arXiv:2512.14268v1 [cond-mat.quant-gas] 16 Dec 2025

偶极量子气体：从三维到低维

Yifei He[1], Haoting Zhen[1,2], 和 Gyu-Boong Jo[2]

摘要 偶极量子气体包括具有显著偶极矩的原子和分子，它们表现出独特的长程各向异性偶极-偶极相互作用（DDI），因此有别于由短程接触相互作用主导的系统。本文综述了它们在不同维度下的行为，重点比较准二维与三维中的磁性原子。在三维中，强偶极-偶极相互作用会导致各向异性超流性、由 Lee-Huang-Yang 修正稳定的量子液滴，以及具有密度调制的超固态。在二维中，我们讨论了一种新情形：偶极-偶极相互作用会诱导角度依赖的 Berezinskii-Kosterlitz-Thouless 转变和潜在超固性，这一点得到了近期在准二维几何结构中对强偶极系统进行的实验实现的启发。我们指出了未来强偶极二维系统实验与理论研究面临的关键挑战。最后，本文强调，这些独特的二维偶极系统有望推动基础研究，并用于模拟新颖的物理现象。

[1]香港科技大学物理系，中国香港九龙清水湾 ·[2]莱斯大学物理与天文学系、Smalley-Curl 研究所，美国德克萨斯州休斯敦

1 偶极原子和分子概述

偶极量子气体 [1, 2, 3], （例如具有显著偶极矩的原子和分子）已成为超冷物理领域中一个蓬勃发展的研究方向。它们的长程各向异性偶极-偶极相互作用（DDI）使其明显区别于由短程接触相互作用主导的系统。

1.1 原子

碱金属原子的磁矩通常约为 $1\mu_B$，因此偶极效应较弱。偶极原子通常具有磁偶极矩，会表现出各向异性偶极-偶极相互作用，从而影响其量子气体行为。首个偶极玻色-爱因斯坦凝聚体（玻色-爱因斯坦凝聚）于 2005 [4] 由铬原子实现。铬的磁矩为 $6\,\mu_B$ （玻尔磁子），为早期研究偶极效应提供了平台。随后，人们实现了镧系原子（如镝（$10\,\mu_B$）和铒（$7\,\mu_B$））的玻色-爱因斯坦凝聚体；这些原子具有更大的磁矩，增强了偶极效应，并促成了更丰富的物理现象 [5, 6]。最近，人们实现了铕的玻色-爱因斯坦凝聚体（$7\,\mu_B$） [7]。

碱金属（弱偶极性）原子虽然碱金属原子（例如锂、铷、钠、钾）主要受接触相互作用支配，但它们较弱的磁矩在特定实验装置中仍能产生可测量的偶极效应。例如，在自旋极化碱金属玻色-爱因斯坦凝聚体中，偶极-偶极相互作用会影响自旋纹理的形成和集体模动力学 [8, 9, 10]。尽管这些效应不如在强偶极性物种中显著，但相关研究揭示了短程与长程相互作用之间的相互影响 [11]。

铬铬玻色-爱因斯坦凝聚体是首批具有显著偶极-偶极相互作用的量子简并气体 [4]。铬电子基态中的大电子自旋 ($S = 6$) 产生了强偶极-偶极相互作用。在飞行时间（TOF）膨胀后，人们首次在铬玻色-爱因斯坦凝聚体中直接观测到各向异性偶极-偶极相互作用 [12]。

镧系 镧系原子（如镝和铒）是研究强偶极-偶极相互作用的典型系统，因为其电子基态中电子具有较大的轨道角动量，从而产生了较大的磁矩。尽管铬的磁矩与镝和铒相近，但由于镧系原子的质量较大，其偶极长度 $a_{dd} = \mu_0\mu^2 m/12\pi\hbar^2$ 远大于铬。镝和铒 [5, 6, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19] 表现出显著的偶极效应，例如各向异性超流性、由超越平均场效应稳定的量子液滴的形成，以及超固性。镧系元素复杂的电子结构也带来了挑战，例如密集的 Feshbach共振谱 [20, 21, 22], 要求对实验参数进行精确控制。

极化偶极原子的二体相互作用势

两个极化磁性原子之间的总相互作用是接触相互作用和偶极-偶极相互作用之和，可写为

$$V(\mathbf{r}) = g^{3D}\delta(r) + \frac{3g_d^{3D}}{4\pi}\frac{1-3\cos^2\alpha}{r^3}, \tag{1}$$

其中，$g^{3D} = \frac{4\pi\hbar^2}{m}a_s$ 是接触耦合常数，$g_d^{3D} = \frac{4\pi\hbar^2}{m}a_{dd}$ 是偶极耦合常数。a_s 是三维s波散射长度，可通过Feshbach 共振进行调节。α 是相对位置矢量$\mathbf{r}$与极化轴之间的夹角。

然而，我们注意到，将二体相互作用表示为接触赝势与偶极-偶极相互作用势的简单叠加，实际上并非易事，并且一直存在广泛争议 [1, 23]。该表达式源于一阶玻恩近似 [24, 25], ，通常仅在偶极强度较弱且远离散射共振时有效。对于偶极相互作用较强的情况，当相对偶极强度 $\varepsilon_{\mathrm{dd}} = a_{dd}/a_s$ 较大时，可能需要对 a_{dd} 进行温度依赖修正 [26]。

1.2 超冷极性分子

超冷极性分子（KRb、NaRb 等）具有较大的电偶极矩；由于其偶极-偶极相互作用（DDI）更强且可调，它们为偶极原子提供了互补的研究平台。与磁偶极子不同，电偶极子可以通过外部电场或微波场诱导或控制，从而能够精确调节偶极相互作用强度。这些分子的电偶极矩可达数个德拜，其偶极-偶极相互作用可达到强相互作用区，具有 $na_{dd}^3 > 1$，从而能够实现偶极晶体等强关联态或其他奇异结构 [27, 28]。

超冷极性分子通常会遭受严重损失，无论它们是否具有化学反应性 [29, 30] ，这都会增加冷却和实现奇异多体态的难度。电场屏蔽 [34] 和微波屏蔽 [35, 36] 方面的近期进展，大幅提高了偶极分子之间的弹性碰撞率，使费米 [37, 38]和玻色分子 [39]能够通过蒸发冷却达到量子简并。对于处于量子简并区的稳定偶极分子，人们已研究了多种多体现象，例如二维简并费米气体中的巡游自旋动力学 [40] ，以及玻色气体中强相互作用的自束缚液滴 [41]。

2 三维阱中的偶极气体

2.1 偶极坍缩

各向异性偶极-偶极相互作用会根据囚禁几何形成稳定区域。在煎饼形几何中，沿强约束方向排列的偶极子彼此排斥，因此即使存在 $a_s < 0$ [42]，也能稳定系统。相比之下，在雪茄形阱中，偶极子沿轴向排列，吸引性偶极-偶极相互作用会使系统更容易发生坍缩。

当 a_s 在三维近球形谐振阱中被调至低于某个临界值时，平均场能量会变为负值，峰值密度则会急剧增加，直至三体损失占主导。这种情况会导致气体坍缩并发生动态爆炸 [43]。在铬玻色-爱因斯坦凝聚体中，爆炸后在飞行时间图像中观察到了三叶草图样，这反映了偶极相互作用的 d 波形状。

2.2 偶极量子液滴

对于具有强偶极-偶极相互作用的镝（Dy）和铒（Er），玻色-爱因斯坦凝聚体在某些参数区间内的行为显著偏离传统预期。当合成平均场相互作用（包括接触相互作用和偶极-偶极相互作用）变为负值时，通常会预期偶极玻色-爱因斯坦凝聚体发生坍缩。然而，系统并未坍缩，反而形成稳定的自束缚量子液滴 [44, 45]，甚至形成有序的液滴阵列 [46, 44]。这种出乎意料的稳定性源于超越平均场量子涨落，具体而言，是 Lee-Huang-Yang（LHY）修正发挥了稳定系统的关键作用 [47, 48]。短程相互作用混合物中也观察到了具有类似稳定机制的自束缚液滴（见第 8 章）。在通常条件下，LHY 修正相对较小，往往可以忽略。然而，在铒（Er）和镝（Dy）系统中，当平均场接触相互作用与偶极-偶极相互作用几乎相互抵消时（通常当 a_s 与 a_{dd} 相当时），LHY 项便占据主导地位。这种主导作用可防止系统发生严重三体损失，从而使液滴保持稳定。平均场相互作用与 LHY 修正之间的相互作用使这些液滴得以维持结构完整性，并展现出独特性质；如图 1 所示，这些性质已通过实验观测到。这些量子液滴代表了一种引人入胜的物质态，弥合了平均场动力学与量子涨落之间的差距。

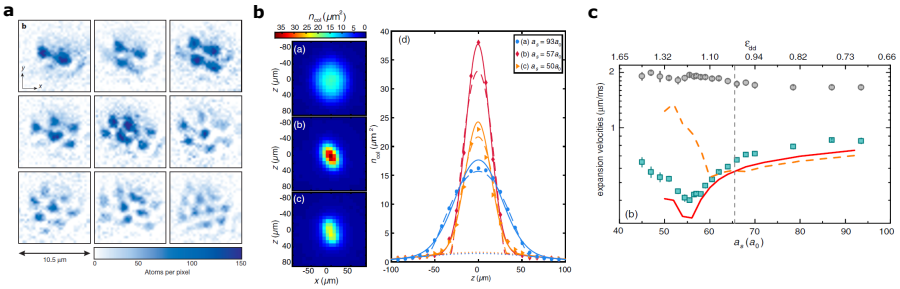

图 1 偶极量子液滴。**a** 薄饼形囚禁的镝气体形成的液滴阵列，其中偶极子垂直于紧束缚轴，改编自 [46]。**b** 磁场 B 沿细长阱方向排列时形成的单个宏观液滴。在玻色-爱因斯坦凝聚与量子液滴相之间的相变点附近，原子密度急剧增加（红线）。**c** 雪茄形阱中形成的宏观液滴的膨胀速度。玻色-爱因斯坦凝聚-液滴相变点附近的低谷体现了量子液滴的自束缚特性。**b** 和**c** 改编自 [45]。

2.3 元激发

偶极-偶极相互作用还会在偶极玻色-爱因斯坦凝聚体中引发新颖的多体效应，例如使集体激发的四极模发生频移 [49], ，如图 2a 所示。对式（1）进行傅里叶变换，可得动量空间中的相互作用：

$$V(\mathbf{k}) = \frac{4\pi\hbar^2}{m}\left[a_s + a_{dd}(3\cos^2\theta_k - 1)\right], \tag{2}$$

其中， θ_k 是动量方向与偶极子取向之间的夹角，由此得到元激发谱：

$$E(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{\hbar^2k^2}{2m}\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m} + 2nV(\mathbf{k})\right)}. \tag{3}$$

这种各向异性激发及相应的各向异性超流性分别通过布拉格光谱学 [50] 和临界超流速度[51], 得到观测，如图 2b 所示。

2.4 各向异性囚禁诱导的旋子谱

在均匀三维偶极玻色-爱因斯坦凝聚体中，激发能取决于相对动量的方向，而与动量的大小无关。沿偶极子方向引入各向异性囚禁后，激发谱会呈现出更引人注目的行为。偶极-偶极相互作用与陷阱中紧束缚方向的谐振子长度相互作用， l_z 导致沿 k方向的范数依赖性

沿非束缚方向：

$$V(k) \sim ng_c \left[1 + \varepsilon_{\mathrm{dd}} F\left(\frac{kl_z}{\sqrt{2}}\right)\right], \tag{4}$$

其中，$F(x) = 2 - 3\sqrt{\pi} x e^{x^2} \mathrm{erfc}(x)$ 是一个单调递减函数。它从 $F(0) = 2$ 迅速下降至 $F(1) \sim 0$，最终在 $\lim_{x\to\infty}$ 时渐近趋近于 -1。当偶极-偶极相互作用足够强且偶极子沿紧束缚轴排列时，非束缚方向上会形成非单调的色散关系，并在有限动量处呈现一个局部最大值（最大子）和一个局部最小值（旋子），这与超流液氦中观察到的现象相同。这一效应源于当 $kl_z \gg 1$ 时，偶极-偶极相互作用会变为吸引相互作用（也可从 $V(\mathbf{k})$ 中看出）。旋子极小值的位置与紧密束缚方向的谐振子长度 $k_{\mathrm{rot}} \propto 1/l_z$ [52] 成比例。通过增加 $\varepsilon_{\mathrm{dd}}$ 或密度，可以降低旋子能隙 Δ。当 $\Delta = 0$ 时，原子可以自发占据旋子模 k_{rot}，而无需额外能量。

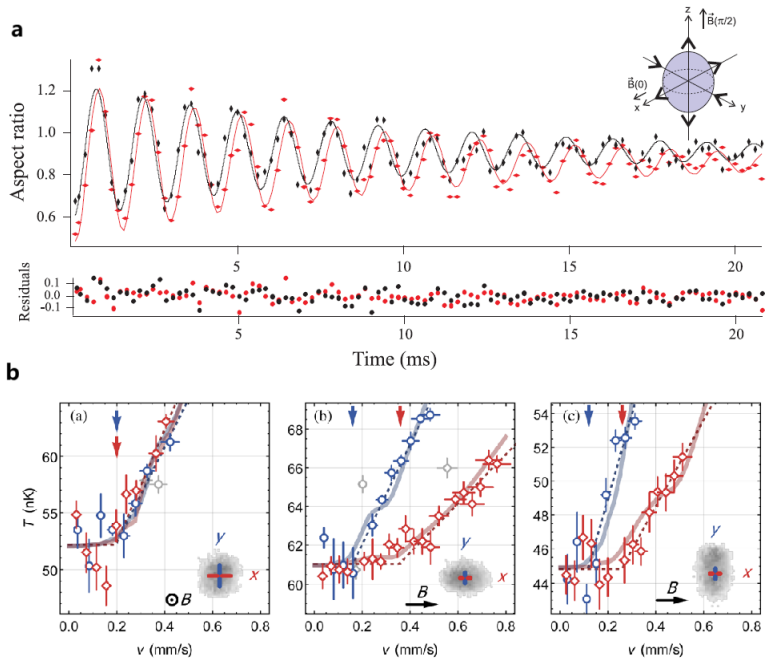

图 2 偶极气体的各向异性元激发。**a** 铬气体在两种互相垂直的偶极取向下，四极模频率的差异，改编自 [49]。插图展示了三维四极模示意图，该模可通过长宽比沿 y 轴和 z轴的振荡观测到。磁场沿 z轴（对应数据以黑色表示）或沿 x 轴（数据以红色表示）。下方面板显示正弦拟合的残差，以实线表示。**b** ^{162}镝玻色-爱因斯坦凝聚中的超流临界速度因各向异性偶极-偶极相互作用而呈现各向异性，改编自 [51]。

[53], 从而形成旋子不稳定性。如图 3 [53, 54]所示，在细长雪茄形陷阱几何中的铒玻色-爱因斯坦凝聚体中，通过布拉格谱观测到了旋子激发谱。随着系统趋近旋子不稳定性（$E(k_{\mathrm{rot}}) \approx 0$），$k_{\mathrm{rot}}$处的密度-密度关联增强，表明系统有结晶的趋势 [55]。

2.5 超固体

在偶极玻色-爱因斯坦凝聚体中，旋子不稳定性会导致旋子模在k_{rot}处被占据，从而在超流背景上产生空间周期为 $\sim 2\pi/k_{\mathrm{rot}}$ 的密度调制，如图4所示。这种平移对称性和 $U(1)$对称性的自发破缺，表明一种长期以来备受预测的超固态 [57, 58,59]。超出平均场理论的 LHY 项再次发挥重要作用，防止密度峰无限增高。超固相也可以理解为浸没在玻色-爱因斯坦凝聚背景中的液滴阵列，这些液滴通过粒子交换共享一个全局相位，因此同时破坏 U(1)规范对称性。偶极晶体超固性的几个关键特征已得到证实，包括全局相干性 [58],相位刚度 [60],以及两种对称性的同时破缺 [61]。人们进一步研究了超固体中的密度涨落 [55, 62] , 超流分数[63, 64]和量子化涡旋 [65] ，从而全面认识了三维偶极超固体。

通过调节囚禁几何和原子数，可以形成超越一维阵列、结构更复杂的超固体。在偶极子沿轴向排列的扁圆形陷阱中，曾观测到具有锯齿形或六角形结构的超固体

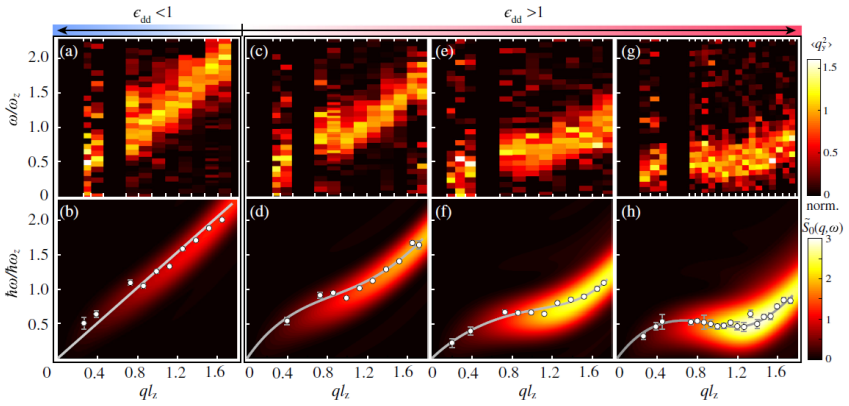

图 3 不同 $\varepsilon_{\mathrm{dd}}$ 下细长偶极气体的激发谱。上排展示了布拉格光谱学的实验数据，下排给出了提取出的激发谱 $\varepsilon(q)$（白点）和模拟的结构因子。两个面板均展示了 $\varepsilon_{\mathrm{dd}} > 1$ 时的旋子行为，此时偶极-偶极相互作用占主导，改编自 [54]。实线表示改编自 [56] 的解析曲线。

。我们注意到，这些超固体具有二维结构，但强约束始终约为 100 Hz，因此波函数仍然是三维的。这些具有二维结构的超固态的超流性，仍可归因于量子统计驱动的玻色-爱因斯坦凝聚，而超固体与二维超流体之间的相互作用尚未得到探讨 [68]。旋子的形成本质上取决于正项 $\hbar^2k^2/2m + 2ng_c(1+2\varepsilon_{\mathrm{dd}})$ 与负项 $-3ng_d\sqrt{\pi}(kl_z)e^{(kl_z)^2}\mathrm{erfc}(kl_z)$ 之间的竞争；前者描述动能和有效短程相互作用，后者则刻画了受限几何中偶极-偶极相互作用的长程特性；它们共同决定激发能 $E(k) = \sqrt{\frac{\hbar^2k^2}{2m}\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m} + 2nV(k)\right)}$，其中 $V(k)$ 由公式 (4) 给出。选择“厚实”的扁圆形或冲浪板形陷阱，只是因为相对较大的 l_z 使 $E(\mathbf{k}_{\mathrm{rot}})$ 更容易在 $k_{\mathrm{rot}}l_z \sim 1$ 作用下软化至 0。出于同样的原因，在严格的准二维区域（其中 l_z 小于愈合长度 ξ）形成超固体，通常需要极大的原子数（二维密度）或偶极强度 [69, 70], ；在当前实验条件下，这些要求无法实现，因此迄今尚未观测到这类超固体。

3 二维偶极气体

超冷费米分子已被排列在二维陷阱中，以展示具有排斥性偶极-偶极相互作用 [37] 的碰撞稳定气体，并研究巡游自旋动力学 [40]。二维约束会产生偶极屏蔽效应，从而抑制偶极弛豫 [71]。在层间距为 50 nm 的双层偶极系统中，已观测到两个二维偶极气体层之间的层间耦合 [72]。

与此同时，人们也在偶极-偶极相互作用（DDI）很强的系统中研究了 Berezinskii-Kosterlitz-Thouless（BKT）相变；它是二维超流性的标志性特征。BKT 相变最初是在二维偶极激子中观测到的，其中偶极子取向

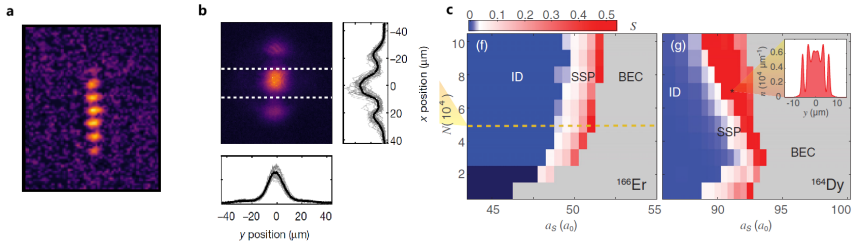

图4 细长偶极气体中出现的超固性。**a.** 细长阱中超固体的原位 图像，其中呈现出明显的密度调制。**b.** 由**a**中超固体样品形成的飞行时间干涉图样。经平均后，单轴调制反映了原始样品的相干性。**a** 和**b** 均改编自 [66]。**c.** 细长阱中铒和镝气体的相图。随着 a_s 减小，气体从玻色-爱因斯坦凝聚转变为超固态（SSP），最终变为绝缘液滴（ID），改编自 [59]。

垂直于限制平面 [73, 74]。最近，人们利用超冷铒原子实现了偶极取向完全可控的二维偶极超流体 [75]。这一观测证实了蒙特卡洛计算的预测 [76, 77]。这些发现不仅验证了理论模型，也为在超冷偶极系统中探索新奇量子相铺平了道路，例如各向异性超流体、奇异的涡旋动力学以及可能存在的超固体。

3.1 二维偶极气体中的相互作用

3.1.1 纯二维偶极气体中的相互作用

在考察囚禁于准二维囚笼中的偶极原子之前，先考虑质量为 m 、在 $x-y$ 平面内运动且仅通过偶极-偶极相互作用相互作用的偶极子，这很有启发性。外加磁场（或电场）在 $y-z$ 平面内将所有偶极子极化至同一方向，该方向与 z 轴的夹角为 θ 。偶极子之间的二体相互作用 i， j 可写为

$$V(\mathbf{r}) = \frac{C_{dd}}{4\pi}\frac{1-3\sin^2\theta\cos^2\phi_{ij}}{r_{ij}^3}, \tag{5}$$

其中，(r_{ij}, ϕ_{ij}) 是 $\mathbf{r}ij$, $C_{dd} = d^2/\epsilon_0(\mu_0\mu^2)$ 的极坐标，分别对应电（磁）偶极子。特征偶极长度定义为 $r_d = mC_{dd}/(4\pi\hbar^2)$。仅存在偶极-偶极相互作用时，有一个临界角 $\theta_c = 35。3°$ 超过该角度，系统就会变得不稳定。因为当 $\theta_c > 35。3°$时，两个以 $\phi_{ij} = 0°$ 相互靠近的偶极子之间存在吸引相互作用，从而在纯二维几何中形成束缚态。

相互作用是否具有长程性，取决于我们所考虑的问题以及维度 [3]。在纯二维几何结构中，当偶极强度较弱时，偶极-偶极相互作用属于边界性的短程相互作用，偶极子之间的二体散射可以用 s 波散射以及二维散射长度$a_s = \frac{e^{2\gamma}}{2}(3\cos^2\theta-1)r_d$ [78]进行良好近似，其中 $\gamma \approx 0.57721...$ 是欧拉常数。在 $na_s^2 \ll 1$的稀薄区，有效硬盘模型足以在多体层面准确描述系统性质，同时保持每个粒子能量的普适标度性质 [78]。当系统进入强相互作用区（$nr_d^2 > 1$）时，偶极-偶极相互作用的长程性质开始显现，旋子谱开始形成，并出现结晶倾向 [79]。

3.1.2 准二维偶极气体中的相互作用

与纯二维区域相比，准二维区域在超冷原子实验中更为常见。当偶极气体满足准二维条件时——沿 z 方向的波函数被冻结为高斯分布，其振子长度为

$l_z = \sqrt{\hbar/m\omega_z}$——由于 a_{dd}， $a_s \ll l_z$，粒子间相互作用势仍可按三维形式处理。

假设所有偶极子均相对于 z 轴极化，角度为 θ，并朝向 y 轴倾斜，则式 (1) 可写为:

$$V(\mathbf{r}) = g^{3D}\delta(r) + \frac{3g_d^{3D}}{4\pi}\frac{1 - 3z^2\cos^2(\theta)/r^2 - 3y^2\sin^2(\theta)/r^2}{r^3}, \tag{6}$$

其中 $g_d^{3D} = \frac{4\pi\hbar^2}{m}a_{dd}$， θ 是偶极子与 z 轴在$x-y$平面内的夹角，$\mathbf{r} = (x, y, z)$ 是相对位置矢量， $r = |\mathbf{r}|$，如图 5 所示。经过傅里叶变换后，

$$V(\mathbf{q}) = \int d^3x e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}V(\mathbf{r}), \tag{7}$$

我们得到

$$V(\mathbf{q}) = g^{3D} + g_d^{3D}\left[\frac{3q_z^2\cos^2(\theta) + 3q_y^2\sin^2(\theta)}{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2} - 1\right]. \tag{8}$$

在上述表达式中，$\mathbf{q}$ 是三维的。在实验中，系统通过谐振阱在 z 方向受到紧密约束，因此将 $V(q)$的一个标签转换为谐振标签 n 和 n'较为方便。我们定义

$$\tilde{V}(\mathbf{k}; n, n') \equiv \int \frac{dq_z}{(2\pi)}|\phi_n|^2|\phi_{n'}|^2V(\mathbf{q}), \tag{9}$$

其中 $\mathbf{k}$ 表示该矢量只有二维。当满足准二维条件时，我们采用单模近似，只考虑基态中的相互作用。在动量空间表示中，

$$|\phi_0|^2(q_z) = \exp\left(-\frac{1}{4}q_z^2l_z^2\right), \tag{10}$$

thus

$$\begin{aligned}\tilde{V}(\mathbf{k}; 0, 0) &= \int \frac{dq_z}{(2\pi)}\exp\left(-\frac{q_z^2l_z^2}{2}\right)V(\mathbf{q}) \\ &= \frac{(g^{3D} - g_d^{3D} + 3\cos^2\theta g_d^{3D})}{\sqrt{2\pi}l_z} + \frac{3}{2}g_d^{3D}ke^{k^2l_z^2/2}\mathrm{erfc}(kl_z/\sqrt{2})\left[\frac{k_y^2\sin^2\theta}{k^2} - \cos^2\theta\right].\end{aligned} \tag{11}$$

重新定义接触二维耦合常数 $g_c = \sqrt{8\pi}\hbar^2a_sm/l_z$ 和偶极二维耦合常数 $g_d = \sqrt{8\pi}\hbar^2a_{dd}/ml_z$ 后，我们有

$$V(\mathbf{k}) = g_{\mathrm{eff}} + 3g_dG(kl_z/\sqrt{2})\left[\frac{k_y^2\sin^2\theta}{k^2} - \cos^2\theta\right], \tag{12}$$

其中 $G(q) \equiv \sqrt{\pi} q e^{q^2}$互补误差函数$(q)$， $g_{\text{eff}} = g_c + g_d(3\cos^2\theta - 1)$，而 erfc 表示互补误差函数。当 $q = 0$ 时，函数 $G(q)$ 为零；当 $q \gg 1$时，其渐近趋近于 1。

从 $V(\mathbf{k})$ 可以看出，二维中的总相互作用可分解为各向同性的局域部分和各向异性的非局域部分。局域部分 $g_{\text{eff}} = g_c + g_d(3\cos^2\theta - 1)$ 包含接触相互作用和偶极-偶极相互作用短程部分的贡献，其中后者含有有效接触相互作用项。依赖于动量的项 $3g_d G(kl_z/\sqrt{2})\left[k_y^2 \sin^2\theta/k^2 - \cos^2\theta\right]$ 是偶极-偶极相互作用的长程部分，当 $\mathbf{k} = 0$ 时该项消失。具体而言， $-3g_d G(kl_z/\sqrt{2})\cos^2\theta$ 在大动量下具有吸引性；当偶极子沿平面外方向排列时（$\theta < 90°$），这会使系统倾向于形成旋子谱。相反，$3g_d G(kl_z/\sqrt{2})k_y^2 \sin^2\theta/k^2$ 具有排斥性；当偶极子倾斜时，会产生各向异性的激发谱（$\theta > 0°$）。在零温均匀二维偶极凝聚体中，由于所有粒子都占据模式 $\mathbf{k} = 0$，系统恢复为平均场解 $\mu = g_{\text{eff}} n$。仅考虑偶极-偶极相互作用时，均匀二维偶极凝聚体的稳定边界由 $g_d(3\cos^2\theta - 1) > 0$ 给出，对应的临界角为 $\theta_c = 54.7°$，这与纯二维条件 [80] 不同。当外部谐振阱或涡旋、孤子等结构引起密度非均匀性时，偶极-偶极相互作用的非局域项便可能显现出来 [81, 82, 83]。

一般而言，随着l_z 减小，DDI的短程特性会变得更加显著。考虑在 $l_z \to 0$ 极限下从准二维区制到纯二维区制的跨越，旋子形成的机制会发生变化。具体而言，准二维中的旋子谱源于短距离处的吸引相互作用，而纯二维中的旋子谱则源于强排斥相互作用 [84]所导致的短程有序。

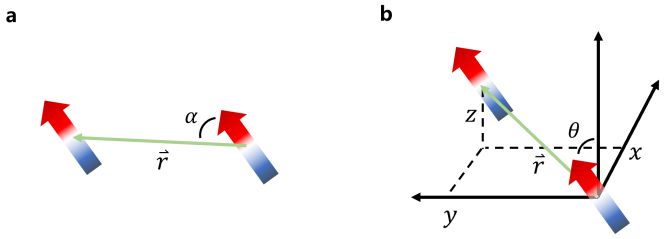

图 5 a. 对于两个极化偶极子，偶极-偶极相互作用由偶极取向与相对位置**r**之间的夹角 α 决定，如公式 (1) 所示。**b.** 考虑两个偶极子在 $y-z$ 平面内相对于 z 轴以角度 θ 极化，则有 $\cos^2\alpha = z^2\cos^2\theta/r^2 + y^2\sin^2\theta/r^2$。

3.2 二维偶极玻色气体中的 Berezinskii-Kosterlitz-Thouless（BKT）相变

BKT跃迁是一种由相互作用驱动的无限阶超流跃迁，发生在有限温度下的二维系统中，且不会伴随连续对称性破缺。这使其有别于三维中的统计驱动的BEC跃迁，后者会破坏U(1)规范对称性。在二维接触相互作用气体中，BKT跃迁已通过实验观测并得到研究 [85, 86, 87, 88, 89]。

一个更引人入胜的问题是，在有限温度下，二维偶极气体中的超流性如何涌现 [76]。这些系统具有会诱导各向异性的长程偶极相互作用 [77]。人们已开发出多种理论模型来研究二维偶极气体，考察稳定性 [90] 和普适性 [91]等方面。Hartree-Fock平均场方法和零温扩展 Gross-Pitaevskii 方程（eGPE）常被用于研究热区和深超流区间。然而，要在有限温度下准确研究 BKT临界点，需要纳入超越平均场关联 [92, 93]。

3.2.1 有限温度下（准）二维偶极气体的模拟

处理有限温度系统的一种有效方法是蒙特卡罗模拟。在纯二维区制下，路径积分蒙特卡罗模拟（PIMC）预测偶极-偶极相互作用（DDI）会引发 BKT 跃迁 [76, 77]。在稀薄区$nr_d^2 \ll 1$，DDI 可视为一种短程相互作用，而 BKT 临界点可通过具有渐近表达式$a_s = \frac{e^{2\gamma}}{2}(3\cos^2\theta - 1)r_d$ [76, 77]的 s 波散射长度再现。当相互作用强度增大时，

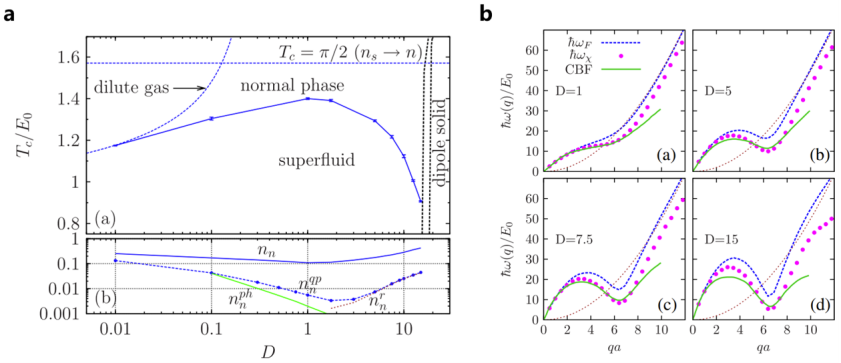

图 6 a. BKT临界温度随偶极强度变化呈非单调行为（数据点由实线连接）。 $D = nr_d^2$，由路径积分蒙特卡罗计算得出。**b.** 不同偶极强度下的激发谱 D。在强相互作用区出现旋子谱，旋子极小值的出现恰好与图 6a 中临界温度的转折点相吻合。改编自参考文献 [76]。

超流相首先稳定下来，随后趋于形成偶极晶体，此时超流密度消失，如图 6a 所示。超流体跃迁的临界温度呈现非单调变化。图 6b 展示了不同偶极强度下的激发谱；当 $D > 1$ 时，旋子-麦克森谱随之出现。图 6a 中的最高跃迁温度出现在 $D = 1$，这与激发谱中出现旋子极小值相吻合。

采用Popov近似的哈特里-福克-博戈留博夫方法（HFBP）[94,95] 提供了另一种途径，将有限温度效应和超越平均场效应都纳入准二维偶极气体的研究中。当偶极子发生倾斜时，这种HFBP方法揭示了二维偶极玻色气体中的各向异性相位-相位关联和压缩率。尽管取得了这些进展，但对于准二维偶极气体中的BKT跃迁点，尚未作出理论预测。

3.2.2 偶极BKT超流体

在准二维区域中，已观测到同时具有接触相互作用和偶极-偶极相互作用的弱相互作用偶极气体中的BKT跃迁 [75]。在 $\varepsilon_{dd} \sim 0.5$处局域相互作用占主导时，研究表明，偶极-偶极相互作用通过充当有效接触相互作用参与了BKT跃迁。当 θ 从 0° 调节至90°时，原子云几乎各向同性地收缩，这与由方程（12）定义的各向同性 g_{eff} 的减小相一致（图7a）。通过监测动量空间中相干性的出现，研究表明，偶极倾角 θ 会使超流体跃迁点发生偏移；这一现象可由局域耦合 g所预测的BKT跃迁点近似描述，其中 $g_{\text{eff}}(\theta)$是 θ 的函数（图7b）。这一角度依赖的跃迁点观测结果与路径积分蒙特卡罗计算 [77]一致。在偶极BKT超流体中，当偶极子主要倾斜至二维平面内时，会出现各向异性的原子数涨落，表明存在各向异性的密度-密度关联 [75, 96]。

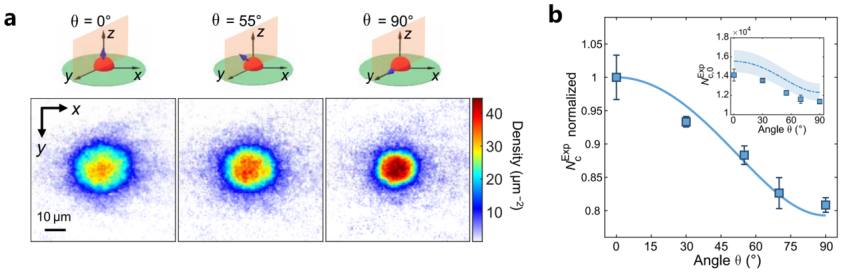

图 7 a. 原位 铒原子二维偶极超流体的图像，其中 $\varepsilon_{dd} = 0。47$。**b.** BKT跃迁临界原子数相对位移随偶极取向 θ的变化。实线表示局域耦合 $\tilde{g}_{\text{eff}}(\theta)$所预测的临界温度随 θ [92]的变化。插图为实验测得的绝对临界原子数。改编自文献 [75]。

3.3 二维强偶极区

当偶极相互作用占主导时（例如 $\epsilon_{dd} \simeq 1$），它们如何改变二维接触相互作用气体的内禀性质仍不清楚。这些性质包括尺度不变性及其相关的集体激发，以及具有不稳定性的能谱。此外，在这种强偶极二维情况下，BKT情景是否仍适用于超流性也尚不确定。在这些条件下，涡旋配对动力学和拓扑相变同样存在疑问。尤其令人感兴趣的是偶极子发生倾斜时可能出现的情景，这有可能导致超固相的形成。

3.3.1 尺度不变性

尺度不变性是二维量子气体的一种宏观性质，源于低能原子散射中不依赖长度尺度的经典场描述 [97]。这种尺度不变行为已在二维 BKT超流体中得到观测 [86, 98]。然而，当必须考虑相互作用的细节时，这种性质便会失效，强相互作用二维费米气体就是一例 [99, 100]。

在二维偶极气体中，即使处于弱相互作用区，偶极-偶极相互作用的非局域性也会引入一个额外的、依赖$\mathbf{k}$的项，如式（11）所示。因此，在偶极-偶极相互作用显著的二维气体中，尺度不变性应不再成立。尽管对二维 BKT超流体和二维汤斯孤子的实验研究表明，其偏离尺度不变行为的程度很小 [75, 83], ，但预期偶极-偶极相互作用更强的二维偶极气体（$\varepsilon_{\mathrm{dd}} \gtrsim 1$）会破坏这种标度对称性；更一般地说，还会破坏谐振阱中的共形SO(2,1)对称性 [101]。对于二维谐振阱中的接触相互作用气体，。正如参考文献 [102, 103] 中的研究所提出的，这种由偶极-偶极相互作用诱导的性质可用于早期宇宙的模拟。集体激发可作为表征强偶极二维系统的多用途工具，类似于二维接触相互作用气体中的情况 [99, 100, 104]。因此，集体激发的行为——无论是遵循尺度不变性还是偏离尺度不变性——对于理解这些系统都至关重要。最近，通过测量单极模频率，研究人员在偶极子倾斜的强偶极铒二维超流体中观测到了尺度不变性的破缺 [105]。

3.3.2 不稳定性

当稀薄二维偶极凝聚体中的 $g_{\mathrm{eff}} = g_c + g_d(3\cos^2\theta - 1)$ 为足够大的正值时，系统处于稳定的超流区，尤其是在偶极子垂直于二维平面 [106] 的情况下。在平均场层次上，可以评估均匀二维偶极凝聚体中不稳定性的产生。显然，通过在保持偶极子垂直于二维平面的同时将 g_c 降低至负值，或在 $\varepsilon_{\mathrm{dd}} \gtrsim 1$ 的强偶极区内倾斜偶极子，都可以使 g_{eff} 接近零，甚至低于零。当 g_{eff} 为正值但

接近零时，由于来自偶极-偶极相互作用 [80] 的吸引性非局域尾部 $-3ng_d\sqrt{\pi}(kl_z)e^{(kl_z)^2}\mathrm{erfc}(kl_z)\cos^2\theta$，系统可能进入带有 $\theta < 90°$ 的旋子不稳定区。当 $g_{\mathrm{eff}} < 0$ 时，系统进入声子不稳定区 [80]。倾斜偶极子使系统进入旋子不稳定区时，各向异性激发谱只会在垂直于倾斜方向的方向上产生旋子极小值，从而触发平行条纹的结晶。这一机制可能是实现稀薄区二维超固态的候选方案。进入声子不稳定区后，条纹会发生位错并失去晶体有序性 [80]。

3.4 二维超固体

近年来的进展促成了超固体的实验实现：在三维体系中，量子液滴在细长或平面阱中形成，并保持相干性。这一现象通常被理解为浸没在玻色-爱因斯坦凝聚背景中的液滴阵列 [57, 58, 59]。然而，这些研究主要聚焦于具有三维波函数的高维体系。

另一种途径是利用倾斜偶极子在二维系统中引入相对于旋转对称性的各向异性，以此探索在偶极量子气体中诱导超固性的互补机制。这种方法提供了偶极倾斜角这一额外控制参数，为探索超固体开辟了新路径。然而，超固性与二维超流体共存的现象尚未被观测到 [107]。

3.4.1 强相互作用偶极晶体与条纹

如果所有偶极子都垂直于二维平面对齐，它们就会相互排斥，并能自发排列成三角晶格，前提是

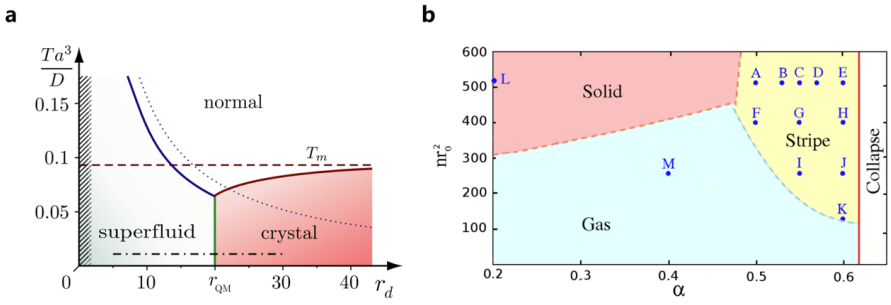

图 8 a. 偶极子垂直于二维平面时，有限温度下二维偶极玻色子的相图。引自文献 [27]。**b.** 倾斜偶极子下二维偶极玻色子的零温相图。引自文献 [108]。

偶极-偶极相互作用足够强 [27]。如图 8a 所示，随着温度升高或偶极相互作用强度降低，晶体会熔化。这种强关联量子相需要在低温下具有极大的偶极矩，目前尚未被观测到。超冷偶极分子中有可能实现如此强的偶极相互作用 [39]。

在强相互作用区，当偶极子倾斜超过临界角时，理论预测该系统的基态会形成二维偶极条纹，如图 8b 所示 [108]。可以看到，倾斜偶极子后，与形成固体晶体相比，气相到条纹晶体的相变所需的偶极矩更小。

新近制备的具有强偶极-偶极相互作用 [39]的偶极分子玻色-爱因斯坦凝聚体，有望实现这种二维偶极晶体。与此同时，这种二维偶极晶体能否同时呈现超流性并成为超固体，仍存在争议 [77, 109]。

3.4.2 准二维区域中的超固体研究

为了在超冷原子实验中研究与BKT现象相关的二维物理，需要满足准二维条件 $\hbar\omega_z > \mu$ 和 $\hbar\omega_z > k_B T$ [68]。在这一条件下，原子沿 z方向仅占据谐振子的基态，量子统计驱动的玻色-爱因斯坦凝聚相变被相互作用驱动的BKT相变取代。然而，谐振长度 l_z 变得极小，使旋子难以形成。尽管理论预测，在偶极子垂直于二维平面的准二维系统中存在超固态 [69, 70], , 但要实现旋子软化并进入不稳定区域，通常需要很高的原子密度。目前的二维磁性原子实验难以达到这些条件。因此，所有利用磁性原子研究超固体性质的实验，都是在波函数动力学为三维的条件下完成的。

近期的预测表明，在准二维区域，采用倾斜偶极子和额外的短程相互作用核，可以显著降低接近旋子不稳定性所需的临界参数，包括相互作用强度和密度 [110, 111, 112]。这一降低使得在稀薄气体中观测二维超固体成为可能。当偶极子相对于法线方向倾斜角度 θ 时， $F(x)$ 变为 $(3\cos^2\theta - 1) - 3\cos^2\theta\sqrt{\pi x}e^{x^2}\operatorname{erfc}(x)$。直观的解释是，当偶极子相对于法线方向的倾角超过魔角 $\theta \approx 54.7°$ 时，偶极-偶极相互作用（DDI）的常数项变为负值。这一负分量部分抵消了排斥性的接触相互作用，降低了 g_{eff}，使有限 $\mathbf{k}$ 下的旋子不稳定性成为可能。这一机制凸显了偶极倾角 θ 是在二维偶极系统（包括磁性原子 [110, 111, 112]）中实现超固态的关键调控参数。

4 展望

随着我们深入探索偶极量子系统，多个研究方向上涌现出许多令人振奋的可能性。偶极相互作用具有独特性质——长程、各向异性且可调控——使这些系统成为探索基础物理以及模拟新颖量子现象的卓越平台。与此同时，未来的研究仍面临一些有待克服的实验挑战。

二维中的奇异量子态 二维偶极超流体是探索奇异量子物态的多功能平台，可用于研究各向异性涡旋核、各向异性涡旋间相互作用 [82],以及稳定的二维亮孤子 [113]等现象。此外，它还支持形成具有多样晶体图样的二维超固体 [69, 70, 107, 111]。在偶极子倾斜朝向平面的二维偶极超流体中，理论预测揭示了独特的各向异性相位-相位关联和密度-密度关联，为新颖的量子行为提供了见解 [95, 96]。另一个值得关注的方向是研究超流湍流；在准二维囚笼中，倾斜偶极子诱导的非热固定点附近可能会出现反常的标度行为 [114]。

宇宙学量子模拟 可调原子系统使研究人员能够通过受控实验探讨各种宇宙学问题 [115, 116],，克服重现宇宙初始条件的传统难题。除了准二维系统中的接触相互作用，偶极相互作用还提供了模拟类比引力现象的独特机会，同时能够灵活调控色散关系 [117]。人们已在偶极二维系统中研究超普朗克色散 [118, 119], 而且在不久的将来似乎有望实现。

强偶极分子通过 Feshbach 共振将两个磁性原子配对，可以制备出具有较大永久磁矩的强偶极分子，例如由玻色铒原子 [120]形成的 Er_2 。与超冷极性分子类似，这些偶极分子在二维几何结构中的损失率显著降低，因此有望用于观测新型量子相，包括含有未极化偶极子的量子相。

二维超固体如今，利用磁性原子和极性分子，在实验上探索二维超固体似乎已触手可及。借助倾斜偶极子所体现的偶极-偶极相互作用的各向异性，条纹型超固体是否会在特定参数下出现，仍是一个值得探究的开放问题。一个引人入胜的问题是，二维超固体如何能够同时呈现准长程超流序和准晶序，并自发地同时打破两种对称性；这一现象有望通过实验测量。另一个有趣的开放问题是，在存在涡旋-位错缺陷时，超固态如何熔化。

冷原子平台或许能提供独特的机会，直接揭示这些熔化转变，从而回答两个分别与超流性和结晶性相关的熔化过程究竟是相互锁定还是彼此独立。

实验挑战要研究二维强偶极 BKT 超流体中的相干性和激发，盒式势 [121, 122, 123] 对于创造热力学研究所需的均匀条件至关重要。例如，这种尺寸可调的均匀系统使我们能够研究超固体等奇异相趋近热力学极限时的标度行为，这对于理解真实的相变至关重要。由于镧系原子的 Feshbach 共振密集，且蓝光波长范围内的跃迁较宽，实现远蓝失谐光并不像碱性原子那样直接。最近，研究人员已在镝原子中实现了蓝失谐俘获 [124]。

致谢

本文将作为一章收录于 Spring 图书《短程与长程量子原子平台——理论与实验进展》中，该书由 P. G. Kevrekidis、C. L.Hung 和 S. I. Mistakidis 编辑。G.-B.J 感谢戈登与贝蒂·摩尔基金会通过拨款 DOI 10.37807/GBMF13794 提供的支持。

参考文献

1. T Lahaye、C Menotti、L Santos、M Lewenstein 和 T Pfau。偶极玻色量子气体的物理。《物理学进展报告》，72(12):126401，2009年。2. Fabian B¨ottcher、Jan-Niklas Schmidt、Jens Hertkorn、Kevin S H Ng、Sean D Graham、Mingyang Guo、Tim Langen 和 Tilman Pfau。通过精细调控相互作用实现的新物态：量子液滴与偶极超固体。《物理学进展报告》，84(1):012403，2020年12月。3. Lauriane Chomaz、Igor Ferrier-Barbut、Francesca Ferlaino、Bruno Laburthe-Tolra、Ben- jamin L Lev 和 Tilman Pfau。偶极物理：磁性量子气体实验综述。《物理学进展报告》，2022年。4. Axel Griesmaier、J¨org Werner、Sven Hensler、J¨urgen Stuhler 和 Tilman Pfau。铬的玻色-爱因斯坦凝聚。《物理评论快报》，94(16):160401，2005年。5. Mingwu Lu、Nathaniel Q Burdick、Seo Ho Youn 和 Benjamin L Lev。强偶极镝玻色-爱因斯坦凝聚体。《物理评论快报》，107(19):190401，2011年。6. K Aikawa、A Frisch、M Mark、S Baier、A Rietzler、R Grimm 和 F Ferlaino。铒的玻色-爱因斯坦凝聚。《物理评论快报》，108(21):210401，2012年。7. Yuki Miyazawa、Ryotaro Inoue、Hiroki Matsui、Gyohei Nomura 和 Mikio Kozuma。铕的玻色-爱因斯坦凝聚。《物理评论快报》，129(22):223401，2022年。8. M Vengalattore、SR Leslie、J Guzman 和 DM Stamper-Kurn。偶极自旋玻色-爱因斯坦凝聚体中自发调制的自旋纹理。《物理评论快报》，100 170403，2008 17( ): 。9. M Vengalattore、J Guzman、SR Leslie、Friedhelm Serwane 和 DM Stamper-Kurn。简并 f= 1 rb 87 自旋玻色气体中的周期性自旋纹理。《物理评论*A*：原子、分子与光学物理》，81(5):053612，2010年。

10. J Guzman 和 G-B Jo。简并 f= 1 87 rb 自旋玻色气体中自旋纹理的长时间尺度动力学。《物理评论*A*：原子、分子与光学物理》，84 063625，2011 6( ): 。11. Cheng-An Chen 和 Chen-Lung Hung。二维物质波汤斯孤子中尺度不变性的观测。《物理评论快报》，127:023604，2021年7月。12. J¨urgen Stuhler、Axel Griesmaier、Tobias Koch、Marco Fattori、Tilman Pfau、Stefano Gio- vanazzi、Paolo Pedri 和 Luis Santos。在简并量子气体中观测到偶极-偶极相互作用。《物理评论快报》，95(15):150406，2005年。13. Holger Kadau Matthias Schmitt Matthias Wenzel Clarissa Wink Tilman Pfau Krzysztof Jachymski Paul Sebastian Julienne Thomas Maier、Igor Ferrier-Barbut。镝原子混沌谱中的宽广普适的费什巴赫共振。《物理评论*A*》，92(6):060702，2015年。14. Jens Ulitzsch、Daniel Babik、Roberto Roell 和 Martin Weitz。在准静电光学偶极阱中实现铒原子的玻色-爱因斯坦凝聚。《物理评论*A*》，95 043614，2017 4( ): 。15. E Lucioni、L Tanzi、Agata Fregosi、J Catani、Simona Gozzini、M Inguscio、Andrea Fioretti、C Gabbanini 和 G Modugno。具有宽广费什巴赫共振的镝偶极玻色-爱因斯坦凝聚体。《物理评论*A*》，97(6):060701，2018年。16. Thomas Chalopin、Vasiliy Makhalov、Chayma Bouazza、Alexandre Evrard、Adam Barker、Maxence Lepers、Jean-Franc،ois Wyart、Olivier Dulieu、Jean Dalibard、Raphael Lopes 等。远失谐偶极阱中镝原子互组线的各向异性光频移与魔幻偏振。《物理评论*A*》，98(4):040502，2018年。17. William Lunden、Li Du、Michael Cantara、Pierre Barral、Alan O Jamison 和 Wolfgang Ketterle。利用两级减速提高镝磁光阱的捕获速度。《物理评论*A*》，101(6):063403，2020年。18. Bojeong Seo、Ziting Chen、Mingchen Huang、Mithilesh K Parit、Yifei He、Peng Chen 和 Gyu-Boong Jo。制备 168 er 玻色–爱因斯坦凝聚体的装置。《韩国物理学会志》，82(9):901–906，2023年。19. Rui Song、Si-Hui Zhang、Wen-Min Liao、Jie Wang、Shu-Jin Deng 和 Hai-Bin Wu。168er 的偶极玻色–爱因斯坦凝聚及各向异性膨胀动力学。《物理学成果》，52:106795，2023年。20. Albert Frisch、Michael Mark、Kiyotaka Aikawa、Francesca Ferlaino、John L Bohn、Constanti- nos Makrides、Alexander Petrov 和 Svetlana Kotochigova。气相铒原子超冷碰撞中的量子混沌。《自然》，507(7493):475–479，2014年。21. Alex Patscheider、Lauriane Chomaz、Gabriele Natale、Daniel Petter、Manfred J Mark、Simon Baier、Bing Yang、RRW Wang、John L Bohn 和 Francesca Ferlaino。铒原子散射长度的测定。《物理评论*A*》，105(6):063307，2022年。22. Yijun Tang、Andrew Sykes、Nathaniel Q. Burdick、J ohn L. Bohn 和 Benjamin L. Lev。强偶极玻色子 ^{162}Dy 和 ^{164}Dy 的 *s*-波散射长度。《物理评论*A*》，92:022703，2015年8月。23. Lev Pitaevskii 和 Sandro Stringari。玻色-爱因斯坦凝聚与超流性，第164卷。牛津大学出版社，2016年。24. S Yi 和 L You。具有各向异性相互作用的受囚禁原子凝聚体。《物理评论*A*》，61(4):041604，2000年。25. S Yi 和 L You。具有偶极相互作用的受囚禁原子凝聚体。《物理评论*A*》，63(5):053607，2001年。26. Rafa l O ldziejewski 和 Krzysztof Jachymski。玻恩近似之外强偶极玻色气体的性质。《物理评论*A*》，94(6):063638，2016年。27. Hans Peter B¨uchler、Eugene Demler、Mikhail Lukin、Andrea Micheli、N Prokof'Ev、Guido Pupillo 和 Peter Zoller。冷极性分子中的强关联二维量子相：相互作用势形状的调控。《物理评论快报》，98 060404，2007 6( ): 。28. J Hertkorn、J-N Schmidt、M Guo、F B¨ottcher、KSH Ng、SD Graham、P Uerlings、T Langen、M Zwierlein 和 T Pfau。量子铁流体中的图案形成：从超固体到超玻璃。《物理评论研究》，3(3):033125，2021年。

29. S Ospelkaus, K-K Ni, D Wang, MHG De Miranda, B Neyenhuis, G Qu´em´ener, PS Juli- enne, JL Bohn, DS Jin, and J Ye. 超冷钾铷分子的量子态控制化学反应。《科学》，327(5967):853–857, 2010年。30. K-K Ni, S Ospelkaus, D Wang, G Qu´em´ener, MHG De Miranda, JL Bohn, and DS Jin. 量子区间内极性分子的偶极碰撞。《自然》，464 1328, 2010 7293 1324( ): – 。31. Xin Ye, Mingyang Guo, Maykel L Gonz´alez-Mart´ınez, Goulven Qu´em´ener, and Dajun Wang. 化学反应性受控的超冷23Na87Rb分子碰撞。《科学进展》，4(1):eaaq0083, 2018年。32. Mingyang Guo, Xin Ye, Junyu He, Maykel L Gonz´alez-Mart´ınez, Romain Vexiau, Goulven Qu´em´ener, and Dajun Wang. 超冷基态玻色分子的偶极碰撞。《物理评论*X*》，8(4):041044, 2018年。33. Philip D Gregory, Matthew D Frye, Jacob A Blackmore, Elizabeth M Bridge, Rahul Sawant, Jeremy M Hutson, and Simon L Cornish. 超冷RbCs分子的黏滞碰撞。《自然-通讯》，10(1):3104, 2019年。34. Kyle Matsuda, Luigi De Marco, Jun-Ru Li, William G Tobias, Giacomo Valtolina, Goulven Qu´em´ener, and Jun Ye. 利用电场对活性分子进行共振碰撞屏蔽。《科学》，370(6522):1324–1327, 2020。35. Tijs Karman and Jeremy M Hutson. 超冷极性分子的微波屏蔽。《物理评论快报》，121(16):163401, 2018年。36. Lo¨ıc Anderegg, Sean Burchesky, Yicheng Bao, Scarlett S Yu, Tijs Karman, Eunmi Chae, Kang-Kuen Ni, Wolfgang Ketterle, and John M Doyle. 观测到超冷分子的微波屏蔽。《科学》，373(6556):779–782, 2021年。37. Giacomo Valtolina, Kyle Matsuda, William G Tobias, Jun-Ru Li, Luigi De Marco, and Jun Ye. 将活性分子偶极蒸发至低于费米温度。《自然》，588(7837):239–243, 2020。38. Andreas Schindewolf, Roman Bause, Xing-Yan Chen, Marcel Duda, Tijs Karman, Immanuel Bloch, and Xin-Yu Luo. 将微波屏蔽极性分子蒸发至量子简并。《自然》，607(7920):677–681, 2022。39. Niccolo Bigagli, Weijun Yuan, Siwei Zhang, Boris Bulatovic, Tijs Karman, Ian Stevenson, and Sebastian Will. 观测到偶极分子的玻色–爱因斯坦凝聚。《自然》，631(8020):289–293, 2024年。40. Jun-Ru Li, Kyle Matsuda, Calder Miller, Annette N Carroll, William G Tobias, Jacob S Higgins, and Jun Ye. 极性分子的可调控巡游自旋动力学。《自然》，614(7946):70–74, 2023。41. Siwei Zhang, Weijun Yuan, Niccol`o Bigagli, Haneul Kwak, Tijs Karman, Ian Stevenson, and Sebastian Will. 观测到超冷偶极分子的自束缚液滴。*arXiv*预印本 *arXiv:2507.15208*，2025。42. Tobias Koch, Thierry Lahaye, Jonas Metz, Bernd Fr¨ ohlich, Axel Griesmaier, and Tilman Pfau. 使纯偶极量子气体免于坍缩的稳定化。《自然·物理》，4 222，2008 3 218( ): – 。43. Elizabeth A Donley, Neil R Claussen, Simon L Cornish, Jacob L Roberts, Eric A Cornell, and Carl E Wieman. 塌缩与爆炸的玻色–爱因斯坦凝聚体的动力学。《自然》，412(6844):295–299, 2001。44. Matthias Schmitt, Matthias Wenzel, Fabian B¨ottcher, Igor Ferrier-Barbut, and Tilman Pfau. 稀薄磁性量子液体的自束缚液滴。《自然》*style>，539(7628):259–262, 2016。45. L Chomaz, S Baier, D Petter, MJ Mark, F Wachtler, Luis Santos, and F Ferlaino.* 量子涨落驱动偶极量子流体从稀薄玻色-爱因斯坦凝聚体向宏观液滴的跨越。《物理评论*X*》，6(4):041039, 2016。46. Holger Kadau, Matthias Schmitt, Matthias Wenzel, Clarissa Wink, Thomas Maier, Igor Ferrier-Barbut, and Tilman Pfau. 观测到量子铁磁流体的罗森威格不稳定性。《自然》，530(7589):194–197, 2016。47. Tsin D Lee, Kerson Huang, and Chen N Yang. 硬球玻色系统的本征值和本征函数及其低温性质。《物理评论》，106 1135，1957年 6( ): 。

48. TD Lee and CN Yang. 量子力学和量子统计力学中的多体问题。《物理评论》，105(3):1119, 1957年。49. G Bismut, B Pasquiou, E Mar´echal, P Pedri, L Vernac, O Gorceix, and B Laburthe- Tolra. 偶极玻色-爱因斯坦凝聚体的集体激发。《物理评论快报》，105(4):040404, 2010年。50. G Bismut, B Laburthe-Tolra, E Mar´echal, P Pedri, O Gorceix, and L Vernac. 偶极量子玻色气体的各向异性激发谱。《物理评论快报》，109 155302，2012年 15( ): 。51. Matthias Wenzel, Fabian B¨ottcher, Jan-Niklas Schmidt, Michael Eisenmann, Tim Langen, Tilman Pfau, and Igor Ferrier-Barbut. 偶极玻色-爱因斯坦凝聚体的各向异性超流行为。《物理评论快报》，121(3):030401, 2018年。52. L Santos, GV Shlyapnikov, and M Lewenstein. 受囚禁偶极玻色-爱因斯坦凝聚体的旋子-麦克森谱与稳定性。《物理评论快报》，90(25):250403, 2003年。53. Lauriane Chomaz, Rick MW van Bijnen, Daniel Petter, Giulia Faraoni, Simon Baier, Jan Hen- drik Becher, Manfred J Mark, Falk Waechtler, Luis Santos, and Francesca Ferlaino. 观测到偶极量子气体中的旋子模占据数。《自然·物理》，14 446，2018年 5 442( ): – 。54. D Petter, G Natale, RMW Van Bijnen, A Patscheider, MJ Mark, L Chomaz, and F Ferlaino. 探测稳定偶极玻色气体的旋子激发谱。《物理评论快报》，122(18):183401, 2019年。55. J Hertkorn, J-N Schmidt, F B¨ottcher, M Guo, M Schmidt, KSH Ng, SD Graham, HP B¨uchler, T Langen, M Zwierlein, et al. 偶极量子气体跨越超流-超固相变时的密度涨落。《物理评论*X*》，11(1):011037, 2021年。56. P. B. Blakie, D. Baillie, and R. N. Bisset. 谐振俘获的偶极玻色-爱因斯坦凝聚体中的旋子光谱学。*Phys. Rev. A*，86:021604, 2012年8月。57. Luca Tanzi, Eleonora Lucioni, Francesca Fam`a, Jacopo Catani, Andrea Fioretti, Carlo Gab- banini, Russell N Bisset, Luis Santos, and Giovanni Modugno. 观测到具有亚稳超固体性质的偶极量子气体。《物理评论快报》，122 130405，2019年 13( ): 。58. Fabian B¨ottcher, Jan-Niklas Schmidt, Matthias Wenzel, Jens Hertkorn, Mingyang Guo, Tim Langen, and Tilman Pfau. 偶极量子液滴阵列中的瞬态超固体性质。《物理评论*X*》，9(1):011051, 2019年。59. L Chomaz, D Petter, P Ilzh¨ofer, G Natale, A Trautmann, C Politi, G Durastante, RMW Van Bijnen, A Patscheider, M Sohmen, et al. 偶极量子气体中长寿命和瞬态超固体行为。《物理评论*X*》，9(2):021012, 2019年。60. Mingyang Guo, Fabian B¨ottcher, Jens Hertkorn, Jan-Niklas Schmidt, Matthias Wenzel, Hans Peter B¨uchler, Tim Langen, and Tilman Pfau. 受困偶极超固体中的低能戈德斯通模。《自然》，574(7778):386–389, 2019年。61. L Tanzi, SM Roccuzzo, E Lucioni, F Fam`a, A Fioretti, C Gabbanini, G Modugno, A Recati, and S Stringari. 从偶极量子气体的压缩振荡中揭示超固体对称性破缺。《自然》，574(7778):382–385, 2019年。62. J-N Schmidt, Jens Hertkorn, Mingyang Guo, Fabian B¨ottcher, Matthias Schmidt, Kevin SH Ng, Sean D Graham, Tim Langen, Martin Zwierlein, and Tilman Pfau. 扁圆形偶极量子气体中的旋子激发。《物理评论快报》，126(19):193002, 2021年。63. L Tanzi, JG Maloberti, G Biagioni, A Fioretti, C Gabbanini, and G Modugno. 从非经典转动惯量中发现偶极超固体的超流性。《科学》，371(6534):1162–1165, 2021年。64. Giulio Biagioni, Nicol`o Antolini, Beatrice Donelli, Luca Pezz`e, Augusto Smerzi, Marco Fattori, Andrea Fioretti, Carlo Gabbanini, Massimo Inguscio, Luca Tanzi, et al. 利用约瑟夫森效应测量超固体的超流分数。《自然》style>，629 777，2024年 8013 773( ): – 。65. Eva Casotti, Elena Poli, Lauritz Klaus, Andrea Litvinov, Clemens Ulm, Claudia Politi, Man- fred J Mark, Thomas Bland, and Francesca Ferlaino. 观测到偶极超固体中的涡旋。《自然》style>，页码1–5，2024年。

66. Matthew A Norcia, Claudia Politi, Lauritz Klaus, Elena Poli, Maximilian Sohmen, Manfred J Mark, Russell N Bisset, Luis Santos, and Francesca Ferlaino. 偶极量子气体中的二维超固性。《自然》，596(7872):357–361，2021年。67. Thomas Bland, Elena Poli, Claudia Politi, Lauritz Klaus, Matthew A Norcia, Francesca Ferlaino, Luis Santos, a nd Russell N Bisset. 偶极凝聚体中的二维超固体形成。《物理评论快报》，128(19):195302，2022年。68. Z Hadzibabic, P Kr¨uger, M Cheneau, S P Rath, and J Dalibard. 受囚禁二维玻色气体：从玻色–爱因斯坦凝聚到Berezinskii–Kosterlitz–Thouless物理。《新物理学杂志》，10(4):045006，2008年4月。69. Yong-Chang Zhang, Thomas Pohl, and Fabian Maucher. 受限偶极玻色–爱因斯坦凝聚体的超固体相。《物理评论*A*》，104(1):013310，2021年。70. BTE Ripley, D Baillie, and PB Blakie. 平面偶极玻色气体中的二维超固性。《物理评论*A*》，108(5):053321，2023年。71. Pierre Barral, Michael Cantara, Li Du, William Lunden, Julius de Hond, Alan O Jamison, and Wolfgang Ketterle. 偶极相互作用能否抑制偶极弛豫？*arXiv*预印本 *arXiv:2303.06281*，2023年。72. Li Du, Pierre Barral, Michael Cantara, Julius de Hond, Yu-Kun Lu, and Wolfgang Ketterle. 50纳米尺度上的原子物理：偶极原子双层系统的实现。《科学》，384(6695):546–551，2024年。73. Suzanne Dang, Romain Anankine, Carmen Gomez, Aristide Lemaˆıtre, Markus Holz- mann, and Franc¸ois Dubin. 耦合砷化镓量子阱中囚禁的二维偶极激子在准凝聚体交叉处的缺陷增殖。《物理评论快报》，122(11):117402，2019年。74. Suzanne Dang, Marta Zamorano, Stephan Suffit, Kenneth West, Kirk Baldwin, Loren Pfeif- fer, Markus Holzmann, and Franc¸ois Dubin. 二维偶极激子代数时间序的观测。《物理评论研究》，2(3):032013，2020年。75. Yifei He, Ziting Chen, Haoting Zhen, Mingchen Huang, Mithilesh K Parit, and Gyu-Boong Jo. 探索二维偶极玻色气体中的Berezinskii-Kosterlitz-Thouless相变。《科学进展》，11(15):eadr2715，2025年。76. A Filinov, NV Prokof'ev, and M Bonitz. 二维偶极系统中的Berezinskii-Kosterlitz-Thouless相变。《物理评论快报》，105(7):070401，2010年。77. Ra´ul Bomb´ın, Ferran Mazzanti, and Jordi Boronat. 二维偶极条纹中的Berezinskii-Kosterlitz-Thouless相变。《物理评论*A*》，100(6):063614，2019年。78. A Macia, F Mazzanti, J Boronat, and RE Zillich. 二维各向异性低密度偶极玻色气体的微观描述。《物理评论*A*：原子、分子与光学物理》，84(3):033625，2011年。79. A Macia, D Hufnagl, F Mazzanti, J Boronat, and RE Zillich. 倾斜极化二维偶极玻色气体中的激发与条纹相形成。《物理评论快报》，109(23):235307，2012年。80. Chinmayee Mishra and Rejish Nath. 薄饼形囚禁中的倾斜偶极凝聚体。《物理评论*A*》，94(3):033633，2016年。81. Yongyong Cai, Matthias Rosenkranz, Zhen Lei, and Weizhu Bao. 一维和二维受囚禁偶极玻色–爱因斯坦凝聚体的平均场区间。《物理评论*A*》，82(4):043623，2010年。82. BC Mulkerin, RMW Van Bijnen, DHJ O'Dell, AM Martin, and NG Parker. 二维偶极玻色气体中各向异性长程涡旋相互作用。《物理评论快报》，111(17):170402，2013年。83. Cheng-An Chen and Chen-Lung Hung. 二维物质波汤斯孤子中尺度不变性的观测。《物理评论快报》，127(2):023604，2021年。84. Diana Hufnagl, R Kaltseis, Vesa Apaja, and RE Zillich. 强关联偶极玻色–爱因斯坦凝聚体中的旋子-旋子交叉。《物理评论快报》，107(6):065303，2011年。85. Zoran Hadzibabic, Peter Kr¨uger, Marc Cheneau, Baptiste Battelier, and Jean Dalibard. 受囚禁原子气体中的Berezinskii–Kosterlitz–Thouless交叉。《自然》，441(7097):1118–1121，2006年。

86. Chen-Lung Hung, Xibo Zhang, Nathan Gemelke, and Cheng Chin. 二维玻色气体中尺度不变性与普适性的观测。《自然》，470 239，2011 7333 236( ): – 。87. PA Murthy, I Boettcher, L Bayha, M Holzmann, D Kedar, M Neidig, MG Ries, AN Wenz, G Z¨urn, and S Jochim. 超冷费米气体中Berezinskii-Kosterlitz-Thouless相变的观测。《物理评论快报》，115(1):010401，2015年。88. Richard J Fletcher, Martin Robert-de Saint-Vincent, Jay Man, Nir Navon, Robert P Smith, Konrad GH Viebahn, and Zoran Hadzibabic. 通过调节囚禁气体中的相互作用，连接Berezinskii-Kosterlitz-Thouless相变与玻色–爱因斯坦凝聚相变。《物理评论快报》，114(25):255302，2015年。89. Shinichi Sunami, Vijay P Singh, David Garrick, Abel Beregi, Adam J Barker, Kathrin Luksch, Elliot Bentine, Ludwig Mathey, and Christopher J Foot. 通过物质波干涉测量观测二维玻色气体中的Berezinskii-Kosterlitz-Thouless相变。《物理评论快报》，128(25):250402，2022年。90. Uwe R. Fischer. 主导偶极-偶极相互作用的准二维玻色-爱因斯坦凝聚体的稳定性。《物理评论*A*》，73(3):031602，2006年。91. A Yu Vasiliev, A E Tarkhov, L I Menshikov, P O Fedichev, and Uwe R Fischer. 偶极XY模型中Berezinskii–Kosterlitz–Thouless型相变的普适性。《新物理学杂志》，16(5):053011，2014年。92. Markus Holzmann and Werner Krauth. 准二维受囚禁玻色气体的Kosterlitz-Thouless相变。《物理评论快报》，100:190402，2008年5月。93. Markus Holzmann, Maguelonne Chevallier, and Werner Krauth. 准二维受囚禁玻色气体中的普适关联与相干性。《物理评论*A*》，81 043622，2010 4( ): 。94. Christopher Ticknor. 准二维偶极气体的有限温度分析。《物理评论*A*》，85(3):033629，2012年。95. Christopher Ticknor. 受囚禁准二维偶极气体的各向异性相干性质。《物理评论*A*》，86(5):053602，2012年。96. D Baillie, RN Bisset, C Tick nor, and PB Blakie. 偶极凝聚体的数目涨落：各向异性及向热力学区间的缓慢趋近。《物理评论快报》，113(26):265301，2014年。97. LP Pitaevskii. 受限玻色气体的坍缩动力学。《物理快报*A*辑》，221(1-2):14–18，1996年。98. Rapha¨el Saint-Jalm, Patricia CM Castilho, ´ Edouard Le Cerf, Brice Bakkali-Hassani, J-L Ville, Sylvain Nascimbene, J´erˆome Beugnon, and Jean Dalibard. 二维玻色气体中的动力学对称性与呼吸模。《物理评论*X*》，9(2):021035，2019年。99. T Peppler, P Dyke, M Zamorano, I Herrera, S Hoinka, and CJ Vale. 强相互作用费米气体中的量子反常与二维至三维交叉。《物理评论快报》，( ): 2 120402，20183 121 12 d- d。100. Marvin Holten, Luca Bayha, Antonia C Klein, Puneet A Murthy, Philipp M Preiss, and Selim Jochim. 二维费米气体中尺度不变性的反常破缺。《物理评论快报》，121(12):120401，2018年。101. LP Pitaevskii and A Rosch. 二维受囚禁原子的呼吸模与隐藏对称性。《物理评论*A*》，55(2):R853，1997年。102. Seok-Yeong Ch¨a and Uwe R Fischer. 探测膨胀的准二维偶极凝聚体中暴胀功率谱的尺度不变性。《物理评论快报》，118(13):130404，2017年。103. S Mahesh Chandran and Uwe R Fischer. 对普朗克尺度敏感的宇宙学量子模拟器中的膨胀-收缩对偶性破缺。*arXiv*预印本 *arXiv:2506.02719*，2025年。104. Chengdong He, Zejian Ren, Bo Song, Entong Zhao, Jeongwon Lee, Yi-Cai Zhang, Shizhong Zhang, and Gyu-Boong Jo. 具有可调自旋的二维su(*n*)费米气体中的集体激发。《物理评论研究》，2:012028，2020年1月。105. Haoting Zhen, Yifei He, Sampriti Saha, Mithilesh K. Parit, Mingchen Huang, Nicol`o De- fenu, and Gyu-Boong Jo. 强偶极二维玻色气体中尺度不变性的破缺。*arXiv:2510.13730*，2025年10月。

106. Uwe R. Fischer。偶极-偶极相互作用占主导的准二维玻色-爱因斯坦凝聚体的稳定性。《物理评论*A*：原子、分子与光学物理》，73(3):031602，2006年。107. Alessio Recati 和 Sandro Stringari。超冷偶极气体中的超固性。《自然综述：物理学》，5(12):735–743，2023年。108. R Bombin、J Boronat 和 F Mazzanti。偶极玻色超固体条纹。《物理评论快报》，119(25):250402，2017年。109. Fabio Cinti 和 Massimo Boninsegni。二维偶极玻色条纹晶体中的超流性缺失。《低温物理学杂志》，196(5):413–422，2019年。110. Clemens Staudinger、Diana Hufnagl、Ferran Mazzanti 和 Robert E Zillich。二维偶极玻色子的条纹稀薄液体。《物理评论*A*》，108(3):033303，2023年。111. AN Aleksandrova、IL Kurbakov、AK Fedorov 和 Yu E Lozovik。二维倾斜偶极玻色子的密度波型超固体。《物理评论*A*》，109(6):063326，2024年。112. Juan S´anchez-Baena。准二维区域中的倾斜偶极玻色子：从液体条纹到液滴。*arXiv* 预印本 *arXiv:2504.02485*，2025年。113. P Pedri 和 L Santos。偶极玻色-爱因斯坦凝聚体中的二维亮孤子。《物理评论快报》，95(20):200404，2005年。114. Niklas Rasch、Lauriane Chomaz 和 Thomas Gasenzer。准二维偶极玻色气体中的反常非热固定点。*arXiv* 预印本 *arXiv:2506.01653*，2025年。115. Chen-Lung Hung、Victor Gurarie 和 Cheng Chin。从宇宙学到冷原子：淬火原子超流体中萨哈罗夫振荡的观测。《科学》，341 1215，2013 6151 1213( ): – 。116. Jiazhong Hu、Lei Feng、Zhendong Zhang 和 Cheng Chin。温鲁辐射的量子模拟。《自然·物理》，15(8):785–789，2019年。117. S Mahesh Chandran 和 Uwe R. Fischer。普朗克尺度敏感宇宙学量子模拟器中的膨胀-收缩对偶性破缺。*arXiv*，2025年。118. Seok-Yeong Ch¨a 和 Uwe R. Fischer。膨胀的准二维偶极凝聚体中暴胀功率谱尺度不变性的探测。《物理评论快报》，118(13):130404，2017年。119. Zehua Tian、Longhao Wu、Liang Zhang、Jiliang Jing 和 Jiangfeng Du。准二维偶极凝聚体中洛伦兹不变性破缺诱导的非热温鲁效应的探测。《物理评论*D*》，106(6):L061701，2022年。120. A Frisch、M Mark、K Aikawa、S Baier、R Grimm、A Petrov、S Kotochigova 等。由强磁性原子组成的超冷偶极分子。《物理评论快报》，115(20):203201，2015年。121. Lauriane Chomaz、Laura Corman、Tom Bienaim´e、R´emi Desbuquois、Christof Weitenberg、Sylvain Nascimbene、J´erˆome Beugnon 和 Jean Dalibard。均匀准二维玻色气体中通过横向凝聚实现相干性的涌现。《自然-通讯》，6(1):6162，2015年。122. Panagiotis Christodoulou、Maciej Ga lka、Nishant Dogra、Raphael Lopes、Julian Schmitt 和 Zoran Hadzibabic。BKT超流体中第一声和第二声的观测。《自然》，594(7862):191–194，2021年。123. G Chauveau、C Maury、F Rabec、C Heintze、G Brochier、S Nascimbene、J Dalibard、J Beugnon、SM Roccuzzo 和 S Stringari。相互作用空间调制玻色-爱因斯坦凝聚体中的超流分数。《物理评论快报》，130(22):226003，2023年。124. Niccol`o Preti、Nicol`o Antolini、Giulio Biagioni、Andrea Fioretti、Giovanni Modugno、Luca Tanzi 和 Carlo Gabbanini。用于镝玻色-爱因斯坦凝聚体的蓝失谐排斥势。《物理评论*A*》，110(2):023307，2024年。