arXiv:2512.14250v1 [math.LO] 16 Dec 2025

近似子群的李模型的超可定义性

BEATRICE DEGASPERI

摘要。在 [2, 定理 4.2] 中，Hrushovski 使用模型论方法，在完全一般的情形下证明了李模型定理。该定理指出，对于每个近似群，都存在一个广义可定义局部紧模型；简而言之，这是从由该近似子群生成的群到具有某些特定性质的局部紧群的一个拟同态。在 [4, 定理 3.25] 中，Pillay 和 Krupinski 使用局部紧类型空间上的拓扑动力学证明了同一定理。在本文中，我们研究第二种证明中拟同态的局部紧群像的可定义性。我们证明，它作为拓扑群同构于一个相对超可定义局部紧群。

1. 引言

本文旨在研究 [4, 定理 3.25]中李模型定理的可定义性性质。该定理最初由 Hrushovski 在 [2, 定理 4.2]中于完全一般的情形下证明。

这涉及 k-近似群。Tao 在 [8] 中引入了这一概念。

定义 1.1。A k-**近似群** 是群 G 的一个子集 X，它是对称的（即 $X^{-1} = X$），并且满足 $X^2 \subseteq EX$，其中 $E \subseteq G$ 是一个基数为 k 的集合。

这里 X^2 表示集合 $\{xx' \mid x, x' \in X\}$，EX 类似地表示集合$\{ex \mid e \in E$，而 $x \in X\}$ 和 $X^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in X\}$。

在一般定理提出之前，Hrushovski 在 [3] 中证明了伪有限群的李模型定理。简而言之，该定理指出，存在X^4 的一个子集 Y，使得 Y 的有限多个平移覆盖 X^4，并且存在一个从 $\langle X\rangle$ 到某个连通李群的群同态，其核包含于 Y 中。这促成了 Breuillard、Green 和 Tao 在 [1] 中对所有有限近似群的渐近分类。

Hrushovski 的证明采用模型论方法，并要求进行语言扩张。Massicot 和 Wagner 在 [6] 中证明了李群在原语言中的局部超可定义性。

*2020*年数学主题分类。03C60,03C98,20A15。关键词和短语。李模型、近似子群、拟同态、超可定义性。本项目部分由 Université Franco Italienne 通过 Vinci项目 ZAMD_UIF_VINCI2_23_01资助。

对于任意无限近似群的定理推广版本，同态由拟同态取代。我们回顾一下定义：

定义 1.2. 误差集为 C 的**拟同态**是一个函数 $f\colon G \to H$，其中 G 和 H 是群，$C \subseteq H$ 是一个集合，包含 $\{f(y)^{-1}f(x)^{-1}f(xy) \mid x、\ y \in G\}$ 和 $\{f(xy)f(y)^{-1}f(x)^{-1} \mid x, y \in G\}$，并且在某种意义下很小。我们记作 $f\colon G \to H\colon C$。

李模型定理的一般版本最早由 Hrushovski 在[2, 定理 4.2] 中证明。

定理 1.3. 对于每个近似子群 X，都存在一个拟同态$f\colon \langle X\rangle \to H\colon C$，其中 H 是第二可数局部紧拓扑群，C 是紧正规误差集，使得：

(1) 对于 $K \subseteq H$，紧集 $f^{-1}(K)$ 包含于某个 X^n 中；(2) 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个紧 $K \subseteq H$，使得 $X^n \subseteq f^{-1}(K)$；(3) H 的任意两个紧子集 K、K'，若满足 $C^2K \cap C^2K' = \emptyset$，则其原像可由一个可定义集分隔。

此外，$f^{-1}(C) \subseteq X^{12}$。

该定理与近似格理论有关，因为可以从李模型中获得有关给定近似格的信息；例如，参见 [5]。

Krupinski 和 Pillay 在 [4] 中给出了一般李模型定理的另一种证明。他们的证明将拓扑动力学推广到了局部紧类型空间。本文证明，他们文章中定义的拟同态的像作为拓扑群与一个相对超可定义局部紧群同胚。

2. 李模型定理

本节将介绍 [4, 定理 3.25] 中陈述的李模型定理。首先，我们回顾广义可定义局部紧模型的定义。

定义 2.1。设 X 是一个近似群，$G = \langle X\rangle$。X 的一个**广义可定义局部紧模型**是一个拟同态 $f\colon G \to H\colon C$，其中 H 是一个豪斯多夫局部紧群，C 是 H 的一个正规对称紧子集，满足：

(1) 对于每个紧致的 $K \subseteq H$，存在 $n \in \mathbb{N}$，使得 $f^{-1}(K) \subseteq X^n$；(2) 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，闭包 $f(X^n)$ 在 H 中是紧致的；(3) 存在一个 $l \in \mathbb{N}$，使得对于任意紧致的 Z、$Y \subseteq H$，若 $C^lY \cap C^lZ = \emptyset$，则原像 $f^{-1}(Y)$ 和 $f^{-1}(Z)$ 可以被一个可定义集分离。

现在我们固定所处的语境。设 M 是语言 $\mathcal{L}$ 中的一个模型，X 是 M 中可定义的近似子群。设 $N \succcurlyeq M$ 是一个 $|M|^+$-饱和初等扩张，$\mathcal{U} \succcurlyeq N$ 是怪兽模型。定义 $G := \langle X\rangle^{\neg}$ 为由 X 生成的群。我们用 X 表示 X 在 $\mathcal{U}$ 中的解释，并用 $_\quad\quad_G$ 表示集合 $\langle X\rangle$。我们在类型空间 $S_{G,\ M}(N) = \bigcup_n S_{X^n,\ M}(N)$ 中工作，其中

对于每个 $n \in \mathbf{N}$，集合 $S_{X^n,\ M}(N)$ 是 N 上有限可满足、集中于 X^n 的完备类型集合，而 $S_M(N) = \bigcap_n \{[\neg\varphi] \mid \varphi$ 在 $M\}$ 中不可满足，则它在 $S(N)$ 中是闭集。

我们赋予 $S_{G,M}(N)$ 以及所有 $S_{X^n,M}(N)$ 从 $S(N)$ 诱导的拓扑，等价地说，是从 $S_M(N)$ 诱导的拓扑。由此可知，所有 $S_{X^n,M}(N)$ 都是紧的，因此 $S_{G,M}(N)$ 是局部紧的。此外，若集合 $F \subseteq S_{G,M}(N)$ 是闭的，则对所有 n， $F \cap S_{X^n.M}(N)$ 都是闭的；反过来，若对每个 n，$F \cap S_{X^n,M}(N)$ 都是闭的，譬如存在某个部分类型 π_n，使得 $F \cap S_{X^n,M}(N) = [\pi_n] \cap S_{X^n,M}(N)$，那么 $F \cap S_{G,M}(N) = [\varphi(x) \vee x \notin X^n : \varphi \in \pi_n, n \in \mathbb{N}]$。因此，$S_{G,M}(N)$ 的全局闭集与局部闭集相同，也就是说，它们是一个闭集与每个 $S_{X^n,M}(N)$ 的交集。

空间 $S_{G,M}(N)$ 可以赋予半群结构。事实上，取 $p, q \in S_{G,M}(N)$。考虑乘积 $p * q = \mathrm{tp}(ab/N)$，其中 $a \models p$, $b \models q$，且 $\mathrm{tp}(a/N, b)$ 是关于 M 的共继承。注意，由于 N 的 $|M|^+$-饱和性，该乘积唯一。此运算满足结合律且左连续，因此 $(S_{G,M}(N), *)$ 是一个左拓扑半群 [4, 引理 3.5]。

2.1. **拓扑动力学**。Krupinski 和 Pillay 的证明借助拓扑动力学的推广来构造该定理中的拟同态。经典拓扑动力学研究流。

定义 2.2。流 是一个二元组 (G, Y)，其中 Y 是一个紧豪斯多夫空间，而 G 是一个在 Y 上连续作用的拓扑群

我们考虑二元组 $(G, S_{G,M}(N))$，其中 G 在 $S_{G,M}(N)$ 上的作用定义为：对于 $g \in G$， $g\,\mathrm{tp}(a/N) = \mathrm{tp}(ga/N)$，且 $\mathrm{tp}(a/N) \in S_{G,M}(N)$。该定义良好，并且这是一个由同胚给出的作用。注意， G 通过映射 $g \mapsto \mathrm{tp}(g/N)$ 嵌入 $S_{G,M}(N)$，因此将 $g \in G$ 与 $\mathrm{tp}(g/N)$ 等同后，我们先前定义的运算 $*$ 将 G 的作用扩展到整个 $S_{G,M}(N)$。此外， G 在 $S_{G,M}(N)$ 中稠密。问题在于，$S_{G,M}(N)$ 不是紧空间。

基于这一原因，Pillay 和 Krupinski 将经典拓扑动力学扩展到局部紧类型空间 $S_{G,M}(N)$ 上。他们证明，$S_{G,\ M}(N)$ 具有一个极小左理想 $\mathcal{M}$ [4, 命题 3.10]，其中包含一个幂等元 u [4, 引理 3.12]，并且 $u * \mathcal{M}$是一个群，即 Ellis群 [4, 引理 3.13]。正如 [4, 引理 3.11], 中所证明的，左连续性基本上意味着 $\mathcal{M} = S_{G,\ M}(N) * c$连同 $c \in \mathcal{M} \cap S_{X,M}(N)$ 在 $S_{G,\ M}(N)$ 中是相对闭的，但不一定有 $u * \mathcal{M}$ 是相对闭的。

与经典拓扑动力学中一样，他们在群$u * \mathcal{M}$ 上引入 τ-拓扑，该拓扑比从 $S_{G,\ M}(N)$ 诱导出的 $u * \mathcal{M}$的拓扑更粗。它由 $\circ$ 中定义的一个运算构造而成，见 [4, 定义 3.16]。

定义 2.3。 对于任意 $p \in S_{G,\ M}(N)$ 和 $Q \subseteq S_{G,\ M}(N)$，我们将 $p \circ Q$定义为所有满足 $r = \lim_i g_i * q_i$ 的 $r \in S_{G.M}(N)$ 所组成的集合，其中 $(g_i)_i$是 G中的一个网，而 $(q_i)_i$是 Q 中的一个网，并且 $\lim_i g_i = p$。

该运算使我们能够定义一个闭包算子 [4, 引理 3.17]，它定义了 τ-拓扑的闭集。

定义 2.4. 对于子集 $Q \subseteq u * \mathcal{M}$，令 $cl_\tau(Q) = (u * \mathcal{M}) \cap (u \circ Q)$。这是一个闭包算子。

于是我们可以定义集合 $H(u*\mathcal{M}) = \bigcap_V cl_\tau(V)$，其中 V遍历所有 τ-邻域的 u。它是 $u*\mathcal{M}$ 的正规子群，而赋予 τ 的商拓扑的空间 $u*\mathcal{M}/H(u*\mathcal{M})$ 是一个局部紧豪斯多夫群 [4,命题 3.24]。

我们已经具备定义该拟同态所需的全部元素；根据定理，它将成为 X 的广义局部紧模型： $f\colon\ G \to u*\mathcal{M}/H(u*\mathcal{M})$，其中 $g \mapsto (u*g*u)/H(u*\mathcal{M})$。误差集是如下集合 C，其构造见 [4,第 3.2]节：

$$
\begin{aligned}
F_n &:= \{x_1 * y_1^{-1} * \cdots * x_n * y_n^{-1} \mid x_i, y_i \in \bar{G} \text{ and } x_i \equiv_M y_i \text{ for all } i \leq n\} \\
\tilde{F}_n &:= \{\mathrm{tp}(a/N) \in S_{G,M}(N) \mid a \in F_n\} \\
\tilde{F} &:= (\tilde{F}_7 \cap u * \mathcal{M}/H(u*\mathcal{M}))^{u*\mathcal{M}/H(u*\mathcal{M})} \\
&= \{y * x * y^{-1} \mid x \in \tilde{F}_7 \cap u * \mathcal{M}/H(u*\mathcal{M}) \text{ and } y \in u * \mathcal{M}/H(u*\mathcal{M})\} \\
C &:= cl_\tau(\tilde{F}) \cup cl_\tau(\tilde{F})^{-1}
\end{aligned}
$$

˜误差集 C 很小，即它包含于 $(F_{10} \cap u*\mathcal{M})/H(u*\mathcal{M})$[4, 引理 3.29]。

现在我们可以陈述一般李模型定理了。

定理 2.5. [4, 定理 3.25] 函数 f 是 X 的一个广义可定义局部紧模型，其误差集 C是紧正规对称误差集。此外， $f^{-1}(C) \subseteq X^{30}$，并且在$u * \mathcal{M}/H(u*\mathcal{M})$ 中存在单位元的一个紧邻域 U，使得 $f^{-1}(U) \subseteq X^{14}$且 $f^{-1}(UC) \subseteq X^{34}$。

3. $u * \mathcal{M}/\sim$的可定义性

在本章节中，我们构造与该像同胚的相对超可定义群。我们将使用 [7, 命题 A.41]中的以下结果。我们用$\overline{u * \mathcal{M}}$表示在 $S_{G,M}(N)$ 上的诱导拓扑下的闭包，因此 $\overline{u * \mathcal{M}}$是相对类型可定义的。从现在起，我们将 H 记作 $H(u*\mathcal{M})$。

命题 3.1。 记 $\zeta\colon \overline{u * \mathcal{M}} \to u*\mathcal{M}$为将 $m \mapsto u*m$映射到的函数，并记 $\xi\colon u * \mathcal{M} \to u * \mathcal{M}/H$ 为到该商的典范投影。则映射 $\eta = \xi \circ \zeta : \overline{u * \mathcal{M}} \to u * \mathcal{M}/H$ 是连续的。

我们证明，像 $u * \mathcal{M}/H$ 作为拓扑群同构于某个商 $\overline{u * \mathcal{M}}/\sim$，而该商是相对超可定义的。由于二者在拓扑意义下同构， $\overline{u * \mathcal{M}}/\sim$ 也是局部紧的，因此它仍包含一个有限指数子群 L 和一个正规子群 N，使得 L/N 是李群。我们使用命题 3.1 中的映射 η。由于 $\overline{u * \mathcal{M}}$在 $S_{G,\ M}(N)$ 的相对拓扑下是闭的，因此存在一个部分类型 p，使得 $\overline{u * \mathcal{M}} = p(x) \cap S_{G,\ M}(N)$。现在我们定义商 $\overline{u * \mathcal{M}}/\sim$。

定义 3.2。 取 $a, b \in \overline{u * \mathcal{M}}$。当且仅当 $\eta(a) = \eta(b)$ 时， $a \sim b$。

定理 3.3。 群 $\overline{u * \mathcal{M}}/\sim$ 是相对超可定义群。

证明。商 $u*\mathcal{M}/H$ 是豪斯多夫空间。因此，对于每个 a、 b 和$c \in u*\mathcal{M}/H$，只要满足 $a*b \neq c$，我们就能在 τ的商拓扑中找到一个开邻域 $O \ni a*b$ 和一个开邻域 $U \ni c$，使得 $O \cap U = \emptyset$。商 $u*\mathcal{M}/H$ 也是一个拓扑群，因此乘积 $*$ 是连续的。于是，我们可以找到两个开邻域 $V \ni a$ 和 $W \ni b$，使得$V*W \subseteq O$。

现在考虑映射 η下 U、 V和 W的原像。将它们分别记为$\overline{U} = \eta^{-1}(U)$、 $\overline{V} = \eta^{-1}(V)$和 $\overline{W} = \eta^{-1}(W)$。由映射 η的连续性，集合 $\overline{U}$、 $\overline{V}$和 $\overline{W}$是限制在 $\overline{u*\mathcal{M}}$上的类型拓扑中的开集。因此，我们可以找到以下公式的并： $\overline{U} = \bigcup_{i\in I} \theta^i_{U_{abc}} \cap \overline{u*\mathcal{M}}$、 $\overline{V} = \bigcup_{j\in J} \varphi^j_{V_{abc}} \cap \overline{u*\mathcal{M}}$和 $\overline{W} = \bigcup_{l\in L} \psi^l_{W_{abc}} \cap \overline{u*\mathcal{M}}$。我们得到，对于每个 $i \in I$、 $j \in J$和 $l \in L$，都有 $\varphi^j_{V_{abc}} \cap \overline{u*\mathcal{M}} \subseteq \overline{V}$、 $\psi^l_{W_{abc}} \cap \overline{u*\mathcal{M}} \subseteq \overline{W}$和 $\theta^i_{U_{abc}} \cap \overline{u*\mathcal{M}} \subseteq \overline{U}$。对于每一组三个这样的元素，以及每一组三个满足此性质的公式，定义公式 $\neg\varphi^j_{V_{abc}}(x) \vee \neg\psi^l_{W_{abc}}(y) \vee \neg\theta^i_{U_{abc}}(z)$。于是，我们可以定义以下部分类型 $\pi(x,y,z)$:

$$\pi(x,y,z) = \left\{ \neg\varphi^j_{V_{abc}}(x) \vee \neg\psi^l_{W_{abc}}(y) \vee \neg\theta^i_{U_{abc}}(z) \;\middle|\; \begin{array}{l} a,b,c \in u*\mathcal{M}/H(u*\mathcal{M}) \\ a*b \neq c \\ U,V,W \text{as in the proof} \\ i \in I, j \in J, l \in L \end{array} \right\}$$

断言 3.4. 类型 $\pi(x,y,z)$ 在 $\overline{u*\mathcal{M}}$ 中等价于 $\eta(x)*\eta(y) = \eta(z)$。

证明。($\Rightarrow$) 假设对于某些 a, b, $c \in \overline{u*\mathcal{M}}$, $\eta(a)*\eta(b) \neq \eta(c)$。记作$\tilde{a} = \eta(a)$、 $b = \eta(b)$ 和 $\tilde{c} = \eta(c)$。那么，与证明的第一部分一样，我们可以找到开集 $U \ni \eta(c)$、 $V \ni \eta(a)$ 和 $W \ni \eta(b)$，它们在 η 下的原像分别为$\overline{U}$、 $\overline{V}$ 和 $\overline{W}$。这些集合是公式的并集，我们分别将其记为$\bigcup_{i\in I} \theta^i_{U_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}}}$、 $\bigcup_{j\in J} \varphi^j_{V_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}}}$ 和 $\bigcup_{l\in L} \psi^l_{W_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}}}$，并与 $\overline{u*\mathcal{M}}$ 相交。于是存在$i \in I$、 $j \in J$ 和 $l \in L$，使得 $\varphi^j_{V_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}}}(a)$、$\psi^l_{W_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}}}(b)$ 和 $\theta^i_{U_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}}}(c)$ 成立，这意味着 $\varphi^j_{V_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}}}(a) \wedge \psi^l_{W_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}}}(b) \wedge \theta^i_{U_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}}}(c)$。由构造可知 $\neg\varphi^j_{V_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}}} \vee \neg\psi^l_{W_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}}} \vee \neg\theta^i_{U_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}}} \in \pi$，因此我们得到 $(a,b,c) \not\models \pi(x,y,z)$。

($\Leftarrow$): 假设 a, b, $c \in \overline{u*\mathcal{M}}$ 满足 $\not\models \pi(a,b,c)$。这意味着我们可以像证明的第一部分那样，找到一些开邻域 U, V 和 W，以及一些 $i \in I, j \in J$ 和 $l \in L$，使得 $\varphi^j_{V_{abc}}(a) \wedge \psi^l_{W_{abc}}(b) \wedge \theta^i_{U_{abc}}(c)$。那么 $\eta(a) \in W$,$\eta(b) \in V$，并且 $\eta(c) \in U$，但 $W*V \cap U = \emptyset$，因此 $\eta(a)*\eta(b) \neq \eta(c)$。□

那么，等价关系 $\sim$ 在 $\overline{u*\mathcal{M}}$ 上是相对类型可定义的，其定义由 $\pi(x,e,y)$ 给出，其中 $e \in \overline{u*\mathcal{M}}$ 满足 $\eta(e) = u*H$。事实上， $\eta(x) = \eta(y) \iff \eta(x) * u * H = \eta(y) \iff \eta(x) * \eta(e) = \eta(y) \iff \pi(x,e,y)$。

这意味着，在 $\overline{u*\mathcal{M}}/\sim$ 上我们可以定义一个乘积 $\bar{*}$，其定义为 $a/\sim \bar{*}\ b/\sim = c/\sim$ 当且仅当 $\eta(a)*\eta(b) = \eta(c)$。它定义良好且 $a/\sim \bar{*}\ b/\sim = a*b/\sim$。事实上， $a/\sim \bar{*}\ b/\sim = a*b/\sim$ 当且仅当 $\eta(a)*\eta(b) = \eta(a*b)$，但 $\eta(a)*\eta(b) = (u*a/H)*(u*b/H) = (u*a*u*b)/H = (u*a*b)/H = \eta(a*b)$。该乘积由类型 π 相对超可定义。

□

我们要证明，$u*\mathcal{M}/H$ 与 $\overline{u*\mathcal{M}}/\sim$ 同构为拓扑群，而后者是相对超可定义的。为此，我们在 $\overline{u*\mathcal{M}}/\sim$ 上定义一种新的拓扑。

定义 3.5. 考虑映射 $\bar{\eta}:\overline{u*\mathcal{M}}/\sim \to u*\mathcal{M}/H$ 定义为 $\bar{\eta}(x/\sim) = \eta(x)$。根据 $\sim$的定义，该映射定义良好。由于 $u*\mathcal{M} \subseteq \overline{u*\mathcal{M}}$，根据 η的连续性以及 $\sim$的定义，映射 $\bar{\eta}$ 是连续双射。我们在 $\overline{u*\mathcal{M}}/\sim$ 上定义拓扑$\tau_{\bar{\eta}}$，其开集是 $u*\mathcal{M}/H$ 中开集在 $\bar{\eta}$下的原像。

定理 3.6. 带有拓扑 $\tau_{\bar{\eta}}$ 的群 $\overline{u*\mathcal{M}}/\sim$ 作为拓扑群同构于 $u*\mathcal{M}/H(u*\mathcal{M})$。

证明. 根据 $\tau_{\bar{\eta}}$的定义，$\bar{\eta}$ 是一个拓扑同胚。它保持乘积，因为 $\bar{\eta}(a/\sim * b/\sim) = \bar{\eta}(a*b/\sim) = \eta(a*b) = \eta(a)*\eta(b) = \bar{\eta}(a/\sim)*\bar{\eta}(b/\sim)$。因此，映射 $\bar{\eta}$ 是拓扑群之间的同胚，这正是我们所要证明的。□

4. One-point compactification of $cl(u*\mathcal{M})$

在上一章节中，我们研究了空间 $\overline{u*\mathcal{M}}/\sim$，其中 $\overline{u*\mathcal{M}}$ 是 $S_{G,M}(N)$ 中 $u*\mathcal{M}$ 的相对闭包。这个空间是局部紧豪斯多夫空间，因为它与空间 $u*\mathcal{M}/H$ 同胚。我们希望构造这个空间的一点紧化。

考虑类型空间 $S(N)$ 中 $u*\mathcal{M}$ 的闭包。我们将这个闭包记为 $cl(u*\mathcal{M})$。当然，根据相对拓扑的定义，$\overline{u*\mathcal{M}} \subseteq cl(u*\mathcal{M})$。我们用 Y 表示集合 $cl(u*\mathcal{M})\setminus\overline{u*\mathcal{M}}$。我们希望将等价关系 $\sim$扩展到集合 $cl(u*\mathcal{M})$ 上，使得 Y 中只有一个等价类。我们还要求，对于任意 $x \in Y$ 和 $a \in \overline{u*\mathcal{M}}$，都有 $x/\sim \tilde{*}\, a/\sim = x/\sim = a/\sim \tilde{*}\, x/\sim$，其中 $\tilde{*}$ 是将 $*$ 扩展到 $cl(u*\mathcal{M})/\sim$ 的运算。

为此，我们首先重新定义类型 π，使其在 $\overline{u*\mathcal{M}}$ 上保持不变，并且只要在 Y 中至少选取两个元素，该类型就总是成立。我们定义如下类型:

$$\bar{\pi}(x,y,z) = \{\varphi(x,y,z) \vee x \notin X^n \vee y \notin X^n \vee z \notin X^n \mid \varphi \in \pi \text{ and } n \in \mathbb{N}\}$$

这样，如果 x、y 或 z 中有一个属于 Y，那么 $\bar{\pi}$ 就成立。问题在于，只在 Y 中选取一个元素、在 $\overline{u*\mathcal{M}}$中选取另外两个元素时，$\bar{\pi}$ 也成立。因此，我们添加如下公式:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x \in X^n \wedge y \in X^m) \to z \in X^{n+m} \\ (x \in X^n \wedge z \in X^m) \to y \in X^{n+m} \\ (y \in X^n \wedge z \in X^m) \to x \in X^{n+m} \end{array} \middle| \; n,m \in \mathbb{N} \right\}$$

此时，与上一章节一样，我们定义 $x \sim y$ 当且仅当 $\bar{\pi}(x,e,y)$。显然，若 x、$y \in Y$，则它总是成立。相反，若 x 或 y 中有一个属于$\overline{u*\mathcal{M}}$，则它不成立。将 $cl(u*\mathcal{M})/\sim$ 上的乘积定义为: $x/\sim \tilde{*}\, y/\sim = z/\sim$ 当且仅当 $\bar{\pi}(x,y,z)$，于是对于 $x \in Y$ 和 $a \in cl(u*\mathcal{M})$，有 $x/\sim \tilde{*}\, a/\sim = x/\sim$，正如我们所希望的。请注意，对于这一最后性质，该乘积定义良好。

总之，我们构造了一个空间 $cl(u*\mathcal{M})/\sim = \overline{u*\mathcal{M}}/\sim \sqcup\, Y/\sim$，其中 $Y/\sim = \{x/\sim\}$ 对于 $x \in Y$ 是一个单元素集，并且对于每个 $a/\sim \in cl(u*\mathcal{M})/\sim$ 及其 $x \in Y$

乘积都是 $x/\sim \tilde{*}\ a/\sim = x/\sim = a/\sim \tilde{*}\ x/\sim$。因此， $cl(u*\mathcal{M})/\sim$ 是 $\overline{u*\mathcal{M}}/\sim$ 的一点紧化。

参考文献

[1] Emmanuel Breuillard、Ben Green 和 Terence Tao 近似群的结构(2012)。[2] Ehud Hrushovski，超越 *Lascar* 群(2020)。[3] Ehud Hrushovski，稳定群论与近似子群(2011)。[4] Krzysztof Krupinski 和 Anand Pillay，近似群的广义局部紧模型(2023)。[5] Simon Machado，闭近似子群：紧致性、可 *amen* 性与近似格(2023)。[6] Jean-Cyrille Massicot 和 Frank O. Wagner，近似子群(2015)。[7] Tomasz Rzepecki，有界不变等价关系(2018，弗罗茨瓦夫)。[8] Terence Tao，非交换群的乘积集估计(2008)。