arXiv:2512.14251v1 [math.MG] 16 Dec 2025

关于固定直径下距离乘积的 Erdős问题：一个改进的下界

Nat Sothanaphan*

2025年12月16日

摘要

Erdős、Herzog和Piranian提出了这样一个问题：对于平面上直径（点与点之间的最大距离）固定的 n个点，正 n边形的排列是否能使所有点对之间的距离乘积最大？最近，人们发现，对于每个偶数 $n \geq 4$，正 n边形都不是最大值构型。然而，这一改进幅度非常小。具体而言，固定直径为 2，令 Δ 为所有点对之间距离乘积的平方（这里取“平方”是因为它与多项式判别式有关）。那么，对于正 n边形，偶数 n时有 $\Delta = n^n$。迄今为止，已证明所发现的构型仅达到 $\Delta = (1 + o(1))n^n$，且尚不清楚是否存在某个 $C > 1$，使得对所有充分大的偶数 n都有 $\Delta \geq Cn^n$。在本文中，我们证明，对于偶数 n，确实有 $\liminf_{n\to\infty} \Delta_{\max}/n^n > 1.037$，从而解决了这一猜想。事实上，人们已知其他一些构型，其猜想的 Δ/n^n 值更高，但我们尚无法证明它们具有较大的距离乘积。最后，目前尚无满足 $\Delta/n^n \to \infty$ 的构型，我们也不知道这样的构型是否存在。

1 引言

Erdős、Herzog和Piranian [EHP58] 提出了以下问题。设 $n \geq 2$为 f 一个根为 $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ 的首一多项式。设 f 的判别式的绝对值为

$$\Delta(f) := \prod_{i\neq j} |z_i - z_j| = \prod_{i<j} |z_i - z_j|^2,$$

也就是说，它等于所有根对之间距离乘积的平方。进一步假设根集的直径为 2：

$$\max_{i,j} |z_i - z_j| = 2.$$

那么，$\Delta(f)$ 是否在 z_i 构成正则 n 边形时取得最大值？当 n 为偶数时，这种构型给出 $\Delta = n^n$。当 n 为奇数时，这种构型给出 $\Delta \sim e^{\pi^2/8} n^n$ （额外因子源于该构型略大于单位圆，以使最长对角线的长度为 2），其中 $\sim$ 表示当 $n \to \infty$ 时，两边之比趋于 1。

本文证明以下结果。设 $\Delta_{\max}$ 表示满足“直径固定为 2”条件时 $\Delta(f)$ 的最大值。那么：

命题1。 对于偶数 n，我们有

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\Delta_{\max}}{n^n} \geq C \approx 1.0378 > 1,$$

其中 C 是给定的常数

$$C := \exp\left(-I\frac{\pi^2}{128}\right),$$

且 I 是定积分

$$I := \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{((1-\frac{x}{\pi})e^{ix/2} - (1-\frac{y}{\pi})e^{iy/2})^2(e^{ix}+e^{iy})}{(e^{ix}-e^{iy})^2}\,dx\,dy \approx -0.481436 < 0.$$

*natsothanaphan@gmail.com

事实上，对于每个偶数 n，都有一个明确的构造满足

$$\Delta = Cn^n(1 + O(1/n)).$$

这个常数形式“奇特”，源于我们采用向量场的证明技巧。

我们指出，这个常数 C 很可能并非最佳，但这类结果似乎难以证明，而这恰好是首个得到证明的情形。我们期待未来的研究者能够改进这个下界。

最后，目前尚不清楚对于偶数 n，是否有 $\Delta_{\max}/n^n \to \infty$ 如 $n \to \infty$ 所示。

作者感谢 Stijn Cambie、ChatGPT 和 Quanyu Tang 参与讨论（按字母顺序排列）。

2 先前文献

据作者所知，关于这个问题的文献很少。在 [EHP58]本身中，已证明若集合 $\{z\colon\ |f(z)| \le 1\}$ 是连通的，则 $\Delta(f) \le n^n$。这引出了这个问题。Pommerenke [Pom61] 研究了这个问题，并得到了上界 $\Delta_{\max} \le 2^{4(n-1)}n^n$。这里的因子 $\Delta_{\max}/n^n$ 是指数级的；目前我们也不知道有任何更好的上界。因此，对于偶数 n，正 n^n 边形的 n 值，或奇数 $e^{\pi^2/8}n^n(1 + o(1))$ n，与已知上界之间存在很大差距。

最近，Erdős 问题网站上的相关研究又有了新进展，该问题编号为 #1045 [Blo]。下面简要总结一下。Cambie、Hu 和 Tang 证明，对于偶数 n，如果将一条直径线段沿径向稍微移动，直径仍保持为 2，而距离乘积则会略有增加。但改进幅度不大：约为 $\Delta = (1 + O(1/n^2))n^n$。

Cambie、Dong 和 Tang 在此基础上取得了改进：他们研究了一个正 Reuleaux $n/2$边形（定宽曲线），并结合了弧中点。这使下界提升至 $\Delta = (1 + O(1/n))n^n$，适用于偶数 n。不过改进仍然比较有限！随后有人提出，对于偶数 n，是否有 $\Delta_{\max} = (1 + o(1))n^n$，并预期这一点不成立。但迄今还没有人给出证明。

随后，Cambie、Dong 和 Tang 为 $n = 6k$ 构造了一种更复杂的构造，它由 6 段圆弧组成，并具有某种对称性（即 D_3 对称性）。数值计算表明，Δ/n^n 趋近于约 1.30，这将超过 $(1 + o(1))n^n$ 这一界限。不过，这种构型难以用闭式表达式表示，他们（以及作者）迄今仍未能证明，对于某个 $C > 1$，下界可以提升至 Cn^n。因此，这个猜想仍未解决。

在本文中，作者终于通过另一种构造解决了这一猜想。

最后，n 奇数的情形仍未取得任何改进；迄今为止，在这种情形下尚未发现优于正 n边形的构造。

3 带有新下界的构造

作者扩展了“沿径向移动直径”的思想，正如 Erdos 问题网站上所讨论的那样 [Blo]。

3.1 构造的描述

我们注意到，上一节描述的基于勒洛三角形的构型实际上是这种移动直径思想的一个实例。在那里，我们交替进行“推”和“拉”。

然而，实际上，与其像那样交替改变“推动量”，不如对其进行连续变形。由此得到如下构造。在全文中，n 必须是偶数。

Let:

$$\delta_k = c\left(\frac{1}{n} - \frac{4k}{n^2}\right), z_k = (1 + \delta_k)e^{2\pi ik/n}, z_{k+n/2} = -(1 - \delta_k)e^{2\pi ik/n}, \quad k = 0, 1, \ldots, \frac{n}{2} - 1.$$

这里，$c = c_{\max}(n)$ 是能够保持直径为 2 的最大量。数值上，$c_{\max}(n) \to \pi^2/4$ 约为 $n \to \infty$。这一点之后也将得到证明。作者通过数值证据发现，对于这一构造，$\Delta/n^n \to 1.037\ldots > 1$，但起初无法证明这一点，正如

Cambie、Dong 和 Tang 的构造情形（该情形下的数值则约为 1.30）一样。

这里的想法是，将角度为 0 的直径向外移动 c/n。为了保持一致，必须将角度为 π 的直径移动 $-c/n$。然后对它们之间的直径进行线性插值。

3.2 构造的微妙之处

我想指出这类构造的一个方面：它可能令人惊讶，而且显然并非一目了然。请看我如何对推动量进行线性插值。有人可能会认为，插值方式并不重要。事实并非如此，这也说明了证明为何如此困难！

如果我改用上一小节中的公式

$$\delta_k = \frac{c}{n} \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right),$$

那么，数值计算实际上表明 $\Delta/n^n \to 1$ 会非常迅速地增长。因此，这样做并不能突破我们所期望的 $\Delta = (1+o(1))n^n$ 下界。

目前，作者尚不清楚该如何判断哪些插值方式可行。

同样，前面提到的由圆弧构成的 $n = 6k$ 构造也可能以类似的方式“敏感”；这或许可以解释为什么在这种情况下，大 Δ 的证明也一直难以获得。

4 新下界的证明

现在我们给出命题1的证明。

4.1 向量场

思路是，不把构型看作一个固定实体，而是设想它按照某个向量场 v“流动”。

重要的是，这个向量场 v 与 n（点的数量）无关。我的构造碰巧满足这一点（我并非有意在这里得到一个“固定”的表达式；这是在证明过程中出现的）。所讨论的向量场最终为：

$$z' = v(z) := \left(1 - \frac{2}{\pi}|\arg z|\right)\frac{z}{|z|}, \quad \arg z \in [-\pi, \pi).$$

注意，对于 $z = 0$，这一定义并不成立，但这没关系，因为我们只需要在单位圆附近使用它。此外，向量场是连续的（由于 $|\arg z|$），但它不可微。不过，它在单位圆附近是李普希茨连续的；这一事实后来将证明至关重要。

事实证明，构造恰好如下。我们从 n次单位根（构成一个正 n边形）开始。然后根据上述微分方程，将这些点从 $t = 0$ 移动到 $t = O(1/n)$。（确切的终点 t 是 $c_{\max}/n$，事实证明它将是 $O(1/n)$。稍后将以更精确的形式证明这一点。）

4.2 泰勒展开

现在定义 $v_j := v(z_j)$。另外定义“微分量”：

$$\rho_{ij} := \frac{v_i - v_j}{z_i - z_j}.$$

由于上一小节提到的利普希茨连续性，ρ_{ij} 有界（与 n无关）。这一点非常重要！

现在我们注意到

$$\log \Delta = \sum_{i,j} \log |(z_i - z_j) + (v_i - v_j)t| = \text{const} + \sum_{i,j} \log |1 + \rho_{ij} t|.$$

我们按以下方式进行泰勒展开。

$$\log |1 + \rho t| = \operatorname{Re} \log(1 + \rho t) = \operatorname{Re} \left(\rho t - \frac{\rho^2 t^2}{2} + \frac{\rho^3 t^3}{3} - \frac{\rho^4 t^4}{4} + \dots \right).$$

存在对称性 $v(-z) = v(z)$，这意味着 $z_{j+n/2} = -z_j$ 而 $v_{j+n/2} = v_j$。这说明，对于 ρ_{ij}，也会有一个与之互为相反数的项。因此，在上面对 $\log \Delta$ 的求和中，泰勒展开中的奇次幂项会相互抵消；只剩下偶次幂项。

扩展 ρ_{ij} 的记号，使其也能在任意 t 处取值；这里，$z_j(t)$ 是流动了时间 t 的 z_j，并且再次有 $v_j(t) = v(z_j(t))$（关于 v_j 的记号仅为完整起见，因为在我们的构型中，v_j 在流动过程中本来就是常数）。回忆一下泰勒定理中余项的拉格朗日形式。这意味着：

$$\log \Delta = \log(n^n) - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \operatorname{Re}(\rho_{ij}^2) t_{\max}^2 - \frac{1}{4} \sum_{i,j} \operatorname{Re}(\rho_{ij} (t_{\text{intermediate}})^4) t_{\max}^4$$

其中 $t_{\max}$ 是终止时间，$t_{\text{intermediate}}$ 是 $[0, t_{\max}]$ 中的某个值。

这种形式足以用于我们的估计！

4.3 界的推导

我们继续使用上一小节推导出的 $\log \Delta$ 公式。

4.3.1 二阶导数项

首先，我们来处理主要的 $t_{\max}^2$ 项。我们必须对所有 ρ_{ij}^2 求和。利用对称性，我将其化简为

$$\sum_{i,j} \rho_{ij}^2 = 4 \sum_{0 \le i,j < n/2} \frac{(v_i - v_j)^2 (z_i^2 + z_j^2)}{(z_i^2 - z_j^2)^2} = 4 \cdot \frac{n^2}{4} \left(\frac{I}{4\pi^2} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right),$$

其中 I 是命题 1中的积分。为了将积分 I 写成这种形式，注意到 z_j^2 是 $n/2$ 次单位根，然后通过一些代数变换，将有限和转化为黎曼和，以近似积分 I。这里的表达式 $I/(4\pi^2)$ 是被积函数的平均值。

现在我必须解释如何得到这个 $O(1/n)$ 误差项。首先，由于 ρ_{ij} 有界这一重要事实，I 中的被积函数以及有限和中的每一项都不依赖于 n，且均有界。因此，首先要注意的是，求和中只有 $n/2(n/2-1)$ 项，而不是 $n^2/4$；不过，缺失项的总和至多为 $O(n)$，因此可以并入其中的误差项。从现在起，假设我们确实有 $n^2/4$ 个采样点，排列成一个 $n/2 \times n/2$ 网格。I 的被积函数实际上是光滑的（分母中的 $(x-y)^2$ 因子也出现在分子中），所以在这个网格上的近似每项误差为 $O(1/n)$。这些结果合起来便得到所述结论。

结果还表明 I 是一个实数；这是由另一种对称性所致，即$v(\bar{z}) = v(z)$。然而，它是一个负实数这一事实，是构造 $C > 1$ 的关键（回顾命题1的陈述）。但这个负性并不能轻易地从任何结论中推导出来。相反，WolframAlpha 将 I 计算为一个负实数。这也解释了为什么该方法能够证明较大的 Δ：它找到了一个恰好满足所需不等式的关键积分 I。作者目前仍不清楚哪些向量场 v 会产生我们所需的负值 I，只知道这个特定的构造能够奏效。

4.3.2 四阶导数项

这是第 $t_{\max}^4$ 项。注意，结合 $t = t_{\text{intermediate}}$，

$$|\sum_{i,j} \rho_{ij}(t)^4| = \left| \sum_{i,j} \frac{\rho_{ij}^4}{(1 + \rho_{ij} t)^4} \right| \le \sum_{i,j} \frac{|\rho_{ij}|^4}{(1 - |\rho_{ij} t|)^4} = O(n^2).$$

这是因为一个关键事实： ρ_{ij} 有界，且我们有 $t = O(1/n)$，因此 $|\rho_{ij}t| = o(1)$。

实际上，这个误差比所需的更小；在 $\log \Delta$ 的主公式中，这使得最终的四阶导数项仅为 $O(1/n^2)$（而所有来源的误差合并后应为 $O(1/n)$）。

4.3.3 流动时间

最后，我们必须 估计 $t_{\max}$ 本身。这是保持直径为 2 的最大 t 。正确的速率为

$$t_{\max} = \frac{\pi^2}{4n}(1 + O(1/n)).$$

证明这一点可能有很多方法。我们将介绍其中一种。

我们求解方程 $|z_i(t) - z_j(t)| = 2$。这是 $\log|z_i - z_j| + \log|1 + \rho_{ij}t| = \log 2$。令 $\rho = \rho_{ij}$。将 $\log|1 + \rho t|$ 展开至二阶导数，得到

$$t = -\log|(z_i - z_j)/2|(1 + O(t))/\mathrm{Re}(\rho).$$

直接计算可得 $\mathrm{Re}(\rho) = 1 - (\text{与 } z_i\text{、 } z_j\text{之间的角度})/\pi$。经过进一步计算，我们发现，当 z_i、 z_j 几乎方向相反时，t 受到的约束最强：它们之间的角度为 $\pi - 2\pi/n$。此外，我们还有 $O(t) = O(1/n)$。将这些结果代入，即可得到 $t_{\max}$所需的速率。

4.3.4 收尾

汇总三个误差估计，得到

$$\log \Delta = \log(n^n) - \frac{1}{2} \cdot \frac{n^2 I}{4\pi^2}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \cdot \frac{\pi^4}{16n^2}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

这给出了命题 1 陈述中的精确形式，并完成了证明。

参考文献

[布卢] T. F. Bloom。Erdos 问题 #1045。https://www.erdosproblems.com/1045。访问日期：2025-12-15。[EHP58] P. Erd˝os、F. Herzog 和 G. Piranian。多项式的度量性质。数学分析杂志´ *ématique*，6:125–148，1958年12月。[Pom61] Ch. Pommerenke。复多项式的度量性质。密歇根数学杂志，8(2):97–115，1961年。