b)，我们得出，围绕 V_2 型块的所有长度为 3 的路径都属于第二底。特别地，利用投射模的基，关系 $(1a)$ –$(4a)$ 变为

$$\beta\nu\delta = c_\beta(\beta\gamma\sigma\alpha)^{m-1}\beta\gamma\sigma,\ \delta\alpha\beta = c_\delta(\delta\rho\omega\nu)^{m'-1}\delta\rho\omega,\ \sigma\rho\omega = c_\sigma(\sigma\alpha\beta\gamma)^{m-1}\sigma\alpha\beta,\ \omega\gamma\sigma = c_\omega(\omega\nu\delta\rho)^{m'-1}\omega\nu\delta,$$

对于某些标量 c_β， c_δ， c_σ， $c_\omega \in K^*$。换言之，我们有

$$\theta f(\theta)g(f(\theta)) = c_\theta A_\theta,$$

对于任意一条始于 1-顶点的箭 θ （注意， f 总是有定义的，且它由 Q诱导得到）。因此，由命题 3.1 可知，关系 $(1b)$ –$(4b)$具有类似的形式

$$\theta g(\theta)f(g(\theta)) = c_{\bar\theta}A_{\bar\theta},$$

其中 $c_\gamma = c_\beta$、 $c_\rho = c_\delta$、 $c_\alpha = c_\sigma$ 和 $c_\nu = c_\omega$。现在，进一步取关系式 $(2b)$ 和 $(3b)$，得到矩阵M，其列是 $\Omega^2(S_1)$ 的生成元。与命题 3.1 的证明中一样，我们使用正合列

→对于 S_1，并从等式 $M \cdot \delta\sigma = 0$ 得到另外两个关系式。将这些与 (1a) 和 (4a) 进行比较，可得 $c_\alpha = c_\beta$ 和 $c_\rho = c_{\omega_\circ}$

这表明，$c_\bullet$ 给出了一个在 g-轨道上为常数的函数，因此，关系 (1ab)–(4ab) 恰好就是定义球面代数的关系 ($S1ab$) –($S4ab$)（其标量为 $a = c_\beta$ 和 $b = c_\rho$）。此外，很容易看出，定义球面代数的关系 ($Z1$) –($Z16$) 在 Λ 中也成立，因为围绕块 V_2 的长度为四的路径属于底，由引理 4.3(b) 可知；其余关系则由引理 4.3(a) 中的消失条件推出。

总之，若 $\hat{\Lambda}$ 是由权重 $m_\alpha = m$, $m_\rho = m'$ 和标量 $\hat{a} = c_\beta$, $b = c_\rho$ 给出的球面代数 $\hat{\Lambda} = KQ^S/I^S$，那么 Λ 满足定义 Λ的所有关系。因此，我们有一个满同态 $\Lambda \to \Lambda$。$\hat{}$ 比较 Λ-模与 Λ 的不可分解投射模的已知基（从而也比较维数）后，我们得出 ψ 是一个同构，证明至此完成。□

5. Algebras when all scalars are non-zero

我们将证明，该代数要么是一个所有重数均为 1 的加权曲面代数，与前一种情形中的代数属于同一族；要么是一个高阶球面代数。也就是说，它同构于 [11]，中记作 $S(m,\ \lambda)$ 的代数，其 Gabriel 箭图为 Q^S，并满足以下关系；其中元素 A_α 的定义同前，且 $\lambda \in K^*$:

$$\begin{aligned} \beta\nu\delta &= \beta\gamma\sigma + \lambda A_\beta, & \alpha\beta\nu &= \rho\omega\nu, \\ \nu\delta\alpha &= \gamma\sigma\alpha + \lambda A_\gamma, & \delta\alpha\beta &= \delta\rho\omega, \\ \sigma\rho\omega &= \sigma\alpha\beta + \lambda A_\sigma, & \omega\gamma\sigma &= \omega\nu\delta, \\ \rho\omega\gamma &= \alpha\beta\gamma + \lambda A_\alpha, & \gamma\sigma\rho &= \nu\delta\rho. \\ (\alpha\beta\gamma\sigma)^m\alpha &= 0, & (\gamma\sigma\alpha\beta)^m\gamma &= 0. \end{aligned}$$

5.1. 投射模的基。我们此前已经找到了 $e_1\Lambda$ 和 $e_2\Lambda$ 的张成集，现在来确定一组基。仍像之前一样，令

$$X := X_\alpha = \alpha\beta\gamma\sigma \quad \text{and} \quad Y := Y_\rho = \rho\omega\nu\delta.$$

下文将使用命题 3.1 中的恒等式。由 (3b) 和 (4a) 可得

$$X \equiv \rho\omega\gamma\sigma \equiv \rho\omega\nu\delta = Y,$$

因此 $X^r \equiv Y^r$ for $r \geq 1$。此外，$\alpha\beta\nu\delta \equiv \rho\omega\nu\delta$ （由 (2b)）且 $\rho\omega\gamma\sigma \equiv \alpha\beta\gamma\sigma$ （由 (3b)）。也就是说，从顶点 1 出发的所有长度为四的路径模 J^5 线性相关。特别地，顶点 1 处的局部代数由 X 生成，且为有限型。

我们将使用 X 和 Y 的旋转，来构造不可分解投射模的基。我们用 $X_\beta = \beta\gamma\sigma\alpha$ 表示 X 的旋转，类似地，使用记号 X_γ 和 X_σ。同样，我们记 Y 的旋转。由此，下面给出 $e_1\Lambda$ 的基，也给出 $e_2\Lambda$ 的基，证明是直接的。

引理 5.1. ***(a)*** 模 $e_1\Lambda$的基为

$$\{[X^m]_i \mid 0 \leq i \leq 4m\} \cup \{X^i\rho, X^i\rho\omega\nu \mid 0 \leq i \leq m-1\} \cup \{\rho\omega\}$$

还有 Y-基，通过将 X-基中的 X 替换为 Y，并将 ρ、ω、ν 替换为 α、β、γ 得到。***(b)*** 模 $e_2\Lambda$ 的基为

$$\{[X_\gamma^m]_i \mid 0 \leq i \leq 4m\} \cup \{X_\gamma^i\nu, X_\gamma^i\nu\delta\rho \mid 0 \leq i \leq m-1\} \cup \{\nu\delta\}$$

还有一个 Y-基，它由 X-基通过将 X 替换为 Y，并将 ν、δ、ρ 替换为 γ、σ、α得到。

$e_1\Lambda$ 的维数向量为 $(m+1,\ m,\ m+1,\ m,\ m,\ m)$，顺序为 $1,\ b_1,\ 2,\ b_2,\ d_1,\ d_2$，而 $e_2\Lambda$ 的维数向量相同。我们确定了 P_{b_1}的一组基。P_{b_1} 的底由 X_β^m张成，并且我们有一组基

$$\{[X_\beta^m]_t, 0 \le t \le 4m\} \cup \{X_\beta^r\beta\nu,\ X_\beta^r\beta\nu\delta\rho, 0 \le j \le m-2\} \cup \{X_\beta^{m-1}\beta\nu\}.$$

其他 1-顶点处的投射模也有类似的基。

5.2. **更换生成元**。与之前一样，我们使用命题 3.1 中的恒等式。我们将更换生成元，使得恒等式 (2ab) 和 (4ab) 在 HSA 的表示中变为四个仅含两项的关系。我们先细化误差项 F 和 H。元素 $F \in e_1\Lambda e_2$ 与 δ和 ν 相乘，这意味着我们应将其表示为关于 Y-基的形式。我们将它写作

$$F = \rho F_{d_1}\omega$$

其中 F_{d_1} 是 Y_ω的幂的线性组合。类似地，我们写作

$$H = \nu H_{d_2}\delta.$$

由此，恒等式 (2a) 和 (2b) 变为

$$\delta\alpha\beta = \delta\rho(d - F_{d_1})\omega, \quad \alpha\beta\nu = \rho(d - F_{d_1})\omega\nu.$$

我们还改写恒等式 (4a) 和 (4b)，得到

$$\omega\gamma\sigma = \omega\nu(d - H_{d_2})\delta, \quad \gamma\sigma\rho = \nu(d - H_{d_2})\delta\rho$$

我们用 ρ' 替换 ρ，其中 $\rho' := \rho(d - F_{d_1})$。于是 (2a) 和 (2b) 变为

$$\delta\alpha\beta = \delta\rho'\omega \text{ and } \alpha\beta\nu = \rho'\omega\nu \tag{5.2.1}$$

我们还将 ν替换为 ν'，其中 $\nu' = \nu(d - H_{d_2})$。于是 (4a) 和 (4b) 变为

$$\omega\gamma\sigma = \omega\nu'\delta \quad \text{and} \quad \gamma\sigma\rho = \nu'\delta\rho. \tag{5.2.2}$$

我们将 (5.2.1) 中第二个恒等式右乘单位元 $(d - H_{d_2})$，从而得到

$$\alpha\beta\nu' = \rho'\omega\nu'$$

类似地，将 (5.2.2) 中第二个恒等式右乘单位元 $(d - F_{d_1})$，得到

$$\gamma\sigma\rho' = \nu'\delta\rho'.$$

为完成这项工作，我们必须改写恒等式 (1ab) 和 (3ab)。我们代入

$$\rho = d^{-1}\rho' + d^{-1}\rho F_{d_1}, \quad \nu = d^{-1}\nu' + d^{-1}\nu H_{d_2}$$

并将含有 F 和 H 的项并入 E 和 G，然后将恒等式乘以 d^{-1}，得到一个标量因子 $c_1 := d^{-1}c$。我们保留长度为三且标量为 c_1的项，并用新的误差项 E' 和 G'重新写出恒等式；注意这些恒等式是成对出现的。

$$(1ab)\beta\nu'\delta - c_1(\beta\gamma\sigma) + \beta E' = 0 \text{ and} \qquad \nu'\delta\alpha - c_1(\gamma\sigma\alpha + E'\alpha = 0$$
$$(3ab)\sigma\rho'\omega - c_1(\sigma\alpha\beta) + \sigma G' = 0 \text{ and} \qquad \rho'\omega\gamma - c_1(\alpha\beta\gamma) + G'\gamma = 0$$

我们可以将 E' 和 G' 写成 X-基下的形式：$E' = \gamma E''\sigma$ 和 $G' = \alpha G''\beta$。

引理 5.2. 我们有 $\beta\gamma E''\sigma = G''\beta\gamma\sigma$。

证明。 我们使用 S_1 的正合列。$\Omega^2(S_1)$ 的生成元可以通过使用恒等式 (2a) 和 (3b) 得到。将它们写成矩阵形式，即

$$M = \begin{pmatrix} \beta\nu' & -c_1\beta\gamma + G''\beta\gamma \\ -\omega\nu' & \omega\gamma \end{pmatrix}.$$

那么 $M\binom{\delta}{\sigma} = 0$ 给出两个恒等式，第二个是 (4a)，第一个则具有与 (1a) 相同的长度为三的项。这些长度为三的项相同，因此结论成立。□

现在我们有四个恒等式，所有误差项都用 X-基表示。接下来我们得到一个零关系：

引理 5.3。设 $Y = \rho'\omega\gamma\sigma$。那么

$$Y^2 = c_1 Y^2 - \rho'\omega\gamma\sigma G'\gamma\sigma.$$

因此，如果 $c_1 \neq 1$，那么 $Y^2 = 0$。无论如何，我们都有 $\rho'\omega\gamma\sigma G'\gamma\sigma = 0$。

证明。我们有

$$\begin{aligned} Y^2 = \rho'\omega\gamma\sigma\rho'\omega\gamma\sigma &=_{(3a)} \rho'\omega\gamma(c_1\sigma\alpha\beta \ - \ \sigma G')\gamma\sigma \\ =_{(4a)} c_1\rho'\omega\nu'\delta\alpha\beta\gamma\sigma - \rho'\omega\gamma\sigma G'\gamma\sigma &=_{(2a)} c_1\rho'\omega\nu'\delta\rho'\omega\gamma\sigma - \rho'\omega\gamma\sigma G'\gamma\sigma \\ =_{(4a)} c_1\rho'\omega\gamma\sigma\rho'\omega\gamma\sigma - \rho'\omega\gamma\sigma G'\gamma\sigma &= c_1 Y^2 - \rho'\omega\gamma\sigma G'\gamma\sigma. \end{aligned}$$

结论成立。 □

推论 5.4. 元素 $G'\gamma\sigma$ 属于底，而 $G'\gamma$ 和 $\sigma G'$ 属于第二底。元素 $\alpha\beta E'$ 属于底，而 $\beta E'$ 和 $E'\alpha$ 属于第二底。它们均非零。

证明. 由恒等式 (3b)，我们有

$$G'\gamma\sigma = c_1\alpha\beta\gamma\sigma - \rho'\omega\gamma\sigma$$

注意，最后一项是引理 5.3 中的元素 Y。元素 $G'\gamma\sigma$ 属于 $e_1\Lambda e_1$，并且它被局部代数的生成元湮灭；根据引理 5.3，该生成元可取为 $\rho'\omega\gamma\sigma$。因此， $G'\gamma\sigma$ 属于局部代数的底。现在， $G'\gamma$ 属于 $e_1\Lambda e_{b_2}$，而 σ 是唯一一条起点为顶点 b_2 的箭。因此， $G'\gamma$ 属于第二底。经过旋转， $\sigma G'\gamma$ 也属于底，而前面的论证表明 σG 属于第二底。

接下来， $\beta E' = \beta\gamma E''\sigma = G''\beta\gamma\sigma$ 因此 $\alpha\beta E' = G'\gamma\sigma$ 属于底。所以 $\beta E'$ 属于第二底。旋转 $\beta E'\alpha$ 属于底，而 $E'\alpha$ 属于第二底。 □

当 $Y^2 = 0$ 时，我们有 $m = 1$，根据命题 4.4 中的论证，该代数是一个 WSA。不过请注意，对于 $m = 1$，我们必须有 $c_1 \neq 1$ （否则该代数不是对称的，参见 [7]）。

我们继续讨论 $Y^2 \neq 0$，于是 $m > 1$。我们已经得到了 HSA 的几乎所有极小关系；由于 X_α^m 在底中非零，幂零关系也随之成立，所有旋转也同样如此。比较维数后，我们可以得出结论： Λ 是一个 HSA。□

6. Almost spherical algebras

假设 Λ 是一个 TSP4 代数，其 Gabriel 箭图为 $Q^{S'}$。与之前一样，我们将确定极小关系，然后据此证明它与一个 WSA 同构。

回忆命题 3.1 的恒等式 (1ab) 和 (2ab) 在此情形下成立，并且除了 d_1 和 b_2 处的投射模外，我们也已经确定了各投射模的基。注意到我们已经知道 $e_{b_1}\Lambda e_{d_1}=0$ 以及 $e_{d_1}\Lambda e_{b_1}=0$，因为 Λ 是对称的（另见引理 4.3(a)）。

引理 6.1。 *(a)* 投射模 $e_{d_1}\Lambda$ 的基为 $\{[W_\omega]_t \mid 0\le t\le 4m'\}\cup\{[W_\varepsilon]_s \mid 1\le s<2m_\varepsilon\}$，其中 $W_\varepsilon=(\varepsilon\mu)^{m_\varepsilon}$ 张成 $e_{d_1}\Lambda$ 的底。
(b) 投射模 $e_{b_2}\Lambda$ 的基为 $\{[W_\sigma]_t \mid 0\le t\le 4m\}\cup\{[W_\mu]_s \mid 1\le s<2m_\varepsilon\}$，且 W_μ 是 W_ε 的旋转。*(c)* 顶点 d_1 处的局部代数具有独立生成元 Y_ω、$Z_\varepsilon:=\varepsilon\mu$，且它们的乘积为零。同样，$b_2$ 处的局部代数具有独立生成元 X_σ 和 $Z_\mu:=\mu\varepsilon$，且它们的乘积为零。

证明。 (a) 和 (b) 与 3.1 类似。以 (c) 为例，$Y_\omega Z_\varepsilon$ 有一个子路径 $\delta\rho\varepsilon\in e_{d_2}\Lambda e_{b_2}=0$。□

下面说明，其余长度为三的路径满足的恒等式与球形情形中的基本相同。

引理 6.2。 设 Λ 是一个箭图近球面的 *TSP4* 代数。那么我们有

$$(3a)\ (\mu\omega)-c(\sigma\alpha\beta)+\sigma G=0, \qquad (3b)\ (\rho\varepsilon)-c(\alpha\beta\gamma)+G\gamma=0$$
$$(4a)\ (\varepsilon\sigma)-d(\omega\nu\delta)+\omega H=0, \qquad (4b)\ (\gamma\mu)-d(\nu\delta\rho)+H\rho=0.$$

这里，G、H 属于 J^6，而 c、d 与前面相同。

证明。 这与前面的证明类似，使用关于 S_{b_2}的正合列，

$$0\to(\gamma,\varepsilon)\Lambda\to P_2\oplus P_{d_1}\to P_{d_1}\oplus P_1\to\mu\Lambda+\sigma\Lambda\to 0$$

细节从略。 □

下面证明定理 1.2。

命题 6.3。 假设 Λ 是一个 *TSP4* 代数，其 *Gabriel* 箭图为 $Q^{S'}$。那么 Λ 同构于一个由数据 $(Q,f,m_\bullet,c_\bullet)$ 确定的 *WSA*，其中 $\xi\colon b_1\to d_2$ 和 $\eta\colon d_2\to b_1$ 是虚箭。

证明。 这里采用了与命题 4.4 类似的策略，但我们证明关系 $(1ab)$–$(4ab)$与由近球面箭图定义的 WSA 的关系 $(S'1ab)$ –$(S'4ab)$一致。关于三角形周围路径的关系的细节留给读者。□

References

[1] I. Assem、D. Simson、A. Skowro´nski, 《结合代数表示理论要素 1：表示理论技术》，伦敦数学会学生教材，第 65 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2006 年。[2] *Tame algebras of period four* **122** 2024 249 264 K. Erdmann、A. [3] *Local structure of tame symmetric algebras of period four* Hajduk、A. Skowyrski, 《数学档案》（），- K. Erdmann、A. Hajduk、A. Skowyrski, arxiv 2411.01235v1。[4] K. Erdmann、A. Hajduk、A. Skowyrski, *Generalized quaternion type: biregular case*, 即将在 arXiv 上发表。[5] K. Erdmann、A. Skowro´nski, *Weighted surface algebras.* 《代数学杂志》**505**（2018），490-558。
[6] ´ **349** 2019 1036 1116, K. Erdmann、A. Sko
[7] ´ *Weighted surface algebras: general version.* **544** 2020 170 227
wronski, 《数学进展》（），- K. Erdmann、A. Skowronski, 《代数学杂志》（），-。[8] K. Erdmann、A. Skowro´nski, *Weighted surface algebras: general version, Corrigendum.* 《代数学杂志》**569**（2021），875-889。[9] A. Skowro´nski, *Selfinjective algebras: finite and tame type.* 《当代数学》**406**（2006），169-238。

[10] ´ *Higher tetrahedral algebras* **22** 2019 387 406 2018, K. Erdmann、A.Skowronski, ,
[11] ´ *Higher spherical algebras.* **114** 2020 25 39
Algebr.Represent.Theory（）, -。K. Erdmann、A.Skowronski, 《数学档案》（）, -。[12] T. Holm、A Skowro´nski、A. Skowyrski,
Virtual mutations of weighted surface algebras.《代数学杂志》**619**（2023）, 822–859。[13] A. Skowro´nski、A.Skowyrski, *Generalized weighted surface algebras,*
arXiv2106.15218。[14] A. Skowyrski, *Two tilts of higher spherical algebras*。Algebr.Represent.Theory**25**（2022）, 第 1 期, 237-254。

(Karin Erdmann) Mathematical Institute, University of Oxford, UK
Email address: erdmann@maths.ox.ac.uk

(Adam Skowyrski) Faculty of Mathematics and Computer Science、 Nicolaus Copernicus University、
Chopina12/18、 87-100 Toruń、 Poland*Email address*: skowyr@mat.umk.pl