连续统的计数

Gerald Kuba

摘要。对于无限基数 κ 和 λ，令 $\mathcal{C}(\kappa,\lambda)$ 表示所有 *compact Hausdorff spaces* 的 *weight*κ 和 *size* λ 的类。因此，当 $\kappa>\lambda$ 或 $\lambda>2^\kappa$ 时，$\mathcal{C}(\kappa,\lambda)=\emptyset$。如果 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{C}(\kappa,\lambda)$ 中两两不同胚空间的类，那么 $\mathcal{F}$ 是一个基数不大于 2^κ 的集合。对于每个无限基数 κ，我们在 $\mathcal{C}(\kappa,\lambda)$ 中构造 2^κ 个两两不可嵌入的 *pathwise connected* 空间，其中 $\lambda=\max\{2^{\aleph_0},\kappa\}$，以及 $\exp\log(\kappa^+)$ 个。（如果 κ 是强极限，则 $\exp\log(\kappa^+)=2^\kappa$。）此外，对于满足 $\mu\le\kappa$ 的所有无限基数 κ、μ，我们在 $\mathcal{C}(\kappa,\kappa^\mu)$ 中构造 2^κ 个两两不可嵌入的 *connected* 空间。进一步地，对于具有任意 θ 的 $\kappa=\lambda=2^\theta$，以及某些其他基数对 κ、λ，我们构造 2^κ 个两两不可嵌入的连通、 *linearlyordered* 空间 $X\in\mathcal{C}(\kappa,\lambda)$，使得只要 Y 是 X 的无限紧致连通子空间，就有 $Y\in\mathcal{C}(\kappa,\lambda)$。另一方面，我们证明不存在具有此性质的空间 X：当 $\kappa=\lambda$ 且 $\mathrm{cf}\ \kappa=\aleph_0$ 时不存在，或者当 λ 是具有 $\mathrm{cf}\ \lambda=\aleph_0$ 的强极限时不存在。

2020年数学主题分类： 54F05, 54F15. *Key words and phrases:* 线序空间，连续统 a

arXiv:2512.14371v1 [math.GN] 16 Dec 2025

1. 引言

用 $|S|$ 表示集合 S 的基数（大小）。基数是初始序数，全文中用 κ、λ、μ表示无限基数；$\mathfrak{c}=|\mathbb{R}|=2^{\aleph_0}$ 表示连续统的基数，而 κ^+ 是大于 κ 的最小基数，因此 $\aleph_1=\aleph_0^+\le\mathfrak{c}$。对于 $\lambda\le\kappa$，令 $\nu(\lambda,\kappa)$表示满足 $\lambda^\mu>\kappa$的最小 μ。特别地，若 $\lambda\le\mathfrak{c}$，则 $\nu(\lambda,\kappa)=\log(\kappa^+)=\min\{\mu\mid 2^\mu>\kappa\}$，因此 $\lambda^{\nu(\lambda,\kappa)}=2^{\nu(\mathfrak{c},\kappa)}$。当然，若$\lambda\le\kappa<\mathfrak{c}$，则 $\nu(\lambda,\kappa)=\aleph_0$ 且 $\lambda^{\nu(\lambda,\kappa)}=\mathfrak{c}$。显然，若 $\lambda_1\le\lambda_2\le\kappa$，则

$$\nu(\lambda_2,\kappa)\le\nu(\lambda_1,\kappa)\le\kappa<\kappa^+\le\lambda_2^{\nu(\lambda_2,\kappa)}\le\lambda_1^{\nu(\lambda_1,\kappa)}=\kappa^{\nu(\lambda_1,\kappa)}\le 2^\kappa.$$

注意（由 [3] 5.20 可知），如果 κ 是强极限（即对于每个基数 $\theta<\kappa$，都有 $2^\theta<\kappa$），那么$\nu(\kappa,\ \kappa)$ 是 κ 的共尾性，因此对于每个 $\lambda\le\kappa$，都有 $\lambda^{\nu(\lambda,\kappa)}=2^\kappa$。另一方面，对于某些 $\kappa>\mathfrak{c}$，即使三个基数之间的差距极大，也不能排除 $\kappa^{\nu(\kappa,\kappa)}<\mathfrak{c}^{\nu(\mathfrak{c},\kappa)}<2^\kappa$。此外，对于每个正则 κ，方程$|\{\lambda\mid\kappa<\lambda<\kappa^{\nu(\kappa,\kappa)}\}|=\kappa^{\nu(\kappa,\kappa)}=2^\kappa$ 都与 ZFC集合论相容。并且，在 ZFC集合论中，$|\{\lambda\mid\kappa<\lambda<2^\kappa\}|=2^\kappa$ 对每个正则 κ 都成立也是相容的，尤其是对 $\kappa=\aleph_0$成立。（有关这些陈述的解释，请参见第 11 节。）

参照 [2], [4]，我们使用标准记号 $w(X)$ $d(X)$ $\chi(X)$ 表示空间 X 的权、稠密度、特征。注意，对每个紧豪斯多夫空间 X，都有 $\max\{\chi(X)\ d(X)\}\le w(X)\le|X|\le 2^{\chi(X)}$。以下估计至关重要。

(1.1) 如果 $\mathcal{F}$ 是一个由权为 κ 的两两不同胚紧豪斯多夫空间构成的族，那么 $|\mathcal{F}|\le 2^\kappa$。

(1.1) 成立，因为每个权为 κ 的正规空间都可嵌入希尔伯特立方体$[0,1]^\kappa$，而紧豪斯多夫空间 $[0,1]^\kappa$ 恰有 2^κ 个闭子空间。在 **(1.1)** 中，对每个 κ，都可以达到上界 2^κ。此外，$|\mathcal{F}|=2^\kappa$ 总可以在附加限制“ $\mathcal{F}$ 中的每个空间都是连通的”时达到，参见 [9]。或者，对每个满足“ $X\in\mathcal{F}$ 均为散乱”的 $\kappa>\aleph_0$，都可以达到 $|\mathcal{F}|=2^\kappa$（因此$|X|=w(X)=\kappa$），参见 [6]。（鉴于 [10]，这一结果对 $\kappa=\aleph_0$ 是不可证明的。）

类比于 [11], 中的一个标准定义，我们称空间 X_i $(i\in I)$ 不可比较，当且仅当只要 $i,j\in I$ 且 $i\ne j$，X_i 就不同胚于 X_j 的子空间。（换言之，若空间两两不可嵌入，则称它们不可比较。）显然，不可比较的空间两两不同胚。若 X,Y是权为κ 的正规空间，且 X 包含希尔伯特立方体 $[0,1]^\kappa$ 的一个同胚副本，那么 X,Y就并非不可比较。幸运的是，我们能够克服这一障碍，并证明以下定理。

定理 1. 若 κ 是一个无限基数，且 $\theta = \max\{\kappa,\mathbf{c}\}$ 或 $\theta = \lambda^{\nu(\lambda,\kappa)}$，其中 $\lambda \leq \kappa$，那么存在 2^κ 个两两不可比较的道路连通紧豪斯多夫空间，其权为κ，基数为 θ。当 $\theta = \mathbf{c}$ 时，可以使所有空间都是第一可数的。此外，若 $\mu \leq \kappa$，则存在 2^κ 个两两不可比较的连通紧豪斯多夫空间，其权为 κ，基数为 κ^μ。

关于定理 1 中最后一个陈述，请注意 $\kappa^\kappa = 2^\kappa$。在重要情形 $\kappa = \aleph_0$ 下，定理 1 中的陈述可以用以下值得注意的方式加以具体说明。

定理 2。 存在 $\mathbb{R}^3$ 的 $\mathbf{c}$ 个不可比较的道路连通紧子空间。

下文中，连续统 指具有多于一个点的紧致连通豪斯多夫空间。因此，对于任意连续统 X，都有 $|X| \geq \mathbf{c}$。线性序空间 X 是指其拓扑为某个 X 上线性序的序拓扑的空间。（与度量空间一样，线性序空间是遗传正规的。）为了通过构造适当的道路连通 空间来证明定理 1 关于 $\kappa > \aleph_0$ 的第一个陈述，我们将应用以下关于全道路不连通 空间的定理。

定理 3。 若 $\kappa > \aleph_0$ 且 $\lambda \leq \kappa$，则存在族 $\mathcal{F}_\kappa$、$\mathcal{G}_\lambda$，它们由不可比较的全道路不连通线性序连续统组成，使得 $|\mathcal{F}_\kappa| = |\mathcal{G}_\lambda| = 2^\kappa$ 且 $w(X)$ 对于 $\mathcal{F}_\kappa \cup \mathcal{G}_\lambda$ 中的每个空间 X 都成立，并且对于每个 $X \in \mathcal{F}_\kappa$ 和 $|X| = \lambda^{\nu(\lambda,\kappa)}$， $|X| = \max\{\kappa,\mathbf{c}\}$ （因此 $w(X) < |X|$）对于每个 $X \in \mathcal{G}_\lambda$ 都成立。

在定理 3 中，情形 $\kappa = \aleph_0$ 被排除，因为任何第二可数线性有序连续统都同胚于单位区间 $[0,1]$，因而道路连通，见下文 (6.1)。（反过来，每个道路连通的线性有序连续统都同胚于 $[0,1]$，这是显然的。）对于基数为 $\mathbf{c}$ 的线性序连续统，定理 3 可以加强如下。（注意，若 X 是第一可数紧豪斯多夫空间，且 $w(X) > \aleph_0$ 或 X 自身稠密，则 $|X| = \mathbf{c}$。）

定理 4. 对于每个不可数的 $\kappa \leq \mathbf{c}$，都存在 2^κ 个权为 κ、彼此不可比较、全道路不连通、第一可数的线性有序连续统。

作为对比（见 [6] 定理 5），对于每个 $\kappa \leq \mathbf{c}$，都存在 2^κ 个权为 κ、两两不同胚、可分、自身稠密的紧线性序空间。（注意，任何可分的线性序空间都是第一可数的。）证明定理 4 的难点在于情形 $\kappa = \aleph_1$，鉴于 [1] 及以下定理。

定理 5. 与 ZFC 相容的是：存在恰好三个空间 X，在同胚意义下彼此不同，并且 X 是权为 $\aleph_1$ 的第一可数线性有序连续统，其中所有单点路径连通分支的并集是 X 的一个可分子空间。

按照 [3], ，若 $\theta \geq 2$ 是一个基数，则 $\theta^{<\mu}$ 表示所有基数 θ^η 的上确界，其中 η 遍历小于 μ 的有限基数和无限基数。因此， $\lambda^{<\mu} = \lambda$ 若 $\mu = \aleph_0$，且 $\lambda^{<\mu} =$ 若 $\mu > \aleph_0$，则 $\sup\{\lambda^\kappa \mid \kappa < \mu\}$。当然，$\max\{\lambda, \mu\} \leq \lambda^{<\mu} \leq \lambda^\mu$。显然（且很重要），

$\lambda^{<\mu} \leq \kappa < \lambda^\mu$ 当且仅当 $\mu = \nu(\lambda, \kappa)$。因此，参照定理 3 中的空间 $X \in \mathcal{G}_\lambda$，等式 $(w(X) \ |X|) = (\kappa, \kappa^{\nu(\lambda,\kappa)})$ 等价于 $\lambda^{<\mu} \leq \kappa = w(X) < |X| = \lambda^\mu$。

对于任意空间 X，定义 $\hat{}w(X)$ 为 X 的非空开子空间的最小可能权。显然，$\hat{}w(X) \leq w(X)$。显然，任何满足 $\hat{}w(X) > \aleph_0$ 的线性有序连续统 X 都必须是全道路不连通的。我们称一个无限空间 X

当且仅当 $|U| = |X|$ 且 $w(U) = w(X)$ 对 X 的每个非空开子空间 U 都成立时，称其为平衡的。因此， X 是平衡的，当且仅当所有非空开子集都等势，且 $\hat{}w(X) = w(X)$。（将这两种齐性性质结合起来考虑的一个动机是，显然，任何满足 $|Y| \geq 2$ 的乘积空间 Y^κ 都是平衡的。）因此，下述定理对定理 3 中关于族 $\mathcal{F}_\kappa$ 的论述作了加强，适用于许多基数 κ，包括 $\aleph_1 \leq \kappa \leq \mathfrak{c}$，以及所有满足 $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$ 的 κ。（注意，根据豪斯多夫公式 [3] (5.22)，若 $\kappa \in \{2^\mu, (2^\mu)^+,$ 则 $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$ $(2^\mu)^{++}, \dots\}$，其中 μ 任意。）下述定理还加强了当 $\kappa = \lambda$ 为奇异基数时关于族 $\mathcal{G}_\lambda$ 的论述。（注意，根据科尼希定理 [3] 5.14，对于奇异的 κ，有 $\nu(\kappa, \kappa) < \kappa$。）

定理 6. 如果 $\max\{\mu^+, \lambda^{<\mu}\} \leq \kappa \leq \lambda^\mu$，那么存在 2^κ 个两两不可比较的平衡线性序连续统 X，满足 $w(X) = \kappa$ 和 $|X| = \lambda^\mu$。

由于平衡的 是一种相当强的性质，因此定理 6 中选择 $w(X)$ 和 $|X|$ 的自由度低于定理 3，这并不令人意外。例如，如果 $\nu(\kappa, \kappa) = \kappa$，那么定理 6 中就排除了 $\kappa = w(X) < |X|$。（显然，如果 $\nu(\kappa, \kappa) = \kappa$，那么对所有 λ, μ，$\max\{\mu^+, \lambda^{<\mu}\} \leq \kappa < \lambda^\mu$ 都不成立。）对于 $w(X)$ 和 $|X|$ 的选择，某些限制不可避免。事实上，下面的定理表明，存在某些（任意大的）基数 θ，使得既不存在基数为 θ 的平衡线性序紧致空间，也不存在满足 $\hat{}w(X) = w(X) = |X| = \theta$ 的线性序连续统 X。（注意，对于每个强极限 κ，不等式 $\kappa^{\aleph_0} > \kappa$ 简而言之表示 κ 具有可数余终性。）

定理 7。如果 κ 是强极限且 $\kappa^{\aleph_0} > \kappa$，则不存在一个基数为 κ 、所有非空开集都等势的紧线性序空间。如果 κ 是奇异的，则不存在一个满足 $\hat{}w(X) = \kappa$ 且满足 $|X| < \kappa^{\aleph_0}$ 的线性序连续统 X。

如果 $\kappa > \aleph_0$ 是强极限，则根据定理 3，存在 2^κ 个互不可比较的线性有序连续统 X，使得对于 $\theta = \kappa$ 和 $\theta = 2^\kappa$，分别有 $w(X) = \kappa$ 以及 $|X| = \theta$。鉴于定理 6 和定理 7，对于 $\theta = \kappa$ 而言，当且仅当 $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$时，可以包含齐性性质 $\hat{}w(X) = w(X)$。我们断言，对于 $\theta = 2^\kappa$，当 $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$时，也可以包含性质 $\hat{}w(X) = w(X)$。当且仅当不可数强极限 κ 是奇异的时，定理 6 才能解决这一断言。（如果 κ 是强极限，则 $\nu(\kappa, \kappa) < \kappa$，当且仅当 κ 是奇异的。）一般而言，以下定理解决了这一断言；该定理是对定理 3 和定理 6 的重要补充。

定理 8. 若 $\lambda \leq \kappa$ 且 $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$，则存在 2^κ 个两两不可比较的线性序连续统 X，使得 $\hat{}w(X) = w(X) = \kappa$ 且 $|X| = \lambda^{\nu(\lambda, \kappa)}$。

2. 定理 1 的证明。

我们区分 $\kappa = \aleph_0$ 和 $\kappa > \aleph_0$ 两种情形。首先假设 $\kappa > \aleph_0$ 且 $\lambda \leq \kappa$，并且 $\mathbf{c} \leq \theta \in \{\kappa, \lambda^{\nu(\lambda, \kappa)}\}$。下面我们将应用定理 3 和定理 4，它们分别在第 5 节和第 7 节中证明。根据定理 3，存在一个由 $\mathcal{F}$ 个两两不可比较的完全道路不连通连续体组成的族，其权为 κ，基数为 θ，且满足 $|\mathcal{F}| = 2^\kappa$。根据定理 4，我们还可以假设，当 $\theta = \mathbf{c}$ 时， $\mathcal{F}$ 中的所有空间都是第一可数的。

对于 $X \in \mathcal{F}$，考虑紧乘积空间 $X \times [0, 1]$。令 $\Psi(X)$ 为 $X \times [0, 1]$ 对其紧子空间 $X \times \{1\}$ 取商所得的空间。因此， $X \times [0, 1]$ 的子空间 $X \times \{1\}$ 被缩并为一点 $p \in \Psi(X)$，而 $X \times [0, 1]$ 的子空间 $X \times [0, 1[$ 与 $\Psi(X)$ 的子空间 $\Psi(X) \setminus \{p\}$ 相同。可以将 $\Psi(X)$ 想象成一个以 $X \times \{0\}$ 为基的锥，

其锥顶为 p。锥 $\Psi(X)$ 的母线是子空间 $(\{x\}\times[0,1[)\cup\{p\}$（$x\in X$ 取遍所有值），它们都与 $[0,1]$ 同胚。

当然，$\Psi(X)$ 是紧豪斯多夫空间。由于 $|X|=\theta\geq\mathsf{c}$ 且 $|[0,1]|=\mathsf{c}$，我们有 $|\Psi(X)|=\theta$。由于 X 是紧致的，根据 [2] 3.1.15，紧子集 $X\times\{1\}$ 在空间 $X\times[0,1]$ 中的邻域滤子有可数基，因此 p 有可数局部基。因此，由于 $w(X)=\kappa$ 且 $w([0,1[)=\aleph_0$，我们有 $w(\Psi(X))=\kappa$。此外，如果 X 是第一可数的，那么 $\Psi(X)$ 也是第一可数的。当然，$\Psi(X)$ 是道路连通的。由于 X 是全道路不连通的，锥 $\Psi(X)$ 的锥顶 p 被拓扑标记为唯一点 x，在该点处 $\Psi(X)\setminus\{x\}$ 有无限多个路径连通分支。（如果 $p\neq x\in\Psi(X)$，那么 $\Psi(X)\setminus\{x\}$ 有一个或两个路径连通分支。）另一方面，使得 $\Psi(X)\setminus\{x\}$ 仍然道路连通的所有 $x\in X$ 组成的集合是 $X\times\{0\}$，因此与 X 同胚。这使我们能够验证，2^κ 空间 $\Psi(X)$ $(X\in\mathcal{F})$ 彼此不可比较。

设 $X_1,X_2\in\mathcal{F}$，并设 f 是从 $\Psi(X_1)$ 到 $\Psi(X_2)$ 的子空间 S 上的同胚。显然，$\Psi(X_1)$ 不同胚于 $[0,1[$ 的任何子空间。因此，由于 X_1 是全道路不连通的，而 $\Psi(X_1)$ 是由 $[0,1]$ 的 κ 个副本 C_i 并起来组成的，且对于 $i\neq j$，$C_i\cap C_j=\{p\}$，所以 $f(\Psi(X_1))\subset X_2\times[0,1[$ 不可能成立，因而 $f(p)=p$。于是，锥 $\Psi(X_1)$ 的每条母线 $(\{x_1\}\times[0,1[)\cup\{p\}$ 都映射到锥 $\Psi(X_2)$ 的一条母线 $(\{x_2\}\times[0,1[)\cup\{p\}$ 上。因此，由于这些母线同胚于 $[0,1]$，且 $f(p)=p$，我们可以定义一个从 X_1 到 X_2 的单射 g，以及一个从 X_1 到 $[0,1[$ 的映射 h，使得对每个 $x\in X_1$，都有 $f(\{x\}\times[0,1[)=\{g(x)\}\times[h(x),1[$。因此，$W:=\{(g(x)\ h(x))\mid x\in X_1\}$ 是道路连通空间 S 中满足 $S\setminus\{y\}$ 仍保持道路连通的所有点 y 的集合。于是，$f(X_1\times\{0\})=W$，从而 W 是 $\Psi(X_2)\setminus\{p\}=X_2\times[0,1[$ 的一个紧致连通子空间，且同胚于 X_1。若 π 表示 $X_2\times[0,1[$ 到 $X_2\times\{0\}$ 上的（连续）投影，则将 π 限制在 W 上显然是单射。因此，$\pi(W)$ 是 $X_2\times\{0\}$ 的一个紧子空间，同胚于 W，因而也同胚于 X_1。由于 $X_2\times\{0\}$ 同胚于 X_2，我们得出 X_1 同胚于 X_2 的一个子空间，因此可推出 $X_1=X_2$。这就完成了在 $\kappa>\aleph_0$ 的情况下定理 1 的第一和第二个结论的证明。

为了在 $\kappa>\aleph_0$ 的情况下证明定理 1 的第三个结论，令 $\mu\leq\kappa$，并令 $\mathcal{F}_\kappa$ 为定理 3 所给出的一个族。对于 $X\in\mathcal{F}_\kappa$，考虑锥 $\Psi(X)$ 和乘积空间 X^μ。由于 X 是一个权为 κ、基数为 $\max\{\kappa,\mathsf{c}\}$ 的全道路不连通连续统，因此空间 X^μ 是一个权为 κ、基数为 κ^μ 的全道路不连通连续统。对每个 $X\in\mathcal{F}_\kappa$，固定一个点 $a\in X^\mu$ 和一个属于 $X\times\{0\}\subset\Psi(X)$ 的点 b。（注意，根据正则公理，形式上 [3]，集合 X^μ 与 $\Psi(X)$ 不相交。）令 $\Phi(X)$ 表示空间 X^μ 与 $\Psi(X)$ 的拓扑和对其子空间 $\{a,b\}$ 取商所得的商空间。（我们通过将 X^μ 与 $\Psi(X)$ 在点 a 和 b 处粘合，得到 $\Phi(X)$。）显然，$\Phi(X)$ 是一个权为 κ、基数为 κ^μ 的连续统。

令 $X_1,X_2\in\mathcal{F}_\kappa$ 互不相同，因此道路连通空间 $\Psi(X_1)$ 和 $\Psi(X_2)$ 不可比较。若 S 是 $\Phi(X_1)$ 的一个与 $[0,1]$ 同胚的子空间，那么 S 必是 $\Psi(X_1)$ 的子空间，而它无法嵌入 $\Phi(X_2)$ 的全道路不连通子空间 X_2^μ 中。因此，连续体 $\Phi(X_1)$ 和 $\Phi(X_2)$ 也不可比较。这就证明了在 $\kappa>\aleph_0$ 的情况下定理 1 的所有陈述。

若 $\kappa = \aleph_0$，则 $\max\{\kappa, \mathfrak{c}\} = \mathfrak{c}$ 且 $\lambda^{\nu(\lambda,\kappa)} = \mathfrak{c}$ 且 $\kappa^{\mu} = \mathfrak{c}$，因此由以下定理 2 的证明可知结论成立。

3. 定理 2 的证明。

证明定理 2 需要以下命题。

命题 1. 存在一个由可数集 $H \subset]0,1[$ 组成的族 $\mathcal{H}$，满足下确界 $H = 0$和上确界 $H = 1$，使得 $|\mathcal{H}| = \mathfrak{c}$，并且若 $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$ 互不相同且 F 是有限集，则不存在从 H_1 到 $H_2 \setminus F$ 的单调双射。

证明。令 G 为所有从 $\mathbb{N}$ 到 $\{3,5\}$的函数构成的族，因此 $|G| = \mathfrak{c}$。依照[11], ，令 ζ （分别为 η）表示自然序集 $\mathbb{Z}$ （分别为 $\mathbb{Q}$）的序型。对每个$g \in G$，考虑序型 $\tau[g] := 7 + \zeta + g(1) + \zeta + g(2) + \zeta + g(3) + \cdots$。显然，如果对每个 $g \in G$， $A[g] \subset \mathbb{R}$ 的序型都是 $\tau[g]$，那么对于互不相同的 $g_1, g_2 \in G$，不存在从 $A[g_1]$ 到 $A[g_2]$的单调双射。现在对每个 $g \in G$ 选取一个集合 $H[g] \subset]0,1[$，其序型为 $(\eta + \tau[g] + \eta + \tau[g] + \eta + \tau[g] + \cdots) + \zeta$，且下确界为 $H = 0$、上确界为 $H = 1$。由于 $\tau[g]$ 的无限重复，如果 E 是有限集且 $g_1, g_2 \in G$ 互不相同，那么不存在从 $H[g_1]$ 到 $H[g_2] \setminus E$ 的单调双射。因此，定义 $\mathcal{H} = \{ H[g] \mid g \in G \}$ 即得证。

现在我们可以证明定理 2 了。我们将 $\mathbb{R}^3$ 中的点视为向量，因此 $\{ (1-t) \cdot a + t \cdot b \mid 0 \leq t \leq 1 \}$ 是连接点 $a, b \in \mathbb{R}^3$ 的闭直线段。如果 $A \subset \mathbb{R}^3$，那么 A 表示 A 在空间 $\mathbb{R}^3$ 中的闭包。对于道路连通的豪斯多夫空间 X，令 $\Omega(X)$ 表示所有点 $a \in X$ 的集合；这些点处不存在仅由道路连通集合组成的局部基。

令 $\mathcal{H}$ 为命题 1 所给出的一个族。对于族 $\mathcal{H}$ 中满足 $a_i \neq a_j$、且 $i \neq j$ 的每个集合 $H = \{ a_0, a_1, a_2, \ldots \}$，我们定义一个从 $[0,\infty[$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的映射 $\phi = \phi_H$：对每个 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，令 $\phi(2n) = (a_n, 0, 0)$，并令 $\phi(2n+1) = (a_n, 2^{-n}, 3^{-n})$；对于每个整数 $k \geq 0$ 和每个 $t \in [0,1]$，令 $\phi(k+t) := (1-t) \cdot \phi(k) + t \cdot \phi(k+1)$。
显然， ϕ 是连续的。此外， ϕ 是单射，因为若 π_n 是经过三个点$\phi(2n)$ $\phi(2n+1)$ $\phi(2n+2)$的平面，那么当 $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 且 $m \neq n$时，$\pi_n \neq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ 且$\pi_m \cap \pi_n = \mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\}$。

令 $H \in \mathcal{H}$，并设 $A_H := \phi_H([0,\infty[)$，由此 A_H 是$\mathbb{R}^3$ 的路径连通子空间，显然它不是紧致的。由于 $\inf H = 0 \notin H$ 且 $\sup H = 1 \notin H$，显然有 $\Omega(A_H) = H \times \{0\} \times \{0\}$。由于 $A_H \subset [0,1]^3$，空间A_H是紧致的。空间A_H也是道路连通的，因为 $A_H = A_H \cup I$，其中 $I := [0,1] \times \{0\} \times \{0\}$。对于空间 A_H，显然有 $\Omega(A_H) = I \setminus \{(0,0,0), (1,0,0)\}$。

我们断言，空间 A_H $(H \in \mathcal{H})$ 不可比较。令 $G, H \in \mathcal{H}$ 并假设 f 是从 A_G 到 A_H 的某个（紧致且道路连通的）子空间的同胚。那么 $f(A_G) = f \circ \phi_G([0,\infty[)$ 是 A_H的一个道路连通子空间，且 $f(A_G)$ 与 A_G 同胚，因此 $|\Omega(f(A_G))| = \aleph_0$。显然， $f \circ \phi_G$ 是从 $[0,\infty[$ 到 A_H 的单射连续映射。

设 g 是从 $[0,\infty[$ 到 A_H 的任意单射连续映射。那么显然，$\Omega(g([0,\infty[)) \subset I$。当然， $|\Omega(g([0,\infty[))| > \aleph_0$ 以及 $|\Omega(g([0,\infty[))| < \aleph_0$ 也都是可能的。（事实上， $|\Omega(g([0,\infty[))| \neq \aleph_0$ 当且仅当 $|\Omega(g([0,\infty[))| = \mathfrak{c}$ 或 $\Omega(g([0,\infty[)) = \emptyset$。）如果

$|\Omega(g([0,\infty[))| = \aleph_0$，那么 $g([0,\infty[) \cap I \subset \Omega(A_H)$，且 $g([0,\infty[)$ 含有无限多个 $(H \cap J)$ 中的点 $\times\{0\}\times\{0\}$，对所有满足 $\epsilon > 0$ 的区间 $J = [0,\epsilon]$ 和 $J = [1-\epsilon, 1]$ 都成立。因此，$|\Omega(g([0,\infty[))| = \aleph_0$ 当且仅当存在某个 $t \geq 0$，使得 $g([0,\infty[) = \phi_H([t,\infty[)$。

因此我们得出，对于某个 $t \geq 0$，$f(A_G) = \phi_H([t,\infty[) \subset A_H$。集合 I 是空间 A_G 中 $\Omega(A_G)$ 的闭包，并且 $f(\Omega(A_G)) = \Omega(f(A_G)) \subset I$。因此，$f$ 将 I 映射到 I 的一个紧致连通子集上。我们有 $f(I) = I$，因为如果 $f(I)$ 是 I 的真子集，那么由 $\phi_H([t,\infty[) \subset f(A_G)$ 可推出 $f(A_G)$ 不会是紧致的。显然，对每个 $t \geq 0$，$\Omega(\phi_H([t,\infty[)) = \{(a_m, 0, 0) \mid 2m \geq t\}$。因此，$f$ 将 $\Omega(A_G) = G\times\{0\}\times\{0\}$ 映射到 $\Omega(A_H)$ 的一个余有限子集上 $= H\times\{0\}\times\{0\}$。当然，$f$ 本质上是单位区间 $[0,1]$ 上的单调置换。因此，f 诱导出一个单调双射，将 G 映射到 H 的一个余有限子集上。于是 $G = H$，定理 2 的证明至此完成。

注。只要付出更多努力，就可以进一步加强定理 2。实际上，存在$\mathbf{c}$ 两两不可比较、道路连通的平面紧子空间 $\mathbb{R}^2$。这一命题的证明见 [7]。

4. 基本构造

稠密序空间是指其拓扑由稠密线性序生成的空间（即任意两点之间都有无穷多个点）。显然，对于每个稠密序空间 X，$d(X) = w(X)$。鉴于 [12] 39.7，39.8 线性序连续统可以用一种简便的方式刻画。

引理1。空间 X 具有 $|X| \geq 2$，当且仅当 X 的拓扑由 X 上的稠密线性序生成，且 X 有一个最小元，并且 X 的每个非空子集都有上确界。空间 X 是线性序连续统，当且仅当 X 稠密有序且紧致。

设 X 是一个线性有序连续统。若 a、b 是 X 中两个不同的点，则令 $I[a,b]$ 表示包含 a 和 b 的 X 的所有连通子集的交集。显然，$I[a,b]$ 是 X 的一个子空间，且为线性有序连续统。我们称 $I[a,b]$ 为区间，称 a、b 为 $I[a,b]$ 的两个端点，这是基于一个显而易见的事实：若 $\preceq$ 是 X 上生成 X 拓扑的一个线性序，且 $a \prec b$，则 $I[a,b] = I[b,a] = \{x \in X \mid a \preceq x \preceq b\}$。显然，$\hat{}w(X) = \min\{w(I[a,b]) \mid a,b \in X, a \neq b\}$。当然，区间 I 的端点可通过纯拓扑方式刻画为该空间 I 中的两个非割点，即 $x \in I$ 是 I 的一个端点，当且仅当 $I\setminus\{x\}$ 是连通的。区间及其端点具有拓扑刻画这一事实有两个重要推论。首先，任意线性有序连续统 X 恰有两种能生成 X 拓扑的线性序。第二个推论是以下引理，它对我们的目的至关重要，证明则是一个简单的练习。

引理 2. 若 X 和 Y 是两个线性序连续统，且 f 是从 X到 Y 的双射，那么 f 是同胚，当且仅当相对于分别生成 X 和 Y 的 X 和 Y 的任意线性序，f 是递增或递减的。

作为引理 2 的一个重要推论，如果 X_1，X_2 是连续体的线性有序集，那么 X_1，X_2 不可比较，当且仅当对于 $\{i,j\} = \{1,2\}$ 和任意区间 $I[a,b] \subset X_j$，都不存在从 X_i 到 $I[a,b]$ 的单调双射。

根据以下引理，通常（在本文中始终如此）很容易确定线性序空间的权。

引理 3. 如果 X 是一个线性有序连续统，且有一个基数为 κ 的稠密子集，并包含 λ 个两两不交区间，那么 $\lambda \leq w(X) \leq \kappa$。

引理 4. 如果 X 是一个线性有序连续统，且 S 是 X 的一个无限子空间，那么 $w(X) \geq w(S) \geq |\{\,\{a,b\} \mid a,b \in S,\ a \neq b,\ S \cap I[a,b] = \{a,b\}\,\}|$。

引理 3 显然。为了证明引理 4，令 $\mathcal{A} = \{\,\{a,b\} \mid a,b \in S,\ a \neq b,\ S \cap I[a,b] = \{a,b\}\,\}$，并令 $\mathcal{B}$ 为 S 的一个基，令 $\preceq$ 为生成 X 拓扑的两种序之一。对于每个 $Y \in \mathcal{A}$，我们可以选取与 $\{\,x \in S \mid$ 不相交的 $B_Y \in \mathcal{B}$，使得 $\max Y \preceq x\,\}$ 为 $\min Y \in B_Y$，由此，对于不同的 $Y, Y' \in \mathcal{A}$，有 $B_Y \neq B_{Y'}$，因此 $|\mathcal{B}| \geq |\mathcal{A}|$，证毕。

在全文中，若 α, β 是序数，且 $\alpha < \beta$，并且 β 是无限的，那么我们用$[\alpha, \beta]$表示满足 $\alpha \leq \gamma \leq \beta$的所有序数 γ所构成的集合，并令 $[\alpha, \beta[:= [\alpha, \beta] \setminus \{\beta\}$。（由于$\beta$ 是无限的，用 $[0,1]$ 表示欧几里得单位区间仍然不会产生歧义。）对每个无限序数 α，定义一个无限基数 $|\alpha|$，使得 $|\alpha| := |[0, \alpha[|$。（若像通常那样，$\alpha$ 与集合 $[0, \alpha[$ 相同，那么 $|\alpha|$ 就是集合 α 的基数，而 $|\alpha|$ 的定义与任意集合 S的定义 $|S|$ 相容。）

对于极限序数 $\gamma > 0$（它可以是无限基数）和线性有序集 L，线性有序集 $L^{[0,\gamma[}$ 是 L 中所有γ-序列构成的字典序集。因此，若 $a =$，则 $a \in L^{[0,\gamma[}$；若x_α，则$\alpha<\gamma}(x_\alpha)$是从 $[0,\gamma[$到 L的映射，并且当且仅当 $a \neq b$ 且对于满足 $x_\beta \neq y_\beta$的最小序数 β，x_β 小于 y_β 时，$a =(x_\alpha)_{\alpha<\gamma}$ 小于 $b =(y_\alpha)_{\alpha<\gamma}$。

假设 L 的线性序稠密且完备，并且有最大元和最小元，因此线性序空间 L 是一个连续统。注意，对每个 $\kappa \geq \mathbf{c}$，都存在一个基数为 κ 的线性有序连续统 L。事实上，若 $\kappa = \mathbf{c}$，则 $[0,1]$ 就是这样的连续统。对于 $\kappa \geq \mathbf{c}$，考虑权为 κ 的紧致长直线。（这个对经典长直线的推广由 $[0,\kappa]$ 构造而成：在每个序数 $\alpha < \kappa$ 与其后继 $\alpha + 1$ 之间放入开单位区间 $]0,1[$ 的一个同胚副本。）

现在令 γ 为一个无限基数。我们断言，线性序空间 $L^{[0,\gamma[}$ 是一个平衡线性序连续统。显然，常值序列 $(\max L)$ 和 $(\min L)$ 分别是 $L^{[0,\gamma[}$ 的最大元和最小元。由于 γ 是一个基数，对每个极限序数 $\beta < \gamma$，良序集 $[\beta, \gamma[$ 与良序集 $[0, \gamma[$ 序同构。因此，在 $L^{[0,\gamma[}$ 中任意两点之间，都有一个与整个集合 $L^{[0,\gamma[}$ 序同构的点集。由此，$L^{[0,\gamma[}$ 是平衡且稠密有序的。因此，要验证 $L^{[0,\gamma[}$ 是一个连续统，只需验证每个非空集合 $Y \subset L^{[0,\gamma[}$ 都有上确界。令 $\sup A$ 表示 $A \subset L$ 在线性有序连续统 L 中的上确界，并约定 $\sup \emptyset = \min L$。对每个序数 $\alpha < \gamma$，令 π_α 表示从 $L^{[0,\gamma[}$ 到 L 的投影 $(x_\beta)_{\beta<\gamma} \mapsto x_\alpha$。现在对 $\emptyset \neq Y \subset L^{[0,\gamma[}$，递归地定义 $y =(y_\beta)_{\beta<\gamma}$，使得 $y_0 := \sup \pi_0(Y)$，并且

$$y_\beta := \sup \pi_\beta\big(Y \cap \bigcap_{\alpha<\beta} \pi_\alpha^{-1}(\{y_\alpha\})\big)$$

对于每个 $\beta \in [1, \gamma[$。稍加思考即可看出，y 是 Y的上确界 .

对于每个$\beta \in [1,\gamma[$，令 S_β 表示由 $L^{[0,\gamma[}$ 中所有序列 $(x_\alpha)_{\alpha<\gamma}$ 组成的集合，其中当 $\beta \le \alpha < \gamma$时 $x_\alpha = \min L$，或当 $\beta \le \alpha < \gamma$时 $x_\alpha = \max L$。因此，$E := \bigcup_{\beta\in[1,\gamma[} S_\beta$ 是 L 中所有最终为常值的 γ-序列组成的集合，其常值要么是$\min L$，要么是$\max L$。显然，E是连续统 $L^{[0,\gamma[}$的稠密子集。由于对于每个 $\beta \in [1,\gamma[$,都有 $|S_\beta| = |L|^{|\beta|}$，因此 $|E| = |L|^{<\gamma}$。（注意，若 $\gamma = \aleph_0$，则$|L|^{<\gamma} = |L|$，并且对于 $\beta \in \mathbb{N}$ 有 $|L|^{|\beta|} = |L|^\beta = |L|$。）因此，鉴于引理 3，$w(L^{[0,\gamma[}) \le |L|^{<\gamma}$。

我们断言 $w(L^{[0,\gamma[}) \ge |L|^{<\gamma}$。当 $\gamma = \aleph_0$ 时，这显然成立，因为此时 $|L|^{<\gamma} = |L|$，而且在 $L^{[0,\gamma[}$ 中的任意两点之间，显然都有 $|L|$ 个两两不相交的区间。（对于任意无限基数 γ，这一结论甚至也成立。）因此，假设 γ 是一个不可数基数。根据引理 4，对于每个无限基数 $\theta < \gamma$，集合 S_θ 是 $L^{[0,\gamma[}$ 的一个子空间，且满足 $w(L^{[0,\gamma[}) \ge |S_\theta| = |L|^\theta$。因此，$w(L^{[0,\gamma[}) \ge |L|^{<\gamma}$。这就证明了该断言，进而证明对于每个无限基数 γ，都有 $w(L^{[0,\gamma[}) = w(L^{[0,\gamma[}) = |L|^{<\gamma}$ 且$|L^{[0,\gamma[}| = |L|^\gamma$。

现在我们考虑特殊情形 $\gamma = \aleph_0$。为便于阅读，我们用 $[0,\omega[$代替 $[0,\aleph_0[$。（最小的无限序数 ω与基数 $\aleph_0$相同，这是因为按照约定，基数都是初始序数。）集合 $L^{[0,\omega[}$ 是 L 中所有通常序列构成的集合。（序列的指标是非负整数。）因此，我们有 $|L^{[0,\omega[}| = |L|^{\aleph_0}$ 和 $w(L^{[0,\omega[}) = |L|^{<\omega} = |L|$。设 D 是连续统 L 的一个稠密子集，且 $\max L \in D \subset L$。（因此，由于 L 是一个连续统，在线性有序集 L 中任意两点之间都有无穷多个 D的成员。）定义集合$L[D] \subset L^{[0,\omega[}$，使得 $(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots) \in L^{[0,\omega[}$属于 $L[D]$，当且仅当对每个指标n ，蕴含式

$$x_n \notin D \implies \forall\, m > n :\ x_m = \min L \tag{4.1}$$

成立。特别地，$L[L] = L^{[0,\omega[}$。赋予字典序后，$L[D]$ 是一个紧线性序空间。事实上，常值序列 $(\min L)$ 是 $L[D]$ 的最小元。（由于 $\max L \in D$，常值序列 $(\max L)$ 是 $L[D]$ 的最大元。）根据 (4.1)，线性有序集 $L[D]$ 中任意非空集合 $Y \subset L[D]$ 的上确界，等于 $L^{[0,\omega[}$中 Y 的上确界。（顺便一提，对于下确界，若 $L \setminus D$ 是无限集，则此结论不成立。还要注意，如果 $L \setminus D$ 是无限集，那么连续统 $L[D]$ 不是 $L^{[0,\omega[}$ 的子空间，因为 $L^{[0,\omega[}$ 中的点集 $L[D]$ 既不连通，也不紧致。）$L[D]$ 的权为 $|D|$，因为首先，在$L[D]$ 中任意两个不同的点之间总有 $|D|$ 个 $L[D]$ 的副本；其次，最终常值序列 $(d_0, d_1, \ldots, d_n, a, a, a, \ldots)$（其中 $d_i \in D$ 且 $a = \min L$）构成了 $L[D]$ 的一个基数为 $|D|$的稠密子集。特别地，$L[D]$ 是一个平衡线性序连续统，并且$|L[D]| = \max\{|L|, |D|^{\aleph_0}\}$ 和 $w(L[D]) = |D|$。显然，若 L 是第一可数的，则 $L[D]$ 是第一可数的。更一般地，显然 $\chi(L[D]) \le \chi(L)$。

我们以一个命题结束本节，该命题对于定理 6 的证明至关重要。

命题 2. 若 $\lambda^{<\mu} \le \kappa \le \lambda^\mu$，则存在一个平衡线性序连续统 K，使得 $w(K) = \kappa$，并且 $|K| = \lambda^\mu$，且 $\chi(K) \le$ 最大值$\{\lambda, \mu\}$，其中 $\lambda = \aleph_0$ 对于 $\lambda \le \mathbf{c}$ 成立，而 $\lambda = \lambda$ 对于 $\lambda > \mathbf{c}$成立。

证明。假设 $\lambda^{<\mu} \le \kappa \le \lambda^\mu$。我们区分 $\lambda^{<\mu} < \mathbf{c}$ 和 $\lambda^{<\mu} \ge \mathbf{c}$ 两种情况。首先假设 $\lambda^{<\mu} < \mathbf{c}$。那么 $\mu = \aleph_0$且 $\lambda < \mathbf{c}$，从而 $\lambda^\mu = \mathbf{c}$。因此我们可以通过

取 $[0,1]$ 作为所需的连续统 K（如果 $\kappa=\aleph_0$），并令 $K=L[D]$，其中$L=[0,1]$，且 $D\subset[0,1]$ 是稠密的；如果 $\kappa>\aleph_0$，则 $1\in D$ 和 $|D|=\kappa$。（在这两种情况下，K 都是第一可数的。）

现在假设 $\lambda^{<\mu}\geq\mathfrak{c}$。我们区分 $\lambda\leq\mathfrak{c}$ 和 $\lambda>\mathfrak{c}$ 两种情况。首先假设 $\lambda\leq\mathfrak{c}$。考虑基数为 $\mathfrak{c}^{<\mu}$、大小为 $\mathfrak{c}^{\mu}$的平衡线性序连续统 $L=[0,1]^{[0,\mu[}$。由于当 $\aleph_0\leq\theta\leq\mathfrak{c}$ 时 $\theta^{\mu}=c^{\mu}$，且 $\lambda\leq c\leq\lambda^{<\mu}$，我们有 $\mathfrak{c}^{\mu}=\lambda^{\mu}$ 和 $\mathfrak{c}^{<\mu}=\lambda^{<\mu}$。（因此，若 $\kappa=\lambda^{<\mu}$，令 $K=L=[0,1]^{[0,\mu[}$即可完成证明。）由于 $d(L)=w(L)\leq\kappa\leq|L|$，我们可以选取一个稠密集 $D\subset L$，使其最大元为 $L\in D$且 $|D|=\kappa$。考虑 $L[D]\subset L^{[0,\omega[}$并令 $K:=L[D]$。那么 K是一个平衡线性序连续统，满足 $w(K)=\kappa$且 $|K|=\max\{\lambda^{\mu},\kappa^{\aleph_0}\}=\lambda^{\mu}$。由于 $[0,1]$是第一可数的且 $|[0,\mu[|=\mu$，我们有 $\chi(K)\leq\chi([0,1]^{[0,\mu[})\leq\mu$。

~其次，假设 $\lambda>\mathfrak{c}$，由此可得 $\lambda^{<\mu}>\mathfrak{c}$。任取一个基数为 λ的线性有序连续统 L。那么，$L=\tilde{L}^{[0,\mu[}$ 是一个权为 $\lambda^{<\mu}$、基数为 λ^{μ} 的平衡线性序连续统。与上文一样，我们选择一个稠密集 $D\subset L$，满足$\max L\in D$ 和 $|D|=\kappa$，并令$K:=L[D]$。那么，K 是一个权为 κ、基数为 λ^{μ} 的平衡线性序连续统。并且我们有 $\chi(K)\leq\chi(\tilde{L}^{[0,\mu[})$。显然，$\chi(\tilde{L}^{[0,\mu[})\leq\max\{\chi(\tilde{L}),\mu\}$。由于 $|\tilde{L}|=\lambda$且对于每个线性序空间 X，都有 $\chi(X)\leq|X|$，因此我们得到 $\chi(K)\leq\max\{\lambda,\mu\}$，证毕。

5. 定理 3 和定理 6 的证明

令 Σ_{κ}表示所有从 $[0,\kappa[$到集合 $\{0,1\}$的函数所构成的族。因此，Σ_{κ}的成员是 κ-序列，其取值为 0 或 1。由于$|[0,\kappa[|=\kappa$,，我们有$|\Sigma_{\kappa}|=2^{\kappa}$。在 Σ_{κ}上按如下方式定义等价关系 $\sim$。对于 σ_1，$\sigma_2\in\Sigma_{\kappa}$，当且仅当存在一个序数 $\gamma<\kappa$，使得对于每个$\alpha\in[\gamma,\kappa[$，都有 $\sigma_1(\alpha)=\sigma_2(\alpha)$，此时定义 $\sigma_1\sim\sigma_2$。当 $\sigma_1\sim\sigma_2$时，我们称 σ_1，$\sigma_2\in\Sigma_{\kappa}$相似。

(5.1) 族 Σ_{κ} 包含 2^{κ} 两两不相似的 κ-序列。

令 $\mathcal{E}_{\kappa}$ 表示 Σ_{κ} 关于 $\sim$的等价类划分。（5.1）可通过证明 $|\mathcal{E}_{\kappa}|=2^{\kappa}$ 来验证。首先注意，若 $\mu<\kappa$，则 $|\mathcal{E}_{\kappa}|\geq2^{\mu}$。事实上，对于每个 μ-序列 $g\in\Sigma_{\mu}$，当 $\alpha\in[0,\mu[$且$\beta\in[0,\kappa[$时，令 $\sigma[g](\mu\cdot\beta+\alpha)=g(\alpha)$。根据序数算术，$\sigma[g]$ 是 Σ_{κ} 中的一个定义良好的 κ-序列，并且对于不同的 g_1，$g_2\in\Sigma_{\mu}$，我们总有 $\sigma[g_1]\not\sim\sigma[g_2]$。因此，$|\mathcal{E}_{\kappa}|\geq|\Sigma_{\mu}|=2^{\mu}$。

由于对所有 $\mu<\kappa$ 都有 $|\mathcal{E}_{\kappa}|\geq2^{\mu}$，因此我们得到 $|\mathcal{E}_{\kappa}|\geq2^{<\kappa}$。所以，在 $2^{<\kappa}=2^{\kappa}$ 的情况下，$|\mathcal{E}_{\kappa}|=2^{\kappa}$。为了完成 (5.1) 的证明，还需在 $2^{<\kappa}<2^{\kappa}$ 的情况下验证 $|\mathcal{E}_{\kappa}|=2^{\kappa}$。显然，只需验证对每个等价类 $E\in\mathcal{E}_{\kappa}$，都有 $|E|\leq2^{<\kappa}$。

如果 $\kappa=\aleph_0$（因此 $2^{<\kappa}=\aleph_0$），那么显然对每个 $E\in\mathcal{E}_{\kappa}$ 都有 $|E|=\aleph_0$。如果$\kappa>\aleph_0$，那么对每个 $E\in\mathcal{E}_{\kappa}$，都有$|E|\leq\sum_{\omega\leq\gamma<\kappa}|\Sigma_{|\gamma|}|=\sum_{\omega\leq\gamma<\kappa}2^{|\gamma|}=2^{<\kappa}$，由此完成 (5.1) 的证明。

如果 $\gamma<\kappa$ 是一个序数，那么自然地，典范良序集 $[0,\kappa[$ 和 $[\gamma,\kappa[$ 序同构，并且从 $[0,\kappa[$ 到 $[\gamma,\kappa[$ 恰有一个序同构。此外，以下结论成立。

(5.2) 若 $\kappa>\aleph_0$、$\gamma\in[0,\kappa[$，且 φ 是从 $[0,\kappa[$到 $[\gamma,\kappa[$的递增双射，那么存在一个序数 $\beta\in[\gamma,\kappa[$，使得 $\varphi(\alpha)=\alpha$ 对每个 $\alpha\in[\beta,\kappa[$ 都成立。

证明。若 $\gamma = 0$，则 φ 是恒等映射，结论成立。假设 $\gamma > 0$，并考虑可数集合 $A = \{\phi_n \mid n < \omega\}$，其中 $\phi_0 = 0$，且 $\phi_1 = \varphi(0)$、$\phi_2 = \varphi(\varphi(0))$、$\phi_3 = \varphi(\varphi(\varphi(0)))$，依此类推，因此 $\phi_0 < \phi_1 < \phi_2 < \phi_3 < \cdots$。那么 $\beta = \sup A$ 是 $[0, \kappa]$ 中的一个极限序数，并且由于 $\sup \varphi(A) = \varphi(\sup A)$，我们有 $\varphi(\beta) = \beta$。我们断言 $\beta < \kappa$。（若 κ 具有不可数共尾性，这显然成立。）令 $\theta = |[0, \varphi(0)[|$，因此 $\theta < \kappa$。那么对每个 $n \in \mathbb{N}$，$|[\phi_n, \phi_{n+1}[| = \theta$ 都成立。显然，$[0, \beta[= \bigcup_{n=0}^{\infty} [\phi_n, \phi_{n+1}[$。因此，$|[0, \beta[| = \max\{\aleph_0, \theta\} < \kappa$，从而 $\beta < \kappa$。最后，由于 $\varphi(\beta) = \beta$，显然，将 φ 限制在 $[\beta, \kappa[$ 上必定是恒等映射，证毕。

若 X 是豪斯多夫空间，且 $x \in X$，那么照例，$\chi(x, X)$ 表示空间 X 中点 x 处邻域基可能具有的最小基数。因此，$\chi(X) = \sup\{\chi(x, X) \mid x \in X\}$。（注意，这个上确界不一定是最大元。例如，若 X 是某个奇异 κ 对应的紧线性序空间 $[0, \kappa]$，则 $\chi(X) = \kappa$，但对每个 $x \in X$，都有 $\chi(x, X) < \kappa$。）为了证明定理 3 和定理 6，我们将应用以下定理。

定理 *10*。设 K 是一个线性有序连续统，且 $\chi(K) < w(K) \leq \kappa$。那么存在一个族 $\mathcal{L}_\kappa(K)$，其中包含不可比较的线性有序连续统，使得$|\mathcal{L}_\kappa K| = 2^\kappa$，且 $w(X) = \kappa$，并且 $\hat{}w(X) = \hat{}w(K)$，且对每个 $X \in \mathcal{L}_\kappa(K)$，都有 $|X| = max\{\kappa, |K|\}$；若 K 是平衡的，且 $w(K) = \kappa$，那么 $\mathcal{L}_\kappa(K)$ 中的每个空间都是平衡的。

证明。设 K 是一个线性有序集，在序拓扑下是连续统，并且 $\theta := \chi(K) < w(K) \leq \kappa$。那么 θ^+ 是一个正则基数，且 $\theta^+ \leq w(K) \leq \kappa$。通过在每个序数 $\alpha < \theta^+$ 与其后继 $\alpha + 1$ 之间放置稠密有序集 $K \setminus \{e_1, e_2\}$ 的一个同胚副本，构造紧致长直线的一个修改 M；其中 e_1、e_2 是 K 的两个端点。于是 M 是一个紧致稠密有序集，最小元为 0，最大元为 θ^+，并且 $w(M) = \kappa$ 和 $|M| = |K|$。由于 θ^+ 是正则基数，M 的最大元 θ^+ 是 M 中满足 $\chi(x, M) > \theta$ 的唯一点 x。令 $Y = M \setminus \{0, \theta^+\}$，并令 Y^* 为集合 Y，配备 Y 的反向线性序。（若 x、$y \in Y$，则相对于 Y 的原序，x 小于 y，当且仅当相对于反向序，y 小于 x。）

令 Γ 表示集合 $[\omega, \kappa[$ 中所有极限序数构成的集合，并令 Σ 表示从 Γ 到集合 $\{0, 1\}$ 的所有函数构成的族。显然，$|\Gamma| = \kappa$，因此 $|\Sigma| = 2^\kappa$。显然，Γ 是良序的，因而与按典范方式排序的集合 $[0, \kappa[$ 序同构。因此，参照上文定义的等价关系 $\sim$，我们可以谈论 Σ 中的相似和不相似成员。

对每个 $\sigma \in \Sigma$，令 X_σ 由 $[0, \kappa]$ 构造而成，方法是在每个序数 $\alpha < \kappa$与其序数后继 $\alpha + 1$ 之间按如下方式放置有序集 Y或有序集 Y^*的一个同胚副本。若 $\alpha \notin \Gamma$，则在 α 与 $\alpha + 1$ 之间放置 Y的一个同胚副本。若$\gamma \in \Gamma$，则在 γ 与 $\gamma + 1$ 之间，当 $\sigma(\gamma) = 0$ 时放置 Y 的一个同胚副本，而当 $\sigma(\gamma) = 1$时放置Y^* 的一个同胚副本。这样，集合 X_σ 成为一个最小元为 0、最大元为 κ 的线性有序集，并且 X_σ 在其子集 $[0, \kappa]$ 上的线性序，就是 $[0, \kappa]$的典范良序。显然，就序拓扑而言，X_σ 是一个线性有序连续统，且 $|X_\sigma| = \max\{\kappa, |M|\} = \max\{\kappa, |K|\}$ 以及 $\hat{}w(X_\sigma) = \hat{}w(K)$。由引理 3 可得 $w(X_\sigma) = \kappa$。显然，若 $w(K) = \kappa$ 且（从而 $|X_\sigma| = |K|$），并且 K 是平衡的，则空间 X_σ 是平衡的。

线性有序连续统 X_σ 的两个端点 0，κ 可以纯粹从拓扑角度加以区分。因为点 0 有一个特征数不大于 θ的紧邻域，而点 κ 没有这样的邻域。（若 κ的共尾性大于 θ，则还有如下区别：$\chi(0,\ X_\sigma) \le \theta$，而 $\chi(\kappa,\ X_\sigma) > \theta$。）因此，生成连续统 X_σ拓扑的线性序 $\preceq_\sigma$ 可以选取为使 0 是 X_σ 的最小元，且 κ 是最大元。于是，$\preceq_\sigma$ 完全由连续统 X_σ的拓扑所确定。X_σ 的子集 Γ 也完全由 X_σ的拓扑所确定。事实上，令 W_σ 表示空间 $X_\sigma \setminus \{\kappa\}$ 中所有满足 $\chi(x,\ X_\sigma \setminus \{\kappa\}) > \theta$ 的点 x 所构成的集合。那么显然有

$$W_\sigma \ = \ [0,\kappa] \setminus (\{0,\kappa\} \cup \{\, \gamma+1 \mid \gamma \in \Gamma \ \wedge \ \sigma(\gamma) = 1 \,\})$$

因此，$(W_\sigma, \preceq_\sigma)$ 与 $[0,\kappa[$ 序同构，而 Γ 是连续统 X_σ的子空间 W_σ 中所有极限点的集合。

设 $\sigma \in \Sigma$。对于每个 $\gamma \in \Gamma$，令 $\xi(\gamma)$ 为 X_σ 中满足 $\xi \succ \gamma$ 的任意一点。（例如，令 $\xi(\gamma)$ 为序数 $\gamma+2$，它位于 $W_\sigma \setminus \Gamma$ 中。）对于 $\gamma \in \Gamma$，考虑空间 X_σ 中的区间 $I[\gamma, \xi(\gamma)]$。那么显然，$\chi(\gamma, I[\gamma,\xi(\gamma)]) > \theta$ 当且仅当 $\sigma(\gamma) = 1$。因此，每个 $\sigma \in \Sigma$ 都完全由 X_σ 的拓扑决定。

我们断言，如果 $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ 不可相似，那么空间 $X_\sigma, X_{\sigma'}$ 不可比较。由此，依据 (5.1) 即可得证。设 $\sigma, \sigma' \in \Sigma$，且令 f 为从X_σ 到 $X_{\sigma'}$的子空间 S 上的一个同胚。当然，S 是一个连续统，因此 S 是 $X_{\sigma'}$中的一个区间，从而对于某些满足 $u \prec_{\sigma'} v$的 $u, v \in X_{\sigma'}$，有 $S = \{\, x \mid u \preceq_{\sigma'} x \preceq_{\sigma'} v \,\}$。由于点 κ 在X_σ 和 $X_{\sigma'}$ 中都是唯一拓扑标记的，故 $f(\kappa) = \kappa = v$，从而f 是从 X_σ 到 $S \subset X_{\sigma'}$的严格递增映射。由于 f 是从 X_σ到 S的一个同胚，必有 $f(W_\sigma) \subset W_{\sigma'}$，从而对于某个 $\eta \in \Gamma$，有 $f(\Gamma) = \Gamma \cap S = \Gamma \cap [\eta, \kappa[$。依据 (5.2)，$\Gamma$ 与 $[0,\kappa[$, 序同构，因此我们可以在 $\Gamma \cap [\eta,\kappa[$ 中找到一个序数 γ，使得对于每个 $\alpha \in \Gamma \cap [\eta,\kappa[$，都有 $f(\alpha) = \alpha$。因此，由于σ 和 σ' 完全由 X_σ 和 $X_{\sigma'}$的拓扑决定，只要 $\alpha \in \Gamma$ 且 $\alpha \ge \eta$，就必有$\sigma(\alpha) = \sigma'(\alpha)$。这就证明了该断言，并完成了定理 10 的证明，证毕。

定理 *3* 的证明。 假设 $\kappa > \aleph_0$。参照第 4 节，任取稠密的 $D \subset [0,1]$，使得 $1 \in D$ 且 $|D| = \aleph_1$，并令 $K = L[D]$ 对于 $L = [0,1]$。于是 K 是一个第一可数 线性有序连续统，且 $w(K) = \hat{}w(K) = \aleph_1$，因此 $|K| = \mathfrak{c}$。因此，应用定理 10，可得一个由不可比较的线性有序连续统组成的族 $\mathcal{F}_\kappa = \mathcal{L}_\kappa(K)$，满足 $|\mathcal{F}_\kappa| = 2^\kappa$ 且 $w(X) = \kappa$，并且 $\hat{}w(X) = \aleph_1$ 且$|X| = \max\{\kappa,\mathfrak{c}\}$ 对每个 $X \in \mathcal{F}_\kappa$ 都成立。特别地，$\mathcal{F}_\kappa$ 中的每个空间 X 都是全道路不连通的。

为了通过构造所需的族 $\mathcal{G}_\lambda$ 来完成定理 3 的证明，若 $\lambda \le \kappa < \mathfrak{c}$，则无需证明任何内容，因为此时 $\nu(\lambda,\kappa) = \aleph_0$，从而 $\max\{\kappa,\mathfrak{c}\} = \mathfrak{c} = \lambda^{\nu(\lambda,\kappa)}$，因此我们可以令 $\mathcal{G}_\lambda = \mathcal{F}_\kappa$。故假设 $\kappa \ge \mathfrak{c}$ 且 $\lambda \le \kappa$。由于 $\lambda^{<\mu} \le \kappa < \lambda^\mu$ 当且仅当 $\mu = \nu(\lambda,\kappa)$，由命题 2 可固定一个线性有序连续统 G，使得 $\hat{}w(G) = w(G) = \kappa$，且对 G 中的每个区间 I，都有 $|I| = \lambda^{\nu(\lambda,\kappa)}$。（由于 $\hat{}w(G) \ge \aleph_1$，G 是全道路不连通的。）定义 $\mathcal{G}_\lambda = \{\, G \vee X \mid X \in \mathcal{F}_\kappa \,\}$，其中 $G \vee X$ 是通过将线性有序连续统 G 与 $\tilde{X}$ 在一个公共端点处粘合而得到的。更精确地说，对于某些线性有序的 $\tilde{}$ 个 G 的副本 $\tilde{G}$，以及 $\tilde{X}$ 的副本 $\tilde{X}$，有 $G \vee X = G \cup X$，其中 $|G \cap X| = 1$，且 G 和 X 是区间

在 $G \vee X$ 中。显然， $\mathcal{G}_\lambda$ 中的每个空间都是权为 κ 、基数为 $|G| = \lambda^{\nu(\lambda,\kappa)}$ 的全道路不连通线性有序连续统。对于互不相同、因而不可比较的空间 X_1， $X_2 \in \mathcal{F}_\kappa$，空间 $G \vee X_1$ 和 $G \vee X_2$ 也不可比较。事实上，令X_1， $X_2 \in \mathcal{F}_\kappa$，并令 f 是从 $G \vee X_1$ 到 $G \vee X_2$ 的一个子空间的同胚。由于空间 $G \vee X_1$ 中 $a \in G$ 的每个邻域的基数都是 $|G|$，而 $(G \vee X_i) \setminus G$ 中的每个点 b 都有一个基数小于 $|G|$ 的邻域，因此必有 $f(G) \subset G$。于是$f(X_1) \subset X_2$，这意味着 X_1 和 X_2 并非不可比较，因此 $X_1 = X_2$，证毕。

定理 *6* 的证明。 定理 6 是定理 10 和命题 2 的直接推论。事实上，若 $\max\{\mu^+, \lambda^{<\mu}\} \leq \kappa \leq \lambda^\mu$ ，则根据命题 2，我们可以找到一个平衡线性序连续统 K，使得 $w(K) = \kappa$ 且 $|K| = \lambda^\mu$ ，并且$\chi(K) \leq \mu < \kappa$。

定理 6 有一个值得一提的推论。

推论 1。 若 $\kappa^{\aleph_0} \leq \lambda$ ，并且存在一个基数为 λ 、权小于 κ 的连续统，则存在 2^κ 个权为 κ 、基数为 λ 的不可比连续统。

证明。设 Y 是一个满足 $w(Y) < \kappa$ 且 $\kappa^{\aleph_0} \leq |Y| = \lambda$ 的连续统。我们可以假设 Y 没有割点。（否则，我们用 $Y \times Y$ 替换 Y。当然，$w(Y \times Y) = w(Y)$ 且 $|Y \times Y| = |Y|$。）将定理 6 应用于 $\mu = \aleph_0$ 和 $\lambda = \kappa$，并设 $\mathcal{F}$ 是由不可比较的线性序连续统组成的族 X，满足 $|\mathcal{F}| = 2^\kappa$ 且 $\hat{}w(X) = w(X) = \kappa$，并且对每个 $X \in \mathcal{F}$ 都有 $|X| = \kappa^{\aleph_0}$。现在固定一个点 $y \in Y$，并对每个 $X \in \mathcal{F}$，令 a_X 为 X 的两个非割点之一。对每个 $X \in \mathcal{F}$，令 $Y \vee X$ 表示通过将点 $a_X \in X$ 与点 $y \in Y$ 识别而把 X 附接到 Y 所得到的连续统。令 X_1、 $X_2 \in \mathcal{F}$，并假设 f 是从 $Y \vee X_1$到 $Y \vee X_2$ 的连续单射。我们有 $f(y) = y$，因为首先 $f(y)$ 不可能属于 $X_2 \setminus \{y\}$，因为显然，点y 是连续统 $Y \vee X_1$ 中具有如下性质的唯一点：它的每个邻域 x 都包含割点和非割点。其次， $f(y)$ 不可能属于 $Y \setminus \{y\}$，因为对每个包含 y 的非空开 $U \subset X_1$，都有 $w(U) > w(Y)$。显然，对于 $i \in \{1, 2\}$，空间 $(Y \vee X_i) \setminus \{y\}$ 有两个连通分支 $Y \setminus \{y\}$ 和 $X_i \setminus \{y\}$。因此，要么 $f(X_1 \setminus \{y\}) \subset X_2 \setminus \{y\}$，要么 $f(X_1 \setminus \{y\}) \subset Y \setminus \{y\}$。但是，由于 $w(f(X_1 \setminus \{y\})) = \kappa > w(Y)$， $f(X_1 \setminus \{y\}) \subset Y \setminus \{y\}$ 不可能成立。因此 $f(X_1) \subset X_2$，所以 f（限制在连续统 X_1 上）是从 X_1 到 X_2 的一个子空间的同胚，因而$X_1 = X_2$。因此，族 $\{Y \vee X \mid X \in \mathcal{F}\}$ 由 2^κ 个权为 $\kappa = \max\{w(Y)\ \kappa\}$、基数为 $\lambda = \max\{|Y|, \kappa^{\aleph_0}\}$ 的不可比连续统组成。证毕。

注。 与推论 1 相比，如果 Y是一个连续统且 $w(Y) \leq \kappa \leq |Y|$那么存在 2^κ 权为 κ 且基数为 $|Y|$的两两不同胚连续统。 鉴于 [9] 命题 2 和命题 3 的证明，这个枚举定理是显然的。

6. 定理 5 的证明

定理 5 的证明中的主要思想将引导我们证明定理 4。因此，本节证明定理 5，下一节证明定理 4。首先请注意以下众所周知的事实（共尾性 [2] 6.3.8.c）。

（6.1） Eve任意可分线性有序连续统都同胚于空间 $[0, 1]$。

如果 X 是一个线性有序连续统，那么 X 的路径连通分支不一定是 X 的紧子空间。例如，权为 $\aleph_1$ 的经典紧致且连通的长直线恰好有两个路径连通分支，其中一个是单点集，另一个则不是紧致的。下面的引理对于定理 5 的证明至关重要。

引理 5. 若 X 是第一可数线性序连续统，则 X 的每个道路连通分支都是 X 的紧子空间，因此要么是单点集，要么与欧几里得空间 $[0,1]$同胚。

证明。设 X 是一个在序拓扑下紧致、连通且第一可数的线性有序集。设 A 是 X 的一个非单点道路连通分支，并令 s 为 A的上确界。由于 s 有可数邻域基， s 是 a_1中某个严格递增序列的极限， a_2， a_3，.....，该序列由 A中的点组成。由于对于每个 n，$I[a_n, a_{n+1}] \subset A$ 都与 $[0,1]$ 同胚，显然可以定义一个从 $[0,1]$ 到 X的连续映射 f，使得 $f(0) = a_1$ 且 $f(1) = s$，由此得到 $s \in A$。类似地， A的下确界也属于A，证毕。

令 $\mathcal{D}$为 D的所有子集构成的族，其中 $[0,1]$ 满足：只要 $|D \cap [x,y]| = \aleph_1$，就有 $0 \le x < y \le 1$；并且对于 $D \in \mathcal{D}$，考虑集合

$$C[D] := ([0,1] \setminus D) \times \{0\} \cup D \times [0,1]$$

赋予字典序。可以说， $C[D]$ 是由自然序集 $[0,1]$ 构造而成的：将 D 中的每个点替换为 $[0,1]$ 的一个同胚副本。显然，空间 $C[D]$ 是第一可数线性序连续统。应用引理 3 可知 $w(C[D]) = \aleph_1$。空间 $C[D]$ 的非单点道路连通分支 恰好是满足 $d \in D$ 的紧集 $\{d\} \times [0,1]$。因为对于每个 $d \in D$， $\{d\} \times [0,1]$ 显然是道路连通的；而且，如果 x， $y \in C[D]$、$x \neq y$和 $\{x, y\} \not\subset \{d\} \times [0,1]$ 对每个 $d \in D$ 都成立，那么在线性有序集 $C[D]$ 中，我们可以找到不可数多个两两不相交的 $[0,1]$ 副本，它们位于 x 与 y 之间。因此，不存在从 $[0,1]$ 到 $C[D]$ 的连续映射 f，使得 $f(0) = x$ 且 $f(1) = y$。 $C[D]$ 的单点路径连通分支之并为 $([0,1] \setminus D) \times \{0\}$，因此是 $C[D]$ 的可分子空间。

根据引理 2，显然，对于 $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$，两个空间 $C[D_1]$ 和 $C[D_2]$ 同胚，当且仅当存在一个从 $[0,1]$ 到 $[0,1]$ 的单调双射，将 D_1 映到 D_2 上。自然地，由于 $|\mathcal{D}| = 2^{\aleph_1}$，且从 $[0,1]$ 到 $[0,1]$，的单调映射只有 $\mathfrak{c}$ 个，我们可以在族 $\{ C[D] \mid D \in \mathcal{D} \}$ 中找出 $2^{\aleph_1}$ 个两两不同胚的空间，前提是 $2^{\aleph_1} > \mathfrak{c}$。因此，由于假设 $2^{\aleph_1} > \mathfrak{c}$ 和 $2^{\aleph_1} = \mathfrak{c}$ 都与 ZFC 相容，要证明定理 5，唯一的可能就是在满足 $2^{\aleph_1} = \mathfrak{c}$ 的 ZFC 模型中进行研究，因而连续统假设不成立。（由 $2^{\aleph_1} = \mathfrak{c}$ 可推出 $\aleph_1 < \mathfrak{c}$，因为 $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$。）关于定理 4 中的情形 $\kappa = \aleph_1$，我们已经证明，若 $2^{\aleph_1} > \mathfrak{c}$，则存在 $2^{\aleph_1}$ 个权为 $\aleph_1$ 的两两不同胚的第一可数线性有序连续统。然而，若 $2^{\aleph_1} = \mathfrak{c}$，则无法在特殊连续统 $C[D]$ 的范围内确立这一枚举结果。

命题 3。在 ZFC 中可以一致地有 $2^{\aleph_1} = \mathfrak{c}$，且族 $\{ C[D] \mid D \in \mathcal{D} \}$至同胚为止恰好包含三个空间。

证明。在 [1] Baumgartner 构造了一个 ZFC 模型，其中 $2^{\aleph_1} = \mathfrak{c}$，并且所有没有极值的 $\aleph_1$-稠密子集 $\mathbb{R}$ 都序同构。因此，如果我们通过以下方式定义族 $\mathcal{D}$ 的一个划分$\{ \mathcal{Y}_0, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2 \}$

$$\mathcal{Y}_j := \{ D \in \mathcal{D} \mid |D \cap \{0,1\}| = j \} \ (j \in \{0,1,2\})$$

那么在 Baumgartner 宇宙中，对于 $j \in \{0,1,2\}$ 和 D_1，$D_2 \in \mathcal{Y}_j$，总存在一个从 D_1 到 D_2 的单调双射；当然，它可以扩展为一个从$[0,1]$到 $[0,1]$,的单调双射，因此空间 $C[D_1]$ 和 $C[D_2]$ 同胚。

如果 $(D_1, D_2, D_3) \in \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2 \times \mathcal{Y}_3$，那么空间 $C[D_1]$、$C[D_2]$ 和 $C[D_3]$ 两两不同胚，因为对于 $j \in \{0,1,2\}$，$C[D_j]$ 中所有端点的总数 e（其中 $\{e\}$ 是 $C[D_j]$ 的一个路径连通分支）等于 $2-j$，证毕。

由于 $2^{\aleph_1} = \mathbf{c}$ 蕴含 $\aleph_1 < \mathbf{c}$，定理 5 是命题 3 和以下命题的直接推论。

命题4。如果 $\aleph_1 <$**c** 且 X 是一个权为 $\aleph_1$ 的第一可数线性序连续统，并且 X 的所有单点路径连通分支的并集是 X 的可分子空间，那么对于某个 $D \in \mathcal{D}$，X 同胚于空间 $C[D]$。

证明。假设 $\aleph_1 <$**c**，令 X 为一个线性有序集，它是一个第一可数线性序连续统，且 $w(X) = \aleph_1$。记 $\mathcal{P}_0$ 为 X 的所有非单点道路连通分支所成的族，记 $\mathcal{P}_1$ 为 X 的所有单点路径连通分支所成的族，并令 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1$，再假设 $\bigcup \mathcal{P}_1$ 是 X 的可分子空间。由于 X 不是第二可数的，X 不同胚于 $[0,1]$，因此 X 不是道路连通的，从而 $|\mathcal{P}| \geq 2$。

族 $\mathcal{P}$ 带有一种自然序，它参照了 X上的线性序。只需规定：当有序集 X中的集合 A 的每个点都小于集合 B 的每个点时，令 $A \in \mathcal{P}$ 小于 $B \in \mathcal{P}$。（参照标准术语，见 [11]，$\mathcal{P}$ 是关于等价关系$\sim$ 的 X 的凝缩，其中对于不同的 x、$y \in X$，当 $w(I[x,y]) = \aleph_0$ 时，令 $x \sim y$。）根据引理 5，$\mathcal{P}$ 的所有成员都是 X 的紧子空间。（因此，$\mathcal{P}_0$ 的每个成员都是自然序或反向序有序集 $[0,1]$ 的一个保序同构副本。）因此，线性有序集 $\mathcal{P}$ 是稠密有序的。（否则，X 就不是连通的。）若 $\emptyset \neq \mathcal{A} \subset \mathcal{P}$，则 $\mathcal{A}$ 的上确界（分别为下确界）是唯一一个包含集合 $\bigcup \mathcal{A}$ 在 X 中的上确界（分别为下确界）的道路连通分支。因此，赋予序拓扑后，$\mathcal{P}$ 是一个线性有序连续统。特别地，$|\mathcal{P}| \geq$**c**，因此 $|\mathcal{P}| =$ **c**，因为第一可数连续统 X 的基数为 **c**。（此外，$\mathcal{P}$ 也是第一可数的。）由于根据引理 3，$w(X) \geq |\mathcal{P}_0|$，因此我们有 $|\mathcal{P}_0| \leq \aleph_1$。所以，$|\mathcal{P}_1| =$**c**，因为我们假设 $\aleph_1 <$ **c**。

对于互异的 A，$B \in \mathcal{P}$，考虑线性有序集 $\mathcal{P}$ 中的区间 $I[A,B]$。自然地，集合 $\bigcup I[A,B]$ 是 X 中的一个区间。更准确地说，如果 A 在线性有序集 $\mathcal{P}$ 中小于 B，那么 $\bigcup I[A,B]$ 就等于 X 中的区间 $I[\min A, \max B]$。由于 $|\mathcal{P}| =$**c** 且 $\mathcal{P}$ 是一个线性有序连续统，因此我们总有 $|I[A,B]| =$**c**。此外，我们断言

(6.2) $|\mathcal{P}_0 \cap I[A,B]| = \aleph_1$ 每当 A、$B \in \mathcal{P}$ 和 $A \neq B$ 时。

间接假设，对于不同的 $A, B \in \mathcal{P}$，集合 $\mathcal{P}_0 \cap I[A,B]$ 是可数的。那么 $J = \bigcup I[A,B]$ 是 X 中的一个区间，它被划分为可数个 $[0,1]$ 的副本以及唯一的可分空间 $J \cap \bigcup \mathcal{P}_1$。因此，$J$ 是可分线性有序连续统，故由 (6.1) 可知 J 与 $[0,1]$ 同胚。但这样一来，对于 X 的某个道路连通分支 C，有 $J \subset C$，这与 $A, B \subset J$ 以及 $A, B \in \mathcal{P}$ 和 $A \neq B$ 矛盾。由 (6.2) 以及对于不同的 $A, B \in \mathcal{P}$ 和 $\aleph_1 <$ **c** $|I[A,B]| =$ **c**，我们得出

(6.3) $|\mathcal{P}_1 \cap I[A,B]| = \mathfrak{c}$ 当 A、$B \in \mathcal{P}_0$ 和 $A \neq B$ 时成立。

由 (6.3) 可知，$\mathcal{P}_1$ 的序拓扑与连续统 $\mathcal{P}$ 的子空间拓扑一致，而 $\mathcal{P}_1$ 是空间 $\mathcal{P}$ 中的稠密点集。显然，映射 $\{x\} \mapsto x$ 是从线性有序集 $\mathcal{P}_1$ 到 X 的子集 $\bigcup \mathcal{P}_1$ 的序同构，且该子集是 X 的可分子空间。因此，$\mathcal{P}_1$ 是 $\mathcal{P}$ 的稠密可分子空间，故空间 $\mathcal{P}$ 本身必定可分。由于 $\mathcal{P}$ 是可分线性有序连续统，根据 (6.1) 和引理 2，存在一个序同构 φ，将 $\mathcal{P}$ 映到集合 $[0,1]$（按自然顺序或反向顺序排列）。由 (6.2) 可知，φ 必须将 $\mathcal{P}_0$ 映到族 $\mathcal{D}$ 中的一个集合 D。显然，$\mathcal{P}_0$ 中的每个成员都是 $[0,1]$，的一个保序同构副本，因此序同构 φ 诱导出一个从线性有序集 X 到字典序集 $C[D]$ 的单调双射。于是，由引理 2 可知，线性有序连续统 X 与 $C[D]$ 同胚，证毕。

7. 定理 4 的证明

本节中，若一个线性有序连续统的每个可分子空间都是第二可数的，就称它为短的。换言之，线性有序连续统是短的，当且仅当任意可数点集的闭包都是第二可数子空间。显然，若 L 是短的，则当 x、$y \in L$ 和 $x \neq y$ 时，$I[x,y]$ 也是短的。

引理 6. 存在一个短的第一可数线性有序连续统 C，使得 $\hat{w}(C) = w(C) = \aleph_1$。

证明。设 A 是一条稠密有序的阿伦斯扎恩直线，设 B 是 A 的紧致戴德金完备化。由第 6 章的命题 3.6，§3、B 是短的第一可数线性有序连续统，且 $w(B) \geq \aleph_1$。因此，$w(B) = \aleph_1$，因为 $|A| = \aleph_1$，且 A 在 B 中稠密。根据引理 5，B 的路径连通分支是紧致的。因此，B 的所有路径连通分支按其自然序构成的族 C 是第一可数线性有序连续统，且 $\hat{w}(C) \geq \aleph_1$，从而 $\hat{w}(C) = w(C) = \aleph_1$。最后，连续统 C 是短的。事实上，设 $S \subset C$ 可数。对 B 中每个满足 $P \in S$ 的路径连通分支 P，选取一个在 P 中稠密的非空可数集 $T_P \subset P$。（若 P 是单点集，则 $T_P = P$。若 P 不是单点集，则根据引理 5，P 是 $[0,1]$ 的一个同胚副本，且可以将 T_P 选为可数无限集。）设 T 是可数集 $\bigcup_{P \in S} T_P$ 在 B 中的闭包。显然，$\mathcal{P} = \{ P \in C \mid P \cap T \neq \emptyset \}$ 是 S 在 C 中的闭包。又因为 T 在 B 中是第二可数的，所以 $\mathcal{P}$ 在 C 中是第二可数的，证毕。

注。如果我们从满足 $\hat{w}(A) = \aleph_1$ 的稠密有序阿伦斯扎恩直线 A 开始前面的证明，那么将 B 凝缩成 C 就是多余的，因为 $\hat{w}(B) = \aleph_1$ 可由 $\hat{w}(A) = \aleph_1$ 推出，而且 $C = B$ 已经符合要求。不过，虽然将阿伦斯扎恩直线 A 转化为稠密有序阿伦斯扎恩直线很简单（只需考虑字典序集 $A \times \mathbb{Q}$），但要正确定义满足 $\hat{w}(A) = \aleph_1$ 的稠密有序阿伦斯扎恩直线 A，还需要作一些说明。

以下设 C 是引理 6 所给出的一个连续统。此外，设 K 是一个第一可数线性序连续统，满足 $\hat{w}(K) = w(K) = \aleph_1$，且 K 中没有紧区间是短的。这样的连续统 K 很容易构造。事实上，参照第 4 节，任取一个稠密的 $D \subset [0,1]$，使得 $1 \in D$ 且 $|D| = \aleph_1$，并令 $K = L[D]$，其中 $L = [0,1]$。考虑由所有满足 $r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ 的点 $(r,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots)$ 构成的可数集 A。显然，A 在 $L[D]$ 中的闭包 B 由点 $(x,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots)$ 构成

以及满足 $0 \le x \le 1$ 且 $1 \ne y \in D$ 的点 $(y,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots)$。因此，根据引理 4，$w(B) \ge |D| = \aleph_1$。因此，由于 K 中的每个区间都包含 K 的副本，若 $x,\ y \in K$ 互不相同，则 $I[x,y]$ 不可能是短的。

若且唯若对于$\{i,j\} = \{1,2\}$，X_i中没有任何区间与 X_j的某个子空间同胚，我们就称两个线性序连续统 X_1，X_2 极端不可比较。在下文中，C 和 K 极端不可比较这一点至关重要。

现在我们可以证明定理 4 了。我们假设 $\aleph_0 < \kappa \le \mathfrak{c}$，并区分$2^\kappa > \mathfrak{c}$和 $2^\kappa = \mathfrak{c}$两种情况。首先假设 $2^\kappa > \mathfrak{c}$。设 $\mathcal{D}$是 $[1,2]\setminus\mathbb{Q}$的一个子集族，这些子集在 $[1,2]$中稠密且基数为 κ，并且满足 $|\mathcal{D}| = 2^\kappa$，且对于不同的 D_1、D_2，绝不存在从 $[1,2]$到 $[1,2]$的单调双射 f使得 $f(D_1) = D_2$。（在假设 $2^\kappa > \mathfrak{c}$下，这样的子集族$\mathcal{D}$存在，因为 $[1,2]\setminus\mathbb{Q}$有 2^κ个稠密子集，但集合 $[1,2]$只有$\mathfrak{c}$个单调置换。）令 $A := ([1,2]\cap\mathbb{Q}) \cup \{0,3\}$，并令$B :=]0,1[\cup]2,3[) \cap \mathbb{Q}$。对于每个 $D \in \mathcal{D}$，考虑

$$X[D] \ :=\ ([0,3]\setminus(A\cup B\cup D))\times\{0\} \ \cup\ A\times C \ \cup\ (B\cup D)\times K$$

配备字典序。因此，$X[D]$ 是通过将 $[0,3]$ 中的每个点替换为 C的一个同胚副本，并将 $B\cup D$中的每个点替换为 K的一个同胚副本而从 A构造出来的。（显然，如果（x_1，x_2）、（y_1，y_2）$\in X[D]$且 $x_1 \ne x_2$，那么 x_2和 y_2是否可比较无关紧要。）由引理1可知，线性序空间 $X[D]$ 是紧致、连通且第一可数的。由于 $A\cup B\cup D$ 在 $[0,3]$ 中稠密，且$\hat{}w(K) = \aleph_1$，$\hat{}w(C) = \aleph_1$，因此$\hat{}w(X[D]) = \aleph_1$。由于 $w([0,3]) = \aleph_0$且$w(K) = w(C) = \aleph_1$且 $|A\cup B\cup D| = |D| = \kappa$，因此 $w(X[D]) = \kappa$。

我们断言，2^κ 空间 $X[D]$ $(D \in \mathcal{D})$不可比较。设 $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ 和f是从 $X[D_1]$到 $X[D_2]$的一个子空间的同胚。那么 $f(X[D_1])$是 $X[D_2]$中的一个区间。显然，$X[D_i]$的子空间 $\{x\}\times C$和 $\{y\}\times K$分别是与 C和 K同胚的区间。因此，由于 $B\cup D$在 $[0,3]$中稠密，且 C与K极端不可比较，若 $a \in \{0,3\}$，则对某个 $a' \in A$有 $f(\{a\}\times C)$ $\subset \{a'\}\times C$；若 $a \in A\setminus\{0,3\}$，则对某个 $a' \in A$有 $f(\{a\}\times C) = \{a'\}\times C$。此外，由于$A\cap]1,\ 2[$与 $\mathbb{Q}$序同构，且 $A\cap[0,1] = \{0,1\}$和 $A\cap[2,3] = \{2,3\}$，我们有 $\{f(\{1\}\times C)\ f(\{2\}\times C)\} = \{\{1\}\times C, \{2\}\times C\}$.。因此，$f$诱导出一个从 $[1,2]$到 $[1,2]$的单调双射 g，使得 $g(D_1) = D_2$，从而得到$D_1 = D_2$。

这就证明了该论断，并解决了定理 4 中 $2^\kappa > \mathfrak{c}$ 的情形。为了处理 $2^\kappa = \mathfrak{c}$ 的情形，我们将应用以下引理。

引理 7。存在一个族 $\mathcal{H}$，由 $[0,1]$ 的可数子集组成，使得 $|\mathcal{H}| = \mathfrak{c}$，并且对于不同的 H_1、$H_2 \in \mathcal{H}$ 以及 $0 \le u < v \le 1$，从 H_1 到 $H_2\cap[u,v]$均不存在单调双射。

证明。与命题 1 的证明类似，令 G 为从$\mathbb{N}$ 到 $\{3,5\}$ 的所有函数所成的族，并令 ζ为自然序集 $\mathbb{Z}$ 的序型。于是，对每个 $g \in G$，选取一个序型为 $7+\zeta+g$的集合 $H_g \subset [0,1[$：$(1) + \zeta + g(2) + \zeta + g(3) + \cdots$，并令 $\mathcal{H} = \{\, H_g \mid g \in G \,\}$，证毕。

现在，为了完成定理 4 的证明，假设 $\aleph_0 < \kappa$ 和 $2^\kappa = \mathfrak{c}$。令$\mathcal{H}$ 为引理 7 所提供的一个族。对每个（可数的）$H \in \mathcal{H}$，选取一个稠密集$D(H) \subset [0,1]$，使得 $H\cap D(H) = \emptyset$且 $|D(H)| = \kappa$，并考虑

$$Y[H] := ([0,1] \setminus (H \cup D[H])\times\{0\} \cup H\times C \cup D[H]\times K$$

赋予字典序。与上文类似，$Y[H]$ 是一个第一可数线性序连续统，且 $\hat{}w(Y[H]) = \aleph_1$ 和 $w(Y[H]) = \kappa$。**c** 空间$Y[H]$ ($H \in \mathcal{H}$)不可比较，因为根据与上文类似的论证，对于 $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$，$Y[H_1]$ 与 $Y[H_2]$ 的某个子连续统之间的任何同胚都会诱导出一个从 H_1 到 $H_2 \cap [u,v]$ 的单调双射，其中某个 (u,v) 满足 $0 \le u < v \le 1$，而这只有在 $H_1 = H_2$ 时才可能。至此，定理 4 的证明完成。

8. 定理 7 的证明

为简便起见，记 $\exp_\kappa := 2^\kappa$。通常，若 X 是豪斯多夫空间，则 $c(X)$ 表示 X 的胞腔度。（因此，$c(X)$ 是 X 中所有两两不相交的开子集族 $\mathcal{U}$ 的基数 $|\mathcal{U}|$ 的上确界。）显然，$c(X) \le d(X) \le w(X)$。虽然对任意豪斯多夫空间 X，都有$|X| \le \exp\max\{c(X), \chi(X)\}$（见 [4] 2.15），但一般而言，不可能仅根据胞腔度给出空间的基数、权或稠密度的上界。事实上，$c(X)$ 与 $|X|, w(X), d(X)$ 之间的差距可能任意大，因为对于希尔伯特立方体 $[0,1]^\kappa$，总有 $d([0,1]^\kappa) = \log\kappa$ 且 $w([0,1]^\kappa) = \kappa$ and $|[0,1]^\kappa| = 2^\kappa$，但 $c([0,1]^\kappa) = \aleph_0$；见 [4] 5.3、5.5 和 [2]2.7.10.d。（相比之下，对于线性有序连续统 $L = [0,1]^{[0,\kappa[}$，我们也有$|L| = 2^\kappa$，但有 $d(L) = w(L) = \mathfrak{c}^{<\kappa}$。这正是为什么即使不考虑不可比较性，按同胚分类线性序连续统也比完成 [9] 中关于连续体的计数结果更困难的主要原因。）不过，下面两个引理表明，确有两种特殊情形，可以仅依赖胞腔度给出估计。（注意，对于每个豪斯多夫空间 X，都有 $|X| \le \exp w(X)$ 和 $|X| \le \exp\exp d(X)$，见 [4] 2.2 和 2.4。）

引理 9. 如果 X 是紧致且遗传正规的空间，那么 $w(X) \le \exp c(X)$.

引理 10. 如果 X 是线性序空间，那么或者 $d(X) = c(X)$，或者 $d(X) = c(X)^+$。

引理 9 是由初等估计 [4] 2.7 和 ˇSapirovskii 的深刻结果 [4] 3.21 直接推出的。引理 7 是 Hajnal 和 Juhsz 的一项深刻结果（参见 [2] 3.12.4）。

引理 11. 如果 λ 不是正则极限基数，且 X 是一个满足 $c(X) = \lambda$ 的空间，那么 X 包含λ 个互不相交的开集。

如果 λ 是后继基数，引理 11 显然成立。奇异λ 的引理 11 证明见 [4] 4.1。（对于正则极限基数 λ，引理 11 不成立，见 [4] 7.6。）

定理 7 的第二个陈述是以下定理的直接推论。

定理 11. 若 κ 是奇异的，且 $\lambda \le \kappa$ 和 K 是线性有序连续统，使得 $\hat{}w(K) = \kappa$，并且 K 中没有任何点具有基数小于 λ 的局部基，则 $|K| \ge \kappa^\lambda$。

证明。令 $\mathcal{J}$ 为 K中所有区间构成的族。（因此，每个 $J \in \mathcal{J}$ 都是 K的一个无限紧致连通子集。）若 $\emptyset \ne \mathcal{G} \subset \mathcal{J}$ 且 $\mathcal{G}$ 是一个链（即当 $I, J \in \mathcal{G}$时，$I \subset J$ 或 $J \subset I$），则$\bigcap\mathcal{G} \ne \emptyset$，因为 K是紧致的。若还满足 $|\mathcal{G}| < \lambda$，则 $\mathcal{G}$ 中各区间的交集不仅非空，而且本身也是一个区间。否则，$\bigcap\mathcal{G}$ 将是单点集 $\{x\}$，而由区间$J \in \mathcal{G}$ 的内部构成的族 $\mathcal{B}$ 将是 x 处的一个局部基，且 $|\mathcal{B}| < \lambda$。（这里 K 是一个线性序空间这一点至关重要。类似的论证不适用于任意连续统！）

考虑任意线性有序连续统 $J \in \mathcal{J}$。那么 $d(J) = w(J) = \hat{}w(K) = \kappa$。由于 κ是一个极限基数，根据引理 10，我们有 $c(J) = d(J)$。因此，由于 κ是奇异的，根据引理 11，区间 J 包含 κ 个两两不交区间。因此，对于每个 $J \in \mathcal{J}$，我们都可以定义一个函数 $f[J]$，将 $[0,\kappa[$映射到 $\mathcal{J}$，使得对每个 $\alpha \in [0,\kappa[$都有$f[J](\alpha) \subset J$，并且当 $\alpha < \beta < \kappa$时， $f[J](\alpha) \cap f[J](\beta) = \emptyset$。

令 $(\alpha_\beta)_{\beta<\lambda}$为一个由序数组成的 λ-序列 $\alpha_\beta \in [0,\kappa[$。下文中，我们通过超限归纳，对每个序数 $\gamma < \lambda$定义一个区间 $I((\alpha_\beta)_{\beta\leq\gamma})$，使得只要 $\gamma < \delta < \lambda$， $I((\alpha_\beta)_{\beta\leq\delta})$ 就是 $I((\alpha_\beta)_{\beta\leq\gamma})$ 的真子集。

假设对于 $\gamma < \lambda$，已经定义了区间 $\{ I((\alpha_\beta)_{\beta\leq\delta}) \mid \delta < \gamma \}$ 的一条下降链。接着令 $\Delta_0 = K$；若 $\gamma > 0$，则令 $\Delta_\gamma := \bigcap_{\delta<\gamma} I((\alpha_\beta)_{\beta\leq\delta})$。集合 Δ_γ 是一个区间，因为 $|[0,\gamma[| < \lambda$。（如果对于某个序数 η，有 $\gamma = \eta + 1$，那么显然，$\Delta_\gamma = I((\alpha_\beta)_{\beta\leq\eta})$。）这使我们能够继续定义 $I((\alpha_\beta)_{\beta\leq\gamma}) := f[\Delta_\gamma](\alpha_\gamma)$。（那么，显然，族 $\{ I((\alpha_\beta)_{\beta\leq\delta}) \mid \delta \leq \gamma \}$ 是一条由区间组成的下降链。）

根据构造，对于每个 λ-序列 $a = (\alpha_\beta)_{\beta<\lambda}$ 的序数 $\alpha_\beta \in [0,\kappa[$，族$\mathcal{G}(a) := \{ I((\alpha_\beta)_{\beta\leq\gamma}) \mid \gamma < \lambda \}$是一个区间链，因此 $\bigcap \mathcal{G}(a) \neq \emptyset$，因为 K是紧致的。根据链 $\mathcal{G}(a)$ 的定义，显然对于不同的 λ-序列 a_1 和 a_2， $\bigcap \mathcal{G}(a_1)$ 与 $\bigcap \mathcal{G}(a_2)$ 总是不相交的。因此， $|K|$ 不少于所有小于 κ的序数 λ-序列的总数。换言之，$|K| \geq \kappa^\lambda$，证毕。

注。作为定理 11 一个显而易见但值得注意的推论，若 K 是一个平衡线性序连续统，且 $|K| < \exp w(K)$，则 K 中某个点的特征必小于 $w(K)$。在定理 6 （以及定理 3 ）的证明中，关键在于并非所有点都具有相同的特征。

前一个证明中的论证可用于推出一个关于局部紧豪斯多夫空间的重要定理，该定理也蕴含定理 7 的第二个结论，并且我们将应用它来证明定理 7 的第一个结论。注意，由引理 10 可知，对于极限基数 κ 和线性序空间 Y，$d(Y) \geq \kappa$ 当且仅当 $c(Y) \geq \kappa$。

定理 12. 若 κ 不是正则极限基数，且 X 是局部紧豪斯多夫空间，并且对于 X 的每个无限开子空间 U，都有 $c(U) \geq \kappa$，那么 $|X| \geq \kappa^{\aleph_0}$。

证明。空间 X 至多包含有限多个孤立点，因为若 $A \subset X$、$|A| = \aleph_0$ 以及 A 中的所有点在 X 中都是孤立点，则 A 在 X 中是开集，且 $c(A) = |A| = \aleph_0$，这与 $c(A) \geq \kappa > \aleph_0$矛盾。因此我们可以假设 X 中没有孤立点。为简便起见，称 G 是 X 的一个紧子集，且它是某个非空开集的闭包时， G 为良好集合。根据定义，任何良好集合都包含一个非空开集。由于 X 是局部紧的，每个非空开集都包含一个良好集合。因此，根据假设，对于 X 的每个无限开子空间 U，都有 $c(U) \geq \kappa$ （若 $c(U) = \kappa$，则应用引理 11），我们得出任何良好集合都包含 κ 个两两不交的良好集合。这使我们能够对每个 $n < \omega$ 和每个由小于 κ 的序数组成的 $(n+1)$-元组 $(\alpha_0, ..., \alpha_n)$，选取一个良好集合 $G(\alpha_0, ..., \alpha_n)$，使得对于不同的 $(\alpha_0, ..., \alpha_n)$ 和 $(\beta_0, ..., \beta_n)$，总有 $G(\alpha_0, ..., \alpha_n) \cap G(\beta_0, ..., \beta_n) \neq \emptyset$，并且

$$G(\alpha_0) \supset G(\alpha_0, \alpha_1) \supset G(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \supset \cdots$$

对于每个序列 $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ...)$。对于每个序列 $a = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ...)$，集合$S(a) = \bigcap_{n<\omega} G(\alpha_0, ..., \alpha_n)$ 非空，因为 $G(\alpha_0)$ 是紧致的。显然，对于不同的

序列 a_1，a_2，集合 $S(a_1)$ 和 $S(a_2)$ 不相交。因此，$|X|$ 不小于所有这些序列的总数。换言之，$|X| \geq \kappa^{\aleph_0}$，证毕。

最后，定理 7 的第一条陈述是以下有趣且值得注意的定理的直接推论。

定理 13. 若 κ 是强极限，且 $\kappa^{\aleph_0} > \kappa$，而 X 是基数为 κ 的局部紧遗传正规空间，那么对于某个非空开集 $U \subset X$，有 $|U| < \kappa$。

证明。若 X 含有有限的非空开集，则无需证明任何内容，因此我们可以假设 X 的所有非空开子集都是无限的。于是 $\kappa > \aleph_0$，因为任何可数局部紧豪斯多夫空间都必有孤立点。特别地，具有可数共尾性的强极限 κ 是奇异基数。由于 $\kappa^{\aleph_0} > \kappa$，应用定理 12 可得一个无限开集 $V \subset X$，使得 $c(V) < \kappa$。显然，对于每个无限开集 $W \subset V$，也有 $c(W) < \kappa$。因此，我们可以找到一个无限开集 $U \subset X$，使得 U 在 X 中的闭包 $\overline{U}$ 是紧致的，并且 $c(U) \leq \kappa$。由于 $\overline{U}$ 在 U 中稠密，我们有 $c(U) = c(\overline{U})$（参见 [4] 2.6）。由于 κ 是强极限，由 $c(U) < \kappa$ 可推出 $\exp\exp c(U) < \kappa$。由于 U 是紧致遗传正规空间，利用基本估计 $|U| \leq \exp w(U)$ 和引理 9，可推出 $|U| \leq \exp\exp c(U)$。因此，$|U| \leq |\overline{U}| < \kappa$，证毕。

注。证明定理 7（其中只考虑线性序空间）时，可以避免使用引理 9，因为对于线性序空间 X，我们有 $\chi(X) \leq c(X)$（共尾性参见 [2]3.12.4），因此 $w(X) \leq |X| \leq \exp c(X)$。

9. 定理 8 的证明

下文需要用到康托尔导集和特征集。若 X 是豪斯多夫空间，ξ 是序数，且 $A \subset X$，那么 $A^{(\xi)}$ 是点集 A 的第 ξ-阶导集。（$A^{(0)} = A$，且 $A^{(\alpha+1)}$ 是 $A^{(\alpha)}$ 的所有极限点组成的集合；若 $\beta > 0$ 是极限序数，则 $A^{(\beta)} := \bigcap \{ A^{(\alpha)} \mid 0 < \alpha < \beta \}$。）关键在于，若 ω^ξ 表示以 ω 为基、以 ξ 为指数的序数幂，那么在紧线性序空间 $X = [0, \omega^\xi]$ 中，$[0, \omega^\xi[^{(\alpha)} = [0, \omega^\xi]^{(\alpha)} = \{\omega^\xi\}$ 当且仅当 $\alpha = \xi$。（注意，每当 $\xi \geq \omega$ 时，$|[0, \omega^\xi]| = |[0, \xi]|$。）若 X 是豪斯多夫空间，则 $\Delta(X) = \bigcup \{ A \subset X \mid A \subset A^{(1)} \}$ 是最大稠密自身点集。该集合

$$\Sigma(X) := \left\{ \alpha \in [0, |X|^+] \;\middle|\; \left((X \setminus \Delta(X))^{(\alpha)} \setminus (X \setminus \Delta(X))^{(\alpha+1)}\right) \cap \Delta(X) \neq \emptyset \right\}$$

可视为一个特征集合，因为若 $\Sigma(X_1) \neq \Sigma(X_2)$，则两个空间 X_1，X_2 不可能同胚。

解决定理 8 的线索是下面这个有趣的定理。

定理 14. 设 K 是一个线性有序连续统。那么，对每个 κ，都存在一个由 $\mathcal{Y}[K, \kappa]$ 个两两不同胚的紧线性有序空间组成的族，使得 $|\mathcal{Y}[K, \kappa]| = 2^\kappa$；并且若 $Y \in \mathcal{Y}[K, \kappa]$，则 Y 恰有 κ 个连通分支，且 Y 的所有连通分支都同胚于 K，因此 $w(Y) = \max\{\kappa, w(K)\}$，且 $\hat{}w(Y) = \hat{}w(K)$，并且 $|Y| = \max\{\kappa, |K|\}$。

值得一提的是，定理 14 对数轴中的紧集有一个有趣的推论。任何第二可数线性有序空间都同胚于

$\mathbb{R}$ 的一个子空间（共尾性参见 [2] 4.2.9、6.3.2.c）。因此，如果在定理 14 中取 $K=[0,1]$ 和 $\kappa=\aleph_0$，我们便立即得到以下枚举结果。

推论 2. $\mathbb{R}$ 中存在 $\mathfrak{c}$ 个两两不同胚的、没有单点分支的紧子空间。

注。由推论 2 可知，数轴 $\mathbb{R}$ 中开集的闭包在同胚意义下恰有$\mathfrak{c}$个。另一方面， $\mathbb{R}$ 中开子空间在同胚意义下恰有 $\aleph_0$ 个。（因为对于每个基数 $\theta\le\aleph_0$， $\mathbb{R}$ 中恰有一个本质上唯一的、具有 θ 个连通分支的开子空间。）这种基数差异是空间 $\mathbb{R}$ 所特有的，在维数为 $n>1$ 的空间 $\mathbb{R}^n$ 中则会消失（参见 [5] 8.1）。还有另一种值得注意的基数差异。如果 K 是 $\mathbb{R}$ 中没有单点分支的紧子空间，那么 K 在 $\mathbb{R}$ 中的边界是一个紧致可数集合。然而，鉴于 [10]，紧致可数豪斯多夫空间在同胚意义下恰有 $\aleph_1$ 个。（并且 $\aleph_1<\mathfrak{c}$ 与 ZFC 相容。）此外，参见定理 14 证明下方的注，可以找出 $\mathbb{R}$ 中$\mathfrak{c}$ 个两两不同胚的、没有单点分支的紧子空间，使得它们在$\mathbb{R}$ 中的所有边界都是 $\mathbb{R}$的同胚子空间。

现在，为了证明定理 14，令 K 为一个线性有序集，并设在序拓扑下， K 是一个连续统。对于任意序数 $\xi>0$，令 Z_ξ 为一个按 $\preceq$ 线性有序的集合，使得对于唯一的点 $z_\xi\in Z_\xi$，集合 $\{\,x\in Z_\xi\mid x\preceq z_\xi\,\}$ 与良序集 $[0,\omega^\xi]$ 序同构，而集合 $\{\,x\in Z_\xi\mid x\succeq z_\xi\,\}$ 与反良序集 $\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$ 序同构。

现在考虑集合 $Z_\xi(K):=Z_\xi\times K$，并赋予其字典序。因此，$Z_\xi(K)$ 是由 Z_ξ 构造而成的：将 Z_ξ 中的每个点替换为 K 的一个同胚副本。不言而喻， $Z_\xi(K)$ 是一个紧线性序空间，其所有连通分支都与 K 同胚。在这些连通分支中，连通分支 $\{z_\xi\}\times K$ 被标记为 $Z_\xi(K)$ 的唯一连通分支 C，其中两个端点都是集合 $Z_\xi(K)\setminus C$ 的极限点。显然， $|Z_\xi(K)|=\max\{|K|,|\xi|\}$。显然， $w(Z_\xi(K))=\max\{w(K)\ |\xi|\}$。

令 $\mathcal{S}_\kappa$ 表示满足 $|S|=\kappa$ 的所有集合 $S\subset[2,\kappa[$ 所成的族，因此 $|\mathcal{S}_\kappa|=2^\kappa$。对每个 $S\in\mathcal{S}_\kappa$，令 $Y[S]$ 由良序集 $[0,\kappa]$ 构造而成：将每个点 $\xi\in S$ 替换为线性有序集 $Z_\xi(K)$ 的一个同构副本，并将每个点 $\xi\notin S$ 替换为线性有序集 K 的一个同构副本。因此， $Y[S]$ 是一个具有最小元和最大元的线性有序集，并且 $Y[S]$ 的每个非空子集都有上确界。由此， $Y[S]$ 在序拓扑下是紧致的。显然，紧线性序空间 $Y[S]$ 的所有连通分支都与 K 同胚。显然， $|Y[S]|=\max\{\kappa,|K|\}$ 且 $w(Y[S])=\max\{\kappa,w(K)\}$。因此我们令 $\mathcal{Y}[K,\kappa]:=\{\,Y[S]\mid S\in\mathcal{S}_\kappa\,\}$，只需证明当 S_1 不同时， $Y[S_1]$ 和 $Y[S_2]$ 绝不同胚， $S_2\in\mathcal{S}_\kappa$。

令 $\mathcal{C}[S]$ 表示空间 $Y[S]$ 的所有分支构成的族。对每个 $C\in\mathcal{C}[S]$，令 $E(C)$ 表示 C 的两个端点组成的集合。（从拓扑学角度看， $E(C)$ 由空间 C 的两个非割点组成。）令 $\mathcal{C}_2[S]$ 表示所有满足以下条件的 $C\in\mathcal{C}[S]$ 构成的族：两者端点都是集合 $Y[S]\setminus C$ 的极限点。显然， $\mathcal{C}_2[S]$ 的成员恰好是满足 $\xi\in S$ 的带标记的连通分支 $\{z_\xi\}\times K$。关于 $Y[S]$ 的线性序，对于每个 $C\in\mathcal{C}[S]\setminus\mathcal{C}_2[S]$，要么其左端点是 $\mathcal{C}[S]$ 的极限点，要么没有端点是 $\mathcal{C}[S]$ 的极限点。

的极限点。对于任意带标记的连通分支 $C = \{z_\xi\} \times K$ 以及 $Y[S]$ 中围绕 C 的子空间 $Z_\xi(K)$, C 的右端点属于 $Z_\xi(K)^{(1)}$，但不属于 $Z_\xi(K)^{(2)}$；而（由于 $\xi \geq 2$），C 的左端点属于 $Z_\xi(K)^{(2)}$。因此，若 $C \in \mathcal{C}_2[S]$ 且 $R_C = \bigcup\{ E(G) \mid C \neq G \in \mathcal{C}[S] \}$，则 C 的右端点属于 $R_C^{(1)} \setminus R_C^{(2)}$，而 C 的左端点属于 $R_C^{(2)}$。于是，每当 $S \in \mathcal{S}_\kappa$ 时，对于子空间

$$R[S] := \bigcup\{ E(C) \mid C \in \mathcal{C}[S] \setminus \mathcal{C}_2[S] \} \cup \bigcup \mathcal{C}_2[S]$$

属于 $Y[S]$ 我们有 $\Sigma(R[S]) \setminus \{1\} = S$，由此完成定理 14 的证明 .

注。令 $K = [0,1]$ 和 $\kappa = \aleph_0$。那么每个空间 $Y[S]$ 都同胚于 $\mathbb{R}$ 的一个没有单点分支的紧子空间 C_S。$\mathcal{E}_\kappa$ 的成员是无限集合 $S \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$，当然还有 $|\mathcal{S}_\kappa| = \mathbf{c}$。空间 C_S $(S \in \mathcal{S}_\kappa)$ 两两不同胚。然而，如果 B_S 是 $\mathbb{R}$中 C_S 的边界，由此 B_S是紧致且可数的，那么所有空间 B_S $(S \in \mathcal{S}_\kappa)$ 都同胚！这是有理数集 [10] 中关于紧致可数豪斯多夫空间的著名分类定理的直接推论，因为对于每个 $S \in \mathcal{S}_\kappa$，$B_S^{(\omega)}$ 都是单点集。这也是为什么在定理 14 的证明中，我们不考虑构造更简单的紧线性序空间

$$\tilde{Y}[S] := \bigcup_{\xi \in S} \{\xi\} \times [0, \omega^\xi] \times K \cup \{(\kappa, 0)\} \times K$$

˜因为对于 $K = [0,1]$ 和 $\kappa = \aleph_0$，所有空间 $Y[S]$ $(S \in \mathcal{S}_\kappa)$ 都同胚。（如果对于˜无限的 $S \subset \mathbb{N}$， $Y[S]$ 的每个分支都收缩为一个单点集，那么我们得到一个与 $[0, \omega^\omega]$ 序同构的良序集，因为 $\left(\sum_{\xi \in S}(\omega^\xi + 1)\right) + 1 = \omega^\omega + 1$。）
在定理 14 的证明中，空间 $Y[S]$ 不一定不可比较。例如，如果 $K = [0,1]$ 和 $\kappa = \aleph_0$，那么对于任意集合 S_1, $S_2 \in \mathcal{S}_\kappa$，空间 $Y[S_1]$显然可嵌入 $[0,1]$，从而可嵌入 $Y[S_2]$。幸运的是，这在下面定理 8 的证明中不会造成问题。

我们通过扩展定理 14 的前述证明并沿用其记号，来证明定理 8。假设 $\lambda \leq \kappa$ and $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$，并令 $\mu = \nu(\lambda, \kappa)$。设 K 为一个平衡线性序连续统，满足 $w(K) = \kappa$ and $|K| = \lambda^\mu$。（根据第 4 节的基本构造，这样的空间 K 存在。）考虑上文定义的族 $\mathcal{Y}[K, \kappa] = \{ Y[S] \mid S \in \mathcal{S}_\kappa \}$。对于 $S \in \mathcal{S}_\kappa$，在由 $\mathcal{C}[S]$ 的所有连通分支组成的族 $Y[S]$ 中，我们选取如下一个子族。令 $\mathcal{C}[S]^*$ 为所有满足以下条件的 $C \in \mathcal{C}[S]$ 构成的族：存在一个连通分支 $D \in \mathcal{C}[S]$，使得 $\max C \prec \min D$ 且 $\{ x \in Y[S] \mid \max C \prec x \prec \min D \} = \emptyset$。（此处 $\preceq$ 表示 $Y[S]$上的线性序。）显然，对于每个 $C \in \mathcal{C}[S]^*$，恰有一个连通分支 $D \in \mathcal{C}[S]$ 满足此性质，我们将此分支记为 $\rho(C)$ D。显然， $|\mathcal{C}[S]^*| = |\mathcal{C}[S]| = \kappa$。

若 Λ 是线性有序集，则当且仅当 b 是 a 的直接后继时，$(a,\ b)$ 才是相邻点对；等价地，当且仅当 a 是 b 的直接前驱时亦然。因此，若 $C,\ D \in \mathcal{C}[S]$，则当且仅当 $C \in \mathcal{C}[S]^*$ 且 $D = \rho(C)$ 时，$(C,\ D)$ 是典范线性有序族 $\mathcal{C}[S]$ 中的一对相邻点。显然，若 $C \in \mathcal{C}[S]$ 没有直接前驱，则要么 $\min C = \min Y[S]$（从而 C 没有前驱），要么 $\min C \neq \min Y[S]$ 且 $\min C = \sup \{ x \in Y[S] \mid x \prec \min C \}$。若分支 $C \in \mathcal{C}[S]$ 没有直接后继，则要么 $\max C = \max Y[S]$（从而 C 没有后继），要么 $\max C \neq \max Y[S]$ 且 $\max C = \inf \{ x \in Y[S] \mid x \succ \max C \}$。

现在令 $\mathcal{Q}(S) = \{(C, \rho(C)) \mid C \in \mathcal{C}[S]^*\}$。令 H 为一个平衡线性序连续统，且 $w(H) = |H| = \kappa$。（这样的空间 H 存在：参见第 4 节，若 L 是基数和权为 κ 的长直线，则 $H := L^{[0,\omega[}$ 可行，因为 $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$。）考虑配备了某种线性序的 H，该线性序生成连续统 H 的拓扑。由线性有序集 $Y[S]$，通过在每一对 $(C, D) \in \mathcal{Q}(Y[S])$ 之间的间隙中填入 $H \setminus \{$ 的一个保序同构副本 $\min H, \max H\}$，我们构造出线性有序集 $X[S]$。形式上，定义

$$X[S] = Y[S] \times \{\min H\} \cup \bigcup_{C \in \mathcal{C}[S]^*} \{\max C\} \times (H \setminus \{\max H\})$$

并考虑赋予 $X[S]$ 字典序。由引理1可知，$X[S]$ 的序拓扑是紧致且连通的。因此，$X[S]$ 是一个线性有序连续统。稍加思考即可看出，$Y[S] \times \{\min H\}$ 是 $X[S]$ 的一个紧子空间，与 $Y[S]$ 同胚；并且，将 $X[S]$ 的字典序限制在 $Y[S] \times \{\min H\}$ 上，会生成紧子空间拓扑。

由于 $\kappa = |\mathcal{C}[S]| = |H| \leq |K| = \lambda^\mu$，我们有 $|X[S]| = \lambda^\mu$。此外，由于 $w(K)$，$w(X[S]) = \kappa = w(H) = \kappa$ 和 $|\mathcal{C}[S]| = \kappa$。而且，由于 $\hat{}w(K) = \hat{}w(H) = \kappa$，$\hat{}w(X[S]) = \kappa$。$K$ 和 H 是 $X[S]$ 的构造块，它们是平衡的、权相等但基数不同。更准确地说，H 的基数小于 K 的基数。这导致一个重要结果：K 中没有任何区间能嵌入 H，而 H 中也没有任何区间能嵌入 K。

为了完成定理 8 的证明，令 $S_1, S_2 \in \mathcal{S}_\kappa$ 并假设 f 是从 $X[S_1]$ 到 $X[S_2]$ 的某个子空间上的同胚。当然，$f(X[S_1])$ 是 $X(S_2, H_\mu)$ 中的一个区间。由于 K 中没有区间能够嵌入 H，且 H 中没有区间能够嵌入 K，通过类似于定理 4 证明中的论证，我们得出结论：$\tilde{}f$ 诱导出一个单调函数 f，它将线性有序集 $Y[S_1]$ 映到线性有序集 $Y[S_2]$ 中，使得对于每个 $C \in \mathcal{C}[S_1]$，都有 $f(C) \in \mathcal{C}[S_2]$。

$\tilde{}$如果 $\xi \in S_1$，那么 f 将标记分支 $\{z_\xi\} \times K \subset Z_\xi(K)$ 映到某个 $\xi' \in S_2$ 对应的标记分支 $\{z_{\xi'}\} \times K \subset Z_{\xi'}(K)$ 上。此外，如果 $\xi \in S_1$ 且 $\xi \neq \min S_1\tilde{}$，那么必然对于每个 $\xi \in S_1$，单调函数 f 都会将整个线性有序块 $Z_\xi(K)$ 映到某个 $\tilde{}\xi' \in S_2$ 对应的整个线性有序块 $Z_{\xi'}(K)$ 上，因此 $\xi' = \xi$。（如果 f 只是从空间 $Y[S_1]$ 到空间 $Y[S_2]$ 的一个嵌入，这一点就不一定成立！）如果 $\xi = \min S_1$，那么至少我们可以确定，$f(Z_\xi(K))$ 是 $Z_{\xi'}(K)$ 中 $Z_\xi(K)$ 的一个保序同构副本，使得 $\tilde{} f(\{z_\xi\} \times K) = \{z_{\xi'}\} \times K$，其中 ξ'；这也意味着 $\xi' = \xi$。（$\xi = \max S_1$ 的情形不会出现，因为由于 $|S_1| = \kappa$ 和 $S_1 \subset [0, \kappa[$，S_1 没有最大元。）因此我们得出结论 $S_1 \subset S_2$。证明至此完成，因为根据下面的基本引理，我们可以从 $\mathcal{S}_\kappa$ 中选出一个子族 $\mathcal{S}^*_\kappa$，使得 $|\mathcal{S}^*_\kappa| = 2^\kappa$，并且只要 S_1、$S_2 \in \mathcal{S}^*_\kappa$ 和 $S_1 \neq S_2$，就有 $S_1 \not\subset S_2$。

引理 12. 如果 Y 是基数为 κ 的无限集，那么存在一个由Y的子集构成的族 $\mathcal{Y}$，使得 $|\mathcal{Y}| = 2^\kappa$，并且当 A、$B \in \mathcal{Y}$和 $A \neq B$时，$|A \setminus B| = \kappa$。

证明。设 X 是一个满足 $\kappa = |X|$的集合。记 $X = R \cup S$，其中 $|R| = |S| = |X|$ 且$R \cap S = \emptyset$，并设 f是从 R到 S上的一个双射。令 $\mathcal{X} := \{T \cup (S \setminus f(T)) \mid T \subset R\}$。显然，$|\mathcal{X}| = 2^\kappa$，并且当 A, $B \in \mathcal{X}$且 $A \neq B$时，$A \not\subset B$。因此，集合 $(A \times X) \setminus (B \times X) = (A \setminus B) \times X$ 非空，故当

$A, B \in \mathcal{X}$且 $A \neq B$。因此，若 g是从$X \times X$到 Y上的一个双射，则$\mathcal{Y} := \{ g(S \times X) \mid S \in \mathcal{X} \}$是一个符合条件的族，证毕。

注。由于对于 H 中的每个区间 I 以及 $|K|$ 中的每个区间 J，都可以直接从线性有序连续统 $X[S]$ 恢复出紧线性序空间 $Y[S]$，对每个 $S \in \mathcal{S}_\kappa$均如此。因此，定理 3 中关于族$\mathcal{G}_\lambda$ 的陈述可以由定理 14 推出，前提是 $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$。然而，定理 3 并未假设 $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$，而定理 3 证明的主要部分就是构造族 $\mathcal{F}_\kappa$。

值得一提的是，前面对定理 8 的证明还说明了更多内容。显然，我们实际上并未用到这样的事实：$|K| = \lambda^{\nu(\lambda,\kappa)}$。我们用到的是，$K$ 是一个权为 κ 且基数大于 $|H|$的平衡线性序连续统。特别是，只要对于平衡构造块 H，有$w(H) = \kappa$ 且 $|H| \leq \kappa^{\aleph_0} < |K|$，假设 $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$ 就是多余的。若按上述方式定义 $H := L^{[0,\omega[}$，则有 $w(H) = \kappa$ 且 $|H| = \kappa^{\aleph_0}$。因此，定理 8 的证明也证明了下面这个定理。

定理 15。若 $\kappa^{\aleph_0} < \lambda$ 且存在一个权为κ 、基数为 λ 的平衡线性序连续统，则存在 2^κ 个两两不可比较的线性序连续统 X，使得$\hat{}w(X) = w(X) = \kappa$ 且 $|X| = \lambda$。

10. 关于平衡的道路连通连续统

沿用第 2 节的记号，若 X 是一个平衡的线性有序连续统，则显然，锥 $\Psi(X)$ 是一个平衡的 连续统，且 $w(\Psi(X)) = w(X)$ 和$|\Psi(X)| = |X|$。因此，根据定理 1 的证明中相同的论证，由定理 6 可立即推出下述定理。

定理 16。若 最大值$\{\mu^+, \lambda^{<\mu}\} \leq \kappa \leq \lambda^\mu$，则存在 2^κ 个两两不可比较、平衡且道路连通的连续统，其权为 κ，基数为 λ^μ。

由 (1.1)、定理 16 和定理 2 可知，对于每个强极限 κ，在同胚意义下，权为 κ 、基数为 2^κ 的平衡道路连通连续统恰有 2^κ 个。这个枚举结果还可以改进如下。

定理 17。对于每个无限基数 κ，在同胚意义下，恰有 2^κ 个权为 κ 、基数为 2^κ 的平衡的道路连通连续体。

希尔伯特立方体 $[0,1]^\kappa$ 是一个权为 κ、基数为 2^κ的平衡道路连通连续统 X 。因此，定理 17（以及关于道路连通连续体的其他枚举定理）可由（1.1）和下述定理立即推出。

定理 18。设 J是一个道路连通连续统，满足 $w(J) \leq \kappa$。则存在 2^κ 个两两不同胚的道路连通连续统 X_J，其权为 κ，基数为 最大值$\{\kappa, |J|\}$。若 J是平衡的且 $w(J) = \kappa$，则所有空间 X_J都是平衡的。

证明。首先，我们可以假设：只要 $E \subset J$ 和 $|E| \leq 2$，$J \setminus E$ 就是道路连通的。否则，我们用乘积空间 $J \times J$ 替换 J。（显然，$w(J \times J) = w(J)$，且 $|J \times J| = |J|$；如果 J 是平衡的，那么 $J \times J$ 也是平衡的。）此外，暂且假设 $\kappa > \aleph_0$。根据定理 3，存在一个

族 $\mathcal{F}_\kappa$，其中包含一族基数为 κ、大小为 $\max\{\kappa,\mathbf{c}\}$ 的两两不同胚的全道路不连通紧豪斯多夫空间，并且满足 $|\mathcal{F}_\kappa| = 2^\kappa$。

˜固定任意一点 $a \in J$，并考虑路径连通子空间$J := J \setminus \{a\}$ of$J$。对于 $Y \in \mathcal{F}_\kappa$，考虑紧乘积空间 $Y \times J$。如定理 3 的证明中那样，令 $X_J(Y)$为 $Y \times J$对其紧子空间 $Y \times \{a\}$ 取商所得的商空间。因此，$Y \times J$的子空间 $Y \times \{a\}$ 被压缩为一点 $p \in X_J(Y)$，而 $Y \times J$的子空间˜$Y \times J$与 $X_J(Y)$的子空间 $X_J(Y) \setminus \{p\}$ 相同。当然，$X_J(Y)$是紧豪斯多夫空间。由于 $|Y| = \max\{\mathfrak{c}, \kappa\}$且 $|J| \geq \mathfrak{c}$，我们有$|X_J(Y)| = |Y \times J| = \max\{\kappa, |J|\}$。由于 Y是紧致的，根据 [2] 3.1.15，空间 $Y \times J$ 中紧子集 $Y \times \{a\}$ 的邻域滤子有一个基，其基数不大于 $w(J)$，因此˜$X_J(Y)$空间中的 p 有一个局部基，其基数不大于 $w(J)$。因此，由于 $w(Y) = \kappa$且 $w(J) \leq w(J) \leq \kappa$，我们有 $w(X_J(Y)) = \kappa$。当然，$X_J(Y)$是道路连通的。由于 $X_J(Y)$˜的每个非空开子集都包含某个 $y \in Y$对应的 $\{y\} \times V$以及 J的某个开子集 V，若 J是平衡的，且$w(J) = \kappa = w(Y)$（因而 $|V| \geq |Y|$），则 $X_J(Y)$是平衡的。由于 Y是全不道路连通的，并且对每个 $x \in J$，$J \setminus \{x\}$ 都是道路连通的，所以点 p 是 $X_J(Y)$中唯一一个使得 $X_J(Y) \setminus \{x\}$不是道路连通的点 x。因此，点 p是拓扑标记的。空间 $X_J(Y) \setminus \{p\}$ 的路径连通分支恰好是满足 $y \in Y$的集合 $\{y\} \times J$˜。（因为若 y_1，$y_2 \in Y$且 $z_1, z_2 \in J$，并且 f是从 $[0,1]$到 $Y \times J$的˜连续单射，满足 $f(0) = (y_1, z_1)$且 $f(1) = (y_2, z_2)$，那么道路连通连续统 $f([0,1])$到基空间Y上的投影 P是道路连通的，因此 $|P| = 1$，进而 $y_1 = y_2$。）

对于互不相同的空间 Y_1，$Y_2 \in \mathcal{F}_\kappa$空间 $X_J(Y_1)$ 和 $X_J(Y_2)$ 永不同胚，因为可以从 $X_J(Y)$ 中恢复每个 $Y \in \mathcal{F}_\kappa$。事实上，在拓扑标记子空间 $X_J(Y)\setminus\{p\}$ 上定义一个等价关系：当两个点可以由一条路径连接时，它们等价。于是，等价类就是空间 $X_J(Y) \setminus \{p\} = Y \times J$ 的路径连通分支 $\{y\} \times J$。因此，$X_J(Y) \setminus \{p\}$ 关于该等价关系的商空间与 Y 同胚。至此，$\kappa > \aleph_0$ 的定理 18 证明完毕。

由于任何第二可数的道路连通连续统都是基数为 $\mathbf{c}$ 的平衡的空间，且 $2^{\aleph_0} = \mathbf{c}$，因此定理 2 解决了剩余情形 $\kappa = \aleph_0$。然而，找出不同胚的空间要比找出不可比较的空间容易得多。此外，下面这个简单的构造表明，存在 $\mathbf{c}$ 个两两不同胚的、第二可数的、局部道路连通的 连续体。（定理 2 的证明所提供的线索是，在选定的点处破坏局部道路连通性。）

对于互异的点 A，$B \in \mathbb{R}^2$ 令 $[A, B]$ 表示连接 A与 B的闭直线段。令 $\mathcal{M}$ 为所有无限整数集 $k \geq 4$组成的族，因此$|\mathcal{M}| = \mathbf{c}$。现在，对于每个 $M \in \mathcal{M}$，我们通过下式定义集合 $A[M] \subset \mathbb{R}^2$

$$A[M] := [0,1]\times\{0\} \cup \bigcup_{n\in M} \left([(2^{-n}, 0), (2^{-n}, 2^{-n})] \cup \bigcup_{k=1}^{n-1} [(2^{-n}, 2^{-n}), ((2^{-n} + 3^{-nk}, 2^{-n+1})]\right).$$

显然，$A[M]$ 是单位正方形 $[0,1]^2$ 的闭子集，因此是 $\mathbb{R}^2$ 的紧子空间。当然，空间 $A[M]$ 是道路连通的。由于点(0，0)不会造成任何问题，$A[M]$ 是局部道路连通的。空间 $A[M]$ ($M \in \mathcal{M}$)两两不同胚，因为每个集合 $M \in \mathcal{M}$ 都完全由

$A[M]$的拓扑通过 $M = \{ p(x) \mid x \in A[M] \} \setminus \{1,2,3\}$确定，其中 $p(x)$是空间 $A[M] \setminus \{x\}$的路径连通分支数。

注。 这些不同胚空间 $A[M]$ 远非不可比较。实际上，很容易证明，若 $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ ，则 $A[M_1]$ 同胚于 $A[M_2]$的一个子空间。

11. 基数之间的间隙

在最后这一节中，我们将简要证明第1节开头提到的一致性结果。为便于阅读，记 $\exp \kappa := 2^\kappa = \aleph_0^\kappa = \kappa^\kappa$ and$\nu(\kappa) := \nu(\kappa, \kappa)$ 和 $\rho(\kappa) := \nu(\aleph_0, \kappa)$ ，于是 $\nu(\kappa) \leq \rho(\kappa) \leq \kappa < \kappa^{\nu(\kappa)} \leq \exp \rho(\kappa) \leq 2^\kappa$。首先证明以下陈述。

命题5。 与 ZFC 相容的是，连续统函数 $\kappa \mapsto 2^\kappa$ 在所有基数构成的类上严格递增，并且

(i) $|\{ \lambda \mid \kappa < \lambda < 2^\kappa \}| = 2^\kappa$ 对每个正则 κ ，以及(ii) $|\{ \lambda \mid \kappa < \lambda < \kappa^{\nu(\kappa)} \}| = \kappa^{\nu(\kappa)}$ 当 $\kappa = 2^\mu$ 对于某个 μ 成立时，以及(iii) $|\{ \lambda \mid \kappa^{\nu(\kappa)} < \lambda < 2^\kappa \}| = 2^\kappa$ 当 $\kappa = 2^\mu$ 对于某个具有 $\mu \neq \aleph_\mu$ 的奇异 μ 成立时。

证明。 在哥德尔的宇宙 L 中，令 $\Theta(\kappa)$ 表示 $\aleph$-函数中共尾性等于 κ^+ 的最小不动点。则在 L 的每个泛型扩张中， $|\{ \lambda \mid \kappa < \lambda < \Theta(\kappa) \}| = \Theta(\kappa)$ 都成立。应用东岸定理 [4, 15, 18]可以泛型地构造一个 Easton 宇宙 E，使得 L 中的连续统函数 $\kappa \mapsto 2^\kappa = \kappa^+$ 在 E 中变为 $\kappa \mapsto 2^\kappa = g(\kappa)$，并且对每个正则基数 κ都有 $g(\kappa) = \Theta(\kappa)$。

因此，在 E 中，对于每个正则基数 κ ，我们都数得出 2^κ 以下的 2^κ 超限基数，这就证明了 (i)。此外，由于 $\Theta(\cdot)$ 在 L 中严格递增，在 E 中，只要 α， β是满足 $\alpha < \beta$ 的正则 基数，我们就有 $2^\alpha < 2^\beta$。因此，又因为奇异基数假设

$$\exp \operatorname{cf} \kappa < \kappa \implies \kappa^{\operatorname{cf} \kappa} = \kappa^+$$

在每个 Easton 宇宙中都成立（见 [1] 习题 15.12），并且根据 [1] 定理 5.22，若 μ 在 E 中是奇异基数，则 $2^\mu = (2^{<\mu})^+$ 在 E 中是一个后继基数；而若 κ 是正则基数，则 2^κ 等于$\Theta(\kappa)$，这当然必定是一个极限基数。因此，在宇宙 E 中，连续统函数在所有 基数上严格递增，且 (i) 成立。由此，在 E 中我们得到 (ii)，因为 $\kappa^\mu = \kappa = 2^\mu < 2^{(\mu^+)} = \kappa^{(\mu^+)} = \Theta(\mu^+)$，并且（因此） $\nu(\kappa) = \mu^+$ 在 E 中成立。最后，由于 (i) 和 (ii) 在 E 中成立，为了通过验证 (iii) 在 E 中成立来完成证明，只需确认 $\mu \neq 2^{<\mu}$ ，因为 $\kappa = 2^\mu = (2^{<\mu})^+$ 是正则的，且$2^{(\mu^+)} = \kappa^{\nu(\kappa)} \leq 2^\kappa = \exp((2^{<\mu})^+)$。事实上，在 E 中，对于极限基数 μ，方程 $\mu = 2^{<\mu}$ 只有在 $\mu = \aleph_\mu$时才可能成立，因为在 E 中我们有 $2^{<\mu} = \sup\{ \Theta(\lambda^+) \mid \lambda < \mu \}$，因此 $2^{<\mu}$ 是 $\aleph$-函数的不动点，证毕。

对于极限序数 $\gamma \geq \omega_1$，集合 $\Omega\gamma := \{ \kappa \mid \aleph_0 < \kappa < \aleph_\gamma \wedge$ 共尾性 $\kappa = \aleph_0 \}$ 在 G¨odel 的宇宙 L 的所有泛型扩张中都保持为（至少）不可数集（参见 [3] **13**）。通过构造一个函数 $\kappa \mapsto 2^\kappa$ 远非严格递增的 Easton 宇宙，我们可以证明以下命题。

命题 6. 与 ZFC 相容的是： $|\{ \lambda \mid \kappa^{\nu(\kappa)} < \lambda <$ 指数 $\rho(\kappa) \}| =$ 指数 $\rho(\kappa)$，并且 $|\{ \lambda \mid$ 指数 $\rho(\kappa) < \lambda < 2^\kappa \}| = 2^\kappa$ 对每个 $\kappa \in \Omega\gamma$ 都成立。

证明。 选取序数 $\alpha < \beta$，使得 $\alpha = \aleph_\alpha$ 且 $\beta = \aleph_\beta$，并且 cf $\alpha =$ cf $\beta = \aleph_{\gamma+1}$。于是 $|\{ \lambda \mid \alpha < \lambda < \beta \}| = \beta$，且对于每个 $\kappa \in \Omega\gamma$，都有 $|\{ \lambda \mid \kappa^+ < \lambda < \alpha \}| = \alpha$。应用 [3] 15.18 来

构造一个满足以下条件的 ZFC 东森模型：对每个 $\mu < \aleph_\gamma$，$\exp\,\aleph_0 = \aleph_1$ 且 $\exp\aleph_1 = \alpha$，并且 $\exp(\mu^{++}) = \beta$。于是，在我们的 东森模型中，$2^\kappa = \beta$，且对于每个 $\kappa \in \Omega\gamma$，都有 $\exp\rho(\kappa) = \alpha$。最后，如果 $\kappa \in \Omega\gamma$，那么由于奇异基数假设，在我们的 东森模型中有 $\kappa^{\nu(\kappa)} = \kappa^+$，证毕。

参考文献

[1] J. Baumgartner，所有 $\aleph_1$实数的-稠密集彼此同构。 Fund. Math. **79** (1973) 101-106.[2] R. Engelking，一般拓扑学，修订增补版。 Heldermann 1989.[3]T. Jech，集合论，第3版。Springer 2002.[4] I. Juh`asz，拓扑中的基数函数。阿姆斯特丹数学中心 1983.[5] G. Kuba，度量空间计数。 Arch. Math. **97** (2011) 569-578.[6] G. Kuba，线性序空间计数。 Coll. Math. **135** (2014) 1-14.[7] G. Kuba，关于平面的紧子集。 arXiv:2401.14985 [math.GN] (2024).[8] K. Kunen 和 J.E. Vaughan 编，集合论拓扑学手册。 North Holland P.C. 1984.[9] F.W. Lozier 和 R.H. Marty，连续体的数量。 Proc. American Math.Soc.**40**(1973) 271-273.[10] S. Mazurkiewicz 和 W. Sierpi´nski，对可数集合的拓扑的贡献。 Fund. Math. **1** (1920) 17-27.[11] J.G. Rosenstein，线性序。 Academic Press 1982.[12]L.A. Steen 和 J.A. Seebach, Jr.，拓扑学反例。 Dover 1995.

Gerald Kuba，奥地利维也纳 1180，维也纳自然资源与生命科学大学数学研究所。电子邮件: gerald.kuba(at)boku.ac.at