arXiv:2512.14324v1 [math.GR] 16 Dec 2025

汤普森型群外自同构群的边界作用

CHRIS BRUCE、XIN LI 和 TAKUYA TAKEISHI

Abstract. 对于每个 Cuntz–Krieger 群胚，我们证明，其拓扑全群的外自同构群在希尔伯特立方体上存在拓扑自由的边界作用。特别地，这些外自同构群——包括所有 Higman–Thompson 群的外自同构群——都是 C*-单的。

1. Introduction

Higman–Thompson 群。1965 年，Thompson 引入了三个群 $F < T < V$。群 T 和 V 是最早出现的无限有限呈示单群，参见 [15]。Higman 将 Thompson 构造 V 推广，定义了第一个由无限有限呈示单群组成的无限族 [33]。具体而言，Higman 定义了一族群 $\{V_{n,r}\}$，使得 $V_{2,1} = V$，并且群 $V_{n,r}$ 是有限呈示的；当 n 为偶数时，它是单群；当 n 为奇数时，它有一个指数为 2 的有限呈示单换位子子群。自此后的 50 年间，这些群被称为 *Higman–Thompson* 群，并得到了深入研究。

三十年前，Brin 开始研究 Thompson群的自同构群，并描述了外自同构群 Out(F) 和 Out(T) [11]。他留下了一个自然问题：分析 Out(V) 或 Out($V_{n,r}$)。直到最近，Bleak、Cameron、Maissel、Navas 和 Olukoya 才通过将其元素描述为变换器 [5]，证明了 Out($V_{n,r}$) 是一个无限群。利用 [5], 中的框架，随后有人证明 Out($V_{n,r}$) 包含单边 n-移位的自同构群的一个副本，以及当 $m \geq 2$ [3, 4, 61] 时，双边 m-移位的自同构群的副本；同时，Out($V_{n,1}$) 在 $n \geq 3$ [60] 时包含 Thompson 群 F 的一个副本。由于双边满移位的自同构群包含非阿贝尔自由子群和所有有限群，这意味着，例如，Out($V_{n,r}$) 包含所有有限群，且有非阿贝尔自由子群。特别地，Out($V_{n,r}$) 是非 amenable 的。文献 [3] 证明了 Out($V_{n,r}$) 的中心平凡，且其阶问题不可解。除这些结果外，尽管人们长期以来一直关注 Higman–Thompson 群，关于 Out($V_{n,r}$) 的结构仍知之甚少。

拓扑全群。拓扑全群由 Giordano、Putnam 和 Skau [27] 针对 Cantor 极小系统引入。这一构造推动了群论领域的多项重大突破。Matui 证明，Cantor 极小系统的拓扑全群具有单交换子子群 [52], ; Juschenko 和 Monod 则证明这些群是可 amenable 的，从而发现了首批无限、有限生成的单可和群 [34]。Matte Bon 利用 Cantor 极小系统的拓扑全群，构造出首批具有刘维尔性质的无限、有限生成单群 [51]。随后，Matui 将拓扑全群的构造推广到康托尔集上的 ′丰足群胚：每个这样的群胚都会产生一个由康托尔集上的同胚构成的离散群，其中的同胚在局部看起来就像该群胚在其单位空间上的作用 [53]。拓扑全群在 Nekrashevych 构造首批中间增长单群 [58], 的过程中发挥了关键作用；而来自 [56]的 Nekrashevych-R¨over 群——它们是与自相似群作用所产生的群胚相关联的拓扑全群 [57]——被 Skipper、Witzel 和 Zaremsky 证明是首批属于类型 F_n 但不属于类型 F_{n-1} [67]的单群。

Date: 2025年12月17日。

一些最重要的 ´丰足群胚是 Cuntz–Krieger 群胚，它们作为附属于非平凡不可约有限型移位的 Cuntz–Krieger C* 代数的群胚模型而出现[19, 20]。每个有限型移位都可以建模为有限有向图 E 的单侧边移位（X_E，σ_E）（见 [44]）；而 Cuntz–Krieger 群胚 $\mathcal{G}_E$ 则是与有限型移位（X_E，σ_E）相关联的群胚（详情见 [48, 第 5] 章）。Nekrashevych 表明，Higman–Thompson 群 $V_{n,1}$（例如 Thompson 群 $V = V_{2,1}$）可以实现为完全 n-移位对应的 Cuntz–Krieger 群胚的拓扑全群；Matui 将这一结果推广，证明每个 Higman–Thompson 群都可作为某个 Cuntz–Krieger 群胚的拓扑全群出现（见 [56]和 [54, 备注 6.3 及第 6.7 节。1]）。随后，Matui 开创了对 Cuntz–Krieger 群胚的拓扑全群进行系统研究的先河 [54], ，并证明这些群具有许多 Higman–Thompson 群的重要性质。事实上，Matui 证明，对每个 Cuntz–Krieger 群胚 $\mathcal{G}_E$，其拓扑全群 $\boldsymbol{F}(\mathcal{G}_E)$ 属于类型 F_∞（特别是，它是有限呈示的），并且 $\boldsymbol{F}(\mathcal{G}_E)$ 的换位子子群 $\boldsymbol{D}(\mathcal{G}_E)$ 是单群且有限生成。Matui 还证明 $\boldsymbol{F}(\mathcal{G}_E)$ 不可 amenable，但具有 Haagerup 性质；他还根据图 E的邻接矩阵，明确描述了 $\boldsymbol{F}(\mathcal{G}_E)$ 的阿贝尔化。鉴于这些结果，附属于 Cuntz–Kriger 群胚的拓扑全群 $\boldsymbol{F}(\mathcal{G}_E)$ 是 Higman–Thompson 群的自然推广，我们将称其为 Thompson 类群。

在许多情况下，一个 ´etale 群胚的拓扑全群能够完整地记住该群胚 [54,65], ，因此可以在群胚与拓扑全群之间双向转换。这使我们能够运用强大的群胚技巧以及拓扑动力系统和代数拓扑中的思想，以新的方式研究群。例如，第二位作者 [43] 最近确立了拓扑全群的群同调与群胚同调之间的深刻联系。这促成了 Matui 的 AH 猜想的解决 [55], ，带来了群的全新同调计算，并给出了 Thompson 群 V 整系数无环的一个新证明，从而重现了 [69]中的主要结果。此外，在最近证明双曲群的 Boone–Higman 猜想时，也用到了与 Cuntz–Krieger 群胚相关联的拓扑全群 [2]。本文运用群胚技巧，为外自同构群 $\mathrm{Out}(\boldsymbol{F}(\mathcal{G}_E))$ 构造自然的边界作用。

C*-简单性。如果一个群的约化 C* 代数是简单 C* 代数，就称该群为*C*-单。自 Powers 证明非阿贝尔自由群是 C*-单的 [64]以来，离散群的 C*-简单性一直受到群论和算子代数领域的广泛关注。关于早期 C*- 简单性研究的综述，见 [24] 。Kalantar 和 Kennedy 取得了突破性进展，他们证明，离散群 G 是 C*-单的，当且仅当它在其 Furstenberg 边界上（拓扑）自由地作用；这又当且仅当它承认一个拓扑自由边界作用 [35]。随后，Breuillard、Kalantar、Kennedy 和 Ozawa 为这一结果给出了新的证明 [10], ，从而得到 C*-简单性的表示论刻画：离散群 G 是 C*-单的，当且仅当对 G的每个可 amenable 子群，相应的准正则表示都与正则表示弱等价。他们还证明了若干大类群具有 C*-简单性，并证明 G 的约化 C* 代数有唯一迹，当且仅当 G 的可 amenable 根消失。特别地，这表明 C*-简单性蕴含唯一迹性质。对于许多类群，可 amenable 根消失等价于 C*-简单性，例如见 [10, 定理 1.6 和 1.7]。然而，Le Boudec 证明，可 amenable 根消失一般而言并不足以保证 C*- 简单性 [41]。

除了上文提到的结果外，C*-单性还有若干其他引人注目的推论和等价刻画。Kennedy 和 Haagerup [30, 39]独立证明了，C*-单性等价于*Powers* 平均性质 [64], ；Kennedy 进一步表明，离散群 G 是 C*-单群，当且仅当它没有非平凡的可 amenable 一致递归子群（依 Glasner 和 Weiss 的意义 [28]）。这印证了 de la Harpe 在 [24] 中的评论：C*-单性被视为“非 amenability 的极端情形”。Hartman 和 Kalantar 表明，对于某个定义在 G [32, 上的概率测度 μ，群 G 的 C*-单性等价于 G 在 G 的可 amenable 子群空间上的作用是唯一 μ-平稳的。推论 5.7]。

Kennedy 对 C*-单性的刻画与 [42], 中的主要结果相结合，为证明某些类的群是 C*-单群提供了有力工具：如果 G 在某个紧豪斯多夫空间上有微支持作用，且所有刚性稳定子子群都非 amenable，那么 G 必为 C*-单群。请注意，这类作用必然与拓扑自由相去甚远。事实上，一个典型例子是纯无限群胚的拓扑全群在该群胚单位空间上的作用，而 [42]中的结果使得许多拓扑全群成为 C*-单群，见[14]。除了拓扑全群之外，最大的 C*-单群类别是线性群，或 amenable 根平凡的轴双曲群，分别见 [10, 定理 1.6] 和 [21,定理 8.14], 。也有一些 C*-单群不属于这些类别，例如见[40, 59], ；汤普森类群的外自同构也不属于通常的 C*-单群类别。

一般而言，判断给定的群或某类群是否为 C*-单可能非常困难；即使已知某个群是 C*-单，要在第二可数空间上找到一个明确的拓扑自由边界作用也可能很难。Thompson群尤其体现了这些困难：Thompson群 T 的 C*-单性等价于 F [31, 42] 的非可约性，这是一个长期悬而未决的问题。 [42, 定理 4.5] 证明了 Thompson 群 V 是 C*-单的，但证明用到了 [39,定理 1.2], 中对 C*-单性的刻画，而该刻画并未给出任何明确的边界作用。Thompson 类群 $\boldsymbol{F}(\mathcal{G}_E)$ 的 C*-单性也仅由 [42] 中的一般性结果得知（见 [14, 推论 5.3]），因此，目前尚不知道 $\boldsymbol{F}(\mathcal{G}_E)$ 在第二可数空间上的任何明确的拓扑自由边界作用。令人惊讶的是，外自同构群 Out($\boldsymbol{F}(\mathcal{G}_E)$) 的情况截然不同。

主要结果。 本文证明以下定理。

定理 A。 对于每个 *Cuntz–Krieger* 群胚 $\mathcal{G}_E$，外自同构群 $\mathrm{Out}(\boldsymbol{F}(\mathcal{G}_E))$在希尔伯特立方体上存在拓扑自由边界作用。特别地，$\mathrm{Out}(\boldsymbol{F}(\mathcal{G}_E))$ 是 *C**-单的。

特别是，对于所有 Higman–Thompson 群$V_{n,r}$，Out($V_{n,r}$) 都存在这样的边界作用。这里，希尔伯特立方体实现为 $\mathbb{P}M(X_E,\sigma_E)_+$，即有限型移位 X_E上正的移位不变Radon测度空间的射影化。

由于 $\boldsymbol{F}(\mathcal{G}_E)$ 是 C*-单的，根据 [42, 命题 2.23], Aut($\boldsymbol{F}(\mathcal{G}_E)$) 自动也是 C*-单的。然而，对于群 G, C*-简单性与 Out(G) 的 C*-简单性之间并不存在普遍的关系。例如，无挠双曲群是 C*-单的 [23, 24], , 且每个有限群都可以作为某个无挠双曲群的外自同构群，见 [17, 62]。

据 [39], Out($\boldsymbol{F}(\mathcal{G}_E)$) 不存在非平凡的可 amenable 一致递归子群；特别地，Out($\boldsymbol{F}(\mathcal{G}_E)$) 的可 amenable 根是平凡的，这进而意味着 Out($\boldsymbol{F}(\mathcal{G}_E)$) 的中心是平凡的，从而重新得到 Higman–Thompson 群的 [3,推论 1.5] 。

我们还要提及，我们的工作与自由群外自同构群的 C*-简单性之间的联系。Bridson 和 de la Harpe 利用其在外空间上的作用证明了这一点 [13]。我们的证明思路源自 Uyanik 的工作 [70]。设 F_N 为一个有限秩自由群 $N\geq 2$，并以 ∂F_N 表示其 Gromov 边界。变换群胚 $F_N \ltimes \partial F_N$ 是一个 Cuntz–Krieger 群胚[54], ，不难看出，作用 Out($F_N \ltimes \partial F_N$) $\curvearrowright \mathbb{P}M(\partial F_N,\sigma)_+$ 在子群 Out(F_N) 上的限制，与 Out(F_N) 在空间 $\mathbb{P}$Curr(F_N)（即 F_N 的射影化流空间）上的作用共轭（参见 [36, 37]）。Out(F_N) 在 $\mathbb{P}$Curr(F_N) 中极小集上的作用是拓扑自由边界作用（参见 [38, 70]）。我们的证明受到这一情形的启发，但在技术层面上几乎完全不同。

证明思路。在第 3 节中，我们引入群胚的外自同构群Out($\mathcal{G}_E$)。群 Out($\mathcal{G}_E$) 与 Out($\boldsymbol{F}(\mathcal{G}_E)$) 典范同构（命题 3.7 ），这主要归功于

Matui [54]。群胚 $\mathcal{G}_E$ 的自同构可通过单侧有限型移位（SFT）(X_E, σ_E) 的连续轨道等价（COE）来描述。Matsumoto 和 Matsumoto–Matui [46, 47, 49, 50]关于 SFT 连续轨道等价的研究成果颇丰，我们的工作以其研究为基础。他们的工作在 [48], 中得到了很好的总结，因此我们引用这本书，而不引用原始论文。Out($\boldsymbol{F}(\mathcal{G}_E)$) 在 $\mathbb{P}M(X_E, \sigma_E)_+$ 上的作用，是由 Out($\boldsymbol{F}(\mathcal{G}_E)$) 在上同调群 $\mathrm{H}^1(\mathcal{G}_E) \cong \mathrm{H}^E$ 上的作用诱导而来，其中 H^E 是该 SFT 的动力上同调。在第 4.1 节中，我们开发了分析作用 Out($\boldsymbol{F}(\mathcal{G}_E)$) $\curvearrowright \mathbb{P}M(X_E, \sigma_E)_+$的工具。一个重要思路是将对测度类的分析化归为对周期测度类 $\eta_{[p]}$的分析，其中 p 是图的一个本原圈。周期测度类在 $\mathbb{P}M(X_E, \sigma_E)_+$ 中稠密（命题 4.5）。这主要归功于 Sigmund [68], ，其结果是 Birkhoff 遍历定理的一个变体。接着我们证明，对周期测度的作用与对本原圈类的作用相同（命题 4.6），进而指出可以通过组合数据来分析周期测度。为了构造足够多的连续轨道等价，我们在第 4.2 节中引入标记 COE，其灵感来自移位空间的标记自同构 [1, 6, 9]。要构造标记 COE，必须验证重叠条件，以确保标记 COE 的双射性。在抽象情形下，重叠条件并不容易验证，因此我们需要若干技术性的组合论证来检查这些条件。在第 4.3 节中，我们通过引入良代表元，建立了一种利用组合方法分析标记 COE 的途径。

在第 5 节和第 6 节中，我们证明了 Out($\boldsymbol{F}(\mathcal{G}_E)$) $\curvearrowright \mathbb{P}M(X_E, \sigma_E)_+$ 是一个拓扑自由的边界作用。证明分为 3 个步骤：(1) Out($\mathcal{G}_E$) $\curvearrowright [E^*_{\mathrm{prim}}]$的忠实性；(2) Out($\mathcal{G}_E$) $\curvearrowright [E^*_{\mathrm{prim}}]$的传递性；以及 (3) Out($\boldsymbol{F}(\mathcal{G}_E)$) $\curvearrowright \mathbb{P}M(X_E, \sigma_E)_+$ 的强近端性。这里，$[E^*_{\mathrm{prim}}]$ 表示 E 的所有本原圈的循环置换类的集合。关于忠实性的结果是对 [3, 定理 1.4], 的推广，其证明基于 Boyle– Krieger [8, 定理 2.5] 以及 Matsumoto强连续轨道等价 [47]。注意，Boyle–Krieger 的结果基于经典的 Curtis—Hedlund—Lyndon定理 [44, 定理 6.2.9], ，该定理对双侧有限型移位的自同构进行了分类。传递性的证明完全是组合性的（这是一种字问题）。证明包含若干论证，用于验证重叠条件或考察给定词的本原性。本文最复杂的部分是强近端性的证明。关键引理（引理 6.9）的基本思想如下：如果 f_n、g_n：$X \to X$ 是紧空间 X 上的“非常好”的同胚序列，并且对于给定的 $x \in X$，我们有 $g_n(x) \to y$ 和 $f_n(y) \to z$，那么我们可以期待 $f_n g_n(x) \to z$。通常，“非常好”条件应当是等度连续性。然而，我们在第 6 节中使用的标记 COE 并不具有等度连续性（注 6.10）。作为替代，我们建立了若干技术引理，它们在部分意义上相当于等度连续性。

利用 Cuntz–Krieger 群胚的分类定理 [49], ，每个 Cuntz–Krieger 群胚都同构于一个与本原图相关联的 Cuntz–Krieger 群胚。这是算子代数学家熟知的事实，我们在强近端性证明的最后一步使用了这一事实的更强版本（命题 6.11）。不过，对于命题 4.5 和命题 5.2，我们利用有限型移位的周期分解 给出一种初等证明（第 2.3 节）。换言之，利用分类定理可以缩短这些结果的证明。此外，为方便不熟悉算子代数的读者，我们概述了不使用分类定理证明 Out(V_2) 和 Out($V_{n,\,r}$) 强近端性的另一种证明（第 6.4 节）。

Thompson 类群的换位子子群。 定理 A 的一个推论是，对由 Cuntz–Krieger 群胚产生的单交换子子群 $\boldsymbol{D}(\mathcal{G}_E)$ 的外自同构群，其可 amenable 根和 C*-单性的刻画可描述如下。

推论 A。 对于每个 *Cuntz–Krieger* 群胚 $\mathcal{G}_E$，外自同构群($\boldsymbol{D}(\mathcal{G}_E)$) 的可 *amenable* 根同构于

$$\boldsymbol{F}(\mathcal{G}_E)/\boldsymbol{D}(\mathcal{G}_E) \cong (\mathrm{Coker}\,(I - A_E^t) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Ker}(I - A_E^t),$$

其中 A_E 是 E的邻接矩阵。此外，外自同构群($\boldsymbol{D}(\mathcal{G}_E)$) 是 *C**-单的，当且仅当它的可 *amenable* 根是平凡的。

等价地，我们可以说，Out($D(\mathcal{G}_E)$) 是 C*-单的，当且仅当 $H_0(\mathcal{G}_E)$ 是有限且没有 2-挠元。特别地，Out($[V_{n,r}, V_{n,r}]$) 是 C*-单的，当且仅当 n 是偶数。此外，推论 A 表明，Out($D(\mathcal{G}_E)$) 的可 amenable 根可以是无限的，这种情况不同于轴双曲群，因为轴双曲群的 amenable 根总是有限的。

致谢。 C. Bruce 谨向 Kevin Aguyar Brix 致谢，感谢他就有限型移位和群胚的外自同构群进行了许多富有帮助的交流。本工作始于 ICMS 的群研究计划，我们衷心感谢他们的支持。X. Li 获得了欧洲研究委员会（ERC）通过欧盟地平线2020研究与创新计划（资助协议编号：817597）提供的资助。T. Takeishi 获 JSPS KAKENHI 资助，项目编号为 24K06780。

2. 预备知识

2.1. 边界作用与 C*-简单性。 设 G 是一个离散群， X 是一个紧豪斯多夫空间，并配备了 G 通过同胚给出的作用。回顾一下，若对每个 $x \in X$ ，轨道 Gx 在 X 中稠密，则称作用 $G \curvearrowright X$ 为极小；若 $\{x \in X : \mathrm{Stab}_G(x) = \{e\}\}$在 X中稠密，则称其为拓扑自由 ，其中 $\mathrm{Stab}_G(x)$ 是 x的稳定子群。若对每个概率测度 $\nu \in P(X)$，轨道 $G\nu$ 在$P(X)$中的弱* 闭包都包含某个 $x \in X$对应的点质量测度 δ_x，则称作用 $G \curvearrowright X$ 为强近端 。这里， G通过推前作用于紧空间 $P(X)$ 上的拉东概率测度。若作用 $G \curvearrowright X$ 既极小又强近端，则称其为边界作用 。 G的可 *amenable* 根 是 G的最大可 amenable 正规子群，参见 [22, 第 4 节，引理 1]。

群 G 若其约化群 C* 代数是简单 C* 代数，则称其为*C*-单 群。Kalantar 和 Kennedy 证明了 C*-简单性的一个重要刻画：

定理 2.1 ([35, 定理 6。2])**.** 离散群 G 是 *C*-单的，当且仅当它在某个紧*Hausdorff*空间上具有一个拓扑自由的边界作用。

2.2. 有限图。 本文中，图均假设为有向图， $E = (E^0, E^1)$ 表示一个带有值域映射和源映射 r 与 s的有限图。令

$$E^n := \{(e_0, \ldots, e_{n-1}) \in (E^1)^n : r(e_i) = s(e_{i+1}) \text{ for } i = 0, \ldots, n-2\}$$

并令 $E^* = \bigcup_{n\geq 1} E^n$。

元素 $w \in E^n$ 称为一条路径。对于路径 $w = (e_0, \ldots, e_{n-1}) \in E^n$，令 $w_{[i]} = e_i$和 $|w| = n$（称为 w 的长度 ）。路径记作 $w = w_{[0]}w_{[1]} \cdots w_{[n-1]}$。对于 $0 \leq k, l \leq |w|$，令$w_{[k,l]} = w_{[k]} \cdots w_{[l]}$。

空路径 记作 o。按照我们的约定，不将 o 视为 E^*的元素。我们认为 o 与所有边都可拼接。

定义 2.2. 对于路径 v、 $w \in E^*$， v 中的一个 w段是满足$v_{[i,j]} = w$的整数区间 $[i, j] \subset \mathbb{Z}$ 。对于 $S \subseteq E^*$， v 中的一个 S段是满足$w_{[i,j]}$ 等于某个 $s \in S$的整数区间 $[i, j] \subset \mathbb{Z}$ 。对于 v、 $w \in E^*$，如果对某个 k 有$v = w_{[0,k]}$ ，则 v 是 w 的前缀；如果对某个 k有$v = w_{[k,|w|-1]}$ ，则 v 是 w 的后缀。

定义 2.3. 如果 $s(p) = r(p)$，则称路径 $p \in E^*$ 为圈。环是长度为1的圈。若圈p 中不存在源点为 $s(p)$ 的边（第一条边除外），则称其为素圈。若存在某个圈 $q \in E^*$ 使得 $p = q^n$ ，且 $n \geq 1$ 蕴含 $n = 1$ 和 $p = q$，则称圈 p 为本原。

根据定义，环是素圈，而素圈是本原圈。此外，每个圈都存在唯一的素圈乘积分解，它是通过在给定

圈回到其起点的位置将其分解为若干圈而得到的。请注意，环、圈和圈的本原性是图论中的标准术语，而在符号动力系统的标准术语中，素圈通常称为首次返回环。

令 $E^*_{\mathrm{cycle}} \subseteq E^*$ 表示 E中的圈集，令 $E^*_{\mathrm{prim}} \subseteq E^*$ 表示E中的本原圈集。我们用 $[E^*_{\mathrm{cycle}}]$ 和 $[E^*_{\mathrm{prim}}]$ 表示在循环置换作用下圈和本原圈的等价类集合。对于一个圈 $w \in E^*_{\mathrm{cycle}}$，令 $[w]$ 表示它的等价类。注意，若$p \in E^*_{\mathrm{prim}}$，则每个 $q \in [p]$ 也都是本原圈。

稍后我们将证明下一个命题的一个技术性变体（见引理 5.5），因此略去其证明:

命题 2.4. 对于一个本原圈 $p \in E^*_{\mathrm{prim}}$，有 $|[p]| = |p|$。

定义 2.5. 令 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$。

(1) 细分圆，记作 S^1_n，是如下定义的图：顶点集为 $(S^1_n)^0 =\{v_i \mid i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$，边集为 $(S^1_n)^1 = \{e_i \mid i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$，并且有 $s(e_i) = v_i$，$r(e_i) = v_{i+1}$。*(2)* n-玫瑰图，记作 R_n，是由一个唯一顶点和该顶点处的 n 个环组成的图。

定义 2.6. 设 E 是有限图。对于 $e \in E^1$，令 $E \setminus e$ 表示顶点集为 E^0 、边集为 $E^1 \setminus \{e\}$ 的图。若有限图 E 满足 E 强连通，且对于所有 $e \in E^1$， $E \setminus e$ 强连通，则称其为 2-边连通。

定义 2.7. 设 $N \in \mathbb{Z}_{>0}$。 E 的 N 阶高阶边图，记作 $E^{[N]}$，是顶点集为 E^{N-1} 、边集为 E^N 的图，其值域映射和源映射分别由 $s(w) = w_{[0,N-2]}$ 和 $r(w) = w_{[1,N-1]}$ 给出，其中 $w \in E^N =(E^{[N]})^1$。

命题 2.8。 若 E是 *2*-边连通的且 $E \neq R_2$，则对每个 $(e, f) \in E^2$，图 $E^{[2]} \setminus ef$都是强连通的。

证明。 设 $(e, f) \in E^2$。只需证明存在一条路径 $w \in E^*$，它以 e为起点，以 f为终点，且不经过 ef。若 $E = R_n$满足 $n \geq 3$，则结论显然成立。我们可以假设 $|E^0| \geq 2$。令 $v = r(e) = s(f)$，并选取 $v' \in E^0 \setminus \{v\}$。选择一条路径 $w_1 \in (E \setminus f)^*$，从 v 到v'。同样，选择一条路径 $w_2 \in (E \setminus e)^*$，从 v' 到 v。于是，路径 ew_1w_2f 不经过ef。□

我们将使用强连通图的周期分解 。回顾一下，图 E 称为本原图，如果存在 $N > 0$，使得对所有 v_1, $v_2 \in E^1$，都存在一条从 v_1到 v_2、长度为 N 的路径。本原图是强连通的。反过来，对于强连通图 E，存在一个整数 $d \geq 1$，称为 E的周期，并且有一个分解

$$E^0 = E^0_0 \sqcup \cdots \sqcup E^0_{d-1}$$

使得如果 $e \in E^1$ 且 $s(e) \in E^0_i$，那么 $r(e) \in E^0_{i+1}$，其中指标按模 d计算。此外，图 E_0 是本原图，其中 E_0 是顶点集为 E^0_0 、边集为

$$E^1_0 := \{w \in E^d \mid s(w) \in E^0_0\}.$$

周期 d 等于 E中所有圈长度的最大公约数。详情请参见 [44, 第 4 节5] 。

2.3. **有限型移位**。 设 E 是一个非细分圆的强连通图。设

$$X_E := \left\{ x = (e_i)_{i=0}^{\infty} \in \prod_{i=0}^{\infty} E^1 \mid (e_i, e_{i+1}) \in E^2 \text{ for all } i \in \mathbb{N} \right\}.$$

x 的第 i个坐标记为$x_{[i]}$。定义 σ_E: $X_E \to X_E$，使得 $\sigma_E(x)_{[i]} = x_{[i+1]}$。类似地，令

$$\overline{X}_E := \left\{ \bar{x} = (e_i)_{i=-\infty}^{\infty} \in \prod_{i=-\infty}^{\infty} E^1 \mid (e_i, e_{i+1}) \in E^2 \text{ for all } i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

我们对 i 次坐标使用相同的记号。定义 $\bar{\sigma}_E$: $X_E \to X_E$，使得 $\bar{\sigma}_E(\bar{x})_{[i]} = \bar{x}_{[i+1]}$。

定义 2.9。半群动力系统 (X_E, σ_E) 称为与图 E 关联的单侧有限型移位（有限型子移位）。动力系统 $(X_E, \bar{\sigma}_E)$ 称为与图 E 关联的双边有限型移位（有限型子移位）。

典范投影 $X_E \to X_E$ 记为$\overline{\pi}_E$。对于 $x \in X_E$ 和 $i < j$，令$x_{[i,j]}$ 表示有限路径 $x_{[i]} \dots x_{[j]} \in E^*$，令 $x_{[i,\infty)}$ 表示无限路径$x_{[i]}x_{[i+1]} \cdots$。对于 $\bar{x} \in X_E$，我们也使用相同的记号。

对于 $w \in E^*$，其柱集记为

$$\mathcal{Z}(w) = \{x \in X_E \mid x_{[0,|w|-1]} = w\}.$$

注意到，每个边移位都可以视为一个顶点移位（见 [48, 第 2.2 节2]）。具体而言，定义一个 $E^1 \times E^1$ 矩阵 A，使得 $A_{e,\ f} = 1$ 当且仅当 $r(e) = s(f)$。于是，$(X_E,\ \sigma_E) \cong (X_A,\ \sigma_A)$。从今以后，我们将自由使用关于顶点移位的结果，而无需再从 [48] 引用。

利用 E 的周期分解，可以得到如下分解

$$X_E = X_0 \sqcup \cdots \sqcup X_{d-1}$$

使得 $\sigma_E(X_i) = X_{i+1}$（指标按模 d 计算），且子移位 $(X_0,\ \sigma_E^d)$ 同构于 $(X_{E_0},\ \sigma_{E_0})$。具体而言，我们有

$$X_i = \{x \in X_E \mid s(x_{[0]}) \in E_i^0\}.$$

对于双侧移位，我们也有类似的分解。在本文中，当应用 $\mathrm{Aut}(X_E,\ \bar{\sigma}_E)$ 的经典结果时，将使用周期分解。具体而言，我们将使用 Sigmund 的规范性[68] 以及 Boyle–Krieger 的一个定理 [8]。

2.4. 充足群胚、群胚同调与上同调。我们之所以需要群胚来研究 Higman–Thompson 群的外群，主要是因为命题 3.7，该命题本质上源自 Matui。我们将把 Thompson 类群的外群识别为有限型子移位上连续轨道等价群的一个商，而研究的主要工具将是连续轨道等价。本小节汇集群胚所需的最基本定义与事实。

一个群胚 $\mathcal{G}$ 是一个所有态射均可逆的小范畴。对象集记为$\mathcal{G}^{(0)}$，态射集记为 $\mathcal{G}^{(1)}$。我们通过将对象与其恒等态射视为相同，将 $\mathcal{G}^{(0)} \subseteq \mathcal{G}^{(1)}$ 与 $\mathcal{G}^{(1)} = \mathcal{G}$ 等同。对于 $g \in \mathcal{G}$，其定义域和陪域分别记为 $\mathfrak{s}(g)$ 和 $\mathfrak{r}(g)$。映射 $\mathfrak{s}, \mathfrak{r}$: $\mathcal{G} \to \mathcal{G}^{(0)}$ 分别称为源映射和值域映射。一个拓扑群胚 是指其 $\mathfrak{s}, \mathfrak{r}$、乘法以及取逆运算均连续的群胚。本文中，群胚始终假设为第二可数、局部紧且豪斯多夫。

若 $\mathfrak{s}$ 和 $\mathfrak{r}$ 都是局部同胚，则称群胚为 ***´étale***。若 $\mathcal{G}^{(0)}$ 全不连通，则称 $\mathcal{G}$ 为丰足的 ´étale 群胚。若对于所有 x，$\mathcal{G}x$ 都是稠密的，则称 $\mathcal{G}$ 为极小的 ´étale 群胚，其中 $\mathcal{G}x = \{\mathfrak{r}(g) \mid g \in \mathcal{G}, \mathfrak{s}(g) = x\}$。若 $\mathrm{Iso}(\mathcal{G})$ 的内部是 $\mathcal{G}^{(0)}$，则称 $\mathcal{G}$ 为本质主群胚或有效的 ´étale 群胚，其中 $\mathrm{Iso}(\mathcal{G}) = \{g \in \mathcal{G} \mid \mathfrak{s}(g) = \mathfrak{r}(g)\}$。本文中，群胚始终假定为丰足、极小且有效，并且 $\mathcal{G}^{(0)}$ 是紧的。

关于 ´étale 群胚基础理论的详细内容，请参见 [48, 第 5]章。

闭开子集 $U \subseteq \mathcal{G}$ 称为双截面，如果 $\mathfrak{s}|_U$ 和 $\mathfrak{r}|_U$ 都是到其像上的同胚。双截面 U 称为全局双截面，如果 $\mathfrak{s}(U) = \mathfrak{r}(U) = \mathcal{G}^{(0)}$。

定义 2.10. [53, 定义 2.3] 对于群胚 $\mathcal{G}$，其拓扑全群 $\boldsymbol{F}(\mathcal{G})$ 是由所有全局双截面组成的群。

群 运算定义如下：对于 $U, V \in \boldsymbol{F}(\mathcal{G})$，乘积 UV定义为

$$UV := \{gh \mid g \in U, h \in V, \mathfrak{s}(g) = \mathfrak{r}(h)\}$$

逆元 U^{-1} 定义为

$$U^{-1} := \{g^{-1} \mid g \in U\}.$$

由于假设 $\mathcal{G}$ 是第二可数的， $\boldsymbol{F}(\mathcal{G})$ 是一个可数群。

我们将使用第一群胚上同调（[48, 定义 9.1.5]）。令 Hom（$\mathcal{G}$， $\mathbb{Z}$）为从 $\mathcal{G}$到 $\mathbb{Z}$的连续群胚同态所构成的阿贝尔群，并通过$\partial(\xi)(g) := \xi(\mathfrak{r}(g)) - \xi(\mathfrak{s}(g))$定义 ∂：$C(\mathcal{G}^{(0)}, \mathbb{Z}) \to$Hom $(\mathcal{G}, \mathbb{Z})$。于是群 $\mathrm{H}^1(\mathcal{G})$ 为

$$\mathrm{H}^1(\mathcal{G}) := \mathrm{Hom}\,(\mathcal{G}, \mathbb{Z})/\{\partial(\xi) : \xi \in C(\mathcal{G}^{(0)}, \mathbb{Z})\}.$$

群胚同构 α：$\mathcal{G} \to \mathcal{H}$诱导出同构 $\mathrm{H}^1(\alpha)$: $\mathrm{H}^1(\mathcal{H}) \to \mathrm{H}^1(\mathcal{G})$，其定义为$[\rho]_1 \mapsto [\rho \circ \alpha]_1$，其中 $\rho \in$Hom $(\mathcal{H}, \mathbb{Z})$。

我们将使用的群胚是*Cuntz–Krieger* 群胚 $\mathcal{G}_E$ ([48, 第 5 章.3])。对于一个强连通图 E 及其对应的有限型子移位（X_E， σ_E），令

$$\mathcal{G}_E := \{(x, k-l, y) \in X_E \times \mathbb{Z} \times X_E : x, y \in E_E, k, l \in \mathbb{N}, \text{ and } \sigma_E^k(x) = \sigma_E^l(y)\}.$$

群胚运算为（x， n， y）（y， m， z） =（x， $n+m$， z）。 $\mathcal{G}_E$的值域映射和源映射由 $\mathfrak{r}((x,\ k-l,\ y)) = x$和 $\mathfrak{s}((x,\ k-l,\ y)) = y$给出。这些集合

$$\mathcal{Z}(U, k, l, V) := \{(x, k-l, y) \in \mathcal{G}_E : x \in U, y \in V, \sigma_E^k|_U \text{ is injective, and } \sigma_E^l|_V \text{ is injective}\}$$

构成 $\mathcal{G}_E$ 上 ´étale 拓扑的一组基，使得 $\mathcal{G}_E$ 成为一个充足群胚。注意，此拓扑不同于乘积拓扑。

若 E 是强连通的且 $E \ncong S_n^1$ ，则群胚 $\mathcal{G}_E$ 是有效且极小的（例如参见 [48, 命题 5.3.2]）。

2.5. **Higman–Thompson 群**。对于 r， $n \in \mathbb{Z}_{>0}$，其中 $n \geq 2$，考虑其 $r \times r$ 矩阵

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

并令 E 为一个有 r 个顶点的有向图，其邻接矩阵为 M。Matui 在[54, 第 6.7 节1] 证明， $\boldsymbol{F}(\mathcal{G}_E)$ 同构于 *Higman–Thompson* 群$V_{n,\ r}$，其定义见 [33]。因此，若 $E = R_n$ 对于 $n \geq 2$ 成立，则 $\boldsymbol{F}(\mathcal{G}_E)$ 同构于 $V_n := V_{n,\ 1}$。

2.6. **有限型移位的连续轨道等价**。设 E， F 是强连通图，且不是细分圆。以下概念源于 Matsumoto。

定义 2.11 ([48, 第 4]章**：** 同胚 φ: $X_E \to X_F$是一个连续轨道等价（COE），如果存在连续映射 k, l: $X_E \to \mathbb{N}$和 k', l': $X_F \to \mathbb{N}$，使得

$$\sigma_F^{k(x)}(\varphi(\sigma_E(x))) = \sigma_F^{l(x)}(\varphi(x)) \quad \textit{for all } x \in X_E,$$

and

$$\sigma_E^{k'(x)}(\varphi^{-1}(\sigma_F(x))) = \sigma_E^{l'(x)}(\varphi^{-1}(x)) \quad \textit{for all } x \in X_F.$$

这对 (k,l) 称为一个 φ-余循环对。

定义 2.12. 我们将 $\mathrm{COE}(X_E,\sigma_E)$ 记为从 X_E 到 X_E的所有连续轨道等价所构成的群。

两个连续轨道等价的复合仍是连续轨道等价。特别地，$\mathrm{COE}(X_E,\ \sigma_E)$ 在复合运算下确实构成一个群（[48, 引理 4.1.7]）。给定 $x\in X_E$，我们将 $[x]_{\mathrm{tail}}$ 记为 x的尾等价类，即，

$$[x]_{\mathrm{tail}} \coloneqq \{y\in X_E:\ \text{there exist } n,m\geq 0 \text{ with } \sigma_E^n(x)=\sigma_E^m(y)\}.$$

若存在自然数 $n\neq m$ 使得 $\sigma_E^n(x)=\sigma_E^m(x)$，则称点 $x\in X_E$ 为最终周期点。令 X_E^{ep} 表示由所有最终周期点构成的 X_E 子集。任意 $x\in X_E^{ep}$ 都可写成 $x=wp^\infty$，其中 $p\in E^*_{\mathrm{prim}}$且 $w\in E^*$。对于 $p,\ q\in E^*_{\mathrm{prim}}$和 $v,\ w\in E^*$，当且仅当 $[p]=[q]$时，有$[vp^\infty]_{\mathrm{tail}}=[wq^\infty]_{\mathrm{tail}}$，因此存在一个双射

$$[E^*_{\mathrm{prim}}]\to\{[x]_{\mathrm{tail}}:x\in X_E^{ep}\},\quad [p]\mapsto[p^\infty]_{\mathrm{tail}}.$$

对于每个连续轨道等价 $\varphi\colon X_E\to X_F$，我们有 $\varphi(X_E^{ep})=X_F^{ep}$([48, 命题 4.2.4])。因此，连续轨道等价 $\varphi\colon X_E\to X_F$诱导出一个双射$[E^*_{\mathrm{prim}}]\to[F^*_{素}]$，我们将其记为 $[p]\mapsto\varphi[p]$。当且仅当 $\varphi([p^\infty]_{\mathrm{tail}})=[q^\infty]_{\mathrm{tail}}$时，我们有$\varphi[p]=[q]$。特别地，我们有一个典范作用 连续轨道等价$(X_E,\ \sigma_E)\curvearrowright[E^*_{\mathrm{prim}}]$。

2.7. **有限型移位的有序上同调**。设 $E,\ F$ 为非细分圆的强连通图。单边有限型移位 $(X_E,\ \sigma_E)$ 的有序上同调群在 [49] 中定义，作为 [7, 63] 中双侧有限型移位有序上同调的类比。它是有序群 $(\mathrm{H}^E,\ \mathrm{H}^E_+)$，其中

$$\mathrm{H}^E\coloneqq C(X_E,\mathbb{Z})/\{f-f\circ\sigma_E:f\in C(X_E,\mathbb{Z})\},$$

且正锥定义为 $\mathrm{H}_+\coloneqq\{[f]\in\mathrm{H}:\ f\geq^E 0\}$。存在一个同态 $\Phi_E\colon\mathrm{Hom}(\mathcal{G}_E,\mathbb{Z})\to C(X_E,\mathbb{Z})$，定义如下

$$\Phi_E(\rho)(x)\coloneqq\rho(x,1,\sigma_E(x))$$

对所有 $\rho\in\mathrm{Hom}(\mathcal{G}_E,\mathbb{Z})$ 均成立。映射 Φ_E 下降为一个同构 $\Phi_E\colon\mathrm{H}^1(\mathcal{G}_E)\xrightarrow{\cong}\mathrm{H}^E$([48, 命题 9.1.8])。同构 $\Phi_E\colon\mathrm{H}^1(\mathcal{G}_E)\xrightarrow{\cong}\mathrm{H}^E$通过序同构诱导出一个作用 $\mathrm{COE}(X_E,\sigma_E)\curvearrowright\mathrm{H}^E$。具体而言，根据 [48, 命题 9.3.8]，，每个 COE $\varphi\colon X_E\to X_F$都会产生一个可逆的连续巴拿赫空间线性映射 $\Psi_\varphi\colon C(X_F,\mathbb{C})\to C(X_E,\mathbb{C})$，其定义如下

$$\Psi_\varphi(f)(x)\coloneqq\sum_{i=0}^{l(x)-1}f(\sigma_F^i(\varphi(x)))-\sum_{j=0}^{k(x)-1}f(\sigma_F^j(\varphi(\sigma_E(x))))$$

对所有 $x\in X_E$ 均成立，其中 (k,l) 是任意一个 φ-余循环对。此外，$\Psi_\varphi(C(X_F,\mathbb{Z}))=C(X_E,\mathbb{Z})$，且 Ψ_φ下降为有序群的一个同构

$$\overline{\Psi}_\varphi\colon(\mathrm{H}^F,\mathrm{H}^F_+)\xrightarrow{\cong}(\mathrm{H}^E,\mathrm{H}^E_+),\quad [f]\mapsto[\Psi_\varphi(f)],$$

参见 [48, 定理 9.3.11]。于是，我们有 $\Psi_\varphi=\Phi_E\circ\mathrm{H}^1(\alpha)\circ\Phi_F^{-1}$，其中 $\alpha\in\mathrm{Out}(\mathcal{G}_E)$ 满足$\alpha^0=\varphi$。现在，作用 $\mathrm{COE}(X_E,\ \sigma_E)\curvearrowright\mathrm{H}^E$ 由 $\varphi\mapsto\Psi_\varphi^{-1}$ 给出。

若测度 μ 定义在 X_E 上，且满足 $(\sigma_E)_*\mu=\mu$，其中 $(\sigma_E)_*$ 表示推前，则称其为移位不变。沿用 [50], 中的记号，令 $M(X_E,\ \sigma_E)_+$ 为 X_E上正则博雷尔移位不变测度构成的锥，并令 $P(X_E,\ \sigma_E)$ 为 X_E 上正则博雷尔移位不变概率测度构成的单纯形。

回忆一下，同态 $\phi\colon\mathrm{H}^E\to\mathbb{R}$ 若满足 $\phi(\mathrm{H}^E_+)\subseteq\mathbb{R}_{\geq 0}$（参见 [29]），则称其为正的。每个$\mu\in M(X_E,\sigma_E)_+$都给出一个正同态 $\mathrm{H}^E\to\mathbb{R}$，其定义为 $\mu(f)=\int_{X_E}f\,d\mu$；里斯表示定理表明，这一对应将 $M(X_E,\sigma_E)_+$ 同构于 H^E 的正同态锥（参见 [63, 命题 2.1]，其中对此在双边有限型子移位的情形进行了论述）。结合 [48, 引理 9.1.1], ，我们得到典范投影映射

$\pi_E\colon \overline{X}_E \to X_E$诱导出一个同构 $P(X_E,\sigma_E) \cong \overline{P}(X_E,\sigma_E)$，其中 $P(X_E,\sigma_E)$ 是 $\overline{X}_E$ 上移位不变正则博雷尔概率测度所构成的单纯形。

定义 2.13. 给定一个本原圈 $[p]\in[E^*_{\mathrm{prim}}]$ 的等价类，我们令

$$\eta_{[p]} \coloneqq \sum_{i=0}^{|p|-1} \delta_{\sigma_E^i(p^\infty)}$$

为 $M(X_E,\sigma_E)^+$ 上与 p^∞ 的尾等价类相支撑的关联（未归一化）移位不变测度。这类测度称为周期测度。

3. Outer automorphism groups of ample groupoids

3.1. 外自同构群的定义($\mathcal{G}$). 对于群胚 $\mathcal{G}$，我们用 Aut($\mathcal{G}$) 表示 $\mathcal{G}$ 的同胚自同构群。对于双截面 $U\subseteq\mathcal{G}$，令 $\mathfrak{s}_U\coloneqq\mathfrak{s}|_U$ 和 $\mathfrak{r}_U\coloneqq\mathfrak{r}|_U$。

存在一个单同态 Ad: $\boldsymbol{F}(\mathcal{G})\to$Aut($\mathcal{G}$)，定义如下:

$$\mathrm{Ad}(U)(g)=UgU^{-1}\coloneqq(\mathfrak{s}_U^{-1}(\mathfrak{r}(g)))g(\mathfrak{r}_U^{-1}(\mathfrak{s}(g)))$$

对所有 $U\in\boldsymbol{F}(\mathcal{G})$ 和 $g\in\mathcal{G}$ 均成立。简单计算可得，对所有 $\alpha\in$Aut($\mathcal{G}$) 和 $U\in\boldsymbol{F}(\mathcal{G})$，都有 αAd(U) = Ad($\alpha(U)$)α。特别地，$\boldsymbol{F}(\mathcal{G}_E)$ 的像是 Aut($\mathcal{G}$) 的正规子群。

定义 3.1。我们将 Inn($\mathcal{G}$) 记为 $\boldsymbol{F}(\mathcal{G})$ 在 Aut($\mathcal{G}$) 下经 Ad得到的像。Inn($\mathcal{G}$) 中的元素称为 $\mathcal{G}$的内自同构。$\mathcal{G}$ 的外自同构群为 Out($\mathcal{G}$) $\coloneqq$ Aut($\mathcal{G}$)/Inn($\mathcal{G}$)。

对于一个双射 $U\subseteq\mathcal{G}$，令 π_U: $\mathfrak{s}(U)\to\mathfrak{r}(U)$ 表示映射 $\pi_U\coloneqq(\mathfrak{r}_U)\circ(\mathfrak{s}_U)^{-1}$。对于 $U\in\boldsymbol{F}(\mathcal{G})$，根据定义，对于 $x\in\mathcal{G}^{(0)}$，有 Ad(U)(x) $=\pi_U(x)$ 。

对于 $\alpha\in$Aut($\mathcal{G}$)，令 α^0 表示 α 到 $\mathcal{G}^{(0)}$的限制。下一个命题表明，α 是内自同构，当且仅当 α 在 [54,命题 3.4]的意义下与恒等映射同调相似。

命题 3.2。设 $X=\mathcal{G}^{(0)}$，并设 $\alpha\in\mathrm{Aut}(\mathcal{G})$。那么，$\alpha$ 是内自同构，当且仅当存在连续开映射 b: $X\to\mathcal{G}$，使得 $\mathfrak{s}(b(x))=x$ 且 $\mathfrak{r}(b(x))=\alpha^0(x)$ 对所有 $x\in X$ 均成立。

证明。假设 α是内自同构，并令 $\alpha=$Ad(U)，其中 $U\in\boldsymbol{F}(\mathcal{G})$是一个满双截面。根据定义，我们有 $\alpha^0=\pi_U=(\mathfrak{r}_U)\circ(\mathfrak{s}_U)^{-1}$，因此 $b\coloneqq(\mathfrak{s}_U)^{-1}$满足所需性质。反过来，设 b: $X\to\mathcal{G}$是陈述中所述的连续映射。那么，$U=\{b(x)\mid x\in X\}$ 是一个全局双截面，且满足$\alpha=$Ad(U)。□

对于 Cuntz–Krieger 群胚，我们有以下众所周知的结果，例如可见于 [48, 定理 9.2 的证明中2]。

命题 3.3。对于所有 $\alpha\in$ 自同构群($\mathcal{G}_E$)，我们有 $\alpha^0\in$ 连续轨道等价(X_E,σ_E)，并且映射自同构群($\mathcal{G}_E$) →连续轨道等价(X_E,σ_E) 由 $\alpha\mapsto\alpha^0$ 给出，是一个同构。

我们称 连续轨道等价 φ 是内 的，当且仅当它等于某个内自同构 $\alpha\in$Inn($\mathcal{G}_E$) 对应的 α^0。

命题 3.4. 内连续轨道等价在 X_E^{ep} 的所有尾等价类组成的集合上作用平凡。特别地，我们有一个典范作用 外自同构群($\mathcal{G}_E$) $\curvearrowright[E^*_{\mathrm{prim}}]$。

证明。对于每个 $g\in\mathcal{G}_E$，满足 $\mathfrak{s}(g)\in X_E^{ep}$、$\mathfrak{s}(g)\in X_E^{ep}$ 和 $\mathfrak{r}(g)\in X_E^{ep}$ 的对象根据定义尾等价。对于全局双截面 $U\subseteq\mathcal{G}_E$，我们有 $\pi_U(x)=\mathfrak{r}(g)$，其中 $g\in U$ 是满足 $\mathfrak{s}(g)=x$ 的唯一元素。因此，$\mathcal{G}_E$ 的内自同构在 X_E^{ep} 的等价类上作用平凡。□

以下引理本质上是众所周知的:

引理 3.5. 若 $x_1, x_2 \in X_E$ 尾等价，则存在一个内 *COE* φ，使得 $\varphi(x_1) = x_2$。

证明。设 $x_1, x_2 \in X_E$ 是尾等价的无限路径。那么，我们可以选取 $w_1, w_2 \in E^*$ 和 $y \in X_E$，使得 $x_1 = w_1 y$ 和 $x_2 = w_2 y$。如有必要，通过增大 w_1 和 w_2，我们可以假设 $\mathcal{Z}(w_1) \cap \mathcal{Z}(w_2) = \emptyset$。定义 $\varphi\colon X_E \to X_E$，令 $\varphi(w_1 z) = w_2 z$ 在 $\mathcal{Z}(w_1)$ 上，$\varphi(w_2 z) = w_1 z$ 在 $\mathcal{Z}(w_2)$ 上，且 $\varphi(z) = z$ 在 $X_E \setminus (\mathcal{Z}(w_1) \cup \mathcal{Z}(w_2))$ 上。于是可见，φ 是一个内 COE，且 $\varphi(x) = y$。事实上，可见 $\varphi = \mathrm{Ad}(U)^0,$，其中双截面 U 定义为

$$U = \{(w_2 z,\ |w_2|-|w_1|,\ w_1 z) \mid s(z) = s(y)\} \cup \{(w_1 z,\ |w_1|-|w_2|,\ w_2 z) \mid s(z) = s(y)\} \cup (X_E \setminus (\mathcal{Z}(w_1) \cup \mathcal{Z}(w_2)))。$$

□

稍后我们将证明，当且仅当连续轨道等价保留所有最终周期点的尾等价类时，它是内自同构（见命题5.2）。

3.2. **外自同构群 Out($\mathcal{G}$) 在群胚上同调上的作用**。我们记录以下基本观察，以便查阅。

命题 3.6. 存在一个群同态 $\mathrm{Out}(\mathcal{G}) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{H}^1(\mathcal{G}))$ 给定为 $[\alpha] \mapsto \mathrm{H}^1(\alpha^{-1})$.

证明。我们需要证明，若 $\alpha \in \mathrm{Inn}(\mathcal{G})$，则 $\mathrm{H}^1(\alpha) = \mathrm{id}$。令 $\rho \in \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \mathbb{Z})$，并将 $\alpha = \mathrm{Ad}(U)$ 记作某个 $U \in \boldsymbol{F}(\mathcal{G})$。对于 $g \in \mathcal{G}$，我们有 $\alpha(g) = UgU^{-1} = (\mathfrak{s}|_U)^{-1}(\mathfrak{r}(g))g((\mathfrak{s}|_U)^{-1}(\mathfrak{s}(g)))^{-1}$。因此，

$$\rho \circ \alpha(g) = \rho((\mathfrak{s}|_U)^{-1}(\mathfrak{r}(g))) + \rho(g) - \rho((\mathfrak{s}|_U)^{-1}(\mathfrak{s}(g))),$$

使得

$$(\rho \circ \alpha - \rho)(g) = \rho \circ \alpha(g) - \rho(g) = \rho((\mathfrak{s}|_U)^{-1}(\mathfrak{r}(g))) - \rho((\mathfrak{s}|_U)^{-1}(\mathfrak{s}(g))) = \partial(\rho \circ (\mathfrak{s}|_U)^{-1})(g)$$

这意味着 $[\rho \circ \alpha] = [\rho]$ in $\mathrm{H}^1(\mathcal{G})$。 □

3.3. **拓扑全群的外自同构群**。每个 $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$ 都会导出一个群自同构 $\alpha_{\boldsymbol{F}} \in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{F}(\mathcal{G}))$，满足对所有 $U \in \boldsymbol{F}(\mathcal{G})$，$\alpha_{\boldsymbol{F}}(U) := \alpha(U)$；而由 $\alpha \mapsto \alpha_{\boldsymbol{F}}$ 给出的映射 $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}) \to \mathrm{Aut}(\boldsymbol{F}(\mathcal{G}))$ 显然是一个群同态。下一个命题本质上归功于 Matui [54, Section 3]。

命题 3.7。假设 $\mathcal{G}^{(0)}$ 是一个康托尔集。那么，

(1) 同态 $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}) \to \mathrm{Aut}(\boldsymbol{F}(\mathcal{G}))$，$\alpha \mapsto \alpha_{\boldsymbol{F}}$，是一个同构；*(2) (i)* 中的映射可下降为群同构 $\mathrm{Out}(\mathcal{G}) \cong \mathrm{Out}(\boldsymbol{F}(\mathcal{G}))$。

证明。(ii) 可由 (i) 轻易推出，因此只需证明 (i)。对于每个 $g \in \mathcal{G}$，集合

$$T(g) = \{U \in \boldsymbol{F}(\mathcal{G}) \mid U^2 = \mathcal{G}^{(0)}, U \setminus \mathcal{G}^{(0)} \ni g\}$$

构成 g 的开邻域基。由于我们有

$$\alpha(g) = \alpha\left(\bigcap_{U \in T(g)} U\right) = \bigcap_{U \in T(g)} \alpha_{\boldsymbol{F}}(U)$$

对于每个 $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$，映射 $\alpha \mapsto \alpha_{\boldsymbol{F}}$ 都是单射。令 $\Phi \in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{F}(\mathcal{G}))$。根据 [54, 定理 3.5],，存在 $\varphi \in \mathrm{Homeo}(\mathcal{G}^{(0)})$，使得 $\pi_V = \varphi \circ \pi_U \circ \varphi^{-1}$，其中 $V = \Phi(U)$，对所有 $U \in \boldsymbol{F}(\mathcal{G})$ 均成立。根据 [54, 命题 3.8], 的证明，存在唯一的 $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$，使得 $\pi_{\alpha(U)} = \varphi \circ \pi_U \circ \varphi^{-1}$ 对所有 $U \in \boldsymbol{F}(\mathcal{G})$ 均成立。于是，根据定义，我们有 $\alpha_{\boldsymbol{F}} = \Phi$，从而完成了满射性的证明。□

4. Projectivised measures and marker COEs

本节中，我们定义一个与自由群 [37, 70], 的射影化流空间类似的空间，并引入标记 COE 的概念，其灵感源自有限型移位的标记自同构。

4.1. 射影化测度空间。 现在我们来定义将作为边界作用的对象。

定义 4.1. 令

$$\mathbb{P}M(X_E,\sigma_E)_+ := (M(X_E,\sigma_E)_+ \setminus \{0\})/\sim,$$

其中 $\mu_1 \sim \mu_2$ 当且仅当存在 $r \in \mathbb{R}_{>0}$ 使得 $\mu_1 = r\mu_2$。

对于 $\mu \in M(X_E,\sigma_E)+$，我们用 $[\mu]$ 表示 μ 在 $\mathbb{P}M(X_E,\sigma_E)+$中的等价类。注意， $\mathbb{P}M(X_E,\sigma_E)+$ 与 $P(X_E,\sigma_E)$ $\mathbb{P}M$同胚。特别地，根据阿劳格鲁定理，$X_E(,+)$是紧Hausdorff空间。

定义 4.2。 作用 $\mathrm{Out}(\mathcal{G}_E) \curvearrowright M(X_E,\sigma_E)+$ 和 $\mathrm{Out}(\mathcal{G}_E) \curvearrowright \mathbb{P}M(X_E,\sigma_E)+$ 定义为由序同构所诱导的作用 $\mathrm{Out}(\mathcal{G}_E) \curvearrowright (\mathrm{H}^E,\mathrm{H}^E_+)$ ，这些序同构来自 [48,定理 9.3。11]。

对于 $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_E)$ 和 $\mu \in M(X_E,\sigma_E)+$，这些作用分别记作 $\alpha(\mu) \in M(X_E,\sigma_E)+$和 $\alpha[\mu] \in \mathbb{P}M(X_E,\sigma_E)+$。对于 $\varphi \in \mathrm{COE}(X_E,\sigma_E)$，我们也采用相同的记号。这些作用具体定义如下

$$\varphi(\mu) := \mu \circ \Psi_\varphi \text{ and } \varphi[\mu] := [\mu \circ \Psi_\varphi]$$

对于 $\varphi \in \mathrm{COE}(X_E,\sigma_E)$ 和 $\mu \in M(X_E,\sigma_E)+$，.

注 4.3。 作用 $\mathrm{Out}(\mathcal{G}_E) \curvearrowright M(X_E,\sigma_E)+$ 与测度的推前完全不同。事实上，对于 $\varphi \in \mathrm{COE}(X_E,\sigma_E)$，$\Psi_\varphi\colon M(X_E,\sigma_E)_+ \to M(X_E,\sigma_E)+$ 不会保持$P(X_E,\sigma_E)$，除非 φ 是强 *COE*（见 [50, 定理 7。2]）。

注记 4.4. 设 E、F 是非细分圆的强连通图。连续轨道等价 $X_E \to X_F$也以同样的方式诱导同胚 $M(X_E,\sigma_E)_+ \to M(X_F,\sigma_F)+$ 以及 $\mathbb{P}M(X_E,\sigma_E)_+ \to \mathbb{P}M(X_F,\sigma_F)+$。

现在我们的目标是证明，外自同构群 $\mathrm{Out}(\mathcal{G}_E) \curvearrowright \mathbb{P}M(X_E,\sigma_E)+$ 是拓扑自由的边界作用。我们的第一个观察是，射影测度空间是 $[E^*_{\mathrm{prim}}]$ 的一种紧化。这是 [68,定理 1] 的推论。

命题 4.5. 若 E 是强连通的，则 $\{[\eta_{[p]}] : [p] \in [E^*_{\mathrm{prim}}]\}$ 在 $\mathbb{P}M(X_E,\sigma_E)+$ 中稠密。

证明. 我们首先断言，可以假设 E 是本原的。设 $E^0 = E^0_0 \sqcup \cdots \sqcup E^0_{d-1}$ 是 E 的周期分解，$X_E = X_0 \sqcup \cdots \sqcup X_{d-1}$ 是相应分解。于是，概率测度 $P(X_E,\sigma_E) \cong P(X_0,\sigma_E^d) = P(X_{E_0},\sigma_{E_0})$ 之间存在单纯形同构。事实上，对于 $\mu \in P(X_E,\sigma_E)$，测度 $d\mu|_{X_0}$ 属于 $P(X_{E_0},\sigma_{E_0})$，且映射 $\mu \mapsto d\mu|_{X_0}$ 可逆，其逆映射为 $\nu \mapsto \frac{1}{d}\sum_{i=0}^{d-1} (\sigma_E^i)_*\nu$。这一双射是单纯形同构，并将周期测度集合相互对应。因此，我们可以假设 E 是本原的。

如第 2.7 节所述，典范投影映射 $\pi_E\colon X_E \to X_E$ 诱导出单纯形同构 $P(X_E, \sigma_E) \cong P(X_E, \sigma_E)$。显然，此映射将 X_E上来自有限σ_E-轨道的概率测度集合与集合 $\{\frac{1}{|p|}\eta_{[p]} : [p] \in [E^*_{\mathrm{prim}}]\}$对应起来。因此，只需证明 X_E 上来自有限 σ_E-轨道的概率测度在 X_E上所有移位不变概率测度组成的集合中稠密。已知本原图上的双侧有限型移位具有规范性，故结论由 [68] 得出。□

命题 4.6。 设 E, F 是非细分圆的强连通图。设 $\alpha\colon\ \mathcal{G}_E \to \mathcal{G}_F$ 是群胚同构。对于每个本原圈 $p \in E^*_{\mathrm{prim}}$，有

$$\alpha(\eta_{[p]}) = \eta_{\alpha[p]}.$$

证明。 映射 $\alpha\colon M(X_E,\ \sigma_E)_+ \to M(X_F,\ \sigma_F)+$ 由以下性质刻画：对于 $\mu \in M(X_E,\ \sigma_E)+$，有

$$\alpha(\mu) = \mu \circ (\Phi_E \circ \mathrm{H}^1(\alpha) \circ \Phi_F^{-1}),$$

其中 $\Phi_E\colon \mathrm{H}^1(\mathcal{G}_E) \to \mathrm{H}^E$ 是第 2.7 节中的同构。因此，

$$\alpha(\mu)(\Phi_F(\rho)) = \int_{X_E} \Phi_E(\rho \circ \alpha)\, d\mu = \int_{X_E} (\rho \circ \alpha)(x, 1, \sigma_E(x))\, d\mu$$

对于所有 $\rho \in$ 同态集 $(\mathcal{G}_F,\ \mathbb{Z})$。令 $p \in E^*_{\mathrm{prim}}$，并取满足 $\alpha[p] = [q]$ 的 $q \in F^*_{\mathrm{prim}}$。于是，我们可以将 $\alpha^0(p^\infty) = wq^\infty$ 写成某个 $w \in E^*$。根据 [16, 注 4.6 和命题 4.8],，有 $\alpha(p^\infty,\ |p|,\ p^\infty) = (wq^\infty,\ |q|,\ wq^\infty)$。因此，

$$\begin{aligned}\alpha(\eta_{[p]})(\Phi_F(\rho)) &= \sum_{i=0}^{|p|-1} (\rho \circ \alpha)(\sigma_E^i(p^\infty), 1, \sigma_E^{i+1}(p^\infty)) \\ &= \rho\left(\alpha(p^\infty, |p|, p^\infty)\right) = \rho(wq^\infty, |q|, wq^\infty) = \rho(q^\infty, |q|, q^\infty) = \eta_{[q]}(\Phi_F(\rho))\end{aligned}$$

对于所有 $\rho \in$ 同态集 $(\mathcal{G}_F,\ \mathbb{Z})$。这里我们用到 $(q^\infty,\ |q|,\ q^\infty)$ 和 $(wq^\infty,\ |q|,\ wq^\infty)$ 在 $\mathcal{G}_E$ 中共轭，因此 $\rho(wq^\infty,\ |q|,\ wq^\infty) = \rho(q^\infty,\ |q|,\ q^\infty)$。我们已经证明 $\alpha(\eta_{[p]}) = \eta_{[q]}$。□

我们建立射影测度空间拓扑的基本性质。这些性质将在第 6 节中频繁使用。

定义 4.7。 对于 $w \in E^*$ 和 $\mu \in M(X_E, \sigma_E)+$，令

$$\langle w, \mu\rangle \coloneqq \mu(\mathcal{Z}(w)).$$

对于 $[\mu] \in \mathbb{P}M(X_E, \sigma_E)+$、$\varepsilon > 0$ 和 $R \in \mathbb{Z}_{>0}$，令

$$U([\mu], \varepsilon, R) \coloneqq \left\{[\nu] \in \mathbb{P}M(X_E, \sigma_E)_+ : \left|\frac{\langle w, \nu\rangle}{\|\nu\|} - \frac{\langle w, \mu\rangle}{\|\mu\|}\right| < \varepsilon \text{ for all } w \in E^* \text{ with } |w| \le R\right\}.$$

引理 4.8。 对于每个 $[\mu] \in \mathbb{P}M(X_E, \sigma_E)+$，族 $\{U([\mu], \varepsilon, R)\}_{\varepsilon,\ R}$ 是 $[\mu]$ 的邻域基。此外，存在一个连续嵌入 $\mathbb{P}M(X_E, \sigma_E)_+ \hookrightarrow M(X_E, \sigma_E)+$，由 $[\nu] \mapsto \nu/||\nu||$ 给出。

证明。 连续映射 $[\nu] \mapsto \nu/||\nu||$ 是到其像 $P(X_E,\ \sigma_E)$ 上的同胚。由于柱集上的示性函数张成了 $C(X_E, \mathbb{C})$ 的稠密子空间，开集

$$V(\mu, \varepsilon, R) \coloneqq \{\nu \in M(X_E, \sigma_E)_+ : |\langle w, \nu\rangle - \langle w, \mu\rangle| < \varepsilon \text{ for all } w \in E^* \text{ with } |w| \le R\}$$

根据弱*拓扑的定义，$\varepsilon > 0$ 和 $R > 0$ 构成 $\mu \in P(X_E,\ \sigma_E)$ 的邻域基。因此，结论成立。□

引理 4.9. 设 $\mu \in M(X_E, \sigma_E)+$，并设 $v, w \in E^*$。如果 w 包含一个 v-段，那么

$$\langle w, \mu\rangle \le \langle v, \mu\rangle$$

证明. 记 $w = w_1 v w_2$ 为 $w_1,\ w_2 \in E^*$，并设 $n = |w_1|$。由 μ 的移位不变性，我们有

$$\langle v, \mu\rangle = \sum_{w' \in E^n, r(w') = s(v)} \langle w' v, \mu\rangle \ge \langle w_1 v, \mu\rangle \ge \langle w_1 v w_2, \mu\rangle.$$

□

定义 4.10。 令 $v \in E^*$, $w \in E^*_{\mathrm{prim}}$，并写作 $[w] = \{w(1)...\, w(n)\}$。令 $\langle v, [w]\rangle$ 表示满足 $w(k)$ 以 v 开头的 $k \in \{1, \ldots, n\}$ 的数量。

注意，$\langle v, [w]\rangle$ 几乎等于 w 中 v 段的数量，但通过循环置换还可以找到另一段 v。下一个引理可由定义直接得出：

引理 4.11。设 $v \in E^*$、$w \in E^*_{\mathrm{prim}}$。假设 $|v| \le |w|$。那么，我们有

$$\frac{\langle v, \eta_{[w]}\rangle}{\|\eta_{[w]}\|} = \frac{\langle v, [w]\rangle}{|w|}.$$

引理 4.12。对于每个 $v \in E^*$，由下式给出的函数 $\mathbb{P}M(X_E, \sigma_E)_+ \to \mathbb{R}_{\ge 0}$

$$[\nu] \mapsto \frac{\langle v, \nu\rangle}{\|\nu\|}$$

是连续的。

证明。显然，它在 $M(X_E, \sigma_E)$+ 上连续，且其取值不依赖于 $[\nu]$ 的代表元选择。因此，它在 $\mathbb{P}M(X_E, \sigma_E)$+ 上诱导出一个连续映射。□

引理 4.13。设 $N \in \mathbb{Z}_{>0}$、$w \in E^N$。那么，以下结论成立：

(1) 存在一个典范嵌入 $\mathbb{P}M(X_{E^{[N]}\setminus w}, \sigma_{E^{[N]}\setminus w})_+ \to \mathbb{P}M(X_E, \sigma_E)$+. *(2)* 在 *(1)* 中，像恰好等于满足 $\langle w, \mu\rangle = 0$ 的类 $[\mu]$。

证明。(1)：首先注意，有限型子移位 $(X_{E^{[N]}}, \sigma_{E^{[N]}})$ 通过映射典范地对应于 (X_E, σ_E)

$$x = x_{[0]}x_{[1]}x_{[2]}\cdots \mapsto (x_{[0]})_{[0]}(x_{[1]})_{[0]}(x_{[2]})_{[0]}\cdots.$$

根据定义，$(x_{[i]})_{[0]}$ 表示路径 $x_{[i]} \in E^N$ 的第一条边。在此对应下，子移位 $(X_{E^{[N]}\setminus w}, \sigma_{E^{[N]}\setminus w})$ 对应于

$$Y := \{x \in X_E \mid x_{[k,k+N-1]} \ne w \text{ for all } k \ge 0\}.$$

也就是说，$(X_{E^{[N]}\setminus w}, \sigma_{E^{[N]}\setminus w}) \cong (Y, \sigma_E)$。因此，该嵌入由包含映射 $Y \to X_E$ 的推前诱导而来，它是移位等变的。

(2)：对于满足 $\langle w, \mu\rangle = 0$ 的 $\mu \in M(X_E, \sigma_E)$+，由引理 4.9，对于所有包含 w 的 $w' \in E^*$，都有 $\langle w', \mu\rangle = 0$。由此可知，$\mu$ 集中于 $X_E \setminus \bigcup_{w'} Z(w')$ 上，其中并集遍历所有包含 w 的词w'，这恰好就是 Y。□

引理 4.13 将按以下方式使用，但 $E = R_2$ 的情形除外：

推论 4.14。设 $(e, f) \in E^2$。假设 $E^{[2]} \setminus ef$ 是强连通的。若 $[\mu] \in \mathbb{P}M(X_E, \sigma_E)$+ 满足 $\langle ef, \mu\rangle = 0$，则 $[\mu]$ 可由射影类 $[\eta_{[w]}]$ 逼近，使得 w 不包含 ef。

证明。这可由引理 4.13 和命题 4.5 得出。□

4.2. 标记 COE。有限型子移位的标记自同构概念可追溯至 [9], ，另见 [1]和 [6]。我们修改了通常的定义，允许数据集由两个长度（可能）不同的词组成。设 $D = \{d, d'\} \subseteq E^* \cup \{o\}$，其中 $d \ne d'$（即数据），满足 $s(d) = s(d') = v$ 且$r(d) = r(d') = u$。设 $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}' \in E^*$（即标记），使得 $s(\mathfrak{m}') = u$ 且 $r(\mathfrak{m}) = v$。我们假设要么 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}'$，要么 $\mathfrak{m} \ne \mathfrak{m}'$ 且 $|\mathfrak{m}| = |\mathfrak{m}'| = 1$。

我们希望通过将 x 中每个 $\mathfrak{m}d\mathfrak{m}'$ 替换为 $\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}'$，并将 x 中每个 $\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}'$ 替换为 $\mathfrak{m}d\mathfrak{m}'$，来定义映射 φ: $X_E \to X_E$。现在我们引入重叠条件，以确保这样的映射是双射。

定义 4.15。 对于 w、 $w' \in E^*$， w 与 w' 的重叠集合 定义为

$$S(w, w') = \{k \in \mathbb{Z}_{>0} \colon w_{[|w|-k,|w|-1]} = w'_{[0,k-1]}\}.$$

在本小节的其余部分，我们假设以下条件，并称之为重叠条件 （参见 [44,第 13.2] 节）：

- $\mathfrak{m}d\mathfrak{m}'$ 不是 $\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}'$的子词，且 $\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}'$ 不是 $\mathfrak{m}d\mathfrak{m}'$的子词。
- 若 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}'$，则

$$S(\mathfrak{m}d\mathfrak{m}, \mathfrak{m}d'\mathfrak{m}),\ S(\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}, \mathfrak{m}d\mathfrak{m}) \subseteq \{1, \dots, |\mathfrak{m}|\},$$
$$S(\mathfrak{m}d\mathfrak{m}, \mathfrak{m}d\mathfrak{m}) \subseteq \{1, \dots, |\mathfrak{m}|\} \cup \{|\mathfrak{m}d\mathfrak{m}|\},$$
$$S(\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}, \mathfrak{m}d'\mathfrak{m}) \subseteq \{1, \dots, |\mathfrak{m}|\} \cup \{|\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}|\}.$$

- 若 $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}'$ 且 $\mathfrak{m}$， $\mathfrak{m}' \in E^1$，则

$$S(\mathfrak{m}d\mathfrak{m}', \mathfrak{m}d'\mathfrak{m}') = S(\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}', \mathfrak{m}d\mathfrak{m}') = \emptyset,$$
$$S(\mathfrak{m}d\mathfrak{m}', \mathfrak{m}d\mathfrak{m}') = \{|\mathfrak{m}d\mathfrak{m}'|\},$$
$$S(\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}', \mathfrak{m}d'\mathfrak{m}') = \{|\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}'|\}.$$

引理 4.16. 我们有 $\mathcal{Z}(\mathfrak{m}d\mathfrak{m}') \cap \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}') = \emptyset$。

证明。 由于 $S(\mathfrak{m}d\mathfrak{m}', \mathfrak{m}d'\mathfrak{m}')$ $S(\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}', \mathfrak{m}d\mathfrak{m}') \subseteq \{1, \dots, |\mathfrak{m}|\}$，因此不存在满足 $\mathfrak{m}d\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}d'\mathfrak{m}'w$ 或 $\mathfrak{m}d\mathfrak{m}'w = \mathfrak{m}d'\mathfrak{m}'$ 的 $w \in E^* \cup \{o\}$。于是， $\mathcal{Z}(\mathfrak{m}d\mathfrak{m}') \cap \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}') = \emptyset$。□

我们将 φ 定义为： $X_E \to X_E$，具体如下：给定 $x \in X_E$，我们归纳地定义序列 $w_n \in E^*$ 和 $y_n \in X_E$：

(1) $w_0 \coloneqq o$，且 $y_0 \coloneqq x$；(2)• 若 $y_n \in \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d\mathfrak{m}')$，则 $w_{n+1} \coloneqq \mathfrak{m}d'$，并将 y_{n+1} 定义为满足 $y_n = \mathfrak{m}dy_{n+1}$ 的唯一无限路径；

- 若 $y_n \in \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}')$，则 $w_{n+1} \coloneqq \mathfrak{m}d$，并将 y_{n+1} 定义为满足 $y_n = \mathfrak{m}d'y_{n+1}$ 的唯一无限路径；

• 若 $y_n \in X_E \setminus \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d\mathfrak{m}') \cup \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}')$，则 $w_{n+1} \colon = (y_n)_{[0]}$ 以及 y_{n+1} 定义为满足 $y_n = w_{n+1}y_{n+1}$的唯一无限路径。

根据引理 4.16，该过程定义良好。现在我们令 $\varphi(x) \colon = w_1w_2 \cdots$。注意到， φ 的特征由下式给出

$$\varphi(x) = \begin{cases} \mathfrak{m}d'\varphi(\mathfrak{m}'y) & \text{if } x = \mathfrak{m}d\mathfrak{m}'y \text{ for some } y \in X_E, \\ \mathfrak{m}d\varphi(\mathfrak{m}'y) & \text{if } x = \mathfrak{m}d'\mathfrak{m}'y \text{ for some } y \in X_E, \\ x_{[0]}\varphi(x_{[1,\infty)}) & \text{if } x \in X_E \setminus \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d\mathfrak{m}') \cup \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}'). \end{cases}$$

定义 4.17。 我们将上面定义的连续轨道等价 φ 称为关于标记 $\mathfrak{m}$、 $\mathfrak{m}'$ 以及数据集 $D = \{d, d'\}$的标记 COE 。若 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}'$，则称其为I 型 ； 若 $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}'$ 且 $|\mathfrak{m}| = |\mathfrak{m}'| = 1$，则称其为II 型 。

命题 4.18。 标记 *COE* φ 是一个自反同胚。

证明。 我们首先证明 φ的连续性。令

$$c = \frac{\min\{|\mathfrak{m}d\mathfrak{m}'|, |\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}'|\}}{\max\{|\mathfrak{m}d\mathfrak{m}|, |\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}'|\}}.$$

对于 x， $y \in X_E$，若存在某个 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 使得 $x_{[0,n-1]} = y_{[0,n-1]}$，则根据 φ 的定义， $\varphi(x)_{[0,m-1]} = \varphi(x)_{[0,m-1]}$，其中$m$ 是 cn 的整数部分。因此，若 $x_n \in X_E$ 是一个收敛到$x \in X_E$的序列，则当 $n \to \infty$ 时， $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$。这表明其具有连续性。

因此，只需证明 $\varphi^2 = \mathrm{id}$。设某个 $y \in X_E$ 使得 $x = \mathfrak{m}d\mathfrak{m}'y$。那么，我们有 $\varphi(x) = \mathfrak{m}d'\varphi(\mathfrak{m}'y)$。我们断言 $\varphi(\mathfrak{m}'y) \in \mathcal{Z}(\mathfrak{m}')$。若其为 II 型，则有 $\mathfrak{m}'y \notin \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d\mathfrak{m}') \cup \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}')$，从而$\varphi(\mathfrak{m}'y) = \mathfrak{m}'\varphi(y)$。假设其为 I 型。将 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$ 分解为 $\mathfrak{m}_1$、$\mathfrak{m}_2 \in E^* \cup \{o\}$，使得对所有 $0 \le k \le |\mathfrak{m}_1| - 1$，$\mathfrak{m}_{[k,|\mathfrak{m}|-1]}y \notin \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d\mathfrak{m}) \cup \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d'\mathfrak{m})$，且 $\mathfrak{m}_2 y \in \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d\mathfrak{m}) \cup \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d'\mathfrak{m})$。若 $\mathfrak{m}_2 = o$，则根据 φ的定义，$\varphi(\mathfrak{m}y) = \mathfrak{m}\varphi(y) \in \mathcal{Z}(\mathfrak{m})$。否则，$\mathfrak{m}_2$ 是 $\mathfrak{m}$ 的前缀。因此，我们有$\varphi(\mathfrak{m}y) = \mathfrak{m}_1\varphi(\mathfrak{m}_2 y)$，且 $\varphi(\mathfrak{m}_2 y) \in \mathcal{Z}(\mathfrak{m}) \subseteq \mathcal{Z}(\mathfrak{m}_2)$，从而根据 φ 的定义，$\varphi(\mathfrak{m}y) \in \mathcal{Z}(\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2) = \mathcal{Z}(\mathfrak{m})$。因此，我们有 $\varphi(x) \in \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}')$，从而 $\varphi^2(x) = \mathfrak{m}d\varphi^2(\mathfrak{m}'y)$。同样，若存在某个 $y \in X_E$ 使得 $x = \mathfrak{m}d'\mathfrak{m}'y$，则 $\varphi^2(x) = \mathfrak{m}d'\varphi^2(\mathfrak{m}'y)$。

令 $x \in X_E \setminus \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d\mathfrak{m}') \cup \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}')$。我们证明 $\varphi(x) \in X_E \setminus \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d\mathfrak{m}') \cup \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}')$。假设对于某个 $y \in X_E$，$\varphi(x) = \mathfrak{m}d\mathfrak{m}'y$。如果对所有 $0 \le k \le |\mathfrak{m}d\mathfrak{m}'| - 1$ 均有 $x_{[k,\infty)} \notin \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d\mathfrak{m}') \cup \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}')$，则

$$\varphi(x) = x_{[0,|\mathfrak{m}d\mathfrak{m}'|-1]}\varphi(x_{[|\mathfrak{m}d\mathfrak{m}'|-1,\infty)}) = \mathfrak{m}d\mathfrak{m}'y,$$

从而 $x_{[0,|\mathfrak{m}d\mathfrak{m}'|-1]} = \mathfrak{m}d\mathfrak{m}'$，这就产生矛盾。因此，我们可以分解 $x = wz$，使得对所有 $0 \le k \le |w| - 1$，$0 < |w| < |\mathfrak{m}d\mathfrak{m}'|$，$x_{[k,\infty)} \notin \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d\mathfrak{m}') \cup \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}')$，并且 $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d\mathfrak{m}') \cup \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}')$。于是，我们有 $\varphi(x) = w\varphi(z)$，且 $\varphi(z) \in \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d\mathfrak{m}') \cup \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}')$。如果 φ是 II 型，则这与重叠条件矛盾。设 φ 是 I 型。于是我们看到 $|w| < |\mathfrak{m}d|$，因为如果 $|w| \ge |\mathfrak{m}d|$，那么 φ 不会改变 x 的第一个 w段以及 x的后续 $\mathfrak{m}$段，因此 x 以 $\mathfrak{m}d\mathfrak{m}$ 开头，因为 $|w| + |\mathfrak{m}| \ge |\mathfrak{m}d\mathfrak{m}|$，这就产生矛盾。因此，重叠大于 $|\mathfrak{m}|$，这就产生矛盾。于是，$\varphi(x) \notin \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d\mathfrak{m}')$。同理可见，$\varphi(x) \notin \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}')$，从而$\varphi(x) \in X_E \setminus \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d\mathfrak{m}') \cup \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}')$。因此，$\varphi^2(x) = x_{[0]}\varphi^2(x_{[1,\infty]})$。

综上，我们得到

$$\varphi^2(x) = \begin{cases} \mathfrak{m}d\varphi^2(\mathfrak{m}'y) & \text{if } x = \mathfrak{m}d\mathfrak{m}'y \text{ for some } y \in X_E, \\ \mathfrak{m}d'\varphi^2(\mathfrak{m}'y) & \text{if } x = \mathfrak{m}d'\mathfrak{m}'y \text{ for some } y \in X_E, \\ x_{[0]}\varphi^2(x_{[1,\infty]}) & \text{if } x \in X_E \setminus \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d\mathfrak{m}') \cup \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}'). \end{cases}$$

因此，取极限可得 $\varphi^2 = \mathrm{id}$。 □

命题 4.19. 标记 *COE* φ 确实是一个连续轨道等价。

证明. 设 $m = |\mathfrak{m}| = |\mathfrak{m}'|$。由引理 4.16，我们可以定义映射 $k, l\colon X_E \to \mathbb{Z}_{\ge 0}$，定义如下：

$$k(x) \coloneqq \begin{cases} m - 1 + |d| & \text{if } x \in \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d\mathfrak{m}'), \\ m - 1 + |d'| & \text{if } x \in \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}'), \\ 0 & \text{if } x \in X_E \setminus \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d\mathfrak{m}') \cup \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}'), \end{cases}$$

and

$$l(x) \coloneqq \begin{cases} m + |d'| & \text{if } x \in \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d\mathfrak{m}'), \\ m + |d| & \text{if } x \in \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}'), \\ 1 & \text{if } x \in X_E \setminus \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d\mathfrak{m}') \cup \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}'). \end{cases}$$

那么，k, l 是局部常值的，因此连续。我们将证明，对于所有 $x \in X_E$，都有 $\sigma_E^{k(x)}(\varphi(\sigma_E(x))) = \sigma_E^{l(x)}(\varphi(x))$。由于 φ 是一个对合，这足以证明 φ 是一个连续轨道等价。

若 $x \in \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d\mathfrak{m}')$，则可写作 $x = \mathfrak{m}d\mathfrak{m}'y$，并且有 $\varphi(x) = \mathfrak{m}d'\varphi(\mathfrak{m}'y)$。另一方面，有 $\sigma_E(x) = w\mathfrak{m}'y$，其中 $w = \mathfrak{m}_{[1,m-1]}d$。重叠条件意味着，对于每个 $0 \le k \le |w| - 1$，$w_{[k,|w|-1]}\mathfrak{m}'$ 都不是 $\mathfrak{m}d\mathfrak{m}'$ 或 $\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}'$ 的前缀，并且 $\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}'$ 不是 $w_{[k,|w|-1]}\mathfrak{m}'$ 的前缀。因此，对于每个 $0 \le k \le |w| - 1$，都有 $\sigma_E(x)_{[k,\infty)} \notin \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d\mathfrak{m}') \cup \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}')$，从而 $\varphi(\sigma_E(x)) = \mathfrak{m}_{[1,m-1]}d\varphi(\mathfrak{m}'y)$。现在可知 $\sigma_E^{m-1+|d|}(\varphi(\sigma_E(x))) = \sigma_E^{m+|d'|}(\varphi(x))$。同样的论证也适用于 $x \in \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}')$。若 $x \in X_E \setminus \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d\mathfrak{m}') \cup \mathcal{Z}(\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}')$，则可写作 $x = ey$，其中某个 $e \in E^1$ 满足 $\varphi(x) = e\varphi(y)$。现在有 $\varphi(\sigma_E(x)) = \varphi(y) = \sigma_E(e\varphi(y)) = \sigma_E(\varphi(x))$。□

4.3. **标记 COE 的良代表元**。在本小节中，我们考虑一个关于标记 $\mathfrak{m}$，$\mathfrak{m}' \in E^1$ 和 $D = \{o, v\}$ 的 I 型或 II 型标记 COE φ，其中 $v \in E^*$。

定义 4.20。设 $[w] \in [E^*_{\mathrm{cycle}}]$。

(1) 假设 φ 是 *I* 型。

- 当 $[w]$ 的一个代表元包含一个 $\mathfrak{m}\mathfrak{m}$-段或一个 $\mathfrak{m}v\mathfrak{m}$-段时，称代表元 $w \in [w]$ 为良代表，若 w 以 $\mathfrak{m}$ 开始，并以 $\mathfrak{m}$ 或 $\mathfrak{m}v$ 结束。
- 当 $[w] = [\mathfrak{m}]$ 时，唯一的代表元 $\mathfrak{m} \in [\mathfrak{m}]$ 称为良代表。当 $[w] = [\mathfrak{m}v]$ 时，代表元 $\mathfrak{m}v \in [\mathfrak{m}v]$ 称为良代表。

- 当 $[w] \neq [\mathfrak{m}]$、$[\mathfrak{m}v]$，且每个代表元 $[w]$ 都不包含 $\mathfrak{m}\mathfrak{m}$-段，也不包含 $\mathfrak{m}v\mathfrak{m}$-段时，每个代表元 $w \in [w]$ 都称为良代表。*(2)* 假设 φ 是 *II* 型。

- 当 $[w]$ 的一个代表元包含 $\mathfrak{m}\mathfrak{m}'$-段或 $\mathfrak{m}v\mathfrak{m}'$-段时，若代表元 $w \in [w]$ 以 $\mathfrak{m}\mathfrak{m}'$ 或 $\mathfrak{m}v\mathfrak{m}'$ 结尾，则称其为良代表。
- 当 $[w]$ 的每个代表元都不包含 $\mathfrak{m}\mathfrak{m}'$-段，也不包含 $\mathfrak{m}v\mathfrak{m}'$-段时，每个代表元 $w \in [w]$ 都称为良代表。

对于上述标记 COE φ，我们按以下方式关联一个映射 $F_\varphi\colon [E^*_{\mathrm{cycle}}] \to [E^*_{\mathrm{cycle}}]$：令 $[w] \in [E^*_{\mathrm{cycle}}]$，并令 w 为 $[w]$ 的一个良代表。

若 φ 为 II 型，则

(1) 令 $w_0 := o$，并令 $y_0 := w$；(2) 若 y_n 以 $\mathfrak{m}v\mathfrak{m}'$ 开始，则 $w_{n+1} := \mathfrak{m}$，并将 y_{n+1} 定义为满足 $y_n = \mathfrak{m}v y_{n+1}$ 的唯一有限路径；

- 若 y_n 以 $\mathfrak{m}\mathfrak{m}'$开头，则 $w_{n+1} := \mathfrak{m}v$ 并将 y_{n+1} 定义为满足 $y_n = \mathfrak{m}y_{n+1}$的唯一有限路径；

- 若 y_n 非空，且既不以 $\mathfrak{m}\mathfrak{m}'$ 开头，也不以 $\mathfrak{m}v\mathfrak{m}'$开头，则将 w_{n+1} 定义为 y_n的第一条边，并将 y_{n+1} 定义为满足$y_n = w_{n+1}y_{n+1}$的唯一有限（或空）路径。

- 若 $y_n = o$，则令 $N = n$，并结束此过程。

然后，我们令 $F_\varphi(w) = w_1 \dots w_N$。

若 φ 是 I 型，则

(1) 若 $w \neq \mathfrak{m}$，$\mathfrak{m}v$ 且 w 不包含任何 $\mathfrak{m}\mathfrak{m}$段或任何 $\mathfrak{m}v\mathfrak{m}$段，则令 $F_\varphi(w) = w$并结束此过程。(2) 否则，令 $w_0 := o$ 并令 $y_0 := w\mathfrak{m}$；(3)• 若 y_n 以 $\mathfrak{m}v\mathfrak{m}$开头，则 $w_{n+1} := \mathfrak{m}$ 并将 y_{n+1} 定义为满足 $y_n = \mathfrak{m}v y_{n+1}$的唯一有限路径；

- 若 y_n 以 $\mathfrak{m}\mathfrak{m}$开头，则定义 $w_{n+1} := \mathfrak{m}v$ 和 y_{n+1} 为满足 $y_n = \mathfrak{m}y_{n+1}$的唯一有限路径；

- 若 $y_n \neq \mathfrak{m}$ 且既不以 $\mathfrak{m}\mathfrak{m}$ 开头，也不以 $\mathfrak{m}v\mathfrak{m}$开头，则定义 w_{n+1} 为 y_n的第一条边，并定义 y_{n+1} 为满足 $y_n = w_{n+1}y_{n+1}$的唯一有限路径。
- 若 $y_n = \mathfrak{m}$，则令 $N = n$，至此完成此过程。

然后，令 $F_\varphi(w) = w_1 \dots w_N$。注意，$F_\varphi(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}v$ 且 $F_\varphi(\mathfrak{m}v) = \mathfrak{m}$。

我们定义 $F_\varphi\colon [E^*_{\mathrm{cycle}}] \to [E^*_{\mathrm{cycle}}]$ 为 $F_\varphi([w]) = [F_\varphi(w)]$，对于具有良代表元的 $[w] \in [E^*_{\mathrm{cycle}}]$ $w \in [w]$。注意，如果 w_1，$w_2 \in [w]$ 都是良代表元，那么不难看出，$F(w_1)$ 和 $F(w_2)$ 在循环置换下等价。

注 4.21. </style}如果 是 的一个良代表元，那么根据构造，(w^∞) $= F_\varphi(w)^\infty$ 。这是因为根据重叠条件， φ 不会在 ww的中间引起任何替换。

引理 4.22。 如果 $[w] \in [E^*_{\mathrm{prim}}]$，那么 $F_\varphi([w]) \in [E^*_{\mathrm{prim}}]$。特别地，对于每个 $[w] \in [E^*_{\mathrm{prim}}]$，都有 $\varphi[w] = F_\varphi([w])$ 。

证明。 令 $w \in [w]$ 为一个良代表。于是， $F_\varphi(w)$ 再次是 $F_\varphi([w])$ 的一个良代表。因此， $F^2_\varphi([w]) = [\bar{F}^2_\varphi(w)]$。现在我们可以看到， $\bar{F}^2_\varphi(w) = w$，其方式与命题 4.18 相同。 由重叠条件可知， $F_\varphi(w^n) = F_\varphi(w)^n$。因此，我们有 $F_\varphi([E^*_{\mathrm{cycle}}] \setminus [E^*_{\mathrm{prim}}]) \subseteq [E^*_{\mathrm{cycle}}] \setminus [E^*_{\mathrm{prim}}]$。由于 $F^2_\varphi =$ 为恒等映射，我们得出 $F_\varphi([E^*_{\mathrm{cycle}}] \setminus [E^*_{\mathrm{prim}}]) = [E^*_{\mathrm{cycle}}] \setminus [E^*_{\mathrm{prim}}]$ ，且 $F_\varphi([E^*_{\mathrm{prim}}]) = [E^*_{\mathrm{prim}}]$。 □

5. 忠实性与传递性

现在我们将证明，$\mathsf{Out}(\mathcal{G}_E) \curvearrowright \mathbb{P}M(X_E, \sigma_E)_+$ 是一个拓扑自由的边界作用。证明分为三个步骤：证明 $\mathsf{Out}(\mathcal{G}_E) \curvearrowright [E^*_{\mathrm{prim}}]$的忠实性、$\mathsf{Out}(\mathcal{G}_E) \curvearrowright [E^*_{\mathrm{prim}}]$的传递性，以及 $\mathsf{Out}(\mathcal{G}_E) \curvearrowright \mathbb{P}M(X_E, \sigma_E)_+$的强近端性。本节将证明前两项。

5.1. 忠实性。本小节中，我们证明 $\mathsf{Out}(\mathcal{G}_E) \curvearrowright [E^*_{\mathrm{prim}}]$的作用是忠实的。若同胚 $\bar{\varphi}\colon X_E \to X_E$ 满足 $\bar{\varphi} \circ \bar{\sigma}_E = \bar{\sigma}_E \circ \bar{\varphi}$，则称其为一个共轭。下一个引理是定理 2.5]的一个变体：

引理 5.1。设 E 是一个强连通图，且对于任意 $n \geq 1$，都有 $E \ncong S^1_n$。设 $E^0 = E^0_0 \sqcup \cdots \sqcup E^0_{d-1}$为周期分解，$X_E = X_0 \sqcup \cdots \sqcup X_{d-1}$ 为相应分解。设$\bar{\varphi}\colon \overline{X}_E \to \overline{X}_E$ 是一个共轭。假设对于所有周期点 $\bar{x} \in X_E$，都有 $\bar{\varphi}(\bar{x}) \in \bar{\sigma}^{\mathbb{Z}}_E(\bar{x})$ 。那么，存在一个局部常值函数 $L\colon X_E \to \mathbb{Z}$ ，使得对于所有 $\bar{x} \in X_E$，都有 $\bar{\varphi}(\bar{x}) = \bar{\sigma}^{L(x)}(\bar{x})$ ，其中 $x = \pi_E(\bar{x})$。

证明。 由于 φ 与移位可交换，只需证明存在一个局部常值函数$L\colon X_0 \to \mathbb{Z}$ ，使得对所有 $\bar{x} \in X_0$， $\bar{\varphi}(\bar{x}) = \bar{\sigma}^{L(x)}(\bar{x})$，其中 $X_0 = \pi_E(X_0)$ 且 $x = \pi_E(\bar{x})$。

设 $\overline{Y_i} := \overline{X_0} \cap \bar{\varphi}^{-1}(\overline{X_i})$。那么，我们有 $\overline{X_0} = \overline{Y_0 \sqcup \cdots \sqcup Y_{d-1}}$且 $\bar{\varphi}(\overline{Y_i}) \subseteq \overline{X_i}$。此外， Y_i 是$\bar{\sigma}^d_E$-不变的。在 Y_i 上定义 $n(\bar{x}) \equiv i$ 。我们断言 $\overline{\bar{\sigma}^{-i}(\bar{\varphi}(Y_i))} = \overline{Y_i}$。设 $\bar{x} \in \overline{Y_i}$ 是一个周期点。那么，由于 $\bar{x}$ 和 $\bar{\varphi}(\bar{x})$ 属于 σ 的同一轨道，对于某个 k，有 $\bar{\varphi}(\bar{x}) = \bar{\sigma}^{i+dk}_E(\bar{x})$。因此，由 Y_i 的 $\bar{\sigma}^d_E$-不变性可得 $\bar{\sigma}^{-i}(\bar{\varphi}(\bar{x})) \in Y_i$。于是，根据周期点的稠密性，$\overline{\bar{\sigma}^{-i}(\bar{\varphi}(Y_i))} \subseteq Y_i$。反过来，设 $\bar{y} \in Y_i$ 是一个周期点，并设 $\bar{x} = \bar{\varphi}^{-1}(\sigma^i(\bar{y}))$。那么，由于对于某个 k， $\bar{\varphi}(\bar{y}) = \bar{\sigma}^{i+dk}_E(\bar{y})$，我们有 $\bar{\varphi}^{-1}(\bar{y}) = \bar{\sigma}^{-i-dk}_E(\bar{y})$，因此由 Y_i 的 $\bar{\sigma}^d_E$-不变性可得 $\bar{x} = \bar{\sigma}^{-dk}_E(\bar{y}) \in Y_i$。由于 $\bar{\sigma}^{-i}\bar{\varphi}(\bar{x}) = \bar{y}$，我们有 $\bar{\sigma}^{-i}(\bar{\varphi}(Y_i)) \supseteq Y_i$。至此，我们已经证明了该断言。设对 $\bar{x} \in X_0$， $\bar{\psi}(\bar{x}) = \bar{\sigma}^{-n(\bar{x})}(\bar{\varphi}(\bar{x}))$。那么， $\bar{\psi}$ 是一个从 X_0 到 X_0 的同胚，且与 $\bar{\sigma}^d_E$ 可交换。于是，根据定理 2.5]，存在 $r \in \mathbb{Z}$ ，使得在 X_0 上 $\bar{\psi} = \bar{\sigma}^{dr}_E$。因此，对 $\bar{x} \in X_0$，有 $\bar{\varphi}(\bar{x}) = \bar{\sigma}^{L(\bar{x})}(\bar{x})$，其中$L(\bar{x}) = n(\bar{x}) + dr$。

尚需证明 L 可经由 π_E分解。令 $\bar{x} \in Y_i, \bar{y} \in Y_j$ 满足 $\bar{x}_{[0,\infty)} = \bar{y}_{[0,\infty)}$由于所有$Y_i$ 都是开集，当 N 足够大时，$\overline{\bar{\sigma}^{Nd}_E(\bar{x})}$ 和 $\overline{\bar{\sigma}^{Nd}_E(\bar{y})}$ 属于同一个 Y_k。由 Y_k 的 $\bar{\sigma}^d_E$-不变性可知， $k = i = j$。因此，根据映射 n 的定义，$L(\bar{x}) = L(\bar{y})$。 □

沿用 Matsumoto [48, 第 10 节，2] 若连续轨道等价在上同调群 H^E上诱导的映射保留典范序单位，即 $\Psi_\varphi([1_{X_E}]) = [1_{X_E}]$，则称其为强 *COE* 。注意，$\Psi_\varphi(1_{X_E}) = l - k$，其中 (k, l) 是任意的 φ-余循环对。

我们将用到 Matsumoto 从强 COE 构造双向共轭的方法，该方法见于 [48,命题 10.2 的证明。10]。

设我们有一个强连续轨道等价 $\varphi\colon X_E \to X_E$，其 φ-余循环对为 $(k,\ l)$。这意味着我们可以写作 $c := l-k = 1+b-b\circ\sigma_E$，其中某个连续函数为 $b\colon X_E \to \mathbb{N}$，见 [48,引理 10.2.4] 和 [48, 定义 10.2.1]。由 [48, 命题 10.2.10]，的证明可得一个共轭 $\bar{\varphi}\colon X_E \to X_E$，使得

$$\bar{\varphi}(\bar{x})_{[j,\infty)} = \sigma_E^{b(\bar{x}_{[j,\infty)})}(\varphi(\bar{x}_{[j,\infty)}))$$

对所有 $\bar{x} \in \overline{X}_E$ 和 $j \in \mathbb{Z}$，其中我们将 $\bar{x}_{[j,\infty)} \in X_E$ 视为从 $\bar{x}$ 的第 j 项开始的单侧无限序列。

命题 5.2。设 E 是一个强连通图，且对任意 $n \geq 1$都有 $E \ncong S_n^1$。若 φ ∈连续轨道等价(X_E, σ_E) 满足 $\varphi([x]_{\mathrm{tail}}) = [x]_{\mathrm{tail}}$ 对所有 $x \in X^{ep}$成立，则 φ 是内自同构。

证明。我们首先证明 φ 必定是强 COE。对于每个本原圈 p，我们利用 [48, 定理 9.3.11] 和命题 4.6 得到

$$\eta_{[p]}([c]) = \eta_{[p]}(\Psi_\varphi[1_{X_E}]) = \eta_{\varphi[p]}([1_{X_E}]) = \eta_{[p]}([1_{X_E}]),$$

使得 $\eta_{[p]}([c]-[1_{X_E}]) = 0$。由此，根据 [48,引理 9.1.3]，可得 $[c]-[1_{X_E}] = 0$。这表明 φ 是强 COE。

设 $\bar{\varphi}\colon \overline{X}_E \to \overline{X}_E$ 为本命题前几段中构造的共轭。我们将证明，对于每个周期点 $\bar{x} \in X_E$，均有 $\bar{\varphi}(\bar{x}) \in \sigma_E^{\mathbb{Z}}(\bar{x})$。这样的点可写为 $\bar{x} = p^{\pm\infty} = \ldots ppp\ldots$，其中 $(p^{\pm\infty})_{[0,|p|-1]} = p$，且 $p \in E^*_{\mathrm{prim}}$ 是一个本原圈。由于 $\bar{\varphi}$是一个共轭，我们有 $\bar{\varphi}(p^{\pm\infty}) = q^{\pm\infty}$，其中 $q \in E^*_{\mathrm{prim}}$ 且 $|p| = |q|$。这是因为，$(X_E, \bar{\sigma}_E)$ 中基数为 n 的轨道，恰好是 $r^{\pm\infty}$ 中满足 $r \in E^*_{\mathrm{prim}}$ 和 $|r| = n$ 的轨道。根据关于 φ 的假设，对于某个有限词 $w \in E^* \cup \{o\}$，有 $\varphi(p^\infty) = wp^\infty$。因此，我们有

$$q^\infty = (q^{\pm\infty})_{[0,\infty)} = (\bar{\varphi}(p^{\pm\infty}))_{[0,\infty)} = \sigma_E^{b(\bar{x}_{[0,\infty)})}(\varphi(\bar{x}_{[0,\infty)})) = \sigma_E^{b(p^\infty)}(wp^\infty),$$

这意味着 $[q] = [p]$ in $[E^*_{\mathrm{prim}}]$，因此 $\bar{\varphi}(\bar{x}) \in \sigma_E^{\mathbb{Z}}(\bar{x})$。由引理 5.1，我们选取一个局部常值函数 $L\colon X_E \to \mathbb{Z}$，使得对所有 $\bar{x} \in X_E$，$\bar{\varphi}(\bar{x}) = \bar{\sigma}^{L(x)}(\bar{x})$，其中 $x = \pi_E(\bar{x})$。

我们证明 L 必须非负。对所有满足 $x = \pi_E(\bar{x})$ 的 $\overline{x} \in X_E$，我们有

$$\bar{x}_{[L(x),\infty)} = \bar{\sigma}_E^{L(x)}(\bar{x})_{[0,\infty)} = \bar{\varphi}(\bar{x})_{[0,\infty)} = \sigma_E^{b(x)}(\varphi(x)). \tag{1}$$

由于刚　　式 (1) 的右端仅依赖于 $x = \bar{x}_{[0,\infty)}$，这就迫使对所有 $x \in X_E$，$L(x) \geq 0$。

固定 $x \in X_E$，并令 $\bar{x} \in \overline{X}_E$ 为满足 $\bar{x}_{[0,\infty)} = x$ 的一个元素。我们有

$$\sigma_E^{L(x)}(x) = \bar{\sigma}_E^{L(x)}(\bar{x})_{[0,\infty)} = \bar{\varphi}(\bar{x})_{[0,\infty)} = \sigma_E^{b(x)}(\varphi(x)),$$

这意味着 $(\varphi(x)\ b(x) - L(x)\ x) \in \mathcal{G}_E$。那么，映射

$$X_E \to \mathcal{G}_E,\ x \mapsto (\varphi(x), b(x) - L(x), x)$$

满足命题 3.2 中的条件。因此，φ是内自同构。 □

推论 5.3。作用 外自同构群$(\mathcal{G}_E) \curvearrowright [E^*_{\mathrm{prim}}]$ 和 外自同构群$(\mathcal{G}_E) \curvearrowright (\mathrm{H}^E,\ \mathrm{H}^E_+)$ 是忠实的。

证明。第一条结论由命题 5.2 立即得出。假设 $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_E)$ 满足 $\Psi_{\alpha^0} = \mathrm{id}$。那么，$\alpha$ 固定所有周期测度，因此根据命题 4.6，α 在 $[E^*_{\mathrm{prim}}]$ 上的作用是平凡的。因此，根据第一条结论，α 是内自同构。□

5.2. **传递性**。 在本节中，我们证明作用 $\mathsf{Out}(\mathcal{G}_E) \curvearrowright [E^*_{\mathrm{prim}}]$ 是传递的。我们固定一个强连通图 E。

定义 5.4. 对于一个圈 $p = p_1 \dots p_n$，其中 p_i 是一个素圈，令 $p[i,j] = p_i \dots p_j$。此外，令 $\ell(p) = n$，称其为 p 的素路径长度 。

在本节中，检验给定圈 p 的本原性时，我们可以使用素圈区间 $p[i,j]$ ，而不使用逐字母区间 $p_{[i,j]}$。这是因为，若对于某个 $k \geq 0$， $p = (p'_{[0,k]})^n$ ， $n \geq 2$，则 p' 是 $s(p)$ 处的一个圈，这意味着对于某个 $l \geq 0$，有 $p'_{[0,k]} = p[0,l]$ 。类似地，检验两个词 $\mathfrak{m}d\mathfrak{m}$ 和 $\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}$ 的重叠条件时，其中标记 $\mathfrak{m}$ 是一个圈，我们可以使用素圈区间。事实上，假设有 $(\mathfrak{m}d\mathfrak{m})[0,k-1] = (\mathfrak{m}d'\mathfrak{m})[n-k,n-1]$，其中 $n = |\mathfrak{m}d'\mathfrak{m}|$。那么，我们有 $s((\mathfrak{m}d'\mathfrak{m})[n-k]) = s((\mathfrak{m}d\mathfrak{m})[0]) = s(\mathfrak{m})$ 和 $r((\mathfrak{m}d\mathfrak{m})[k-1]) = r((\mathfrak{m}d'\mathfrak{m})[n-1]) = r(\mathfrak{m})$，因此 $(\mathfrak{m}d\mathfrak{m})[0,k-1] = (\mathfrak{m}d\mathfrak{m})[0,l-1]$ 且 $(\mathfrak{m}d'\mathfrak{m})[n-k,n-1] = (\mathfrak{m}d'\mathfrak{m})[N-l', N-1]$，其中 $N = \ell(\mathfrak{m}d'\mathfrak{m})$ 且 $l, l' \geq 0$。此外，因为 $(\mathfrak{m}d\mathfrak{m})[0,l-1] = (\mathfrak{m}d'\mathfrak{m})[N-l', N-1]$ 意味着两边的素路径长度相同，所以有 $l = l'$。

Le引理 5.5。 设 $p \in E^*_{\mathrm{cycle}}$ 是一个圈，并令 $N = \ell(p)$。设 $1 \leq k \leq N-1$。如果我们有 e

$$p[k, N-1]p[0, k-2] = p[0, N-2],$$

则 p 不是本原的。此外， p 的最小周期整除 最大公约数(k, N)。

注意，当 $k = 1$ 时， $p[0, k-2]$ 是空路径。对于一个圈 $p \in E^*_{\mathrm{cycle}}$，如果对于某个 $q \in E^*_{\mathrm{prim}}$ 我们有 $p = q^n$ ，则称 p 的最小周期等于 $\ell(q)$。

证明。 设 $p = p_0 \dots p_{N-1}$ 为素圈分解。通过比较素因子，该假设等价于

$$\begin{cases} p_i = p_{i+k} & (0 \leq i \leq N-k-1), \\ p_i = p_{i+N-k} & (0 \leq i \leq k-2). \end{cases} \tag{2}$$

我们将指标视为 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 的元素。于是，方程（2）等价于

$$p_i = p_{i+k} \ (0 \leq i \leq N-2). \tag{3}$$

我们在 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 上定义等价关系：当且仅当 $p_i = p_j$ 时 $i \sim j$ 。我们首先证明，等价关系 $\sim$ 比由 $x \mapsto x+k$ 定义的作用 $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 的轨道等价关系更细。为此，只需证明方程 $p_{k-1} = p_{N-1}$ 可由方程（3）得到。取 $m \geq 2$ 使得 $mk =$最小公倍数(k, N)，因为 $k < N$。那么， $k-1$、$2k-1$、.....、$(m-1)k-1 \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 是互不相同的元素，且其中没有一个与 $N-1$ 同余。因此，对于 $1 \leq l \leq m-1$，方程 $p_{lk-1} = p_{(l+1)k-1}$ 是方程（3）中的情形 $i \equiv lk-1$ 。由于 $p_{mk-1} = p_{N-1}$，结论成立。

设 $i =$ GCD(k, N) 且 $n = N/i$。那么，我们有 $p = (p_0 \dots p_{i-1})^n$，因为 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 中由 k 生成的子群与由 GCD(N, k) 生成的子群相同。由于 $n > 1$，圈 p 是一个非平凡幂，且最小周期整除 i。□

引理 5.6。 设 p、$q \in E^*_{\mathrm{prim}}$ 为本原圈，并假设 $\ell(q) = \ell(p) + 1$ 且 $q[0, \ell(p)-1] = p$。那么，存在 $\alpha \in$自同构群$(\mathcal{G}_E)$ ，使得 $\alpha(p^\infty) = q^\infty$。

证明。 令 $p = p_0 \dots p_{N-1}$ 和 $q = p_0 \dots p_{N-1}p_N$，其中 $N = \ell(p) \geq 1$。令 $\mathfrak{m} = p$，我们将证明标记 $\mathfrak{m}$ 和数据集 $D = \{o, p_N\}$ 满足重叠条件。首先，我们看到

$$S(\mathfrak{m}\mathfrak{m}, \ \mathfrak{m}\mathfrak{m}) \subseteq \{1, \dots, |\mathfrak{m}|\} \cup \{|\mathfrak{m}\mathfrak{m}|\} \text{和 } S(\mathfrak{m}p_N\mathfrak{m}, \ \mathfrak{m}p_N\mathfrak{m}) \subseteq \{1, \dots, |\mathfrak{m}|\} \cup \{|\mathfrak{m}p_N\mathfrak{m}|\}$$

由命题 2.4 得出。我们证明 $S(\mathfrak{m}p_N\mathfrak{m}, \ \mathfrak{m}\mathfrak{m}) \subseteq \{1, \dots, |\mathfrak{m}|\}$。假设存在大于 $|\mathfrak{m}|$ 的重叠。那么，存在 $1 \leq k \leq N$ 使得

$$(\mathfrak{m}\mathfrak{m})[0, 2N-k] = (\mathfrak{m}p_N\mathfrak{m})[k, 2N].$$

那么，通过比较前 N 个素循环，我们得到

$$p_0 \dots p_{N-1} = p_k \dots p_N p_0 \dots p_{k-2}.$$

根据引理 5.5， q 不是本原的，这与假设矛盾。因此， $S(\mathfrak{m}p_N\mathfrak{m}, \mathfrak{m}\mathfrak{m}) \subseteq \{1, \dots, |\mathfrak{m}|\}$。类似地，假设 $\mathfrak{m}\mathfrak{m}$ 与 $\mathfrak{m}p_N\mathfrak{m}$ 之间的重叠大于 $|\mathfrak{m}|$。那么，存在$1 \le k \le N-1$ 使得

$$(\mathfrak{m}p_N\mathfrak{m})[0, 2N-k-1] = (\mathfrak{m}\mathfrak{m})[k, 2N-1].$$

通过比较前 N 个素圈，我们得到

$$p_0 \dots p_{N-1} = p_k \dots p_{N-1} p_0 \dots p_{k-1},$$

这与命题 2.4 矛盾。因此，我们有 $S(\mathfrak{m}\mathfrak{m}, \mathfrak{m}p_N\mathfrak{m}) \subseteq \{1, \dots, |\mathfrak{m}|\}$。最后， $\mathfrak{m}\mathfrak{m}$ 不是 $\mathfrak{m}p_N\mathfrak{m}$的子词。事实上，由于 $\ell(\mathfrak{m}\mathfrak{m}) = 2N$且 $\ell(\mathfrak{m}p_N\mathfrak{m}) = 2N+1$，如果 $\mathfrak{m}\mathfrak{m}$是 $\mathfrak{m}p_N\mathfrak{m}$的子词，那么 $\mathfrak{m}\mathfrak{m}$ 就是 $\mathfrak{m}p_N\mathfrak{m}$的前缀或后缀，这与其他重叠条件矛盾。因此，与 $\mathfrak{m}$和 D 相对应的 I 型标记 COE α 满足所需性质。□

定义 5.7。 令 p、 $q \in E^*_{\mathrm{prim}}$。我们称 q 是 p 的本原扩张，如果 $p = q[0, \ell(p)-1]$，并且对于所有 $\ell(p) \le k \le \ell(q)$，$q[0, k-1]$ 都是本原的。

引理 5.8。 对于任意本原圈 $p \in E^*_{\mathrm{prim}}$，至多存在一个素圈 $q \in E^*_{\mathrm{cycle}}$，使得 pq^k 对某个 $k \ge 1$ 不是本原的。

证明。 令 A 为出现在 p 的素分解中的素圈集合。如果 $q \in \mathrm{E}^*_{\mathrm{cycle}}$ 是 $s(p)$ 处的一个素圈，且 $q \notin A$，那么显然对于所有 $k \ge 1$， pq^k 都是本原的。因此，将 Rytter 的单项扩张引理（[66, 引理 2.5], 另见 [18, 第 286] 页）应用于字母集合 A，即可得到该断言。□

引理 5.9. 以下结论成立：

> ***(1)*** 对每个本原圈 $p \in E^*_{\mathrm{cycle}}$，都存在 p 的一个本原扩张 $q \in E^*_{\mathrm{prim}}$，使得 q 经过 E 的所有边。
> ***(2)*** 对于满足 $s(p) = s(q)$ 的本原圈 p、 $q \in E^*_{\mathrm{prim}}$，存在 $[r] \in [E^*_{\mathrm{prim}}]$，使得 $[r]$ 包含 p 的一个本原扩张和 q 的一个本原扩张。

证明。我们证明 (1)。如果 p 经过所有边，那么 $q = p$ 满足所需性质。否则，设 e 是一条没有出现在 p 中的边。选取 w_1、 $w_2 \in E^1$，使得 $s(w_1) = r(w_2) = s(p)$、$r(w_1) = s(e)$、 $s(w_2) = r(e)$，并且 w_1、 w_2 在任何中间位置都不经过 $s(p)$。于是，$p_1 = w_1 e w_2$ 是 $s(p)$ 处的一个素圈，而 pp_1 是 p 的一个本原扩张。事实上，若它是 p 的某个前缀的非平凡幂，则 p_1 与 p 的某个素因子重合，这与 p 不包含 e 矛盾。接下来，我们选取一个没有出现在 pp_1 中的 e'，并重复同样的过程。我们可以继续这一过程，直到 $q = pp_1 \dots p_n$ 经过所有边。根据构造， q 是 p 的一个本原扩张。

我们证明 (2)。不妨设 $\ell(p) \le \ell(q)$，且 $[q]$ 不包含 p的本原扩张。由引理 5.8，选取素圈 s, $t \in E^*_{\mathrm{cycle}}$，使得对于所有 k， $l \ge 1$， ps^k 和 qt^l 分别是 p 和 q的本原扩张。设 p_0， $q_0 \in E^*_{\mathrm{cycle}}$为素圈，使得 $p_0 \ne s$、 $q_0 \ne t$、 p_0出现在 p的素分解中，且 q_0 出现在 q的素分解中。令 $n > 2\ell(q)$ 和 $m = n + \ell(q) - \ell(p)$，并设 $r = ps^m qt^n$。我们有 $\ell(r) = 2(n + \ell(q))$。

我们断言， r 是 p的本原扩张。假设对于某个 $n + \ell(q) < L \le 2(n+\ell(q))$， $r[0, L-1]$ 不是本原的，并令 $r[0, L-1] = r[0, K-1]^T$，其中 $K \le L$ 且 $T \ge 2$。那么，我们有 $K \ge \ell(p)$。事实上，若 $K < \ell(p)$，则 s^m 包含 p，因为 $m \ge 2\ell(p)$，这就矛盾了。此外，我们有$K \ge m$。事实上，若 $K < m$，则对于某个 k， s^m 包含 $r[k, K-1]r[0, k-1]$，因此 s^m 包含 p_0，这就矛盾了。因此，我们有

$$n + \ell(q) - \ell(p) \le \frac{L}{T} \le \frac{\ell(r)}{T} = \frac{2(n + \ell(q))}{T}.$$

因此， $T = 2$ 且 $L \geq 2(n + \ell(q) - \ell(p))$，从而我们有 $ps^A = s^B qt^C$，其中

$$A + B = m = n + \ell(q) - \ell(p),\ A + \ell(p) = B + \ell(q) + C = L/2.$$

这意味着

$$A \geq n + \ell(q) - 2\ell(p),\ B \leq \ell(p),\ C \geq n - 2\ell(p),\ A \geq B + C.$$

特别地，我们有 $s = t$ 和 $ps^{A-C} = s^B q$。这意味着我们可以将 $p = s^B w$ 和$q = ws^{A-C}$ 写成某个 $w \in E^*_{\text{cycle}}$。由于 q 是本原的， $s^B ws^{A-B-C} \in [q]$ 也同样是本原的，并且是 p的本原扩张。这与假设矛盾，因此该断言成立。

设 $r' = qt^n ps^m \in [r]$，我们断言 r' 是 q的本原扩张。假设对于某个 $n + \ell$， $r'[0, L-1]\,(q) < L \leq 2(n + \ell(q))$ 不是本原的，并令 $r'[0, L-1] = r'[0, K-1]^T$，其中 $K \leq L$和 $T \geq 2$。由于 q_0 没有出现在 $r'[\ell(q)\ n + \ell(q) - 1]$中，我们有

$$n \leq \frac{L}{T} \leq \frac{\ell(r)}{T} = \frac{2(n + \ell(q))}{T}.$$

因此， $T = 2$ 和 $L \geq 2n$。于是，我们有 $qt^A = t^B ps^C$，其中

$$A + B = n,\ A + \ell(q) = B + \ell(p) + C = L/2.$$

这意味着

$$A \geq n - \ell(q),\ B \leq \ell(q),\ C \geq n - \ell(p) - \ell(q),\ A \leq B + C.$$

因此，我们有 $s = t$。若 $C \geq A$，则 $q = s^B ps^{C-A}$，从而 $ps^{B+C-A} \in [q]$。若 $C \leq A$，则 $qs^{A-C} = s^B p$，因此我们可以将 $p = ws^{A-C}$ 和 $q = s^B w$ 写成某个 $w \in E^*_{\text{cycle}}$，这意味着 $ps^{B+C-A} = ws^B \in [q]$。这两种情况都与假设矛盾，因此 r' 是q的本原扩张。□

命题 5.10. 设 E 是一个强连通图。设 p、 $q \in E^*$ 为本原圈。则存在 $\alpha \in$自同构群$(\mathcal{G}_E)$ 使得 $\alpha(p^\infty) = q^\infty$。特别地，作用外自同构群$(\mathcal{G}_E) \curvearrowright [E^*_{\text{prim}}]$ 是传递的。

证明。 如果 q 是 p的本原扩张，那么通过迭代应用引理 5.6，便存在这样的连续轨道等价。因此，根据引理 5.9 (1)，我们可以假设 p 和 q 都经过所有边。将 p 和q 替换为它们的循环置换后，根据引理 3.5，我们还可以假设 $s(p) = s(q)$。现在，结论由引理 5.9 (2)、引理 5.6 和引理 3.5 得出。□

6. Strong Proximality

本节中，我们证明作用 $\text{Out}(\mathcal{G}_E) \curvearrowright \mathbb{P}M(X_E,\ \sigma_E)$+ 是强近端的。本节将完成定理 A 的证明。在本节中，我们固定一个不是细分圆的强连通图 E。对于一个标记 COE φ 和 $v \in E^*, w \in E^*_{\text{prim}}$，其中 $|v| \leq |w|$，我们有

$$\frac{\langle v, \varphi(\eta_{[w]})\rangle}{\|\varphi(\eta_{[w]})\|} = \frac{\langle v, F_\varphi([w])\rangle}{|F([w])|}$$

根据命题 4.6、引理 4.11 和引理 4.22。这个事实经常在未加说明的情况下使用 n.

6.1. 标记 COE 的部分等度连续引理。 设 $(e, f) \in E^2$和 $p \in E^*_{\text{prim}}$。假设对所有 $n \geq 1$， $ep^n f$都不包含 ef-段，并且若 $e \neq f$，则 $S(ep^n f, ep^n f) = \{|ep^n f|\}$；若 $e = f$，则 $S(ep^n f, ep^n f) = \{|ep^n f|, 1\}$。令 φ_n 为 $\mathfrak{m} = e, \mathfrak{m}' = f$ 和 $D = \{o, p^n\}$ 的 I 型或 II 型标记 COE。令 $F_n = F_{\varphi_n}$。

在本小节中，我们假设 $E^{[2]} \setminus ef$是强连通的。根据命题 2.4，令 $[p] = \{p(1) \dots, p(|p|)\}$。对于 $k \geq 1$，令

$$[p]^k = \{p(1)^k, \dots, p(|p|)^k\}.$$

引理 6.1. 若 n、$m \geq 1$ 和 $n \neq m$，则 $S(ep^n f, ep^m f) = \emptyset$，若 $e \neq f$ 且 $S(ep^n f, ep^m f) = \{1\}$，若 $e = f$。

证明。只需在假设 $n < m$ 的情况下证明 $S(ep^n f, ep^m f) \subseteq \{1\}$ 和 $S(ep^m f, ep^n f) \subseteq \{1\}$。假设存在 $k \geq 2$ 使得 $(ep^m f)_{[0,k-1]} = (ep^n f)_{[n|p|-k+2, n|p|+1]}$。由于 $k \leq n|p| + 2 < |ep^m f|$，$(ep^m f)_{[0,k-1]}$ 是 ep^n 的前缀，因此这与 $ep^n f$ 的重叠条件矛盾。假设存在 $k \geq 2$ 使得 $(ep^n f)_{[0,k-1]} = (ep^m f)_{[m|p|-k+2, m|p|+1]}$。类似的论证表明 $k = |ep^n f|$。于是，p 的最后一条边必定是 e，因此 epf 包含 ef，这就产生了矛盾。□

引理 6.2. 对于任意的 $\varepsilon > 0$、$1 \geq \delta > 0$ 和 $k \geq 1$，存在 $M > 0$ 使得

$$\sum_{j=1}^{|p|} \frac{\langle p(j)^k, F_n([w]) \rangle}{|F_n([w])|} \geq 1 - \varepsilon$$

对于所有满足 $\langle ef、[w] \rangle \geq \delta |w|$ 的 $n \geq M$ 和 $[w] \in [E^*_{\text{prim}}]$。

证明。固定满足 $\langle ef, [w] \rangle \geq \delta |w|$ 的 $n > k$ 和 $[w] \in [E^*_{\text{prim}}]$。取 $[w]$ 的一个良代表 w。令 $K = \langle ef, [w] \rangle$，使得 $K \geq \delta |w|$。首先，假设 φ 为 II 型，或者 $e = f$ 和 w 不以 e 结尾。在这种情况下，K 等于 w 中 ef-段的数量。映射 F_n 将每个 ef-段替换为 $ep^n f$。由此在 F_n（w）中产生的每个新 $ep^n f$-段都至少包含 $|p|$（$n - k$）个 $[p]^k$-段。这是因为 p^n 中长度为 $|p|^k$ 的所有段都是 $[p]^k$ 中的元素。因此，

$$\sum_{j=1}^{|p|} \langle p(j)^k, F_n([w]) \rangle \geq |p|(n-k)K. \tag{4}$$

w 中的所有其他段要么长度缩短，要么保持不变。因此，

$$|F_n([w])| \leq (n|p| + 2)K + (|w| - 2K) = n|p|K + |w|. \tag{5}$$

接下来，假设 $e = f$ 和 w 以 e开头并以 e结尾。在这种情况下，w 中 ef-段的数量为 $K - 1$。映射 F_n 将每个 e^2-段替换为 $ep^n e$，并将最后一个 e 替换为 ep^n。因此，同样的论证表明，在这种情况下不等式（4）成立。类似地，我们有

$$|F_n([w])| \leq (n|p| + 2)(K - 1) + (n|p| + 1) + (|w| - (2K - 1)) = n|p|K + |w|.$$

因此，在这种情况下不等式（5）也成立。

因此，我们有

$$\sum_{j=1}^{|p|} \frac{\langle p(j)^k, F_n([w]) \rangle}{|F_n([w])|} \geq \frac{|p|(n-k)K}{n|p|K + |w|} = \frac{|p|(n-k)}{n|p| + |w|/K} \geq \frac{|p|(n-k)}{n|p| + \delta^{-1}}.$$

因此，选取 $M > k$ 使得以下条件成立，即可得到该结论：

$$\frac{|p|(n-k)}{n|p| + \delta^{-1}} > 1 - \varepsilon$$

对于 $n \geq M$。 □

引理 6.3。对于任意 $\varepsilon > 0$、$1 \geq \delta > 0$ 和 $k \geq 1$，都存在 $M > 0$，使得

$$\sum_{j=1}^{|p|} \frac{\langle p(j)^k, \varphi_n(\mu) \rangle}{\|\varphi_n(\mu)\|} \geq 1 - \varepsilon$$

对所有满足 $\langle ef, \mu \rangle \geq \delta \|\mu\|$ 的 $n \geq M$ 和 $[\mu] \in \mathbb{P}M(X_E, \sigma_E)^+$。

证明。设 $\varepsilon > 0$, $1 \geq \delta > 0$, 且 $k \geq 1$。设 M 为引理 6.2 中对应于 $\varepsilon/2$ 和 $\delta/2$的常数。设 $n \geq M$ 和 $[\mu] \in \mathbb{P}M(X_E, \sigma_E)$+ 满足 $\langle ef, \mu\rangle \geq \delta\|\mu\|$。由 φ_n的连续性、引理 4.12 和命题 4.5，可知存在 $[w] \in [E^*_{\mathrm{prim}}]$ 使得

$$\left|\frac{\langle ef,\mu\rangle}{\|\mu\|} - \frac{\langle ef,[w]\rangle}{|w|}\right| < \frac{\delta}{2} \text{ and } \left|\sum_{j=1}^{|p|}\frac{\langle p(j)^k, \varphi_n(\mu)\rangle}{\|\mu\|} - \sum_{j=1}^{|p|}\frac{\langle p(j)^k, F_n([w])\rangle}{|F_n([w])|}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此，该结论成立。 □

引理 6.4. 设 $[\mu] \in \mathbb{P}M(X_E, \sigma_E)$+，并设 $[\mu_n] \in \mathbb{P}M(X_E, \sigma_E)$+ 为一个序列 .

(1) 当且仅当 $[\mu] = [\eta_{[p]}]$

$$\sum_{j=1}^{|p|}\frac{\langle p(j)^k, \mu\rangle}{\|\mu\|} = 1$$

对所有 $k \geq 1$均成立。

(2) 序列 $[\mu_n]$ 收敛到 $[\eta_{[p]}]$ 当且仅当对于任意 $\varepsilon > 0$ 和 $k \geq 1$，存在 $M > 0$，使得

$$\sum_{j=1}^{|p|}\frac{\langle p(j)^k, \mu_n\rangle}{\|\mu_n\|} \geq 1 - \varepsilon$$

对所有 $n \geq M$。

证明。(1)：只有当.....时的方向是显然的。若 $\|\mu\| = 1$ 和 $\sum_{j=1}^{|p|}\langle p(j)^k, \mu\rangle = 1$ 对所有 k成立，则 μ 集中于

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{|p|}\mathcal{Z}(p(j)^k) = \{p(1)^\infty, \ldots, p(|p|)^\infty\}.$$

由于 μ 是平移不变的，我们有 $\mu(\{p(1)^\infty\}) = \cdots = \mu(\{p(|p|)^\infty\})$。

(2)：设 $[\mu]$是 $[\mu_n]$的一个聚点。根据假设，我们有

$$\sum_{j=1}^{|p|}\frac{\langle p(j)^k, \mu\rangle}{\|\mu\|} = 1$$

对所有 $k \geq 1$。因此，由 (1) 可得 $[\mu] = [\eta_{[p]}]$，从而 $[\mu_n]$ 收敛到 $[\eta_{[p]}]$。 □

下一个引理是分析满足 $\langle ef, \mu\rangle = 0$的测度 μ 时的关键观察。**引理 6.5**。对于每个 $[\mu] \in \mathbb{P}M(X_E, \sigma_E)$+，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\langle ep^n f, \mu\rangle}{\|\mu\|} = 0.$$

证明。固定 $N \in \mathbb{Z}_{>0}$。于是我们有

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{n|p|\langle ep^n f, [w]\rangle}{|w|} \leq 1$$

对所有 $[w] \in [E^*_{\mathrm{prim}}]$均成立，因为根据重叠条件和引理 6.1，$ep^n f$-段彼此不相交，或重叠长度为 1，因此每个 $ep^n f$-段在 w 中占据的空间长度至少为 $n|p|$。所以，根据命题 4.5 和引理 4.12，我们有

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{n|p|\langle ep^n f, \mu\rangle}{\|\mu\|} \leq 1$$

对所有 N。 □

引理 6.6。 设 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$、 $1/2 > \varepsilon > 0$，且令 $[\mu] \in \mathbb{P}M\left(X_E, \sigma_E\right)_+$ 满足

$$\langle ef, \mu\rangle = 0 \quad and \quad \frac{\langle ep^n f, \mu\rangle}{\|\mu\|} < \frac{\varepsilon}{n|p|+2}.$$

如果 $v \in E^*$ 不包含 ef，那么

$$\frac{\langle v, \varphi_n(\mu)\rangle}{\|\varphi_n(\mu)\|} \leq \frac{1}{1-2\varepsilon}\frac{\langle v, \mu\rangle}{\|\mu\|}.$$

如果 $v \in E^*$ 包含 ef，那么

$$\frac{\langle v, \varphi_n(\mu)\rangle}{\|\varphi_n(\mu)\|} \leq \frac{1}{1-2\varepsilon}\frac{\langle ep^n f, \mu\rangle}{\|\mu\|}.$$

证明。 由 φ_n 的连续性、引理 4.8、引理 4.12 和推论 4.14，只需证明当 $[\mu] = [\eta_{[w]}]$ 满足 $[w] \in [E^*_{\mathrm{prim}}]$ 且 $\langle ef,\ [w]\rangle = 0$ 时的结论。此外，我们可以假设 $|w|$ 足够大，从而 $\varepsilon|w| \geq n|p|+1$。固定 $[w]$ 的一个良代表 w。由于重叠条件， w 中所有 $ep^n f$-段的总长度被 $\varepsilon|w|$ 所界定。此外，一个 ep^n-段可能作为 w 的后缀出现，但其长度 $n|p|+1$ 也被 $\varepsilon|w|$ 所界定（这仅在 φ_n 为 I 型时相关）。因此， w 其余部分的总长度大于 $(1-2\varepsilon)|w|$。因此，

$$(1-2\varepsilon)|w| < |F_n([w])| \leq |w|. \tag{6}$$

由于 F_n 对于所有不包含 ef 的 v，只会减少 w 中 v-段的数量，因此我们有

$$\frac{\langle v, F_n([w])\rangle}{|F_n([w])|} \leq \frac{\langle v, [w]\rangle}{|w|}\frac{|w|}{F_n([w])} \leq \frac{1}{1-2\varepsilon}\frac{\langle v, [w]\rangle}{|w|}.$$

如果 v 包含 ef，那么一个 $ep^n f$-段会产生一个新的 ef-段，因此它有可能产生一个新的 v-段。此外，如果 φ是 I 型且 w 以 ep^n 结尾，那么它可能会在 w^2的中间产生一个v-段，这一点也需要考虑。由于新的 v-段只会以这种方式产生，并且

$$\langle v, [w]\rangle \leq \langle ef, [w]\rangle = 0$$

根据引理 4.9，我们有

$$\frac{\langle v, F_n([w])\rangle}{|F_n([w])|} \leq \frac{\langle ep^n f, [w]\rangle}{|F_n([w])|} \leq \frac{1}{1-2\varepsilon}\frac{\langle ep^n f, [w]\rangle}{|w|}.$$

□

引理 6.7。 对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对于所有满足 v 不包含 ef 的 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 和 $v \in E^*$，我们有

$$\left|\frac{\langle v, \varphi_n(\mu)\rangle}{\|\varphi_n(\mu)\|} - \frac{\langle v, \mu\rangle}{\|\mu\|}\right| < \varepsilon$$

对于 $[\mu] \in \mathbb{P}M(X_E, \sigma_E)_+$，其中

$$\langle ef, \mu\rangle = 0 \quad and \quad \frac{\langle ep^n f, \mu\rangle}{\|\mu\|} < \frac{\delta}{n|p|+2}.$$

证明。 设 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$，取 $v \in E^*$ 使得 v 不包含 ef，并设 $0 < \varepsilon < 1/4$。设 $[\mu] \in \mathbb{P}M(X_E, \sigma_E)_+$，其中

$$\langle ef, \mu\rangle = 0 \ \text{ and } \ \frac{\langle ep^n f, \mu\rangle}{\|\mu\|} < \frac{\varepsilon}{n|p|+2}.$$

只需证明

$$\left|\frac{\langle v, \varphi_n(\mu)\rangle}{\|\varphi_n(\mu)\|} - \frac{\langle v, \mu\rangle}{\|\mu\|}\right| < 7\varepsilon.$$

由 φ_n 的连续性、引理 4.8 和推论 4.14，选取 $[w] \in [E^*_{\mathrm{prim}}]$ 使得

$$\langle ef, [w]\rangle = 0,\ \frac{\varepsilon}{n|p|+1}|w| \geq 1,$$
$$\left|\frac{\langle v, \mu\rangle}{\|\mu\|} - \frac{\langle v, [w]\rangle}{|w|}\right| < \varepsilon,\ \left|\frac{\langle v, \varphi_n(\mu)\rangle}{\|\varphi_n(\mu)\|} - \frac{\langle v, F_n([w])\rangle}{|F_n([w])|}\right| < \varepsilon,\ \frac{\langle ep^n f, [w]\rangle}{|w|} < \frac{\varepsilon}{n|p|+2}.$$

固定 $[w]$ 的一个良代表 w。根据 F_n， w 中所有的 ep^nf-段都收缩到 ef。每个 ep^nf-段中的 v 数量不超过 $|ep^nf| = n|p| + 2$，因此 w 中所有 ep^nf-段内的 v 总数不超过 $\varepsilon|w|$。此外，如果 φ 是 I 型且 w 以 ep^n 结尾，那么最后一个 ep^n-段也会收缩到 e，以这种方式损失的 v 数量也不超过 $\varepsilon|w|$。因此，剩余 v-段的比例至少为

$$\frac{\langle v, [w]\rangle}{|w|} - 2\varepsilon > L - 3\varepsilon,$$

其中 $L = \langle v, \mu\rangle/\|\mu\|$。因此，

$$(L+\varepsilon)|w| > \langle v, [w]\rangle \geq \langle v, F_n([w])\rangle > (L-3\varepsilon)|w|.$$

由引理 6.6 的证明可知，不等式 (6) 在此处成立。因此，

$$\frac{(L+\varepsilon)}{1-2\varepsilon} > \frac{\langle v, F_n([w])\rangle}{|F_n([w])|} > L - 3\varepsilon$$

因此，

$$\left|\frac{\langle v, \mu\rangle}{\|\mu\|} - \frac{\langle v, F_n[w]\rangle}{|F_n([w])|}\right| < 6\varepsilon.$$

注意，我们使用了

$$\frac{L+\varepsilon}{1-2\varepsilon} - L \leq \frac{3\varepsilon}{1-2\varepsilon} < 6\varepsilon$$

因为 $0 \leq L \leq 1$。因此，我们得出

$$\left|\frac{\langle v, \varphi_n(\mu)\rangle}{\|\varphi_n(\mu)\|} - \frac{\langle v, \mu\rangle}{\|\mu\|}\right| < 6\varepsilon + \varepsilon.$$

□

6.2. **2-边连通且非环R_2 情形**。我们假设 E 是 2-边连通的，并且$E \ncong R_2$。在本小节中，我们将完成对此类 E的强近端性证明。

引理 6.8。对于每个 $(e, f) \in E^2$，存在一个在 $r(e) = s(f)$ 处的本原圈 $p \in E^*_{\text{prim}}$，使得epf对所有 $(e', f') \in E^2 \setminus \{(e, f)\}$都包含一个 $e'f'$-段，而 epf不包含 ef-段，并且

$$S(ep^nf, ep^nf) = \begin{cases} \{|ep^nf|\} & \text{if } e \neq f, \\ \{|ep^nf|, |e|\} & \text{if } e = f. \end{cases}$$

证明。首先，我们考虑 $|E^0| \geq 2$的情形。令 $s^{-1}(s(f)) \setminus \{f\} = \{f_1, \ldots, f_k\}$。由于 E是 2-边连通的，因此有 $s^{-1}(s(f)) \setminus \{f\} \neq \emptyset$，并且集合 $s^{-1}(s(f)) \setminus \{f\}$包含一条非环边，记为 f_1。对于每个 $i = 1, \ldots, k$，选择一条在 $s(f)$ 处以 f_i 开始并以 e 结束的圈 p_i，且 $(p_i)_{[0,|p_i|-2]}$ 不包含 e。于是，路径 $ep_1 \ldots p_k$对所有 $i = 1, \ldots, k$都包含唯一的 ef_i-段，并且不包含 ef-段。令 S为 $r^{-1}(s(e))$ 中满足路径 $ep_1 \ldots p_k$不包含 ge-段的边 g的集合。若 $S = \emptyset$，则令 $q = p_1 \ldots p_k$。否则，令 $S = \{e_1, \ldots, e_l\}$。对于每个 $j = 1, \ldots, l$，选择一条从 $s(f)$ 到 $s(e)$ 的路径 q_j，使其第一条边为 f_1、最后一条边为 e_j，且 q_j 不包含 e（注意 $e \notin S$）。这是可能的，因为 $E \setminus e$ 是强连通的。令$q = p_1 \ldots p_k(q_1e) \ldots (q_le)$。根据构造， ef_k或 e_le 在 q中仅出现一次。由于 $E \setminus e$是强连通的，选择一个圈 $r \in (E \setminus e)^*_{\text{cycle}}$，满足 $|r| > |q|$，该圈从 f_1 开始，并且对所有 $(e', f') \in (E \setminus e)^2$都包含一个$e'f'$-段。令 $p = qr$。

若 $s^{-1}(s(f)) \setminus \{f\} = \{f_1\}$，则 $S \neq \emptyset$。这是因为 $s(e)$ 至少接收 2 条边，因为 E 是 2-边连通的。因此， ef_k 或 e_le 在 p 中仅出现一次，从而 p 是本原的。此外，p 不包含 ef-段。我们验证重叠条件。假设对于某个 $k > 1$，有 $(ep^nf)_{[0,k-1]} = (ep^nf)_{[n|p|-k+2,n|p|+1]}$。根据命题 2.4，由于 p 不以 e 结尾，我们有 $k \leq |p| + 1$。注意 $(ep^nf)_{[n|p|-k+2]} = e$。若 $(ep^nf)_{[n|p|-k+2,n|p|+1]} = erf$，则 $(ep^nf)_{[0,k-1]}$ 至少包含 $2\,e$ 个段，尽管 r 不包含 e，这就产生矛盾。因此，$(ep^nf)_{[0,k-1]}$

且 $(ep^n f)^{[n|p|-k+2,n|p|+1]}$ 包含 ef_k 或 $e_l e$，而它在 q 中仅出现一次。因此，ef_k 或 $e_l e$ 的位置必须相同，这迫使 $k > |p|+1$ 成立，于是得到矛盾。

接下来，我们考虑 $|E^0| = 1$ 和 $e \neq f$ 的情形。设 $E^1 = \{e_0, \dots, e_N\}$ 满足 $e_0 = e$，$e_N = f$。根据假设，$N \geq 2$，因此 $e_1 \neq e$，f。设

$$q = e_0(e_0e_1)(e_0e_2)\dots(e_0e_{N-1})e_0e_1e_Ne_0.$$

于是，形如 eg 或 ge 的所有子词（其中某个 $g \in E^1$）都出现在 q 中，并且 q 中有唯一一个 e_Ne_0-段。令 r 为所有从 e_1 开始并以 f 结束的 $(e', f') \in (E \setminus e)^2$，对应的 $e'f'$ 的乘积。选取 n 使得 $n|r| > |q|$。于是，我们可以写成 $qr^n = epf$。同理可见，p 是本原的，并满足重叠条件。这是因为 e 在唯一的 fe-段之后从未出现。$|E^0| = 1$ 和 $e = f$ 的情形证明类似。□

我们如下定义标记 COE：令 $E^2 = \{(e_1, f_1), \dots, (e_N, f_N)\}$。对每个 $i = 1, \dots, N$，固定一个本原圈 p_i，如引理 6.8 中针对 (e_i, f_i) 所述。对 $i = 1, \dots, N$，若 $e_i = f_i$，则令 $\varphi_n^{(i)}$ 为 $\mathfrak{m} = e_i$ 和 $D = \{o, p_i^n\}$ 的 I 型标记 COE；若 $e_i \neq f_i$，则令 $\varphi_n^{(i)}$ 为 $\mathfrak{m} = e_i$，$\mathfrak{m}' = f_i$ 和 $D = \{o, p_i^n\}$ 的 II 型标记 COE。由引理 6.8，重叠条件得到满足。根据命题 2.8，我们可以应用第 6.1 节中的观察结果

引理 6.9。设 $E \neq R_2$。那么，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n^{(1)} \dots \varphi_n^{(N)}([\mu]) = [\eta_{[p_1]}]$$

对所有 $[\mu] \in \mathbb{P}M(X_E, \sigma_E)^+$。

证明。令 $\varepsilon > 0$、$K \in \mathbb{Z}_{>0}$ 和 $[\mu] \in \mathbb{P}M(X_E, \sigma_E)^+$。令 $1 \leq k \leq N$ 为满足 $\langle e_k f_k, \mu\rangle > 0$ 的最大指标。选取 α，$\varepsilon_0 > 0$ 使得

$$\frac{\langle e_k f_k, \mu\rangle}{\|\mu\|} > \alpha + (N-k)\varepsilon_0.$$

由引理 6.7，选取 $2^{-N} > \delta > 0$ 使得

$$\left| \frac{\langle e_k f_k, \varphi_n^{(i)}(\nu)\rangle}{\|\varphi_n^{(i)}(\nu)\|} - \frac{\langle e_k f_k, \nu\rangle}{\|\nu\|} \right| < \varepsilon_0$$

对于所有满足 X_E，σ_E 的 $i \in \{k+1, \dots, N\}$、$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 和 $[\nu] \in \mathbb{P}M(X_E, \sigma_E)^+$

$$\langle e_i f_i, \nu\rangle = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\langle e_i p_i^n f_i, \nu\rangle}{\|\nu\|} < \frac{2^{N-k-1}\delta}{n|p_i|+2}.$$

由引理 6.5，选取 $M_1 > 0$ 使得

$$\frac{\langle e_N p_N^n f_N, \mu\rangle}{\|\mu\|} < \frac{\delta}{nP+2}$$

对于所有 $n \geq M_1$，其中 $P = \max_{1\leq i\leq N} |p_i|$。固定 $n \geq M_1$。由引理 6.6，我们有

$$\frac{\langle e_i f_i, \varphi_n^{(N)}(\mu)\rangle}{\|\varphi_n^{(N)}(\mu)\|} \leq 2\frac{\langle e_i f_i, \mu\rangle}{\|\mu\|} = 0 \text{ for } i = k+1, \dots, N-1, \text{ and}$$
$$\frac{\langle e_{N-1} p_{N-1}^n f_{N-1}, \varphi_n^{(N)}(\mu)\rangle}{\|\varphi_n^{(N)}(\mu)\|} \leq 2\frac{\langle e_N p_N^n f_N, \mu\rangle}{\|\mu\|} < \frac{2\delta}{nP+2} < \frac{2\delta}{n|p_{N-1}|+2}$$

由于 p_{N-1} 包含 $e_N f_N$，因此我们得到

$$\left| \frac{\langle e_k f_k, (\varphi_n^{(N-1)}\varphi_n^{(N)})(\mu)\rangle}{\|(\varphi_n^{(N-1)}\varphi_n^{(N)})(\mu)\|} - \frac{\langle e_k f_k, \varphi_n^{(N)}(\mu)\rangle}{\|\varphi_n^{(N)}(\mu)\|} \right| < \varepsilon_0.$$

继续这一过程，对于 $i=k+1$，……，N，我们得到

$$\begin{aligned}
&\langle e_j f_j, (\varphi_n^{(i)}\dots\varphi_n^{(N)})(\mu)\rangle = 0 \text{ for } j=k+1,\dots,i-1,\\
&\frac{\langle e_{i-1}p_{i-1}^n f_{i-1}, (\varphi_n^{(i)}\dots\varphi_n^{(N)})(\mu)\rangle}{\|(\varphi_n^{(i)}\dots\varphi_n^{(N)})(\mu)\|} < \frac{2^{N-i}\delta}{n|p_{i-1}|+2}, \text{ and}\\
&\left|\frac{\langle e_k f_k, (\varphi_n^{(i)}\dots\varphi_n^{(N)})(\mu)\rangle}{\|(\varphi_n^{(i)}\dots\varphi_n^{(N)})(\mu)\|} - \frac{\langle e_k f_k, (\varphi_n^{(i+1)}\dots\varphi_n^{(N)})(\mu)\rangle}{\|(\varphi_n^{(i+1)}\dots\varphi_n^{(N)})(\mu)\|}\right| < \varepsilon_0.
\end{aligned}$$

因此，

$$\frac{\langle e_k f_k, (\varphi_n^{(k+1)}\dots\varphi_n^{(N)})(\mu)\rangle}{\|(\varphi_n^{(k+1)}\dots\varphi_n^{(N)})(\mu)\|} > \frac{\langle e_k f_k, \mu\rangle}{\|\mu\|} - (N-k)\varepsilon_0 > \alpha$$

对所有 $n \geq M_1$ 均成立。

设 $\rho = \min\{\alpha, (2P)^{-1}\}$。选取 $\varepsilon_1 > 0$，使得 $(1-\varepsilon_1)/P > \rho$。由引理 6.3，选取 $M_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$，使得

$$\sum_{j=1}^{|p_i|} \frac{\langle p_i(j), \varphi_n^{(i)}(\nu)\rangle}{\|\varphi_n^{(i)}(\nu)\|} \geq 1-\varepsilon_1$$

对所有满足 $\langle e_i f_i, [\nu]\rangle \geq \rho\|\nu\|$ 的 $i \in \{2,\dots,k\}$、$n \geq M_2$ 和 $[\nu] \in \mathbb{P}M(X_E, \sigma_E)_+$。由于 p_i 包含 $e_{i-1}f_{i-1}$，由引理 4.9 可得

$$\frac{\langle e_{i-1}f_{i-1}, \varphi_n^{(i)}(\nu)\rangle}{\|\varphi_n^{(i)}(\nu)\|} \geq \frac{\langle p_i(j), \varphi_n^{(i)}(\nu)\rangle}{\|\varphi_n^{(i)}(\nu)\|}$$

对所有 j 均成立，因此

$$\frac{\langle e_{i-1}f_{i-1}, \varphi_n^{(i)}(\nu)\rangle}{\|\varphi_n^{(i)}(\nu)\|} \geq \frac{1}{P}\sum_{j=1}^{|p_i|} \frac{\langle p_i(j), \varphi_n^{(i)}(\nu)\rangle}{\|\varphi_n^{(i)}(\nu)\|} \geq \frac{1-\varepsilon_1}{P} \geq \rho,$$

对于 $i=2,\dots,k$ 以及满足 $\langle e_i f_i, [\nu]\rangle \geq \rho\|\nu\|$的 $[\nu]$。因此，我们可以递归地应用这一论证，从而得到对于 $n \geq \max\{M_1, M_2\}$，有 $\langle e_1 f_1, \nu_n\rangle \geq \rho\|\nu_n\|$，其中

$$[\nu_n] = (\varphi_n^{(2)}\dots\varphi_n^{(N)})([\mu]).$$

由引理 6.3，选取 $M > 0$，使得 $M > \max\{M_1, M_2\}$ 且

$$\sum_{j=1}^{|p_1|} \frac{\langle p_1(j)^K, \varphi_n^{(1)}(\nu)\rangle}{\|\varphi_n^{(1)}(\nu)\|} \geq 1-\varepsilon$$

对于所有 $n \geq M$ 和满足 $\langle e_1 f_1, [\nu]\rangle \geq \rho\|\nu\|$ 的 $\nu \in \mathbb{P}M(X_E, \sigma_E)_+$。由引理 6.4，序列 $\varphi_n^{(1)}([\nu_n])$ 收敛到 $[\eta_{[p_1]}]$。□

注 6.10. 从我们的方法来看，很难证明外自同构群$(\mathcal{G}_E) \curvearrowright \mathbb{P}M(X_E, \sigma_E)_+$的极端近端性，因为函数

$$G([\mu]) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n|p|\langle ep^n f, \mu\rangle}{\|\mu\|}$$

引理 *6.5* 中的映射并不连续。例如，若 $e=f$ 和 e 是一个环，则 $ep^n e$ 是一个本原圈，并且 $[\mu_n] := [\eta_{[ep^n e]}]$ 收敛到 $[\mu] := [\eta_{[p]}]$。我们有

$$G([\mu_n]) \geq \frac{n|p|\langle ep^n e, \mu\rangle}{\|\mu\|} = \frac{n|p|}{n+2},$$

但是 $G([\mu]) = 0$。

6.3. **一般情形**。到这里为止，除了 R_2 之外，我们已经证明了双边连通图具有强近端性。利用 Cuntz–Krieger 群胚的分类结果，一般情形可归约为 2-边连通的情形。

命题 6.11。对于任意满足 $E \ncong S_n^1$ 的强连通图 E，存在一个满足 $\mathcal{G}_E \cong \mathcal{G}_F$ 的 2-边连通图 F。

证明。令 A_E 为 E 的邻接矩阵。令

$$\mathrm{H}_0(\mathcal{G}_E) = \mathbb{Z}^n \oplus \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z}/m_k\mathbb{Z},$$

其中 $m_i | m_{i+1}$。于是，根据 [25, 命题 3.6], 的证明，存在 $b_1, \dots, b_{n+k} \geq 1$，使得矩阵

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_1 & b_1 + m_1 & b_1 & \dots & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{k+n} & b_{k+n} & b_{k+n} & \dots & b_{k+n} \end{bmatrix}$$

满足 $\mathrm{Coker}\, B \cong \mathrm{H}_0(\mathcal{G}_E)$、$\mathrm{Ker} B \cong \mathrm{H}_1(\mathcal{G}_E)$，且 $[\mathbf{1}] = [1_E]_0$ 模 $\mathrm{Im} B$，其中 $\mathbf{1}$ 表示所有分量均为 1 的向量。令

$$C = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & \mathrm{I} \end{array}\right],$$

其中右下角的 I 是 $k+n-1$ 阶单位矩阵。若 $\mathrm{sgn}(\det(B)) = \mathrm{sgn}(\det(A_E - I))$，则令 $A_F = B^t + I$；若 $\mathrm{sgn}(\det(B)) \neq \mathrm{sgn}(\det(A_E - I))$，则令 $A_F = (BC)^t + I$。令 F 为邻接矩阵为 A_F 的图。于是，根据 [48, 定理 9.6.1], ，有 $\mathcal{G}_E \cong \mathcal{G}_F$。注意，由于 $\mathrm{Im} B = \mathrm{Im} BC$，将 C 乘在右侧不会改变 $\mathrm{H}_0(\mathcal{G}_E) = \mathrm{Coker}\,(I - A_F^t)$，也不会改变单位元的位置。

如果 $k+n \geq 2$，那么 F 是 2-边连通的，因为 A_F 的所有元素都是正的，并且 $|F^0| \geq 3$。假设 $k+n = 1$。那么， A_F 具有如下形式

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

其中 a, $d \geq 2$ 且 b, $c \geq 1$。我们可以直接看出， F 的二次幂是 2-边连通的。最后，情形 $k = n = 0$ 已经包含在内，只需令 $n = 0$, $k = 1$，以及 $m_k = 1$ （注意，命题 3.6] 的构造即使在 $m_1 = 1$ 时也适用）。□

命题 6.12。对于任意满足 $E \ncong S_n^1$ 的强连通图 E，存在一个序列 $\varphi_n \in$ 连续轨道等价(X_E, σ_E) 以及 $[p] \in [E^*_{\mathrm{prim}}]$，使得对于所有 $[\mu] \in \mathbb{P}M(X_E, \sigma_E)_+$， $\varphi_n([\mu])$ 收敛到 $[\eta_{[p]}]$。

证明。由命题 6.11，存在一个 2-边连通图 F 使得 $\mathcal{G}_E \cong \mathcal{G}_F$。由 [48,定理 9.6， 1], 存在一个连续轨道等价 ψ: $(X_F, \sigma_F) \to (X_E, \sigma_E)$。由引理 6.9，存在一个序列$\varphi_n \in$连续轨道等价$(X_F, \sigma_F)$以及 $[p] \in [F^*\mathrm{prim}]$，使得 $\varphi_n([\mu])$ 对所有 $[\mu] \in \mathbb{P}M(X_F, \sigma_F)_+$都收敛到 $[\eta_{[p]}]$。令 $\psi[p] = [q]$ for $[q] \in [E^*_{\mathrm{prim}}]$。然后，由命题 4.6， $\psi\eta_{[p]} = \eta_{[q]}$。由于 ψ： $\mathbb{P}M(X_F, \sigma_F)_+ \to \mathbb{P}M(X_E, \sigma_E)_+$ 是一个同胚，我们看到 $\psi \circ \varphi_n \circ \psi^{-1}([\mu])$ 对所有 $[\mu] \in \mathbb{P}M(X_E, \sigma_E)_+$都收敛到 $[\eta_{[q]}]$。□

定理 *A* 的证明。外自同构群 $\mathrm{Out}(\mathcal{G}_E) \curvearrowright \mathbb{P}M(X_E, \sigma_E)_+$的作用的强近端性和极小性，可由命题 6.12 和命题 5.10 利用控制收敛定理作标准论证得出。

设 $\{[p_1],[p_2],\dots\}$ 是 $[E^*_{\mathrm{prim}}]$ 的一个枚举，其元素按词长递增排列，从而得到 $[E^*_{\mathrm{prim}}]$。令

$$\mu := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}\eta_{[p_i]} \in M(X_E,\sigma_E)_+.$$

注意，由于 $\|\eta_{[p_i]}\| = |p_i|$ 的增长是线性的，无穷和在范数意义下收敛。令$\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_E)$，并假设 $\alpha[\mu]=\mu$。于是，我们有 $\alpha(\mu) = r\mu$，其中某个 $r>0$满足该式，因此

$$\alpha(\mu) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}\eta_{\alpha[p_i]} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{r}{2^i}\eta_{[p_i]}$$

由命题 4.6。定义 $F\colon E^*_{\mathrm{prim}} \to \mathbb{R}$，使得 $F(p) = \alpha(\mu)(\{p^\infty\})$，并令 $A \subseteq \mathbb{R}$ 为F的值域。将 $A=\{a_1,a_2,\dots\}$ 枚举为 $a_1>a_2>\dots$。于是，我们看到 $\alpha[p_i] = F^{-1}(a_i) = [p_i]$在$E^*_{\mathrm{prim}}$中。因此，对所有 i都有 $\alpha[p_i]=[p_i]$，故由推论 5.3 可知 α 是内自同构。这证明了拓扑自由性。因此，$\mathrm{Out}(\boldsymbol{F}(\mathcal{G}_E)) \cong \mathrm{Out}(\mathcal{G}_E)$ 在 $\mathbb{P}M(X_E,\ \sigma_E)_+$ 上的作用由命题 3.7 可知是一个拓扑自由边界作用。现在由定理 2.1 得出 C*-简单性。

注意，周期测度是遍历的，因此它们是单纯形 $P(X_E,\ \sigma_E)$ 的极端点。因此，命题 4.5 意味着 $\mathbb{P}M(X_E,\ \sigma_E)_+$ 同胚于 Poulsen 单纯形。现在，根据 [45,定理 3.1]，$\mathbb{P}M(X_E,\ \sigma_E)_+$同胚于希尔伯特立方体。□

6.4. 关于强近端性的一些备注。 在命题 6.12 中证明强近端性时，我们使用了 Matsumoto 的分类结果 [48, 定理 9.6.1], ，该结果处于 Kirchberg 代数分类的漫长历史发展脉络之中。对于可能不熟悉算子代数的读者，我们整理了 $\mathrm{Out}(V_2)$ 和 $\mathrm{Out}(V_{n,\ r})$ 的作用具有强近端性的直接证明纲要，这些证明不使用分类结果。

考虑 $E=R_2$ 的情形，并令 $E^1=\{e,f\}$。令 $\varphi_n^{(1)}$, $\varphi_n^{(2)}$ 分别为 $\mathfrak{m}=e$, $D=\{o,f^n\}$ 以及 $\mathfrak{m}=f$, $D=\{o,e^n\}$ 的 I 型标记 COE。此外，令 $\varphi_n^{(3)}$ 为 $\mathfrak{m}=ef$, $D=\{o,f^n\}$ 的 I 型标记 COE。注意，$\varphi_n^{(3)}$ 满足重叠条件，因为第一个 eff 是 $efff^nef$ 中唯一的 eff- 段。于是，同样的证明仍然适用。关键在于对 $N=4$ 和 $w=efef$ 应用引理 4.13，因为 $E^{[4]}\setminus efef$ 是强连通的。因此，外自同构群 $\mathrm{Out}(\mathcal{G}_E) = \mathrm{Out}(V_2)$ 在 $\mathbb{P}M(X_E,\ \sigma_E)_+$ 上的作用是强近端的。

现在令 E 为第 2.5 节中的图，并令 $F=E_0\cong R_n$。于是我们看到 $\mathcal{G}_E \cong \mathcal{G}_F\times\mathcal{R}_r$，其中 $\mathcal{R}_r=\{0,\dots,r-1\}^2$ 是 r 个点集上的全等价关系（注意，乘法定义为 $(i,\ j)(j,\ k)=(i,\ k)$）。事实上，对于 $k=0$、.....、$r-1$，令

$$U_k = \{(\sigma_E^k(x),-k,x) \in \mathcal{G}_E \mid x\in X_0\}.$$

定义 $\alpha\colon \mathcal{G}_F\times\mathcal{R}_r \to \mathcal{G}_E$，使得 $\alpha(g,\ (i,\ j)) = U_i g U_j^{-1}$。于是我们可以看出 α 是一个同构。接下来，我们通过 $\beta \mapsto \beta\times \mathrm{id}$ 得到一个嵌入 $\mathrm{Out}(\mathcal{G}_F) \to \mathrm{Out}(\mathcal{G}_E)$。我们看到，这个嵌入使命题 6.13 中的同构 $\mathrm{H}^1(\mathcal{G}_E) \cong \mathrm{H}^1(\mathcal{G}_F)$（见下文）成为等变的，因此它也使同构 $\mathbb{P}M(X_F,\ \sigma_F)_+ \cong \mathbb{P}M(X_E,\ \sigma_E)_+$ 成为等变的。因此，我们可以从 $\mathrm{Out}(\mathcal{G}_F)$ 的像中找到一个序列 $g_n \in \mathrm{Out}(\mathcal{G}_E) = \mathrm{Out}(V_{n,\ r})$，如命题 6.12 中所述。

The 以下这个众所周知的事实可由 [53,定理 3.6 的证明轻易推出].

命题 6.13。 若 $U\subseteq\mathcal{G}^{(0)}$ 是一个全开闭集，则限制映射 同态集 $(\mathcal{G},\mathbb{Z}) \to$ 同态集 $(\mathcal{G}_U^U,\mathbb{Z})$诱导出一个同构 $\mathrm{H}^1(\mathcal{G}) \cong \mathrm{H}^1(\mathcal{G}_U^U)$。

证明。令 $\theta\colon \mathcal{G}^{(0)}\to\mathcal{G}$ 为一个连续映射，使得对所有 $x\in\mathcal{G}^{(0)}$，$\mathfrak{r}(\theta(x)) = x$ 且 $\mathfrak{s}(\theta(x)) \in U$。根据 [53, 定理 3.6(2)] 的证明，这样的映射存在。令 $\rho\colon \mathcal{G}\to\mathcal{G}_U^U$ 为由 $\rho(g) := \theta(\mathfrak{r}(g))^{-1} g \theta(\mathfrak{s}(g))$ 给出的同态（映射 ρ 来自 [53, 定理 3.6] 的证明）。

不难验证，由 $\omega \mapsto \omega\circ\rho$ 给出的同态集 Hom $(\mathcal{G}_U^U, \mathbb{Z})$ $\to$ Hom $(\mathcal{G}, \mathbb{Z})$ 将余边界映射为余边界，因此诱导出同态 $\mathrm{H}^1(\mathcal{G}_U^U)$ $\to \mathrm{H}^1(\mathcal{G})$。我们证明它是由限制诱导的映射的逆。对于 $\omega \in$ Hom $(\mathcal{G}, \mathbb{Z})$，有 $\omega|_{\mathcal{G}_U^U}\circ\rho = \omega + \omega\circ\theta\circ\mathfrak{s} - \omega\circ\theta\circ\mathfrak{r}$，因此 $[\omega|_{\mathcal{G}_U^U}] = [\omega]$ 属于 $\mathrm{H}^1(\mathcal{G})$。类似地，对于所有 $\omega \in$ Hom $(\mathcal{G}_U^U, \mathbb{Z})$，都有 $[(\omega\circ\rho)|_{\mathcal{G}_U^U}] = \omega$。 □

7. Consequences

7.1. **Brin–Thompson 群**。对于 $d \geq 1$，令 $dV = dV_2$ 表示由 [12] 得到的相应 Brin–Thompson 群。

引理 7.1. 设 H 是一个非平凡的 C*-单群，且 $G = H \wr \mathfrak{S}_d$。那么， G 是 C*-单的。

证明。由 [24, 命题 19(i)], , 群 H^d 是 C*-单的。因此，根据 [24, 命题 19(v)], , 只需证明 H^d 在 $H \wr \mathfrak{S}_d = H^d \rtimes \mathfrak{S}_d$ 中的中心化子是平凡的（参见 [10, 定理 1.4]）。假设 $(\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_d)\tau \in H \wr \mathfrak{S}_d$ 中心化 H^d。那么，我们有

$$(\beta_1, ..., \beta_d)(\alpha_1, ..., \alpha_d)\tau = (\alpha_1, ..., \alpha_d)\tau(\beta_1, ..., \beta_d) = (\alpha_1, ..., \alpha_d)(\beta_{\tau(1)}, ..., \beta_{\tau(d)})\tau,$$

从而对于所有 $(\beta_1, \ldots\ldots, \beta_d) \in H^d$，有 $\beta_i\alpha_i = \alpha_i\beta_{\tau(i)}$。由于 H 具有平凡中心，因此令 $\beta_1 = \cdots = \beta_d = \beta \in H$，即可对所有 i 得到 $\alpha_i = 1$。因此，对于所有 $(\beta_1, \ldots\ldots, \beta_d) \in H^d$，有 $\beta_i = \beta_{\tau(i)}$。由于 $|H| = \infty$，我们得出 $\tau = 1$。 □

推论 7.2。 对于所有 $d \geq 1$，*Brin–Thompson* 群 外自同构群(dV)是 C*-单的。

证明。 这由定理 A、引理 7.1 以及 [26,定理 1.1]立即得到。 □

7.2. **TFG 群的换位子子群的可 amenable 根**。下面的命题可使用 [54, 命题 3.6]，以与命题 3.7 相同的方式证明。

命题 7.3. 假设 $\mathcal{G}^{(0)}$ 是一个康托尔集。那么，限制映射 $\mathrm{res}\colon \mathrm{Aut}(\boldsymbol{F}(\mathcal{G}))$ $\to \mathrm{Aut}(\boldsymbol{D}(\mathcal{G}))$ 是一个群同构。

推论 7.4. 假设 $\mathcal{G}$ 是纯无限的，且 $\mathcal{G}^{(0)}$ 是一个康托尔集。那么，存在一个典范短正合列

$$1 \to \boldsymbol{F}(\mathcal{G})/\boldsymbol{D}(\mathcal{G}) \to \mathrm{Out}(\boldsymbol{D}(\mathcal{G})) \to \mathrm{Out}(\boldsymbol{F}(\mathcal{G})) \to 1.$$

证明。 复合映射 Aut($\boldsymbol{D}(\mathcal{G})$) $\cong$ Aut($\boldsymbol{F}(\mathcal{G})$) $\to$ Out($\boldsymbol{F}(\mathcal{G})$) 的核等于 $\Gamma/\mathrm{Inn}(\boldsymbol{D}(\mathcal{G}))$，其中 Γ 是 Inn($\boldsymbol{F}(\mathcal{G})$) 在限制映射下于 Aut($\boldsymbol{D}(\mathcal{G})$) 中的同构副本。由于根据定理 4.16], , $\boldsymbol{D}(\mathcal{G})$ 和 $\boldsymbol{F}(\mathcal{G})$ 都有平凡中心，结论得证。 □

我们现在转而证明推论 A。

推论 *A* 的证明。 由于 $\boldsymbol{F}(\mathcal{G}_E)/\boldsymbol{D}(\mathcal{G}_E)$ 是可 amenable 的，且根据定理 A，Out($\boldsymbol{F}(\mathcal{G}_E)$) 是 C*-单，因此由引理 6.1] 和推论 7.4 可知，Out($\boldsymbol{D}(\mathcal{G}_E)$) 的可 amenable 根同构于 $\boldsymbol{F}(\mathcal{G}_E)/\boldsymbol{D}(\mathcal{G}_E)$，并且 Out($\boldsymbol{D}(\mathcal{G}_E)$) 是 C*-单，当且仅当 $\boldsymbol{F}(\mathcal{G}_E)/\boldsymbol{D}(\mathcal{G}_E)$ 消失。

根据 [54, 推论 6.24(1)], , 我们有 $\boldsymbol{F}(\mathcal{G}_E)/\boldsymbol{D}(\mathcal{G}_E)$ $\cong (\mathrm{H}_0(\mathcal{G}_E) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{H}_1(\mathcal{G}_E)$。最后，根据 [53,定理 4.14], , 我们有 $\mathrm{H}_0(\mathcal{G}_E) \cong$ 余核 $(I - A_E^t)$，且 $\mathrm{H}_1(\mathcal{G}_E) \cong$ 核$(I - A_E^t)$。 □

References

[1] J. Ashley, *Marker automorphisms of the one-sided d-shift*, 《遍历理论与动力系统》10 (1990), no. 2, 247–262. [2] J. Belk, C. Bleak, F. Matucci, and M.C.B. Zaremsky, *Hyperbolic groups satisfy the Boone–Higman conjecture*, 《杜克数学杂志》（即将出版）。预印本：arXiv:2309.06224. [3] J. Belk, C. Bleak, P.J. Cameron, and F. Olukoya, *Automorphisms of shift spaces and the Higman-Thompson groups: the two-sided case* 2006 01466 , 预印本, arXiv: . . [4] C. Bleak, P.J. Cameron, and F. Olukoya, *Automorphisms of shift spaces and the Higman-Thompson groups: the one-sided case* , 《离散分析》 2021, Paper No. 15, 35 pp. [5] C. Bleak, P. Cameron, Y. Maissel, A. Navas, and F. Olukoya, *The further chameleon groups of Richard Thompson and Graham Higman: automorphisms via dynamics for the Higman-Thompson groups $G_{n\,r}$* , , Mem. A mer. Math. Soc. 301 (2024), no. 1510, viii+94 pp. [6] M. Boyle, J. Franks, and B. Kitchens, *Automorphisms of one-sided subshifts of finite type*, 《遍历理论与动力系统》10 (1990), no. 3, 421–449. [7] M. Boyle and D. Handelman, *Orbit equivalence, flow equivalence and ordered cohomology*, 《以色列数学杂志》95 (1996), 169–210. [8] M. Boyle and W. Krieger, *Periodic points and automorphisms of the shift*, Trans. Amer. Math. Soc. 302 (1987), no. 1, 125–149. [9] M. Boyle, D. Lind, and D. Rudolph, *The automorphism group of a shift of finite type*, Trans. Amer. Math. Soc. 306 (1988), no. 1, 71–114. [10] E. Breuillard, M. Kalantar, M. Kennedy, and N. Ozawa, *C^*-simplicity and the unique trace property for discretegroups*, Publ. Math. Inst. Hautes ´Etudes Sci. 126 (2017), 35–71. [11] M.G. Brin, *The chameleon groups of Richard J. Thompson: automorphisms and dynamics*, Inst. Hautes ´Etudes Sci. Publ. Math. No. 84 (1996), 5–33. [12] M.G. Brin, *Higher dimensional Thompson groups*, Geom. Dedicata 108 (2004), 163–192. [13] M.R. Bridson and P. de la Harpe, *Mapping class groups and outer automorphism groups of free groups are C*-simple*, 《泛函分析杂志》212 (2004), no. 1, 195–205. [14] K.A. Brix and E. Scarparo, *C^*-simplicity and representations of topological full groups of groupoids*, 《泛函分析杂志》 **277** 2019 9, 2981 2996 ( ), no. – J.W. Cannon, W.J. Floyd, and W.R. Parry, [15] *Introductory notes on Richard Thompson's groups*, Enseign. Math. (2) 42 (1996), no. 3-4, 215–256. [16] T.M. Carlsen, S. Eilers, E. Ortega, and G. Restorff, *Flow equivalence and orbit equivalence for shifts of finite type and isomorphism of their groupoids* **469** 2019 2, 1088 1110 , J. Math. Anal. Appl. ( ), no. – . [17] I. Chifan, A. Ioana, D. Osin, and B. Sun, *Small cancellation and outer automorphisms of Kazhdan groups acting on hyperbolic spaces* 2304 07455 , Algebr. Geom. Topol. (即将出版)。预印本：arXiv: . . [18] M. Crochemore, T. Lecroq, and W. Rytter, *125 problems in text algorithms—with solutions*。剑桥大学出版社，剑桥，2021. [19] J. Cuntz, *A class of C*-algebras and topological Markov chains. II. Reducible chains and the Ext-functor for C*-algebras* **63** 1981 1, 25 40 , Invent. Math. ( ), no. – . [20] J. Cuntz and W. Krieger, *A class of C*-algebras and topological Markov chains* **56** 1980 3, , Invent. 251 268 Math. ( ), no. – . [21] F. Dahmani, V. Guirardel, and D. Osin, *Hyperbolically embedded subgroups and rotating families in groups acting on hyperbolic spaces* **245** 2017 1156, +152 , Mem. Amer. Math. Soc. ( ), no. v pp. [22] M.M. Day, *Amenable semigroups*。《伊利诺伊数学杂志》1 (1957), 509–544. [23] P. de la Harpe, *Groupes hyperboliques algèbres d'opérateurs et un théorème de Jolissaint. (French) [[Hyperbolic groups, operator algebras and Jolissaint's theorem]]* , , C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. ( ), no. – . [24] P. de la Harpe, *On simplicity of reduced C^*-algebras of groups*, Bull. Lond. Math. Soc. 39 (2007), no. 1, 1–26. [25] S. Eilers, T. Katsura, M. Tomforde, and J. West, *The ranges of K-theoretic invariants for nonsimple graph algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 368 (2016), no. 6, 3811–3847. [26] L. Elliott, *A description of* 自同构群(dV_n) *and* 外自同构群(dV_n) *using transducers*, Groups Geom. Dyn. 17 (2023), no. 1, 293–313. [27] T. Giordano, I.F. Putnam, and C.F. Skau, *Full groups of Cantor minimal systems*, 《以色列数学杂志》111 (1999), 285–320. [28] E. Glasner and B. Weiss, *Uniformly recurrent subgroups*, 《遍历理论与动力系统的新趋势》, 63–75, Contemp. Math., 631, 美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2015. [29] K.R. Goodearl, *Partially ordered abelian groups with interpolation*。《数学调查与专著》20。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1986. [30] U. Haagerup, *A new look at C^*-simplicity and the unique trace property of a group*。《算子代数及其应用——2015年 Abel 研讨会》, 167–176, Abel Symp., 12, Springer, [Cham], 2017。[31] U. Haagerup and K.K. Olesen, *Non-inner amenability of the Thompson groups T and V*, 《泛函分析杂志》272 (2017), no. 11, 4838–4852. [32] Y. Hartman and M. Kalantar, *Stationary C^*-dynamical systems. With an appendix by Uri Bader, Hartman and Kalantar* **25** 2023 5, 1783 1821 , 《欧洲数学会杂志》(JEMS) ( ), no. – . [33] G. Higman, *Finitely presented infinite simple groups*。《纯数学札记》8 (1974)。澳大利亚国立大学纯数学系、数学系、I.A.S.，堪培拉，1974.

[34] K. Juschenko 和 N. Monod, *Cantor systems, piecewise translations and simple amenable groups*, 《数学年刊》（第二辑）178 (2013)，第 2 期，775–787。[35] M. Kalantar 和 M. Kennedy, *Boundaries of reduced C^*-algebras of discrete groups*, 《莱茵应用数学杂志》727 (2017)，247–267。[36] I. Kapovich, *The frequency space of a free group*, 《国际代数与计算杂志》15 (2005)，第 5–6 期，939–969。[37] I. Kapovich, *Currents on free groups*。载于《群论的拓扑与渐近方面》，《当代数学》第 394 卷，第 149–176 页。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2006。[38] I. Kapovich 和 M. Lustig, *The actions of F_k on the boundary of outer space and on the space of currents: minimal sets and equivariant incompatibility* **27** 2007 3, 827 847 外自同构群( )，《遍历理论与动力系统》（），第 – 期。[39] M. Kennedy, *An intrinsic characterization of C^*-simplicity*, 《高等师范学校科学年刊》´（第 4 辑）53 (2020)，第 5 期，1105–1119。[40] D. Kerr 和 R. Tucker-Drob, *Dynamical alternating groups, stability, property Gamma, and inner amenability*, 《高等师范学校科学年刊》´（第 4 辑）56 (2023)，第 1 期，59–90。[41] A. Le Boudec, *C*-simplicity and the amenable radical*, 《数学发明》209 (2017)，第 1 期，159–174。[42] A. Le Boudec 和 N. Matte Bon, *Subgroup dynamics and C*-simplicity of groups of homeomorphisms*, 《高等师范学校科学年刊》´（第 4 辑）51 (2018)，第 3 期，557–602。[43] X. Li, *Ample groupoids, topological full groups, algebraic K-theory spectra and infinite loop spaces*。《Forum Math. Pi》 **13** 2025 9 1 56（） e ., – D. Lind 和 B. Marcus, *An introduction to symbolic dynamics and coding*。第二版。[44]《剑桥数学文库》。剑桥大学出版社，剑桥，2021。[45] J. Lindenstrauss、G. Olsen 和 Y. Sternfeld, *The Poulsen simplex*, 《格勒诺布尔傅里叶研究所年刊》28 (1978)，第 1 期，vi，91–114。[46] K. Matsumoto, *Orbit equivalence of topological Markov shifts and Cuntz-Krieger algebras*, 《太平洋数学杂志》246 (2010)，第 1 期，199–225。[47] K. Matsumoto, *Strongly continuous orbit equivalence of one-sided topological Markov shifts*, 《算子理论杂志》74 (2015)，第 2 期，457–483。[48] K. Matsumoto, *Symbolic dynamical systems and C*-algebras—continuous orbit equivalence of topological Markov shifts and Cuntz-Krieger algebras* [2025], 2025 359 。《数学物理研究》。施普林格，新加坡，© 。页。[49] K. Matsumoto 和 H. Matui, *Continuous orbit equivalence of topological Markov shifts and Cuntz-Krieger algebras*, 《京都数学杂志》54 (2014)，第 4 期，863–877。[50] K. Matsumoto 和 H. Matui, *Continuous orbit equivalence of topological Markov shifts and dynamical zeta functions*, 《遍历理论与动力系统》36 (2016)，第 5 期，1557–1581。[51] N. Matte Bon, *Subshifts with slow complexity and simple groups with the Liouville property*, 《几何与泛函分析》24 (2014)，第 5 期，1637–1659。[52] H. Matui, *Some remarks on topological full groups of Cantor minimal systems* **17** 2006 2, , 《国际数学杂志》（），第 – 期。231 251 [53] H. Matui, *Homology and topological full groups of étale groupoids on totally disconnected spaces*, 《伦敦数学学会会刊》（第三辑）104 (2012)，第 1 期，27–56。[54] H. Matui, *Topological full groups of one-sided shifts of finite type*, 《莱茵应用数学杂志》705 (2015)，35–84。[55] H. Matui, *Étale groupoids arising from products of shifts of finite type*, 《数学进展》303 (2016)，502–548。[56] V.V. Nekrashevych, *Cuntz-Pimsner algebras of group actions*, 《算子理论杂志》52 (2004)，第 2 期，223–249。[57] V. Nekrashevych, *C*-algebras and self-similar groups*, 《莱茵应用数学杂志》630 (2009)，59–123。[58] V. Nekrashevych, *Palindromic subshifts and simple periodic groups of intermediate growth*, 《数学年刊》（第二辑）187 (2018)，第 3 期，667–719。[59] A.Y. Olshanskii 和 D.V. Osin, *C*-simple groups without free subgroups* **8** 2014 3, , 《群、几何与动力学》（），第 – 期。933 983 [60] F. Olukoya, *Automorphisms of the generalized Thompson's group $T_{n\,r}$* **9** 2022 1, , , 《伦敦数学学会汇刊》（），第 – 期。86 135 [61] F. Olukoya, *Automorphisms of the two-sided shift and the Higman–Thompson groups III: extensions*, 预印本，arXiv:2407.18720。[62] F. Paulin, *Outer automorphisms of hyperbolic groups and small actions on* R*-trees*。《树状群论》（加州伯克利，1988），331–343，《数学科学研究所出版物》第 19 卷，施普林格，纽约，1991。[63] Y.T. Poon, *A K-theoretic invariant for dynamical systems*, 《美国数学会汇刊》311 (1989)，第 2 期，515–533。[64] R.T. Powers, *Simplicity of the C^*-algebra associated with the free group on two generators*, 《杜克数学杂志》42 (1975)，151–156。[65] M. Rubin, *On the reconstruction of topological spaces from their groups of homeomorphisms*, 《美国数学会汇刊》312 (1989)，第 2 期，487–538。[66] W. Rytter, *Two fast constructions of compact representations of binary words with given set of periods*, 《理论计算机科学》656 (2016)，B 部分，180–187。[67] R. Skipper、S. Witzel 和 M.C.B. Zaremsky, *Simple groups separated by finiteness properties*, 《数学发明》215 (2019)，第 2 期，713–740。[68] K. Sigmund, *On dynamical systems with the specification property*, 《美国数学会汇刊》190 (1974)，285–299。[69] M. Szymik 和 N. Wahl, *The homology of the Higman-Thompson groups*, 《数学发明》216 (2019)，第 2 期，445–518。[70] C. Uyanik, *Dynamics of hyperbolic iwips*, 《构形几何与动力学》18 (2014)，192–216。

（Chris Bruce） School of Mathematics, Statistics and Physics, Herschel Building, Newcastle University, Newcastle upon Tyne, NE1 7RU, United Kingdom

Email address, Bruce：chris.bruce@newcastle.ac.uk

（Xin Li） School of Mathematics and Statistics、 University of Glasgow、 University Place、 Glasgow G128QQ、 United Kingdom

Email address, Li：Xin.Li@glasgow.ac.uk

（Takuya Takeishi） Faculty of Arts and Sciences、 Kyoto Institute of Technology、 Matsugasaki、 Sakyo-ku、Kyoto、 Japan

Email address, Takeishi：takeishi@kit.ac.jp