arXiv:2512.14381v1 [math.RT] 16 Dec 2025

关于对称群与交错群的二面体分支系数的正性

Velmurugan S*

摘要

我们精确确定了对称群 S_n 的不可约表示限制到二面体子群 D_n 时所产生的分支系数何时非零，并证明除有限个例外族外，这些系数均有统一的线性下界。因此，我们重新得到并大幅推广了关于循环子群 $C_n \leq S_n$的已知正性结果。对于交错群 A_n，我们也得到了类似结果。

关键词：对称群、二面体群、花环积、特征、对称函数。美国数学学会学科分类：主分类 20 C30；次分类 20C15、05E10、05E05。

1 引言

有限群表示论中的一个基本问题，是描述不可约表示限制到子群后的分解。更确切地说，给定 G 的不可约表示 (χ, V) 和 H 的不可约表示 (ψ, W)，我们希望对重数 $\langle \mathrm{Res}^G_H \chi, \psi \rangle_H$ 给出组合描述。特别地，我们关注这些重数的支集，即确定它们何时非零。

除对称群之外，针对各种有限群族及其子群，人们也研究了这些问题，例如：p-可解群及其循环 p- 子群 [9]，对称群与交错群的双覆盖及其素数阶循环子群 [34, 15]，李型有限单群及其元素的中心化子 [11, 10], Chevalley 群及其循环 p-子群 [33],拟单群及其循环子群 [32, 28, 29]。在这些研究中，几乎所有工作都聚焦于素数阶循环子群。对于有限群的任意循环子群，相应的问题在很大程度上仍未解决。更多详情请参阅 Zalesskii 的综述文章 [30, 31]。

本文研究对称群 S_n的一些自然子群族的限制问题。最自然的起点是点稳定子群 S_{n-1}。从 S_n 到 S_{n-1} 的限制分支规则众所周知，并且可以用杨图给出优美的组合描述（见 [12, 第 2]章）。接下来值得考虑的自然子群是 S_n 的 Young 子群，其分支规则由 Littlewood–Richardson 规则支配（见 [12, 第 2], [19, 章 I]）。 S_n 的另一重要子群族是 Sylow$p$ 子群：近年来，针对这些子群已开展了大量研究（部分动机来自其与 McKay猜想（现已成为定理 [4]）的联系），参见 [7, 8] 及其中的参考文献。 S_n 的另一子群族是其元素的中心化子，这些中心化子曾结合全局共轭类 [11, 22, 23, 1]进行研究。文献中已对限制到由 n-循环生成的 S_n 循环子群这一问题进行了广泛研究 [16, 13, 24, 27, 26, 20]。

*印度科学研究所，班加罗尔。电子邮件：velmurugan.math@gmail.com

文献 [14]给出了 S_n 任意循环子群的分支系数；近期， [2, 3, 1, 26] 研究了这些系数的正性，并由 Staroletov [21]完成了相关研究。相比之下，对于 S_n 中既非 Young 子群也非 Sylow-p 子群的非循环子群，相关限制问题所知甚少。二面体子群 D_n 是包含 S_n的一个 n-循环的最小且最自然的非阿贝尔子群类。据我们所知，此前尚未对 S_n 的不可约表示限制到二面体子群这一问题进行系统研究。本文聚焦于 S_n的二面体子群 D_n 。因此，我们也得到了由 n-循环生成的循环子群 $C_n \leq S_n$ 的相关结果，从而推广了文献中的若干已知结果。

令 $r = (1\ 2\ \ldots\ n)$ 为旋转， $s = (1\ n)(2\ n-1)\ldots(\lfloor n/2 \rfloor\ \lceil n/2 \rceil + 1)$ 为反射，它们生成阶为 $2n$ 的 S_n 的二面体子群 $D_n = \langle r,\ s \rangle$ 。以下是 D_n 的所有不可约特征标：

- $\mathbb{1}_{\mathbb{1}}^{\mathbb{1}}$：平凡特征，它将 r 和 s 都映到 1，
- $\mathbb{1}_{\mathbb{1}}^{-\mathbb{1}}$：将 r 映到 1、将 s 映到 -1 的特征，
- $\mathbb{1}_{-\mathbb{1}}^{\mathbb{1}}$：将 r 映到 -1 、将 s 映到 1 的特征（仅当 n 为偶数时），
- $\mathbb{1}_{-\mathbb{1}}^{-\mathbb{1}}$：将 r 和 s 都映到 -1 的特征（仅当 n 为偶数时），
- $\psi_j :=$ 诱导$_{C_n}^{D_n} \delta^j$： $1 \leq j \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$的次数为 2 的不可约特征标 .

对于 n 的一个分拆 λ，设 $d_{\pm\mathbb{1}}^{\pm\mathbb{1}}(\lambda) = \langle$限制$_{D_n}^{S_n} \chi_\lambda, \mathbb{1}_{\pm\mathbb{1}}^{\pm\mathbb{1}} \rangle$ 且 $d_\psi^j(\lambda) = \langle$限制$_{D_n}^{S_n} \chi_\lambda, \psi_j \rangle$。由于与符号特征标作张量积对应于分拆共轭，即 $\chi_{(1^n)} \otimes \chi_\lambda = \chi_{\lambda'}$，因此我们有$d_{-\mathbb{1}}^{\pm\mathbb{1}}(\lambda) = d_{\mathbb{1}}^{\mathbb{1}}(\lambda')$ 或 $d_{\mathbb{1}}^{-\mathbb{1}}(\lambda')$，其中 λ' 是 λ的共轭分拆。因此，只需考虑$d_{\mathbb{1}}^{\pm\mathbb{1}}(\lambda)$ 和 $d_\psi^j(\lambda)$。

我们的主定理完全确定了对称群 S_n 到其二面体子群 D_n 的分支系数的正性（对于 $n \geq 11$），并给出了有限个例外族之外统一的线性下界。

定理 1.1. 设 $n \geq 11$ 为正整数， D_n 为阶为 $2n$的二面体群。则有如下结果：

对于 D_n的二维不可约特征标：

1. $d_\psi^j(\lambda) = 0$ *if* $\lambda \in \{(n), (1^n)\}$,
2. $d_\psi^j(\lambda) = 1$ *if* $\lambda \in \{(n-1, 1), (2, 1^{n-2})\}$.

假设 n 为奇数且 $(n-1)/2$ 为偶数。则

1. $d_{\mathbb{1}}^{\mathbb{1}}(\lambda) = 0$ 当 $\lambda \in \{(n-1, 1), (n-2, 1, 1), (3, 1^{n-3}), (2, 1^{n-2})\}$时，2. $d_{\mathbb{1}}^{\mathbb{1}}(\lambda) = 1$ 当 $\lambda \in \{(n), (1^n)\}$时，3. $d_{\mathbb{1}}^{-\mathbb{1}}(\lambda) = 0$ 当 $\lambda \in \{(n), (n-1, 1), (n-2, 2), (22, 1^{n-4}), (2, 1^{n-2}), (1^n)\}$时。4. $\min\{d_{\mathbb{1}}^{\mathbb{1}}((22, 1^{n-4}))\ d_{\mathbb{1}}^{-\mathbb{1}}((3, 1^{n-3}))\ d_{\mathbb{1}}^{\mathbb{1}}((n-2, 2))\ d_{\mathbb{1}}^{-\mathbb{1}}((n-2, 1, 1))\} > \frac{n}{6}$。

–

假设 n 为奇数，且$(n-1)/2$ 为奇数。那么

1. $d_{\mathbb{1}}^{\mathbb{1}}(\lambda) = 0$ *if* $\lambda \in \{(n-1, 1), (n-2, 1, 1), (2^2, 1^{n-4}), (2, 1^{n-2}), (1^n)\}$,

2. $d_{\mathbb{1}}^{\mathbb{1}}(\lambda) = 1$ 若 $\lambda =(n)$，3. $d_{\mathbb{1}}^{-\mathbb{1}}(\lambda) = 0$ 若 $\lambda \in \{(n)$，$(n-1, 1)$、$(n-2,$ 2)、$(3, 1^{n-3})$、$(2, 1^{n-2})\}$，4. $d_{\mathbb{1}}^{-\mathbb{1}}(\lambda) = 1$ 若 $\lambda =(1^n)$。5. $\min\{d_{\mathbb{1}}^{\mathbb{1}}((3, 1^{n-3}))$ $d_{\mathbb{1}}^{-\mathbb{1}}((22, 1^{n-4}))$ $d_{\mathbb{1}}^{\mathbb{1}}((n-2, 2))$ $d_{\mathbb{1}}^{-\mathbb{1}}((n-2, 1, 1))\} > \frac{n}{6}$。

–

假设 n 为偶数，且 $n/2$为偶数。那么

1. $d_{\mathbb{1}}^{\mathbb{1}}(\lambda) = 0$ *if* $\lambda \in \{(n-1, 1), (n-2, 1, 1), (2, 1^{n-2}), (1^n)\}$,

2. $d_{\mathbb{1}}^{\mathbb{1}}(\lambda) = 1$ *if* $\lambda = (n)$,

3. $d_{\mathbb{1}}^{-\mathbb{1}}(\lambda) = 0$ *if* $\lambda \in \{(n), (n-1, 1), (n-2, 2), (1^n)\}$,

4. $d_{\mathbb{1}}^{-\mathbb{1}}(\lambda) = 1$ *if* $\lambda = (2, 1^{n-2})$.

5. $\min\{d_{\mathbb{1}}^{\mathbb{1}}((n-2, 2)), d_{\mathbb{1}}^{-\mathbb{1}}((n-2, 1, 1))\} > \frac{n}{6}$.

假设 n 为偶数，且 $n/2$为奇数。那么

1. $d_{\mathbb{1}}^{\mathbb{1}}(\lambda) = 0$当 $\lambda \in \{(n-1, 1),(n-2,1, 1), (1^n)\}$, 2. $d_{\mathbb{1}}^{\mathbb{1}}(\lambda)$ $= 1$当 $\lambda \in \{(n),(2, 1^{n-2})\}$, 3. $d_{\mathbb{1}}^{-\mathbb{1}}(\lambda) = 0$当 $\lambda \in \{(n),(n-1,$ 1), $(n-2, 2)$, $(2, 1^{n-2})$, $(1^n)\}$. 4. $\min\{d_{\mathbb{1}}^{\mathbb{1}}((n-2, 2))$ $d_{\mathbb{1}}^{-\mathbb{1}}((n-2,$ 1, 1))$\} > \frac{n}{6}$.

–

在所有其他情况下，对于 n 的所有分拆 λ， $d_{\mathbb{1}}^{\pm\mathbb{1}}(\lambda) > \frac{n}{12}$ 以及 $d_{\psi}^{j}(\lambda) > \frac{n}{6}$ 。

对于 $n < 11$，还有一些不符合上述模式的例外；因此，我们将范围限定为 $n \geq 11$。线性界 $n/6$ 的依据是下文的定理 1.5。

在讨论主定理的推论之前，我们先回顾一些关于 S_n 限制到由一个 n-循环生成的循环子群 C_n 时分支系数的已知结果。Klyachko [16] 首先研究了这些系数，他将这些系数与自由李模联系起来，并得到了以下正性结果。

定理 1.2。 *[16,* 命题 *2]* 设 n 为正整数， λ 为 n的一个分拆。设 δ 为 C_n的一个忠实不可约特征标。那么 $\langle$限制$_{C_n}^{S_n} \chi_\lambda, \delta\rangle \neq 0$，但 λ 为以下情况之一时除外：(n)、(1^n) $(n > 2)$、$(2, 2)$ 以及$(2, 2, 2)$。

Klyachko 证明了以下定理，该定理将对称群 S_n 表示与自由李GL_m(C)-模 L_n联系起来。

定理 1.3。 *[16,* 推论 *1]* 令 m 为正整数， λ 为一个至多具有m 个部分的 n 的分拆。则 GL_m-模 W_λ 在自由李模 L_n 中出现的次数等于$\langle$限制$_{C_n}^{S_n} \chi_\lambda, \delta\rangle$。

为了建立定理 1.3 与标准杨表的组合学之间的联系，我们需要介绍一些记号。

对于分拆 λ，令 SYT(λ) 表示形状为 λ的所有标准杨表的集合。对于一个杨表 $T \in$ SYT(λ)，令 maj(T) 表示 T 的主指标，其定义为 T的所有下降之和。若 $i+1$在 T中所处的行低于 i，则称 $i \in [n-1]$是 T的一个下降。

定义 $a_\lambda^r = |\{T \in \text{SYT}(\lambda) \mid \text{maj}(T) \equiv r \text{模 } n\}|$，其中 $r = 0, 1, \ldots\ldots, n-1$。Kra´ skiewicz 和 Weyman [18] 将这些组合量与 S_n 到 C_n 的循环分支系数联系起来，如下所示。

定理 1.4。 *[18, 定理 1]* 设 n 是一个正整数， λ 是 n的一个分拆。那么

$$a_\lambda^r = \langle \mathrm{Res}_{C_n}^{S_n} \chi_\lambda, \delta^r \rangle. \tag{1.1}$$

因此，对于至多有 m 个部分的 n 的分拆 λ，我们有

$$\langle W_\lambda, L_n \rangle = a_\lambda^1 = \langle \mathrm{Res}_{C_n}^{S_n} \chi_\lambda, \delta \rangle, \tag{1.2}$$

其中 $\langle W_\lambda, L_n \rangle$ 表示 GL_m-模 W_λ 在自由李模 L_n 中出现的次数。上述系数之一（因而也包括所有系数）的正性已由多位作者采用不同方法证明 [16, 13, 17, 24, 27, 26]。Kovacs 和 St¨ohr [17] 基本上利用 Littlewood–Richardson 规则证明了 $\langle W_\lambda, L_n \rangle$的正性。此外，他还给出了一个很好的下界。

定理 1.5. *[17]* 设 $n > 6$ 为正整数， L_n 为秩为 m 的自由李模， λ 为至多有 m 个部分的 n 的分拆。那么， $a_\lambda^1 \geq 1$，除非 λ 是以下之一：(n)、(1^n)。此外，若$a_\lambda^1 > 1$，则 $a_\lambda^1 > \frac{n}{6} - 1$。

由于 $d_{\mathbb{1}}^{\mathbb{1}}(\lambda) + d_{\mathbb{1}}^{-\mathbb{1}}(\lambda) = a_\lambda^0$、 $d_{-\mathbb{1}}^{\mathbb{1}}(\lambda) + d_{-\mathbb{1}}^{-\mathbb{1}}(\lambda) = a_\lambda^{n/2}$ （当 n 为偶数时）以及 $d_\psi^j(\lambda) = a_\lambda^j = a_\lambda^{n-j}$ 对于 $1 \leq j \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$，我们的定理 1.1 得到了以下结果。该结果推广了定理 1.5，并加强了许多已知结果 [24, 27, 17, 16, 1, 26]。

推论 1.6. 设 $n \geq 11$ 为正整数， C_n 是由一个 n-循环生成的 S_n 的循环子群。设 δ 是 C_n 的忠实线性特征，且 $a_\lambda^j = \langle$限制$_{C_n}^{S_n} \chi_\lambda, \delta^j \rangle$。那么有以下结论：

对于 C_n 的非实线性特征，

1. $a_\lambda^j = 0$ *if* $\lambda \in \{(n), (1^n)\}$,
2. $a_\lambda^j = 1$ *if* $\lambda \in \{(n-1,1), (2, 1^{n-2})\}$,

$$where\ j \in \begin{cases} \{1, 2, \ldots, n-1\} & if\ n\ is\ odd, \\ \{1, 2, \ldots, n-1\} \setminus \{n/2\} & if\ n\ is\ even. \end{cases}$$

当 n 为奇数时，

1. $a_\lambda^0 = 0$ *if* $\lambda \in \{(n-1,1), (2, 1^{n-2})\}$,
2. $a_\lambda^0 = 1$ *if* $\lambda \in \{(n), (1^n)\}$,

当 n为偶数时，

1. $a_\lambda^0 = 0$ *if* $\lambda \in \{(n-1,1), (1^n)\}$,
2. $a_\lambda^0 = 1$ *if* $\lambda \in \{(n), (2, 1^{n-2})\}$,
3. $a_\lambda^{n/2} = 0$ *if* $\lambda \in \{(n), (2, 1^{n-2})\}$,
4. $a_\lambda^{n/2} = 1$ *if* $\lambda \in \{(n-1,1), (1^n)\}$,

在所有其他情况下，对于 n的所有分拆 λ，

我们指出，下界 $\frac{n}{6}$ 并非最优；例如，定理 1.9] 为一大类分拆给出了更好的界限 [24, 。

当 n 为奇数时，二面体子群包含于 A_n 中，因此自然会问，类似的结果是否也适用于 A_n。设 V 是 A_n 的一个不可约表示，并令 $d_\psi^j(V) = \langle$限制$_{D_n}^{A_n} \chi_V, \psi_j \rangle$ 以及 $d_{\mathbb{1}}^{\pm\mathbb{1}}(V) = \langle$限制$_{D_n}^{A_n} \chi_V, \mathbb{1}_{\mathbb{1}}^{\pm\mathbb{1}} \rangle$。

定理 1.7。 设 $n \geq 11$ 为正整数， D_n 为 A_n 的二面体子群。设 V 为 A_n 的一个不可约表示，对应于 n 的一个分拆 λ 。则有如下结论。对于 D_n 的二维特征：

1. $d_{\psi}^{j}(V) = 0$ *if* $V = V_{(n)}$,
2. $d_{\psi}^{j}(V) = 1$ *if* $V = V_{(n-1,1)}$.

D_n的线性特征：

1. $d_{\mathbb{1}}^{\mathbb{1}}(V) = 0$ *if* $V \in \{V_{(n-1,1)}, V_{(n-2,1,1)}\}$,
2. $d_{\mathbb{1}}^{\mathbb{1}}(V) = 1$ *if* $V = V_{(n)}$,
3. $d_{\mathbb{1}}^{-\mathbb{1}}(V) = 0$ *if* $V \in \{V_{(n)}, V_{(n-1,1)}, V_{(n-2,2)}\}$.
4. $\min\{d_{\mathbb{1}}^{\mathbb{1}}((n-2,2)), d_{\mathbb{1}}^{-\mathbb{1}}((n-2,1,1))\} > \frac{n}{6}$.

在所有其他情况下，对于 λ 的所有分拆 n，都有 $d_{\mathbb{1}}^{\pm\mathbb{1}}(\lambda) > \frac{n}{12}$ 以及 $d_{\psi}^{j}(\lambda) > \frac{n}{6}$ 。

以下 推论将 [24, 1, 26] 关于交错群 A_n的结果推广了 .

推论 1.8。 **</style}设为奇正整数，为由-循环生成的的循环子群。设为的忠实线性特征，且限制** $\frac{A_n}{C_n}\chi_V$， $\delta^j\rangle$。则有如下结论：

1. $a_V^j = 0$ *if* $V = V_{(n)}$, *where* $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.
2. $a_V^j = 1$ *if* $V = V_{(n-1,1)}$, *where* $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.
3. $a_V^0 = 0$ *if* $V \in \{V_{(n-1,1)}, V_{(2,1^{n-2})}\}$,
4. $a_V^0 = 1$ *if* $V \in \{V_{(n)}, V_{(1^n)}\}$,

在所有其他情况下，对于 A_n 的所有不可约表示 $a_V^j > \frac{n}{6}$ V 。

下面给出我们的主定理的直接推论。我们将从与 D_n 的特征相对应的 Hecke 代数开始。关于 Hecke 代数及其表示的定义，读者可参阅 [5]。

推论 1.9。 令 $n \geq 11$ 为正整数， D_n 为阶为 $2n$ 的二面体群。令 $\mathcal{H} := \mathcal{H}(S_n, D_n, \chi)$ 为与 D_n 的特征 χ 相对应的 ***Hecke*** 代数。那么， $\mathcal{H}$ 的不可约表示数等于 n 的分拆数减去 k，其中 $k \leq 5$ 可由定理 ***1.1*** 中明确读出。

正如我们已经看到的， $d_{\mathbb{1}}^{\mathbb{1}}(\lambda) + d_{\mathbb{1}}^{-\mathbb{1}}(\lambda) = a_{\lambda}^{0}$， $d_{-\mathbb{1}}^{\mathbb{1}}(\lambda) + d_{-\mathbb{1}}^{-\mathbb{1}}(\lambda) = a_{\lambda}^{n/2}$ （当 n 为偶数时），因此自然会提出以下问题。

问题 1. 是否存在一种组合解释，能够说明 S_n到 D_n的线性特征的二面体分支系数？更确切地说，是否存在一个定义在$\mathrm{SYT}(\lambda)$ 上的统计量stat ，能够细化主指标；也就是说，在集合 $\{T \in \mathrm{SYT}(\lambda) \mid \mathrm{maj}(T) \equiv 0 \bmod n\}$ 上（当 n 为偶数时，对于集合$\{T \in \mathrm{SYT}(\lambda) \mid \mathrm{maj}(T) \equiv n/2 \bmod n\}$ 也有类似结论），使得该统计量能够给出 D_n的线性特征对应的二面体分支系数？

类似地，对于 Hecke 代数，我们有以下问题。

问题2。 请为与 D_n 的特征相对应的 ***Hecke*** 代数的维数给出一种组合解释？

支持代码

证明中的某些步骤涉及使用 SageMath [25] 进行直接计算。用于执行这些计算的代码可从以下网址下载：https://github.com/velmurugan1066/Dihedral-restriction-coefficients

2 记号与预备知识

设 G 是一个有限群，H 是 G 的子群。令 Irr(G) 表示 G 的所有复不可约特征标构成的集合。对于 $\Psi \in$ Irr(H)，令 Irr($G|\Psi$) $= \{\chi \in$ Irr(G) $\mid \langle$ 限制 $\chi, \Psi\rangle_H \neq 0\}$。我们用 $\mathbb{1}_H$ 表示 H 的平凡特征。设 (χ, V) 和 (Ψ, W) 是 G 的表示。若 (χ, V) 是 (Ψ, W) 的子表示，则记为 $\chi \leq \Psi$ 或 $V \leq W$.

对于 n 的一个组合 α，我们定义如下的自然置换 w_α of $[n]$:

$$w_\alpha = (1\ 2\ \dots\ \alpha_1)(\alpha_1+1\ \alpha_1+2\ \dots\ \alpha_1+\alpha_2)\dots(\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i+1\ \sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i+2\ \dots\ \sum_{i=1}^{k}\alpha_i = n),$$

其中 k 是 α 的长度。令 C_α 表示由 w_α 生成的循环子群。当 $\alpha = (n)$ 时，我们用 C_n 代替 $C_{(n)}$。令 D_n 表示由旋转 $w_n = r = (1\ 2\ \dots\ n)$ 和反射 $s = (1\ n)(2\ n-1)\dots(\lfloor n/2\rfloor\ \lceil n/2\rceil + 1)$ 生成的 S_n 的二面体子群，其循环类型为 $(2^{\lfloor n/2\rfloor}, 1^{n-2\lfloor n/2\rfloor})$,

$$D_n = \langle (1\ 2\ \dots\ n), (1\ n)(2\ n-1)\dots(\lfloor n/2\rfloor\ \lceil n/2\rceil+1)\rangle.$$

我们回顾花环积的构造及其嵌入对称群的方法（更多细节见 [12, 第 4] 章）。对于子群 $H \leq S_n$ 和 $K \in S_m$，我们有一个自然同构（见 [12, 4.1.18]），将 $H \wr K$ 映入 S_{mn}，如下所示:

$$\Gamma : H \wr K \to S_{mn} : (f, \pi) \mapsto \begin{pmatrix} (j-1)m+i \\ (\pi(j)-1)m + f(\pi(j))(i) \end{pmatrix}_{1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n}.$$

以下引理将在我们的证明中发挥核心作用。

引理 2.1. 设 $C_n \leq S_n$ 和 $C_m \leq S_m$。那么 $\Gamma(C_m \wr C_n)$ 包含一个 mn-循环。

证明。 设 $\sigma_{mn} = (((123\dots m)\ e, e\dots, e); (12\dots n))$ 是 $C_m \wr C_n$ 的一个元素。那么我们有

$\tau_{mn} := \Gamma(\sigma_{mn}) = (1\ m{+}1\ 2m{+}1\ \dots (n{-}1)m{+}1\ 2\ m{+}2\ 2m{+}2\ \dots (n{-}1)m{+}2\ \dots\ m\ 2m\ 3m\dots nm)$。

□

引理 2.2. 设 $D_n \leq S_n$ 和 $D_m \leq S_m$。则 $\Gamma(D_m \wr D_n) \leq S_{mn}$ 包含一个与 D_{mn} 共轭的子群 E_{mn}。

证明。 根据前一个引理，我们知道 $\Gamma(D_m \wr D_n)$ 包含 mn-循环 τ_{mn} $(= \Gamma(\sigma_{mn}))$。回忆一下，每个 mn-循环都与 S_{mn} 的一个唯一的 2 阶二面体子群相关联，并且与 D_{mn} 共轭。现在只需证明存在一个 $t \in D_m \wr D_n$ 的 2 阶元素，使得$\Gamma(t)\Gamma(\sigma_{mn})\Gamma(t^{-1}) = \Gamma(\sigma_{mn})^{-1}$ （等价地，$t\sigma_{mn}t^{-1} = \sigma_{mn}^{-1}$）。令 $s_k = (1\ n)(2\ n-1)(3\ n-2)\dots$

为 D_k的一个 2 阶元素。我们声称， $t=((s_m,s_m,\ldots,s_m);\ s_n)$ 是 $D_m \wr D_n$的一个 2 阶元素，并满足所需条件。为此，我们计算

$$\begin{aligned}
t\sigma_{mn}t^{-1} &= ((s_m,s_m,\ldots,s_m);s_n)(((123\ldots m),e,e\ldots,e);(12\ldots n))((s_m,s_m,\ldots,s_m);s_n)^{-1}\\
&= ((s_m,s_m,\ldots,s_m);s_n)(((123\ldots m),e,e\ldots,e);(12\ldots n))((s_m,s_m,\ldots,s_m);s_n)\\
&= ((s_m,s_m,\ldots,s_m);s_n)(((123\ldots m)s_m,s_m,s_m,\ldots,s_m);(1\ 2\ \ldots\ n)s_n)\\
&= ((s_m,s_m,\ldots,s_m)(s_m,s_m\ldots,s_m,(123\ldots m)s_m);s_n(1\ 2\ \ldots\ n)s_n)\\
&= ((e,\ldots,e,s_m(123\ldots m)s_m);(1\ n\ n-1\ \ldots\ 2))\\
&= ((e,\ldots,e,(1\ m\ m-1\ \ldots\ 2));(1\ n\ n-1\ \ldots\ 2))\\
&= \sigma_{mn}^{-1}.
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

引理 2.3. 设 I 是 S_n 的一个杨子群，其中 n 是一个奇素数，其类型为 μ ，满足$l(\mu)\geq 3$。存在一个 $\sigma\in S_n$ ，使得 $\sigma I\sigma^{-1}\cap D_n=e$。

证明。 如果 1 是 μ 的一个部分，并且设 k 被 I 固定，那么我们可以如下选取一个置换 $\sigma\in S_n$：

- 首先，将 k 映射到 1。
- 取两个元素 l， f（不同于 k），它们属于 I 的两个不同轨道。分别将 l， f 映射到 2， n。
- 读者可自行以任意方式将其扩展为一个双射。

因此，我们有 $J:=\sigma I\sigma^{-1}$ 固定 1 和 2， n 位于 J 的不同轨道中。我们看到，如果存在一个反射 s 属于 $J\cap D_n$，那么 s 必须固定 1。因此， s 必须交换 2 和 n，这是荒谬的。

否则， μ 的每个部分都至少为 2。因此， $n\geq 7$。令 A 为 I 中一个至少含有 3 个元素的轨道。令 $\{a,b,c\}\subset A$， $\{d,e\}\subset D$， $\{f,g\}\subset F$，其中 A， D， F 是互不相同的轨道。按如下方式选取一个置换:

- 首先，将 a， b， c 分别映射到 1、3、4。
- 其次，将 d， e 分别映射到 n、5。
- 第三，将 f， g 分别映射到 $n-1$、2。
- 如果 F中还有 t个元素尚未映射，就将它们与 $\{n-2,n-3,\ldots,n-t-1\}$中的元素建立双射。
- 现在，读者可以用任意方式将其扩展为一个双射。

我们声称 $J:=\sigma I\sigma^{-1}$ 不包含 D_n中的任何元素。显然， J 是适当的，因此不包含任何 n-循环。如果 $J\cap D_n$中存在反射 s ，那么 s 就不能固定 1（分别也不能固定 2）。因此，1 必定被换到 A 中的某个元素（例如 h）。注意，集合$\{1,2,\ldots,h\}$ 中除 2 以外，没有元素属于轨道 F。与此同时，集合 $\{1,2,\ldots,h\}$ 被 s固定。这意味着 s 必须固定 2，矛盾。 □

以下引理在许多引理的证明中被反复使用。

引理 2.4. 设 λ、α 分别是 n 和 m 的分拆，且满足 $\alpha \subset \lambda$。假设 k 是满足 $k+m \leq n$的正整数。那么存在一个分拆 $\beta \vdash k$ 具有以下性质：存在分拆 $\eta \supset \alpha$、$\eta \subset \lambda$、$|\eta| = k+m$，使得 $s_{\eta/\alpha} \geq s_\beta$。此外，如果 $\gamma \vdash k$ 也满足这一性质，那么 $\beta \geq \gamma$ 在支配序下。

证明。我们按如下方式构造一个分拆 β of k ，并填充 λ/α 的杨图： β_1 =min($\lambda/\alpha, k$ 的列数)。从上到下、按行从左到右，在每一列的第一个格子中填入 β_1 个 $1's$ 。接着， $\beta_2 =$ min(λ/α 中至少有 2 个单元格的列数 $k-\beta_1$)。从上到下、按行从左到右，在 λ/α 的每一列的第二个单元格中填入 β_2 个 $2's$ 。我们可以继续这一过程，直到从上到下、按行在 λ/α 的每一列的第 k 个单元格中填入 β_k ($l(\beta) = k$) 个 $k's$ 。例如，若 $\lambda = (6,4,3,2)$， $\alpha = (3,2)$ 且$k = 7$，则 λ/α 的填充如下：

$$T_{\lambda\alpha} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \multicolumn{3}{|c|}{\multirow{2}{*}{}} & 1 & 1 & 1 \\ \cline{4-6} \multicolumn{3}{|c|}{} & 1 & 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-4} 1 & 1 & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-4} \multicolumn{1}{|c|}{} & \multicolumn{3}{c}{} & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array},$$

分拆 η 可以通过取 $T_{\lambda\alpha}$ 中填入的格子的形状以及 α中的格子得到。由于填充是半标准的，且逆序行读字是一个格排列，根据 Littlewood–Richardson 规则，我们有 $s_{\eta/\alpha} \geq s_\beta$。在上面的例子中，$\eta = (6,\ 4,\ 2)$ 和 $\beta = (6,\ 1)$。根据构造， β 在支配序下是极大的。 □

定义 （支配分拆）。对于分别为 n 和 m 的分拆 $\lambda \supset \alpha$ ，我们将上文定义的 k 的分拆 β 称为 k 关于 λ/α 的支配分拆 。

关于对称函数的背景知识，请参阅 [19] ；关于对称群和花环积的表示论背景知识，请参阅 [12]。我们采用这些参考文献中的标准记号和结果。

3 定理证明中的命题

第一个关键命题如下，它使我们能够在证明中使用归纳法。

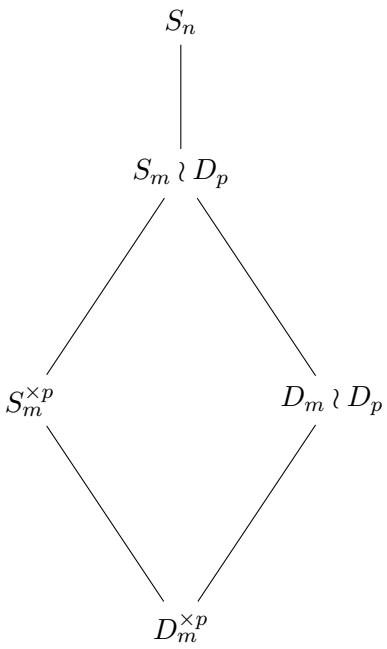
命题 3.1. 设 n 为满足 $n = mp$的正奇整数，其中 p 为素数且 $m > 1$。设$\mu^1, \ldots, \mu^p$ 为 m的分拆，其中至少有三个两两不同。设 $\lambda \vdash n$ 满足

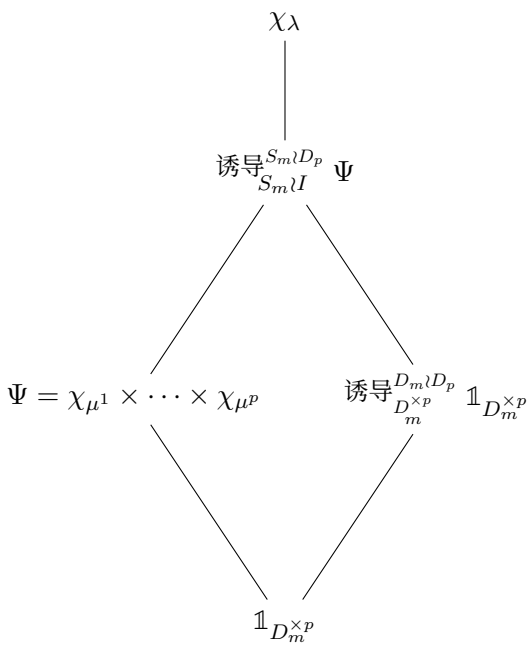
$$\mathrm{Res}^{S_n}_{S_m^{\times p}} \chi_\lambda \geq \chi_{\mu^1} \times \cdots \times \chi_{\mu^p} := \Psi.$$

Then

$$\mathrm{Ind}^{D_n}_{\langle w_n^p \rangle} \mathrm{Res}^{S_m^{\times p}}_{\langle w_n^p \rangle} \Psi \leq \mathrm{Res}^{S_n}_{D_n} \chi_\lambda.$$

证明。证明通过一系列限制—诱导步骤进行，概述如下图所示。第一个图形的节点由 S_n 的子群构成，第二个图形的节点则由第一个图形中相应子群的不可约表示构成。





令 $\Psi = \chi_{\mu^1} \times \cdots \times \chi_{\mu^p}$。为简便起见，我们用 D_p 表示 $\Gamma(S_m \wr D_p)$ 的子群，该子群置换 $S_m^{\times p}$ 中 S_m 的 p 个副本。令 $I_{S_m \wr D_p}(\Psi) = \{g \in S_m \wr D_p \mid \Psi^g = \Psi\}$，其中 Ψ^g 定义为 $\Psi^g(x) = \Psi(g^{-1}xg)$，对 $x \in S_m^{\times p}$ 成立。由于 p 是素数，且分拆 $\mu^1, \ldots, \mu^p$ 中至少有三个彼此不同，因此 D_p 的任何 p-循环都不属于 $I_{S_m \wr D_p}(\Psi)$。必要时，我们可以利用引理 2.3 置换分拆 $\mu^1, \ldots, \mu^p$，使得 D_p 的任何反射都不属于 $I_{S_m \wr D_p}(\Psi)$。因此，$I_{S_m \wr D_p}(\Psi) = S_m^{\times p}$。由于 Ψ 的惯性群 $I_{S_m \wr D_p}(\Psi) = S_m^{\times p}$ 是基群 $S_m^{\times p}$，根据 Clifford 理论，诱导 $^{S_m \wr D_p}_{S_m^{\times p}} \Psi$ 不可约。由于 $\mathrm{Res}^{S_n}_{S_m^{\times p}} \chi_\lambda \geq \Psi$，由 Frobenius 互反律可得 $\mathrm{Res}^{S_n}_{S_m \wr D_p} \chi_\lambda \geq \mathrm{Ind}^{S_m \wr D_p}_{S^{\times p}} \Psi$.

应用 Mackey 限制公式，并取平凡双陪集的贡献，我们得到

$$\mathrm{Res}^{S_n}_{D_m \wr D_p} \chi_\lambda \geq \mathrm{Ind}^{D_m \wr D_p}_{D_m^{\times p}} \mathrm{Res}^{S_m^{\times p}}_{D_m^{\times p}} \Psi.$$

现在再次使用 Mackey 限制公式，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}^{D_m \wr D_p}_{E_n} \mathrm{Ind}^{D_m \wr D_p}_{D_m^{\times p}} \mathrm{Res}^{S_m^{\times p}}_{D_m^{\times p}} \Psi &= \sum_{g \in D_m^{\times p} \backslash D_m \wr D_p / E_n} \mathrm{Ind}^{E_n}_{(D_m^{\times p})^g \cap E_n} \mathrm{Res}^{(D_m^{\times p})^g}_{(D_m^{\times p})^g \cap E_n} \mathrm{Res}^{S_m^{\times p}}_{D_m^{\times p}} \Psi^g \\
&\geq \mathrm{Ind}^{E_n}_{D_m^{\times p} \cap E_n} \mathrm{Res}^{D_m^{\times p}}_{D_m^{\times p} \cap E_n} \mathrm{Res}^{S_m^{\times p}}_{D_m^{\times p}} \Psi \\
&= \mathrm{Ind}^{E_n}_{\langle \tau_n^p \rangle} \mathrm{Res}^{S_m^{\times p}}_{\langle \tau_n^p \rangle} \Psi,
\end{aligned}$$

其中，E_n 是 $D_m \wr D_p$ 的一个子群，与引理 2.2 中的 D_n 共轭，且 $\tau_n^p = (1\ 2\ \ldots\ m)(m+1\ m+2\ \ldots\ 2m)\ldots((p-1)m+1\ (p-1)m+2\ \ldots\ pm)$。

因此，我们有

$$\mathrm{Res}^{S_n}_{E_n} \chi_\lambda \geq \mathrm{Ind}^{E_n}_{\langle \tau_n^p \rangle} \mathrm{Res}^{S_m^{\times p}}_{\langle \tau_n^p \rangle} \Psi.$$

由于 E_n 和 D_n 是 S_n 的共轭子群，证明得证。 □

命题 3.2. 设 n 是一个正偶整数，满足 $n = 2m$ 和 $m > 1$。设 μ^1、μ^2 是 m的两个不同分拆。设 $\lambda \vdash n$ 满足 $\chi_{\mu^1} \times \chi_{\mu^2} \leq$限制$^{S_n}_{S_m^{\times 2}} \chi_\lambda$。那么诱导$^{D_n}_{\langle w_n^2,\ s\rangle}$限制$^{S_m^{\times 2}}_{\langle w_n^2,\ s\rangle} \chi_{\mu^1} \times \chi_{\mu^2} \leq$限制$^{S_n}_{D_n} \chi_\lambda$，其中 s 是 D_n中的某个反射。

证明。 论证与命题 3.1 的论证相同，只需将 D_p 替换为 D_2，并注意到 $E_n \cap D_m^{\times 2} = \langle \tau_n^2,\ s\rangle$，其中 $s =$ (1)(2 m)(3 $m-1$) . . . ($m+1$ 2m)($m+2$ 2$m-1$) . . . 。 □

The 以下命题在特定情形下将与定理 1.1 的证明类似 .

命题 3.3。 设 $n = 2p$ 为一个正偶整数， $p \geq 41$ 为素数，且 $\lambda = (p, p)$。那么，对于 D_n 的所有不可约特征 ψ，$\langle$限制$^{S_n}_{D_n} \chi_\lambda, \psi\rangle > n$ 。

证明。 设 ψ 为 E_n 的一个不可约特征（与引理 2.2 中的 D_n 共轭）。我们可以先考虑 ψ 限制为 $\langle \tau_n^p\rangle$ 的平凡特征的情形。令 $\mu^1 = \mu^2 = \cdots = \mu^{i-1} =$(1, 1)，且对于某个 $3 \leq i < j \leq \frac{p-1}{2}$，
$\mu^i = \mu^{i+1} = \ldots = \widehat{\mu^j} = \mu^{j+1} = \ldots = \mu^p =$(2)，并令 $\widehat{\mu^j} =$(1, 1)。那么$\chi_i^j := \chi_{\mu^1} \times \cdots \times \chi_{\mu^p}$是 $S_2^{\times p}$ 的一个不可约特征。注意，对于所有奇数 $3 \leq i < j \leq \frac{p-1}{2}$，$\mathrm{Res}^{S_2^{\times p}}_{\langle \tau_n^p\rangle} \chi_i^j$ 是 $\langle \tau_n^p\rangle$ 的平凡特征。因此，根据命题 3.1 的证明，我们有 ——

$$\mathrm{Res}^{S_n}_{E_n} \chi_\lambda \geq \mathrm{Ind}^{E_n}_{\langle \tau_n^p\rangle} \mathrm{Res}^{S_2^{\times p}}_{\langle \tau_n^p\rangle} \chi_i^j = \mathrm{Ind}^{E_n}_{\langle \tau_n^p\rangle} \mathbb{1}_{\langle \tau_n^p\rangle} \geq \psi.$$

我们可以看出，$(\chi_i^j)^g = \chi_{i'}^{j'}$ 对于某个 $3 \leq i' < j' \leq \frac{p-1}{2}$，其中 i' 为奇数且 $g \in D_2 \wr D_p$ 当且仅当 $g \in D_2^{\times p}$。因此，对于不同的 $3 \leq i < j \leq \frac{p-1}{2}$ 取值（满足 i 为奇数），$\mathrm{Ind}^{D_2 \wr D_p}_{S_2^{\times p}} \chi_i^j$ 是 $D_2 \wr D_p$ 的两两不等价的不可约特征。由于满足 i 为奇数的 $3 \leq i < j \leq \frac{p-1}{2}$ 取值数等于 $\sum^{/2}_{(p=1)} \frac{p-1}{2} - i$。

考察求和的前六项可知，对于所有 $p \geq 41$，满足条件$_{i=3,\ i\text{为奇数}}$的取值数至少为 $3p - 18 > 2p$。这证明了当 ψ 限制到 $\langle w_n^p\rangle$ 的平凡特征时，$\langle \mathrm{Res}^{S_n}_{E_n} \chi_\lambda, \psi\rangle > n$。

类似的构造可处理 ψ 限制为 $\langle w_n^p\rangle$. 的符号特征标的情形。由此完成证明。

□

现在我们再考虑一个具体情形，其证明可由命题 3.1 的证明推出。

推论 3.4. 设 $n = 4m$ 是满足 $m \geq 20$ 且 $\lambda = (2m, 2m)$ 的正整数。假设 μ^1、μ^2、μ^3、μ^4 是 m 的互不相同的分拆，且 限制 $^{S_n}_{S_m^{\times 4}} \chi_\lambda \geq \chi_{\mu^1} \times \chi_{\mu^2} \times \chi_{\mu^3} \times \chi_{\mu^4}$。那么，对于 D_n 的每个不可约特征标 ψ，都有 $\langle$限制$^{S_n}_{D_n} \chi_\lambda, \psi\rangle > 0$ 。

4 引理

以下引理是主定理证明中的关键。

引理 4.1. 设 $m \geq 11$ 为正整数。则

$$\sum_{\substack{\alpha,\beta \neq (m),(1^m) \\ \alpha \neq \beta}} s_\alpha s_\beta \geq s_\lambda, \tag{4.1}$$

对于所有分拆 λ *of* $2m$，除非 λ 等于以下各项之一：$(2m)$、$(2m-1, 1)$、$(2m-2, 1, 1)$、$(2m-2, 2)$、(m, m)、$(3, 1^{2m-3})$、$(2^2, 1^{2m-4})$、$(2, 1^{2m-2})$、(1^{2m})。

此外，对于一个不属于上述例外之一的分拆 λ *of* $2m$ 以及 $\lambda_1, \lambda_1' \leq 2m-5$，存在不同的分拆 α, β，使得 $s_\alpha s_\beta \geq s_\lambda$ 和 $\alpha_1, \alpha_1', \beta_1, \beta_1' \leq m-2$。

证明。 左端在标准对合 ω 下是不变的，因此 s_λ 满足公式 (4.1) 当且仅当 $s_{\lambda'}$ 满足该方程。因此，只需考虑满足 $\lambda_1 \geq \lambda'_1$ 的分拆 λ with，因为 s_λ 满足 (4.1) 当且仅当 $s_{\lambda'}$ 满足。 当 $\lambda \vdash 2m$ and $\lambda_1 > 2m-5$ or $\lambda'_1 > 2m-5$ 时，我们可以直接验证该引理。现在，前一个陈述由该引理的后一个陈述推出。让我们开始证明该引理的后一个陈述。因此，令 $\lambda \vdash 2m$ with $\lambda_1, \lambda'_1 \leq 2m-5$ and $\lambda_1 \geq \lambda'_1$。定义 $A_m = \{(m), (m-1,1), (2,1^{m-2}), (1^m)\}$。我们将使用逐案分析给出证明。

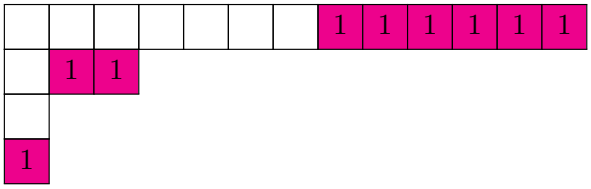
情形 I. λ **是钩形分拆或两行分拆**

若 λ 是钩形分拆，则可取 $\alpha = (m-2,\ 1,\ 1)$ 和 $\beta = (\lambda_1 - m + 2,\ 1^{2m-\lambda_1-2})$。设 λ 是两行分拆。若 $\lambda = (m,\ m)$，则容易看出 $c_{\alpha\beta}^{(m,m)} > 0$ 意味着 $\alpha = \beta$。否则，$\lambda \neq (m,\ m)$，且可取 $\alpha = (m-2,\ 2)$ 和 $\beta = (\lambda_1 - m + 2,\ 2m - \lambda_1 - 2)$。从现在起，我们可以假设 λ 既不是钩形分拆，也不是两行分拆。

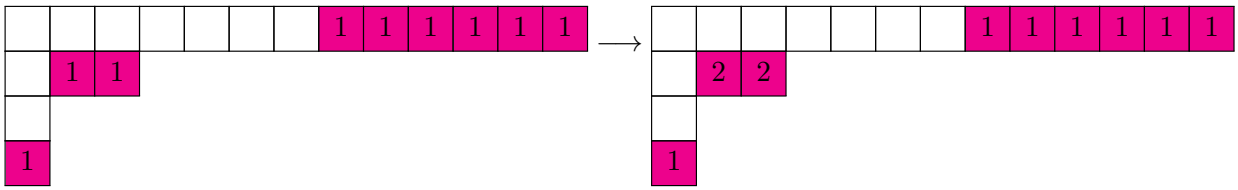
情形 II. $\lambda_1 \geq \lambda'_1$ **和** $\lambda_1 \geq m$。

我们将 α 替换为 $(m-2,\ 1,\ 1)$，并将 β 替换为包含在 λ/α 中的 m 的支配分拆。若 $\beta \notin A_m$ 且 $\alpha \neq \beta$，则问题得解。

否则，假设 $\beta = (m)$。

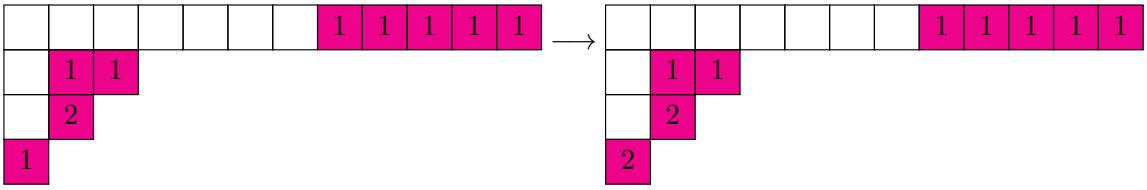


特别地，我们可以注意到，第一行中 1 的个数至少为 3，且至多为 $m-3$。因此，第二行中 1 的个数至少为 2。所以，我们可以将 β 替换为 $(m-2,\ 2)$，如下所示。

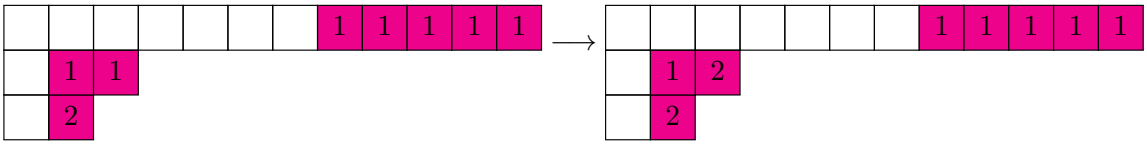


由于 λ/α 至少有两列，因此 $\beta \neq (1^m)$。假设 $\beta = (m-1,\ 1)$。我们可以将 β 替换为 $(m-2,\ 2)$，如下所示。

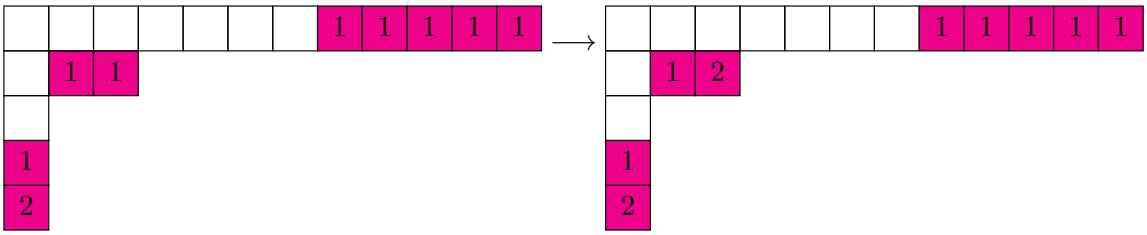
共有三种可能的图。首先，λ/α 的第二列中有两个单元格。如果 λ/α 的第一列中有一个单元格，那么我们可以将第一列中的 1 替换为 2。



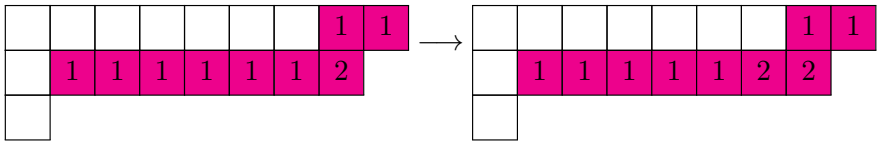
否则，我们可以将第二行中最右侧的 1 替换为 2。



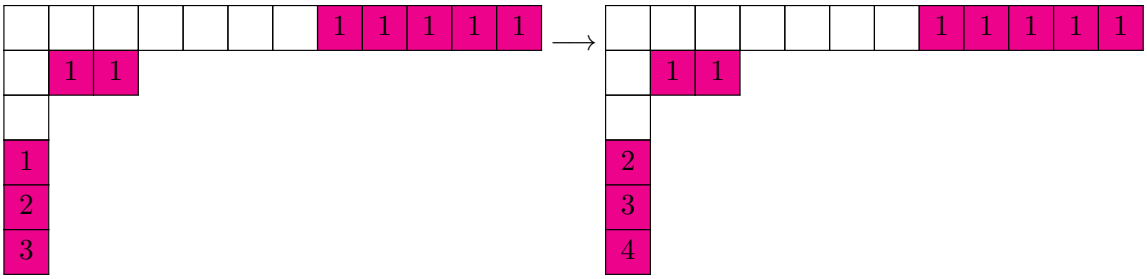
其次， λ/α的第一列中有两个单元格。由于 $\lambda_1 \leq 2m-5$， λ/α 的第二行至少有一个单元格。我们可以将第二行最右边的 1 改为 2。



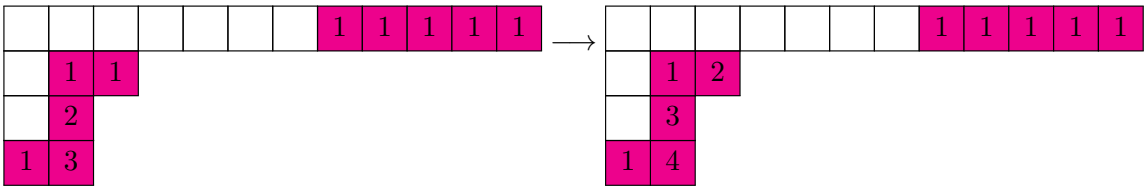
第三， λ/α的第（$m-1$）列中有两个单元格。由于 $\lambda_1 \geq m$ ，只有一种可能的图形，我们可以将第二行最右边的 1 改为 2。



最后，假设 $\beta = \alpha =$(m − 2，1，1)。我们可以将 β替换为(m − 4，1，1，1)，如下所示。



在下面的图形中，我们将第二行最右边的 1 改为了 2。



这就完成了 $\lambda_1 \geq m$时的证明。

情形 III. $\lambda_1 \geq \lambda'_1$ **和** $\lambda_1 < m$。

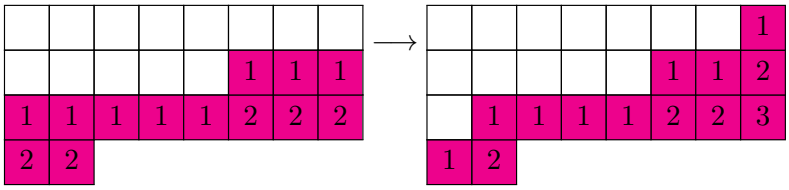
假设 $\lambda_1 + \lambda'_1 - 1 \leq m$。那么我们可以将 $\alpha \vdash m$ 取为 m 的任意一个分拆，该分拆包含于 λ，且包含 λ的第一行和第一列。令 β 为包含于 λ/α的 m 的支配分拆。由于 λ/α 至多有 $\alpha_1 - 1$ 列， $\alpha \neq \beta$。另请注意， α，$\beta \notin A_m$。

假设 $\lambda_1 + \lambda'_1 - 1 > m$。我们将此情形分成两个子情形。

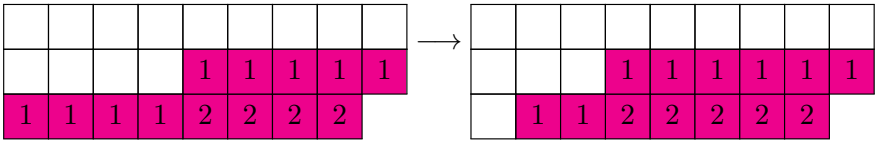
- 令 $\lambda_1 < m-1$。令 α，β 为包含于 λ 和 λ/α 中的 m 的支配分拆，分别成立。若$\alpha \neq \beta$，则证毕。

  否则，假设 $\alpha = \beta$。在这种情况下，由于 $\lambda_1 + \lambda'_1 - 1 > m$，必有 $\ell(\alpha) = 2$。

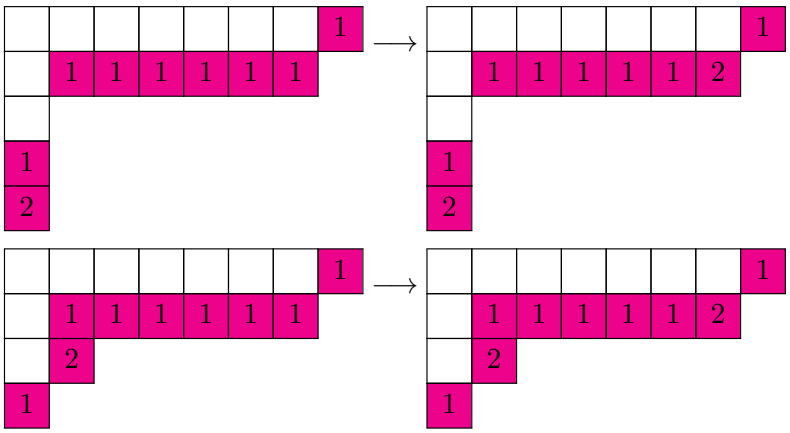
  – 先考虑 $\lambda_4 > 0$的情形。在这种情况下，如下所示，我们可以将 α 替换为 $(\alpha_1 - 1,\ \alpha_2,\ 1)$，并将 β 替换为 $(\alpha_1,\ \alpha_2 - 1,\ 1)$。



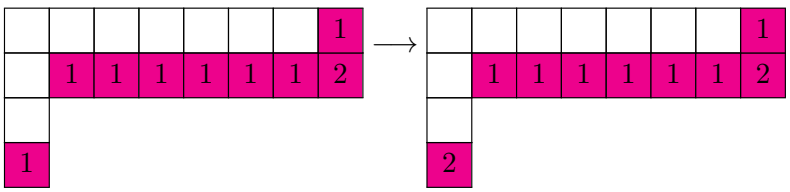
  – 令 $\lambda_4 = 0$。在这种情况下，如下所示，我们可以将 α 替换为 $(\alpha_1,\ \alpha_2 - 1,\ 1)$，并将 β 替换为 $(\alpha_1 - 1,\ \alpha_2 + 1,\ 1)$。



- 令 $\lambda_1 = m-1$。我们选取 $\alpha = (m-2,\ 1,\ 1)$，并令 β 为包含于 λ/α 中的 m 的支配分拆。注意，$\beta \neq (m)$，(1^m)，$(2,\ 1^{m-2})$。若 β 不同于 $(m-1,\ 1)$ 和 α，则证毕。否则，假设 $\beta = (m-1,\ 1)$。若 λ/α 的第一列或第二列包含两个单元格，则如下所示，我们可以将 β 替换为 $(m-2,\ 2)$，方法是将第二行中最右侧的 1 替换为 2。



如果 λ/α 的第 $m-1$ 列包含两个格子，那么我们可以将 β 替换为 $(m-2,\ 2)$，如下所示。



最后，假设 $\beta = \alpha = (m-2,\ 1,\ 1)$。在这种情况下， λ/α 的第一列或第二列包含三个格子。然后将 λ/α 第一列中的条目都加 1，所得的 β 在前一种情况下等于 $(m-3,\ 1,\ 1,\ 1)$，在后一种情况下等于 $(m-3,\ 2,\ 1)$。

至此，引理后半部分的证明完成。 □

上述引理的一个简单推论如下。

引理 4.2. 设 $m \geq 11$ 是一个整数。

$$\sum_{\substack{\alpha,\beta \vdash m \\ \alpha \neq (m-1,1),(2,1^{m-2}) \\ \beta \neq (m-1,1),(2,1^{m-2})}} s_\alpha s_\beta \geq s_\lambda$$

对于 $2m$的所有分拆 λ。

证明。除分拆 λ 中 $\lambda_1 > 2m-5$、 $\lambda'_1 > 2m-5$ 或 λ 是以下之一的情形外，定理可由引理 4.1 的后半部分轻易推出：$(2m)$， $(2m-1,\ 1)$， $(2m-2,\ 2)$， $(2m-2,\ 1,\ 1)$， $(m,\ m)$，$(3,\ 1^{2m-3})$， $(2_2,\ 1^{2m-4})$，

$(2,\ 1^{2m-2})$，(1^{2m})。在这些情况下，可以通过直接计算验证该定理。 □

下面的引理是证明主定理的关键之一。

引理 4.3。 令 $m \geq 11$ 为正整数。则

$$\sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma \neq (m),(1^m) \\ \alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \alpha \neq \gamma}} s_\alpha s_\beta s_\gamma \geq s_\lambda \tag{4.2}$$

对于所有满足 λ_1、 $\lambda'_1 \leq 3m-6$的分拆 λ 和 $3m$ 。

证明。 令 λ 为满足 $\lambda_1 \geq \lambda'_1$ 和 $\lambda_1 \leq 3m-6$的 $3m$ 的一个分拆。在整个证明中， α， β， γ 表示 m的分拆。在证明过程中，只要 Littlewood–Richardson 条件仍然成立，我们可以自由地将三元组（α， β， γ）替换为由 m 的两两不同分拆组成的另一个三元组。

情形 I. λ**是钩形分拆或两行分拆**。

首先，我们先考虑 λ 是钩形分拆的情形。此时 $\lambda = (m+k, 1^{2m-k})$，其中 $k \geq m/2 \geq 6$。如果 $\lambda_1 \geq 2m-1$，那么我们可以选取 $\alpha = (m-1, 1)$、 $\beta = (m-2, 1, 1)$ 和 $\gamma = (k-m+3, 1^{2m-k-3})$。否则，我们可以选取 $\alpha = (m-1, 1)$、 $\beta = (k-2, 1^{m-k+2})$ 和 $\gamma = (2, 1^{m-2})$。接下来考虑 λ 是两行分拆的情形。此时 $\lambda = (m+k, m-k)$，其中 $k \geq m/2 \geq 6$。利用 Littlewood–Richardson 规则可直接验证 $s_\lambda \geq s_\alpha s_\beta s_\gamma$，其中 $\alpha = (m-1, 1)$、 $\beta = (m-2, 2)$ 和 $\gamma = (m-3, 3)$。

从现在起，我们可以假设 λ 既不是钩形分拆，也不是两行分拆 .

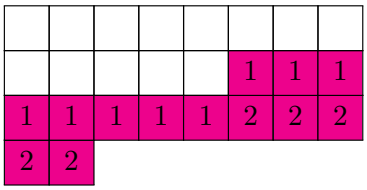
情形 II. 假设 $\lambda_1 \leq m-1$.

若 $\lambda_1 + \lambda'_1 - 1 \leq m$，则令 α 为包含在 λ 中且包含 λ 的第一行和第一列中所有格子的任意分拆。由于 $m \geq \lambda_1 \geq \lambda'_1$，对于某个分拆 μ ，有 $s_{\lambda/\alpha} \geq s_\mu$ ，其中 μ 是 $2m$ 的分拆，且 $\mu_1 \leq m-1$，$\mu'_1 \leq m-1$。根据引理 4.1，存在两个分拆 β， γ，使得 $s_\mu \geq s_\beta s_\gamma$。因此，我们有 $s_\lambda \geq s_\alpha s_\beta s_\gamma$。

否则， $\lambda_1+\lambda'_1-1>m$。我们可以令 α 为包含在 λ 中的支配分拆（见定义 2）。注意， $\alpha_2<\lambda_1$。令 β 为包含在 λ/α 中的支配分拆。

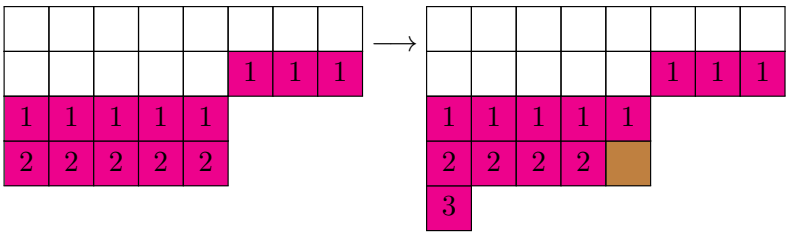
假设 $\beta\neq\alpha$。由于 $s_{\lambda/\alpha}\geq s_\mu$，存在某个 $2m$ 的分拆 μ，使得 $\mu_1\leq m-1$， $\mu'_1\leq m-1$，且包含在 μ 中的支配分拆 β 在支配序下小于 α。根据引理 4.1，存在两个不同的分拆 β， γ，使得 $s_\mu\geq s_\beta s_\gamma$。此外， $\alpha\neq\beta$ 且 $\alpha\neq\gamma$。因此，我们有$s_\lambda\geq s_\alpha s_\beta s_\gamma$。

假设 $\alpha=\beta$。在这种情况下，我们必有 $\lambda_1=\lambda_2$ 且 $\alpha_2<\lambda_2$。因此， $\alpha_3=0$。 α 和 β 在 λ 中的图形如下所示。



情形 II.1 假设 $\lambda_3=\alpha_2$。

然后，我们可以将 β 替换为 $(\alpha_1,\ \alpha_2-1,\ 1)$，如下所示。

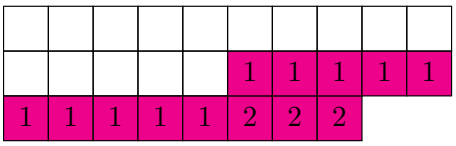


注意，在这种情况下不可能出现 $\alpha_2=1$。由于 $\lambda/\alpha/\beta$ 的列数小于 α_1，包含于 $\lambda/\alpha/\beta$ 中的支配分拆 γ 不等于 α 和 β，因此得证。

从现在起，我们可以假设 $\lambda_3>\alpha_2$。

情形 II.2 假设 λ/α **的第四行中条目为**2 **的格子数为**0。

由于 $\lambda_1+\lambda'_1-1>m$ 和 $\ell(\lambda)\geq 4, \alpha_2\geq 4$。与此同时， $\beta_2=\alpha_2$ 意味着 $\alpha_1-\alpha_2\geq 4$.



在这种情况下，至少有两对可能的分拆（α， β），即这两对：$((\alpha_1,\ \alpha_2-1,\ 1),\ (\alpha_1-1,\ \alpha_2+1))$， $((\alpha_1,\ \alpha_2-2,\ 2),\ (\alpha_1-2,\ \alpha_2+2))$。

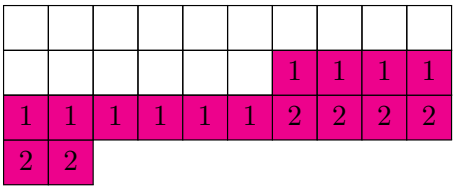


现在令 γ 为包含在 $\lambda/\alpha/\beta$中的支配分拆。那么，将 γ 添到上述某一对（α，β）中的一边，其中 $\gamma \neq \alpha$ 且 $\gamma \neq \beta$，即可得到所需结果。

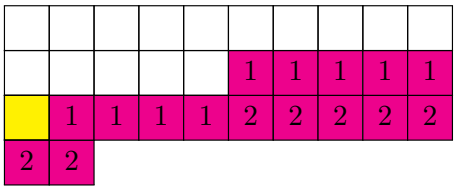
情形 II.3 假设 β 的第四行中有一个 2 。

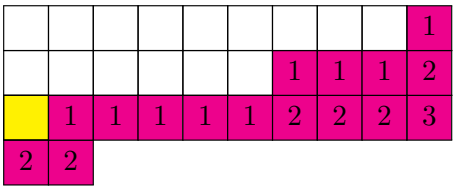
我们可以从 $\lambda_3 < \alpha_1$ 的情形开始。在这种情况下，我们可以将 β 替换为 $(\alpha_1, \alpha_2 - 1, 1)$，方法是将第三行最右边的 2 替换为 3。由于 $\lambda_3 < \alpha_1$，逆序行读字将是一个格排列。现在令 γ 为包含于 $\lambda/\alpha/\beta$ 中的支配分拆。于是，三元组 (α, β, γ) 给出所需结果。

现在我们可以假设 $\lambda_3 = \alpha_1$。



在这种情况下，我们至少有两对可能的分拆 (α, β)，即这两对 $((\alpha_1, \alpha_2 - 1, 1), (\alpha_1 - 1, \alpha_2 + 1))$，$((\alpha_1 - 1, \alpha_2, 1), (\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1, 2))$。

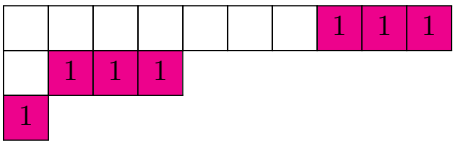




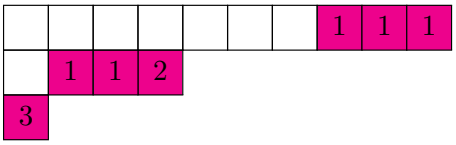
现在，将包含于 $\lambda/\alpha/\beta$ 中的支配分拆 γ 接到上述某一对 (α, β) 上，其中 $\gamma \neq \alpha$ 且 $\gamma \neq \beta$，即可得到所需结果。当 $\lambda_1 \leq m - 1$ 时，证明至此完成。

情形 III. 假设 $\lambda_1 \geq m$。

我们可以选取 $\alpha = (p - 1, 1)$，并令 β 为包含于 λ/α 中的 m 的支配分拆。**1. 假设 $\beta = (m)$。**

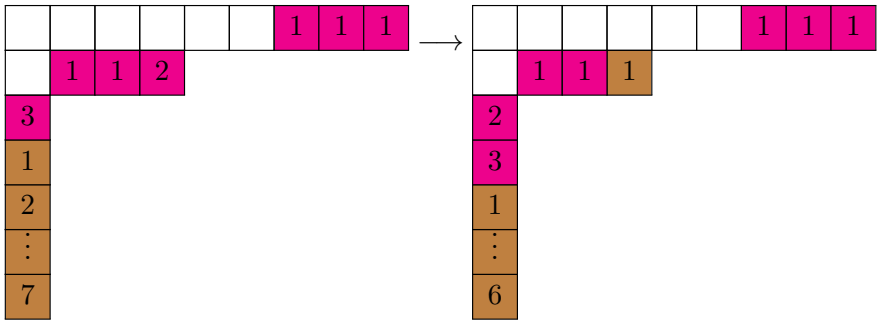


1.1 如果 λ/α 的第二行和第三行都包含 1，那么我们可以将 β 替换为$(m - 2, 1, 1)$，如下所示。

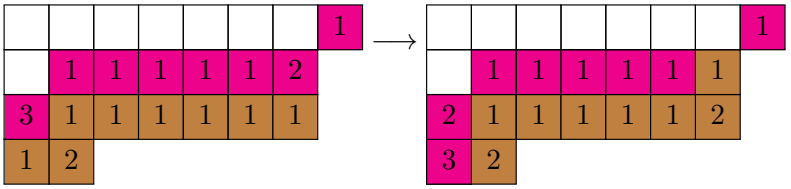


令 γ 为包含于 $\lambda/\alpha/\beta$ 中的 m 的支配分拆。由于 $\lambda/\alpha/\beta$ 至多有 $m - 1$ 列，因此 γ 不等于 (m)。

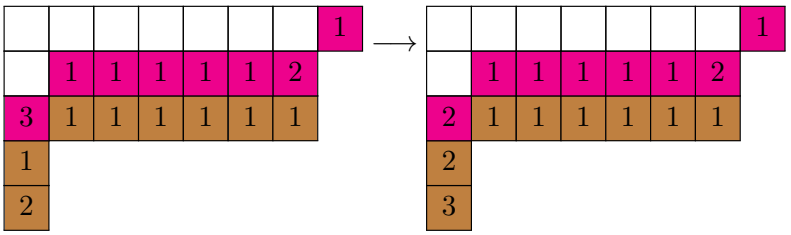
如果 $\gamma = (1^m)$，那么我们可以改变 β 的外观，并将 γ 替换为 $(2,\ 1^{m-2})$，如下所示。



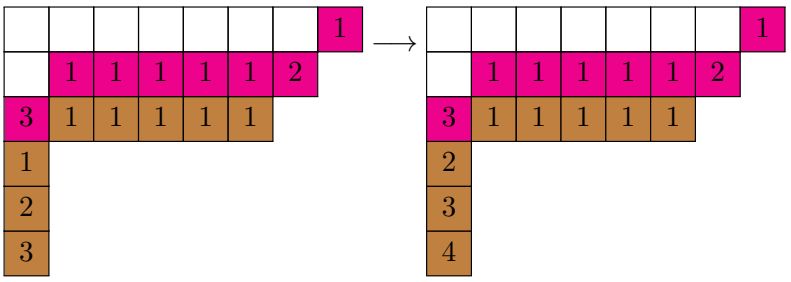
假设 $\gamma = \alpha = (m-1,\ 1)$。若 $\lambda'_2 = 4$，则我们可以改变 β 的外观，并将 γ 替换为 $(m-2,\ 2)$，如下所示。



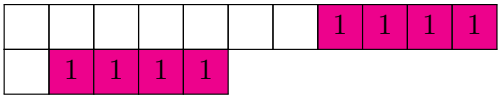
若 $\lambda'_1 = 5$，则我们可以将 β 替换为 $(m-2,\ 2)$，并将 γ 替换为 $(m-2,\ 1,\ 1)$，如下所示。



最后，假设 $\gamma = \beta = (m-2,\ 1,\ 1)$。在这种情况下，我们可以将 γ 替换为 $(m-3,\ 1,\ 1,\ 1)$，如下所示。

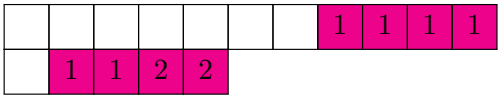


由于 λ 不是分拆，因此 λ/α 在第三行有 1、但在第二行没有 1 的情况不可能发生。因此，我们现在可以考虑 λ/α 在第二行有 1、但在第三行没有 1 的情况。

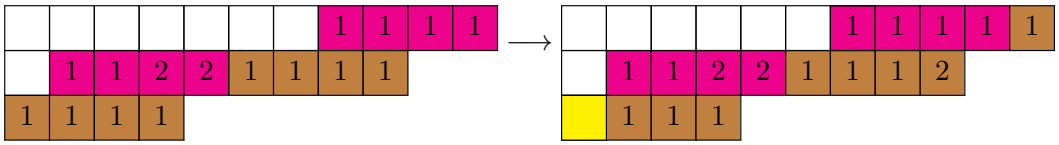


注意，λ/α 的第一行至少包含两个 1。

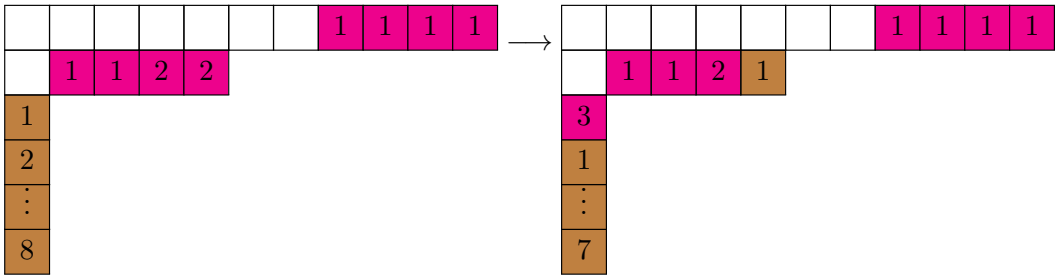
1.2 假设 λ/α 的第二行至少包含两个 1。我们可以将 β 替换为 $(m-2,\ 2)$，如下面所示。



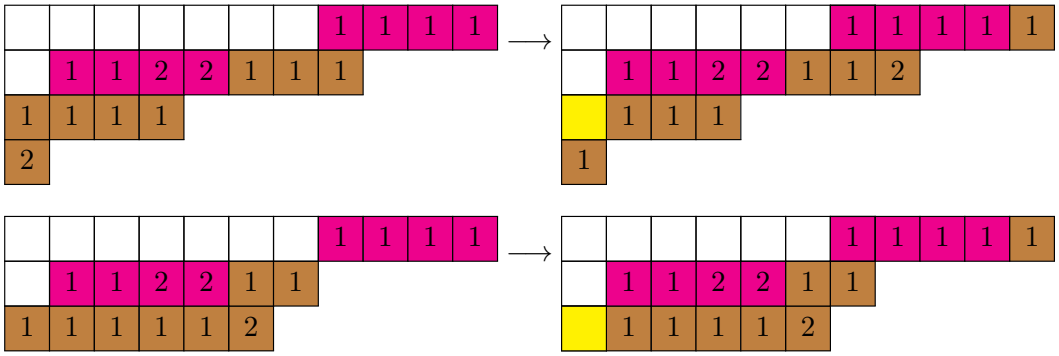
设 γ 是 $\lambda/\alpha/\beta$ 中包含的 m 的支配分拆。如果 $\gamma \notin \{(m),\ (1^m)\ \alpha,\ \beta\}$，则问题得证。否则，假设 $\gamma = (m)$。那么我们可以将 α 替换为 $(m-2,\ 1,\ 1)$，将 β 替换为 $(m-2,\ 2)$，并将 γ 替换为 $(m-1,\ 1)$，如下面所示。注意，此处已使用 $\ell(\lambda) > 2$。



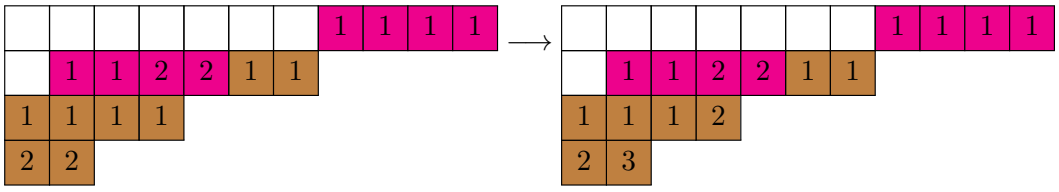
假设 $\gamma = (1^m)$。在这种情况下，我们可以将 β 替换为 $(m-2,\ 1,\ 1)$，并将 γ 替换为 $(2,\ 1^{m-2})$，如下所示。



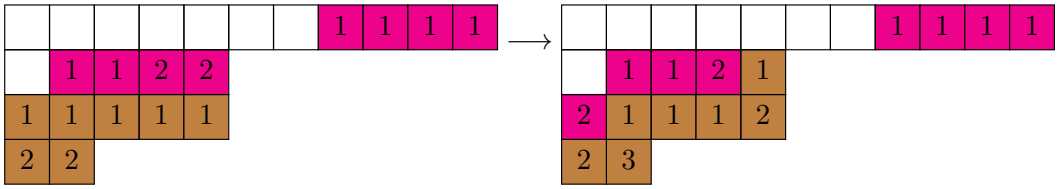
假设 $\gamma = \alpha = (m-1,\ 1)$。那么，我们可以将 α 替换为 $(m-2,\ 1,\ 1)$，将 β 替换为 $(m-2,\ 2)$，并将 γ 替换为 $(m-1,\ 1)$，如下所示。



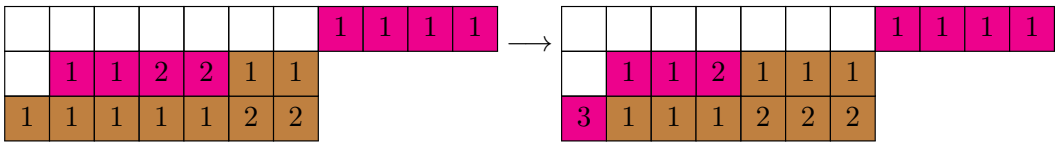
假设 $\gamma = \beta = (m-2,\ 2)$。如果 $\lambda'_1 = \lambda'_2 = 4$，那么我们可以将 γ 替换为 $(m-3,\ 2,\ 1)$，如下所示。当 $\lambda/\alpha/\beta$的第二行中存在一个条目为 1 的格子时，



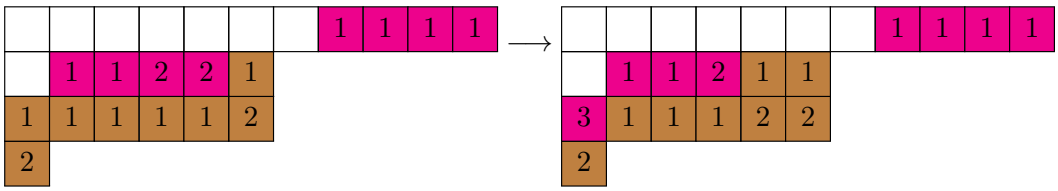
当 $\lambda/\alpha/\beta$ 的第二行中没有条目 1 的格子时，



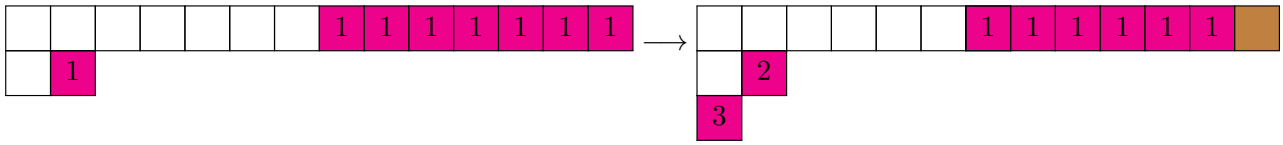
如果 $\lambda/\alpha/\beta$ 的第 k 列（$k = 2m - \lambda_1 + 1$）和第 $k+1$ 列含有 2，那么我们可以将 β 替换为 $(m-2,\ 1,\ 1)$，并将 γ 替换为 $(m-3,\ 3)$，如下所示。



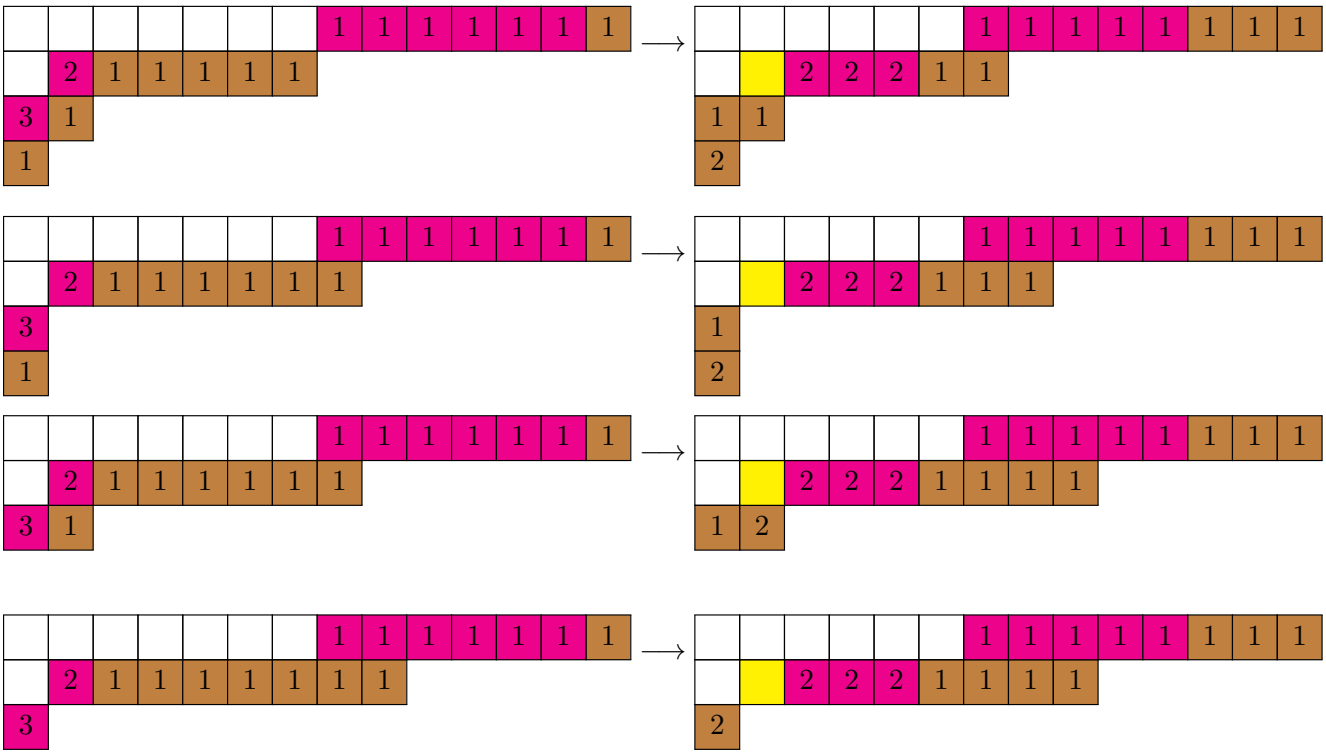
如果 $\lambda/\alpha/\beta$的第一列和第 k列包含 2，那么我们可以将 β替换为 $(m-2,\ 1,\ 1)$，并将 γ替换为 $(m-3,\ 3)$，如下所示。



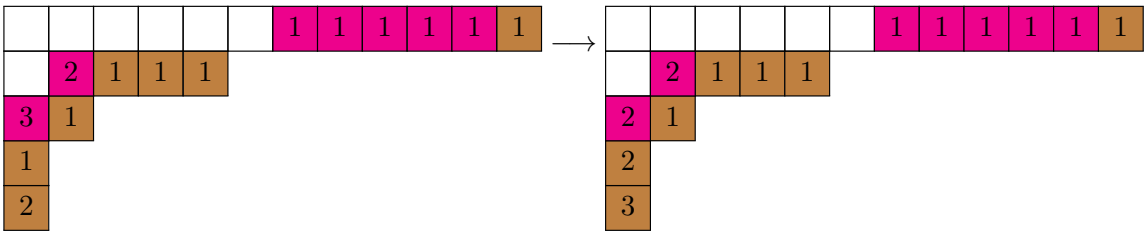
1.3 假设 λ/α 的第二行恰好包含一个 1。那么我们可以将 β 替换为 $(m-2,\ 1,\ 1)$，如下所示。



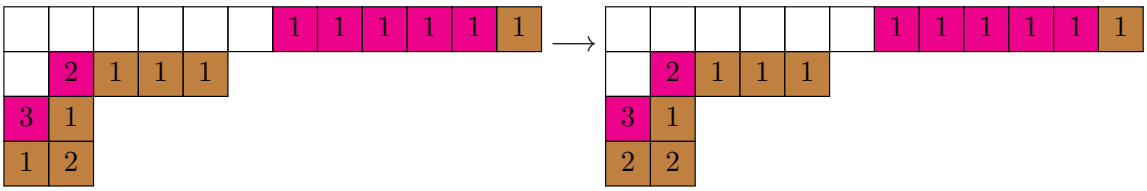
令 γ 为 $\lambda/\alpha/\beta$ 中包含的支配分拆。若 $\gamma \notin \{(m),\ (1^m)\ \alpha,\ \beta\}$，则问题得证。否则，假设 $\gamma = (m)$。因此，我们可以如下图所示，将 α 替换为 $(m-2,\ 2)$，将 β 替换为 $(m-3,\ 3)$，并将 γ 替换为 $(m-1,\ 1)$。



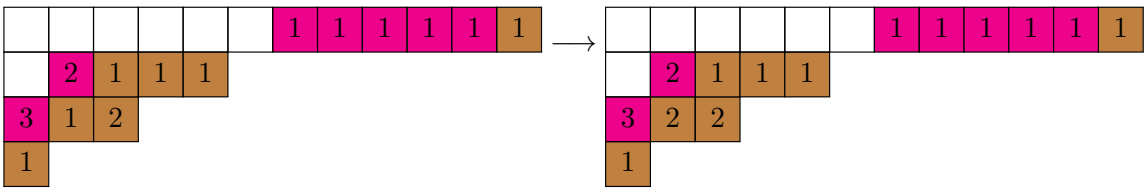
由于 $\lambda/\alpha/\beta$ 的第 $2m-2$ 列非空， $\gamma \neq (1^m)$。现在假设 $\gamma = \alpha = (m-1,\ 1)$。若 $\lambda'_1 = 5$，则我们可以如下图所示，将 β 替换为 $(m-2,\ 2)$，并将 γ 替换为 $(m-2,\ 1,\ 1)$。



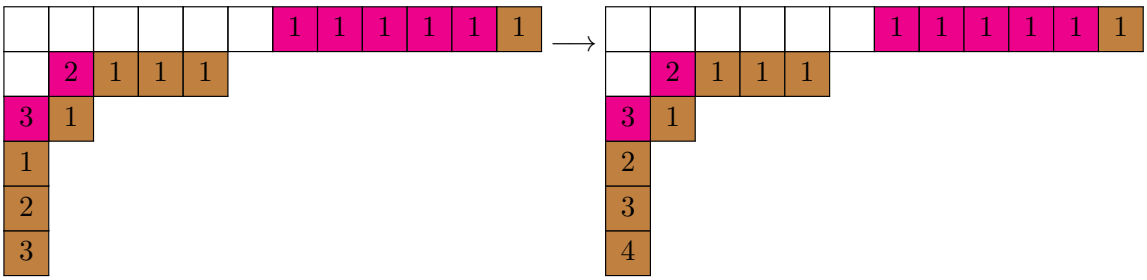
若 $\lambda'_2 = 4$，则我们可以将 γ 替换为 $(m-2,\ 2)$，如下所示。



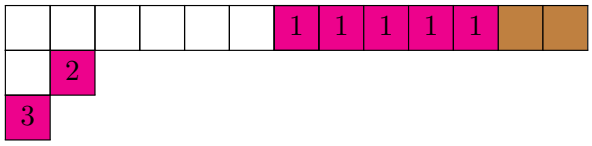
若 $\lambda'_3 = 3$，则我们可以将 γ 替换为 $(m-2,\ 2)$，如下所示。



最后，假设 $\gamma = \beta = (m-2,\ 1,\ 1)$。那么， γ 中有 3 个必须出现在 λ的第一列中。我们可以将 γ 替换为 $(m-3,\ 1,\ 1,\ 1)$，如下所示。

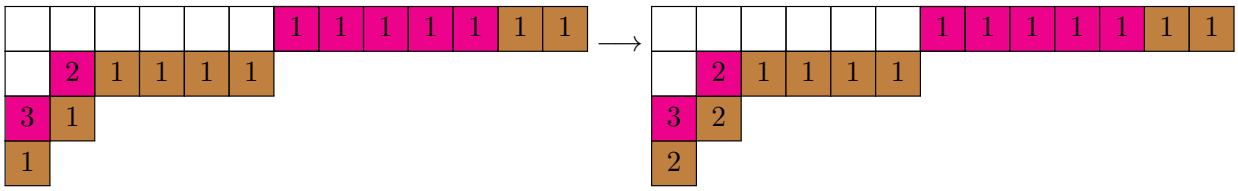


最后，考虑 λ/α的第二行中没有 1 的情况。等价地，$\lambda_1 \geq 2m-1$。由于 λ 既不是钩形分拆，也不是两行分拆，我们可以将 β 替换为 $(m-2,\ 1,\ 1)$，如下所示。

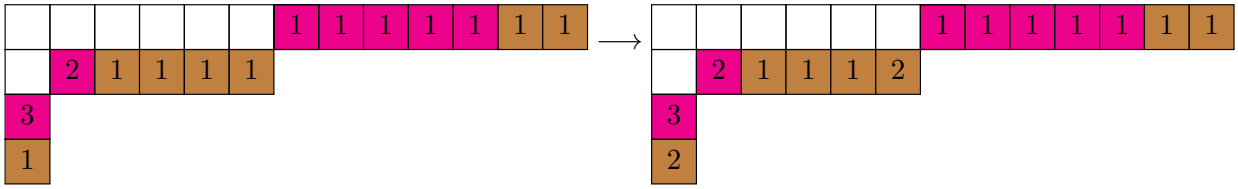


令 γ为包含于 $\lambda/\alpha/\beta$中的 m 的支配分拆。若 $\gamma \notin \{(m),(1^m)\ \alpha, \beta\}$，则问题得证。否则，设 $\gamma = (m)$。那么我们可以如下所示，将 β 替换为 $(m-2,2)$，并将 γ 替换为 $(m-1,1)$。

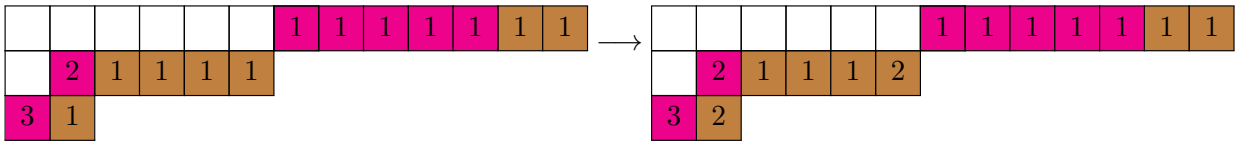
第一种情况：当 $\lambda/\alpha/\beta$的第一列和第二列中都有一个格子时，



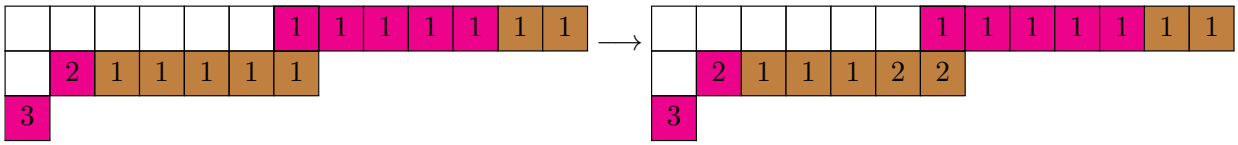
第二种情况：第一列中有一个格子，而 $\lambda/\alpha/\beta$的第二列中没有格子，



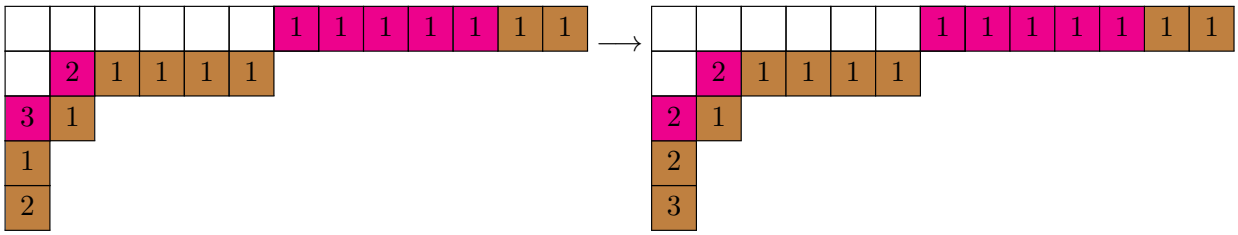
第三种情况：第二列中有一个格子，而 $\lambda/\alpha/\beta$的第一列中没有格子，



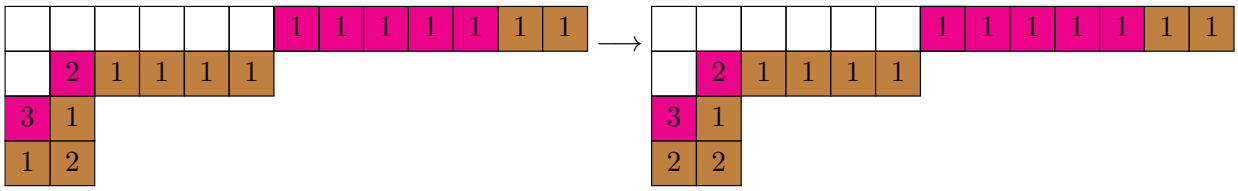
最后， $\lambda/\alpha/\beta$的第一列和第二列中都没有格子，



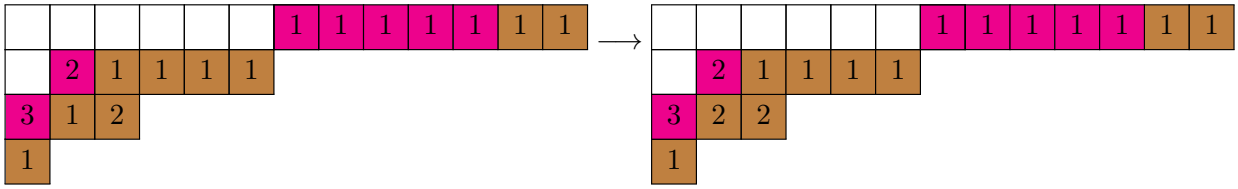
由于 $\lambda/\alpha/\beta$ 至少有两列非空，因此 γ 不等于(1^m)。现在假设$\gamma = \alpha = (m-1,\ 1)$。如果 $\lambda'_1 = 5$，那么我们可以将 β替换为$(m-2,\ 2)$，并将 γ替换为$(m-2,\ 1,\ 1)$，如下所示。



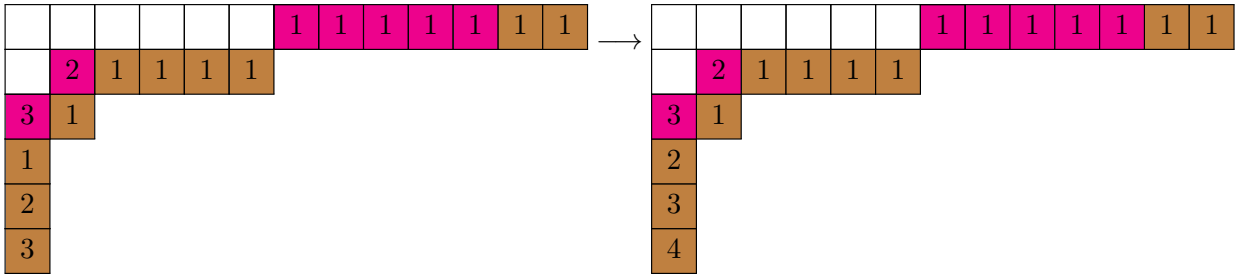
如果 $\lambda'_2 = 4$，那么我们可以将 γ 替换为下文所示的 $(m-2,\ 2)$。



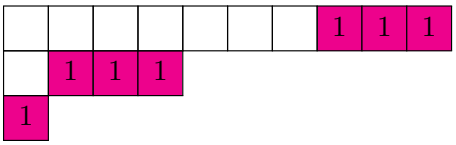
如果 $\lambda'_3 = 3$，那么我们可以将 γ 替换为下文所示的 $(m-2,\ 2)$。



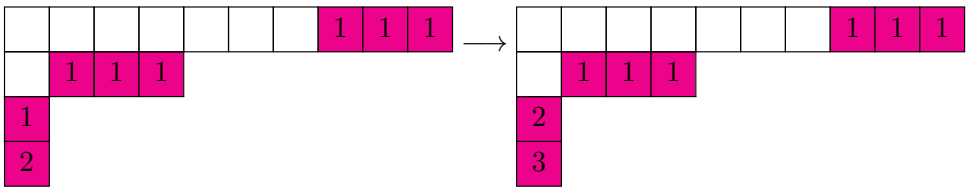
现在假设 在 $\gamma = \beta = (m-2,\ 1,\ 1)$ 中。我们可以将 γ 替换为 $(m-3,\ 1,\ 1,\ 1)$，如下所示 .



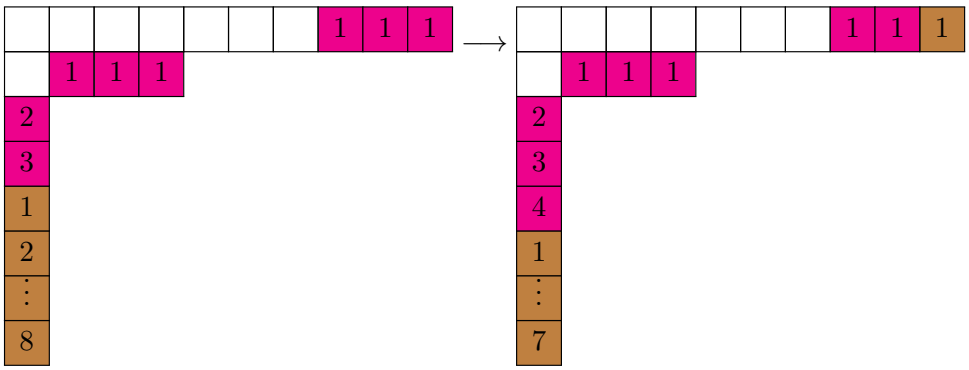
2. 假设 包含于 λ/α 中的支配分拆 β 等于 $\alpha = (m-1,\ 1)$。



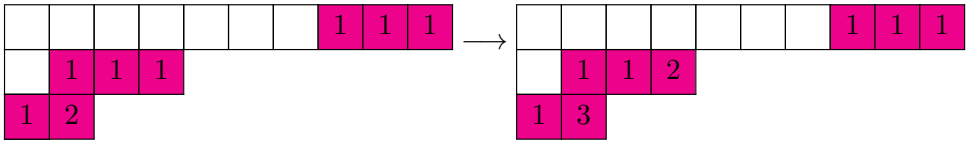
如果 λ/α 的第一列包含条目 2，那么我们可以将 β 替换为 $(m-2,\ 1,\ 1)$，如下所示。如果 β 中的 2 出现在 λ 的第一列中，那么我们可以将 β 替换为 $(m-2,\ 1,\ 1)$，如下所示。



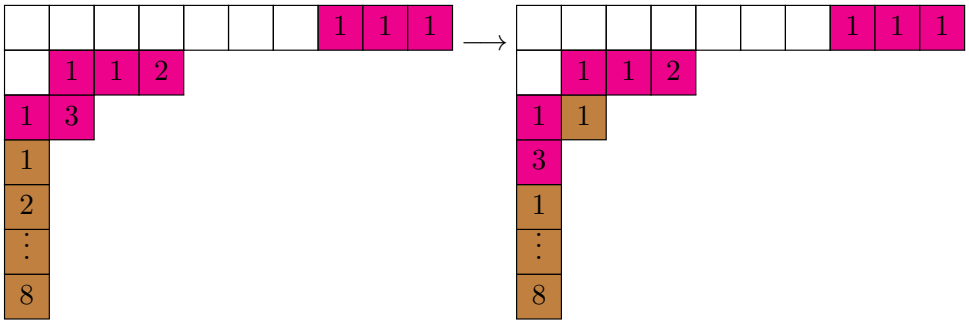
注意到 $\lambda_3 = 1$。因此，包含于 $\lambda/\alpha/\beta$ 中的支配分拆 γ 就等于 (1^m)。那么，我们可以将 β 替换为 $(m-3,\ 1,\ 1,\ 1)$，并将 γ 替换为 $(2,\ 1^{m-2})$，如下所示。



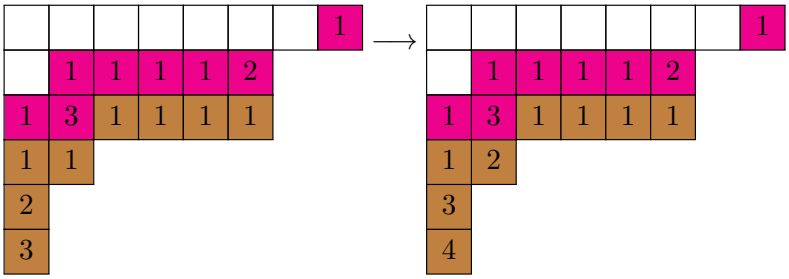
如果第二列 如果 λ/α 包含条目 2，那么我们可以将 β 替换为如下所示的（$m-2,\ 1,\ 1$） n 如下。



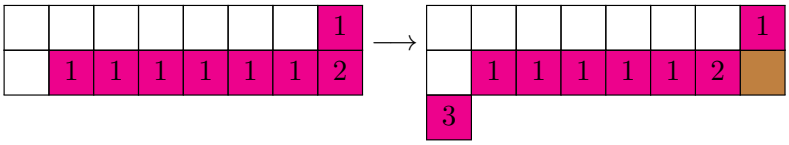
令 γ 为包含于 $\lambda/\alpha/\beta$中的 m 的支配分拆。由于 $\lambda/\alpha/\beta$ 至多有 $m-2$列，因此 γ 不等于（m）和 α。假设 $\gamma=(1^m)$。那么我们可以改变 β 的外观，并将 γ 替换为如下所示的（2，1^{m-2}）。



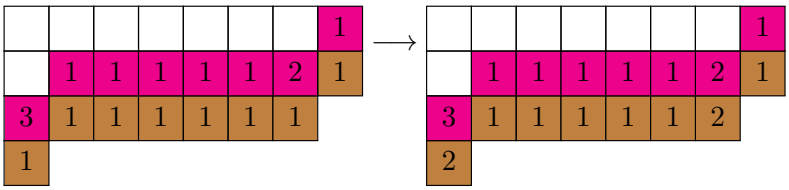
假设 $\gamma=\beta=(m-2,\ 1,\ 1)$。那么，我们可以用 $(m-3,\ 1,\ 1,\ 1)$ 替换 γ，如下所示。



最后，假设 λ/α 的第 m 列包含条目 2。那么，我们可以用 $(m-2,\ 1,\ 1)$ 替换 β，如下所示。

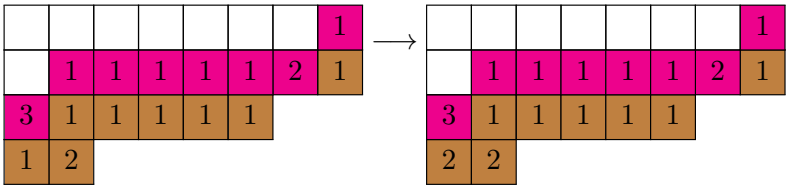


设 γ 为 $\lambda/\alpha/\beta$ 中包含的支配分拆。若 $\gamma\notin\{(m),\ (1^m)\ \alpha,\ \beta\}$，则问题得解。否则，假设 $\gamma=(m)$。我们可以用 $(m-2,\ 2)$ 替换 γ，如下所示。

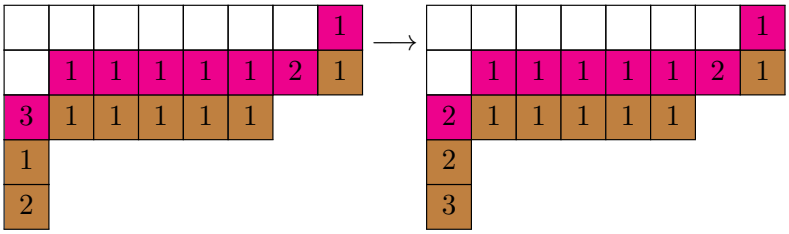


假设 $\gamma=\alpha=(m-1,\ 1)$。若 $\lambda'_{m-1}=3$，则 $\lambda=(m,\ m,\ m)$。在这种情况下，我们可以选择许多分拆三元组。其中一种选择是用 $(m-2,\ 2)$ 替换 α，用 $(m-3,\ 3)$ 替换 β，并用 $(m-2,\ 1,\ 1)$ 替换γ。

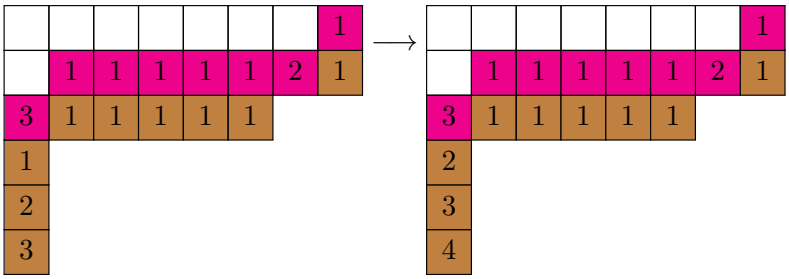
如果 $\lambda'_2=4$，我们可以将 γ 替换为 $(m-2,2)$，如下所示。



如果 $\lambda'_1 = 5$，那么我们可以将 β 替换为 $(m-2,2)$，并将 γ 替换为 $(m-2,1,1)$，如下所示。



假设 $\gamma = \beta = (m-2,\ 1,\ 1)$。那么我们可以将 γ替换为 $(m-3,\ 1,\ 1,\ 1)$，如下所示。



因此，包含在 λ/α 中的支配分拆 β 不同于 $\alpha = (m-1,1)$ 和 (m)。等价地， λ/α至多有 $m-2$列。设 μ为包含在 λ/α中的 $2m$的支配分拆。根据刘维尔规则，我们有 $s_{\lambda/\alpha} \geq s_\mu$。利用引理 4.1，对于某些分拆 β和 γ，我们有 $s_\mu \geq s_\beta s_\gamma$，其中 $\beta \neq \gamma$，除非 μ是以下之一：$(2m)$、$(2m-1,1)$、$(2m-2,1,1)$、$(2m-2,2)$、(m,m)、(2^m)、$(3,1^{2m-3})$、$(22,1^{2m-4})$、$(2,1^{2m-2})$、(1^{2m})。注意，这样的 β和 γ不等于 α，因为 $\max(\beta_1,\gamma_1) \leq \mu_1 \leq m-2$。现在来看 μ为上述例外之一的情形。由于 $\mu_1 \leq m-2$，因此 μ不等于以下任意一个：$(2m)$、$(2m-1,1)$、$(2m-2,1,1)$、$(2m-2,2)$、(m,m)。我们已假设 $\lambda_1 \geq \lambda'_1$，因此 $\lambda'_1 \leq m + m/2$。特别地，$\lambda'_1 \leq 2m-5$。这排除了除 $\mu = (2^m)$以外的所有情形。如果$\mu = (2^m)$，则这意味着 λ/α 恰有两列，且每列各有 m 个单元格。同时，我们知道 λ/α 在第 m列有一个格子。这就产生了矛盾。

因此，在所有情况下，我们都构造出了两两不同的分拆 α、 β、 $\gamma \neq (m)$、(1^m)，使得$s_\lambda \geq s_\alpha s_\beta s_\gamma$。证明至此完成。 □

事实上，我们可以证明上述引理的一个更强版本，这将有助于给出重数的下界。

引理 4.4。 设 $m \geq 11$ 是一个整数。若 λ 是 $3m$ 的一个分拆，且满足 $\lambda_1, \lambda'_1 \leq 3m-6$，则存在三个互不相同的分拆 α,β,γ，使得 α,β,γ各不等于(m)、(1^m)，并且 α,β,γ中至少有两个不等于$(m-1,1)$和$(2,1^{m-2})$，且满足 $s_\alpha s_\beta s_\gamma \geq s_\lambda$。

证明。 设 λ是 $3m$的一个分拆，且 $\lambda_1, \lambda'_1 \leq 3m-6$。根据引理 4.3，存在三个两两不同的分拆 α,β,γ，它们均不等于 (m),(1^m) 和 $s_\alpha s_\beta s_\gamma \geq s_\lambda$。如果其中两个不同于 $(m-1,1)$ 和 $(2,1^{m-2})$，则结论成立。否则，不失一般性，可假设 γ不同于 $(m-1,1)$ 和 $(2,1^{m-2})$，且 $\alpha = (m-1,1),\beta = (2,1^{m-2})$。于是，我们可以用以下某一对分拆替换 α 和 β：

- $\alpha = (m-2,1,1)$, $\beta = (3,1^{m-3})$ and $\gamma \neq \alpha,\beta$,
- $\alpha = (m-3,1,1,1)$, $\beta = (4,1^{m-4})$ and $\gamma \neq \alpha,\beta$.

证明至此完成。 □

引理 4.5. 设 $m \geq 11$ 为一个整数。那么我们有

$$\sum_{\substack{\alpha \vdash 3m \\ \alpha_1, \alpha_1' \leq 3m-6}} s_\alpha \quad \sum_{\substack{\beta \vdash m \\ \beta \neq (m-1,1),(2,1^{m-2})}} s_\beta \quad \sum_{\substack{\gamma \vdash m \\ \gamma \neq (m-1,1),(2,1^{m-2})}} s_\gamma \geq s_\lambda$$

对于所有满足 λ_1、$\lambda_1' \leq 5m-6$ 的 $5m$ 的分拆 λ。

证明. 利用引理 4.2，我们有

$$\sum_{\substack{\alpha \vdash 3m \\ \alpha_1, \alpha_1' \leq 3m-6}} s_\alpha \quad \sum_{\substack{\beta \vdash m \\ \beta \neq (m-1,1),(2,1^{m-2})}} s_\beta \quad \sum_{\substack{\gamma \vdash m \\ \gamma \neq (m-1,1),(2,1^{m-2})}} s_\gamma \geq \sum_{\substack{\alpha \vdash 3m \\ \alpha_1, \alpha_1' \leq 3m-6}} s_\alpha \sum_{\nu \vdash 2m} s_\nu.$$

设 λ 是一个满足 $\lambda_1, \lambda_1' \leq 5m-6$ 的 $5m$ 的分拆。不失一般性，我们可以假设 $\lambda_1 \geq \lambda_1'$。设 $\tilde{\alpha}$ 是包含于 $\lambda = (\lambda_2, \lambda_3, \ldots)$ 中的 6 的一个支配分拆。设 α 是包含于 λ 中的 $3m$ 的支配分拆，使得分拆 $(\alpha_2, \alpha_3, \ldots)$ 包含 $\tilde{\alpha}$。于是，由构造可知 $\alpha_1, \alpha_1' \leq 3m-6$。现在设 ν 是包含于 λ/α 中的 $2m$ 的支配分拆。那么 Littlewood–Richardson 规则蕴含 $s_\alpha s_\nu \leq s_\lambda$，从而得到所需结果。 □

下面的引理是反复应用引理 4.5 得出的。

引理 4.6. 设 $m \geq 11$ 为整数，t 为偶正整数。

$$\sum_{\substack{\alpha \vdash 3m \\ \alpha_1, \alpha_1' \leq 3m-6}} s_\alpha \left(\sum_{\substack{\beta \vdash m \\ \beta \neq (m-1,1),(2,1^{m-2})}} s_\beta \right)^t \geq s_\lambda$$

对于所有满足 λ_1、$\lambda_1' \leq 3m+tm-6$ 的 $3m+tm$ 的分拆 λ。

5 主定理的证明

在本节中，我们用 $-\mathbb{1}_{D_n}$ 表示通过令 w_n 取 1、s 取 -1 而得到的 D_n 的一维特征。我们回顾下面这个引理，它是 [24, 定理 1.9] 的一个陈述。

引理 5.1. 设 $n > 81$ 为正整数，λ 为 n 的一个分拆，且满足 $\lambda_1 < n-7$ 和 $\lambda_1' < n-7$。则 $f^\lambda \geq n^5$。

我们的第一个引理是：当 n 为素数时，主定理成立。

引理 5.2. 设 n 为大于10的素数，则定理 *1.1* 对 n成立。此外，我们有

$$\langle \mathrm{Res}_{D_n}^{S_n} \chi_\lambda, \psi \rangle \geq n^2,$$

for ψ D_n 的所有不可约特征，以及满足条件 λ_1、$\lambda_1' < n-7$ 的 n 的所有分拆 λ .

证明。 我们将使用 SageMath 验证素数 n 不大于 81 时的引理。因此，我们可以假设 $n > 81$。我们还可以通过直接计算验证满足条件 $\lambda_1 \geq n-7$ 或 $\lambda_1' \geq n-7$ 的分拆 λ 的情形。因此，我们考虑满足条件 $\lambda_1,\ \lambda_1' < n-7$ 的 n 的分拆 λ。我们从 D_n 的一维特征标开始。进行如下计算。

$$\langle \mathrm{Res}^{S_n}_{D_n} \chi_\lambda, \pm\mathbb{1}_{D_n}\rangle = \chi_\lambda(1) + (n-1)\chi_\lambda(w_n) \pm n\chi_\lambda(w_{(2^{(n-1)/2},1)})$$

假设 λ 不是钩形分拆。那么 $\chi_\lambda(w_n) = 0$。因此，

$$\langle \mathrm{Res}^{S_n}_{D_n} \chi_\lambda, \pm\mathbb{1}_{D_n}\rangle = \frac{\chi_\lambda(1) \pm n\chi_\lambda(w_{(2^{(n-1)/2},1)})}{2n} \tag{5.1}$$

我们来给出 $|\chi_\lambda(w_{(2^{(n-1)/2},1)})|$ 的一个上界。首先，我们有

$$\chi_\lambda(w_{(2^{(n-1)/2},1)}) = \sum_{\eta\in\lambda^-} \chi_\eta(w_{(2^{(n-1)/2})}),$$

其中 λ^- 是从 λ 中移除一个格子后得到的分拆集合。如果 $|\lambda^-| = k$，那么 λ 的杨图中有 k 个可移除单元。因此，λ 至少有 k 个互异部件。所以，$k(k+1)/2 \leq n$。因此，$k \leq \sqrt{2n-1}$。于是，我们有 $|\lambda^-| \leq \sqrt{2n-1}$。

如果 η 的 2-核非空，那么 $\chi_\eta(w_{(2^{(n-1)/2})}) = 0$。否则，利用递归的 Murnaghan–Nakayama 公式（参见 [12, 2.7.32], , 另见 [6, 定理 1.1]），我们有

$$\begin{aligned}
|\chi_\eta(w_{(2^m)})| &= \tfrac{m!2^m}{\sqrt{(2m)!}}\sqrt{f^\lambda} \\
&= \frac{\sqrt{(2m)!}}{1\ 3\ 5\ \ldots\ (2m-1)}\sqrt{f^\lambda} \\
&= \frac{2\ 4\ 6\ \ldots\ (2m)}{1\ 3\ 5\ \ldots\ (2m-1)}\sqrt{f^\lambda} \\
&= \frac{2\ 4\ 6\ \ldots\ (2m-2)(2m)}{1\ 3\ 5\ \ldots\ (2m-3)\ (2m-1)\ 2m}\sqrt{2m}\sqrt{f^\lambda} \\
&\leq \sqrt{2m}\sqrt{f^\lambda},
\end{aligned}$$

其中 $m = (n-1)/2$。因此，我们有

$$\begin{aligned}
|\chi_\lambda(w_{(2^{(n-1)/2},1)})| &= \sum_{\eta\in\lambda^-} |\chi_\eta(w_{(2^{(n-1)/2})})| \\
&\leq \sum_{\eta\in\lambda^-} \sqrt{2m}\sqrt{f^\eta} \\
&\leq \sqrt{2m}\sum_{\eta\in\lambda^-} \sqrt{f^\lambda} \\
&\leq \sqrt{2m}\sqrt{2n-1}\sqrt{f^\lambda} \\
&= \sqrt{(n-1)(2n-1)}\sqrt{f^\lambda}
\end{aligned}$$

现在我们来计算方程（5.1）右侧的分子。

$$\begin{aligned}
|\chi_\lambda(1) \pm n\chi_\lambda(w_{(2^{(n-1)/2},1)})| &\geq \chi_\lambda(1) - n|\chi_\lambda(w_{(2^{(n-1)/2},1)})| \\
&\geq f^\lambda - n\sqrt{(n-1)(2n-1)}\sqrt{f^\lambda} \\
&= \sqrt{f^\lambda}(\sqrt{f^\lambda} - n\sqrt{(n-1)(2n-1)})
\end{aligned}$$

最后，

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{Res}^{S_n}_{D_n}\chi_\lambda, \pm\mathbb{1}_{D_n}\rangle &= \frac{\chi_\lambda(1)\pm n\chi_\lambda(w_{(2^{(n-1)/2},1)})}{2n}\\ &\geq \frac{\sqrt{f^\lambda}(\sqrt{f^\lambda}-n\sqrt{(n-1)(2n-1)})}{2n}\end{aligned}$$

因此，由引理 5.1 可得 $f^\lambda > n^5$。于是，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{f^\lambda}(\sqrt{f^\lambda}-n\sqrt{(n-1)(2n-1)})}{2n} &> \frac{\sqrt{n^5}(\sqrt{n^5}-n\sqrt{(n-1)(2n-1)})}{2n}\\ &> n^3\end{aligned}$$

因此，我们有 $\langle$限制$^{S_n}_{D_n}\chi_\lambda,\ \pm\mathbb{1}_{D_n}\rangle > n^3 > \frac{n}{12^{\diamond}}$

现在考虑 λ 是钩形分拆的情形。首先，我们有

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{Res}^{S_n}_{D_n}\chi_{(n-k,1^k)}, \pm\mathbb{1}_{D_n}\rangle &= (\chi(1)+(n-1)\chi(w_n)\pm n\chi(w_{(2^{(n-1)/2},1)}))/2n\\ &\geq \left(f^\lambda+(n-1)(-1)^k - n\frac{m!2^m\sqrt{f^\lambda}(\sqrt{k}+\sqrt{n-k-1})}{\sqrt{(2m)!n}}\right)/2n\\ &\geq \left(f^\lambda-(n-1) - n\frac{m!2^m\sqrt{f^\lambda}(\sqrt{k}+\sqrt{n-k-1})}{\sqrt{(2m)!n}}\right)/2n\\ &\geq \sqrt{f^\lambda}(\sqrt{f^\lambda} - n\frac{m!2^m(\sqrt{k}+\sqrt{n-k-1})}{\sqrt{(2m)!n}})/2n\\ &\geq \sqrt{f^\lambda}(\sqrt{f^\lambda}-n+1-2n\sqrt{n})/2n\\ &\geq n^{5/2}(n^{5/2}-n+1-2n\sqrt{n})/2n\\ &\geq n^3.\end{aligned}$$

现在考虑次数为 2 的 δ 关于 D_n 的不可约特征标。对于非钩形分拆 λ，我们有

$$\langle \mathrm{Res}^{S_n}_{D_n}\chi_\lambda, \delta\rangle = \frac{f^\lambda}{n} > n^4.$$

现在对于钩形分拆 $\lambda = (n-k,\ 1^k)$，我们有

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{Res}^{S_n}_{D_n}\chi_\lambda, \delta\rangle &\geq \frac{2f^\lambda-2n}{2n}\\ &= \frac{f^\lambda-n}{n} \geq n^4.\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

由上述引理可得交错群 A_n的一个简单推论。

推论 5.3。 设 n 是一个大于10的素数。则定理 ***1.7*** 对 n成立。此外，对于 $n > 20$，我们有

$$\langle \mathrm{Res}^{S_n}_{A_n}\chi_\lambda, \psi\rangle \geq n^2,$$

for ψ 交错群 A_n 的所有不可约特征标，以及满足 λ_1、$\lambda'_1 < n-7$的 n 的所有分拆 λ .

定理 1.1 的证明。

设 n 为正整数， λ 为 n的一个分拆。证明对 n进行归纳。首先，我们将使用 SageMath 验证关于 $n \leq 81$的这些定理。因此，假设 $n > 81$。我们不妨先假设 λ_1， $\lambda_1' < n-7$。

情形 1： n 是素数。

此情形下，结论由引理 5.2 得出。

情形 2： n 是奇合数。

设 $n = pm$ ，其中 p 是 n的最小素因子。注意到 $p \leq \sqrt{n}$，因此 $m \geq \sqrt[-]{n}$。于是，$\bar{m} \geq 11$。设 λ_1，$\lambda_1' < n-7$。利用引理 4.6，我们有 m 的分拆 μ^1， μ^2， ...， μ^p，其中没有一个等于 $(m-1,\ 1)$ 或 $(2,\ 1^{m-2})$，且其中至少有三个彼此不同，并且没有一个等于 (m) 或 (1^m)，使得 $s_{\mu^1} s_{\mu^2} \cdots s_{\mu^p} \leq s_\lambda$。

根据命题 3.1，我们有

$$\mathrm{Res}_{D_n}^{S_n} \chi_\lambda \geq \mathrm{Ind}_{\langle w_n^p \rangle}^{D_n} \mathrm{Res}_{\langle w_n^p \rangle}^{S_m^{\times p}} \chi_{\mu^1} \times \chi_{\mu^2} \times \cdots \times \chi_{\mu^p}$$

设 μ^r， μ^s， μ^t 是三个 彼此不同的分拆，取自 μ^1， μ^2， ....., μ^p。那么通过归纳，我们有 e

$$\mathrm{Res}_{C_m}^{S_m} \chi_{\mu^i} \geq \tfrac{m}{6}\zeta \tag{5.2}$$

对于 $i = r$， s， t，以及 C_m 的所有线性特征 ζ。

我们来考虑 D_n 的两个线性特征。为此，首先对于除 r， s， t 之外的所有 i ，选取 C_m 的平凡特征 $\zeta_i\ (= \mathbb{1}_{C_m})$。然后，先分别为 $i = r$ 和 $i = s$ 选取 C_m 的任意线性特征 ζ_r 和 ζ_s 。接着，我们将为 $i = t$ 选取 ζ_t ，使得 $\mathrm{Res}_{\langle w_n^p \rangle}^{C_m \times C_m \times C_m} \zeta_r \times \zeta_s \times \zeta_t = \mathbb{1}_{\langle w_n^p \rangle}$。根据公式 (5.2)，我们有

$$\mathrm{Res}_{\langle w_{3p}^3 \rangle}^{S_m^{\times 3}} \chi_{\mu^r} \times \chi_{\mu^s} \times \chi_{\mu^t} \geq (\tfrac{m}{6})^2 \zeta_r \times \zeta_s \times \zeta_t \geq \tfrac{m^2}{36} \mathbb{1}_{\langle w_{3p}^3 \rangle}$$

由于有 m C_m的线性特征，我们可以用 m^2 种方式选择 ζ_r 和 ζ_s 。因此，我们有

$$\mathrm{Res}_{\langle w_{3p}^3 \rangle}^{S_m^{\times 3}} \chi_{\mu^r} \times \chi_{\mu^s} \times \chi_{\mu^t} \geq m^2 \tfrac{m^2}{36} \mathbb{1}_{\langle w_{3p}^3 \rangle}.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{D_n}^{S_n} \chi_\lambda &\geq \mathrm{Ind}_{\langle w_n^p \rangle}^{D_n} \mathrm{Res}_{\langle w_n^p \rangle}^{S_m^{\times p}} \chi_{\mu^1} \times \chi_{\mu^2} \times \cdots \times \chi_{\mu^p} \\
&\geq \tfrac{m^4}{36} \mathrm{Ind}_{\langle w_n^p \rangle}^{D_n} \mathbb{1}_{\langle w_n^p \rangle} \\
&\geq \tfrac{m^4}{36} (\pm \mathbb{1}_{D_n}) \\
&\geq n(\pm \mathbb{1}_{D_n}).
\end{aligned}$$

考虑 D_n的非线性特征 ψ 。设 δ 是 C_m 的一个线性特征，使得 $\mathrm{Res}_{C_m}^{D_n} \psi \geq \delta$。与之前一样，对于除 r、 s、 t之外的所有 i ，我们可以选择 $\zeta_i = \mathbb{1}_{C_m}$。然后，对于 $i = r$ 和 $i = s$ ，我们可以分别从 C_m 中任意选择线性特征 ζ_r 和 ζ_s。接着，我们选择 ζ_t 作为 $i = t$，使得 $\mathrm{Res}_{\langle w_n^p \rangle}^{C_m \times C_m \times C_m} \zeta_r \times \zeta_s \times \zeta_t(w_{3p}^3) = \delta(w_{3p}^3)$。使用与之前完全相同的计算，我们有

$$\mathrm{Res}_{D_n}^{S_n} \chi_\lambda \geq n\psi.$$

若 λ_1 或 λ_1' 大于或等于 $n-7$，那么我们可以通过特征标的直接计算验证该定理。

情形 3： n **为偶数。**

记 $n = 2m$。注意到 $m \geq 41$。假设 λ_1，$\lambda_1' < n-7$ 且 λ 不是 $(m,\ m)$，(2^m) 之一。那么利用引理 4.1，我们得到 m 的两个不同分拆 α 和 β，它们不同于 (m)，$(m-1,\ 1)$，$(2,\ 1^{m-2})$ 和 (1^m)，并且满足 $s_\alpha s_\beta \geq s_\lambda$。现在，命题 3.2 给出

$$\mathrm{Res}^{S_n}_{D_n}\chi_\lambda \geq \mathrm{Ind}^{D_n}_{\langle w_n^2,s\rangle}\mathrm{Res}^{S_m^{\times 2}}_{\langle w_n^2,s\rangle}\chi_\alpha\times\chi_\beta,$$

其中 s 是 D_n的一个对合。

从 D_n的一个不可约特征标 ζ 开始。设 $\langle w_n^2,s\rangle$的一个不可约特征标 δ 满足 $\mathrm{Res}^{D_n}_{\langle w_n^2,s\rangle}\zeta \geq \delta$。注意，对于 D_m的任意二维不可约特征标 ψ，都存在 D_m 的一个二维不可约特征标 $\tilde{\psi}$，使得 $\mathrm{Res}^{D_m\times D_m}_{\langle w_n^2,s\rangle}\ \psi\times\tilde{\psi}\geq\delta$。

由归纳假设，对于 D_m的所有二维~不可约特征标 ψ 和 ψ，我们有 $\mathrm{Res}^{S_m}_{D_m}\chi_\alpha \geq \frac{m}{6}\psi$ 和 $\mathrm{Res}^{S_m}_{D_m}\chi_\beta \geq \frac{m}{6}\tilde{\psi}$，于是有

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}^{S_m^{\times 2}}_{\langle w_n^2,s\rangle}\chi_\alpha\times\chi_\beta &= \mathrm{Res}^{D_m\times D_m}_{\langle w_n^2,s\rangle}\mathrm{Res}^{S_m}_{D_m\times D_m}\chi_\alpha\times\chi_\beta\\ &\geq (\tfrac{m}{6})^2\,\mathrm{Res}^{D_m\times D_m}_{\langle w_n^2,s\rangle}\psi\times\tilde{\psi}\\ &\geq \tfrac{m^2}{36}\delta.\end{aligned}$$

由于 D_m 至少有$\frac{m-2}{2}$ 个次数为 2 的不可约特征标，我们有 e

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}^{S_m^{\times 2}}_{\langle w_n^2,s\rangle}\chi_\alpha\times\chi_\beta &\geq \tfrac{m-2}{2}(\tfrac{m}{6})^2\delta\\ &\geq n\delta.\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}^{S_n}_{D_n}\chi_\lambda &\geq \mathrm{Ind}^{D_n}_{\langle w_n^2,s\rangle}\mathrm{Res}^{S_m^{\times 2}}_{\langle w_n^2,s\rangle}\chi_\alpha\times\chi_\beta\\ &\geq n\,\mathrm{Ind}^{D_n}_{\langle w_n^2,s\rangle}\delta\\ &\geq n\zeta.\end{aligned}$$

现在假设 $\lambda = (m,m)$。如果 m 是素数，则由命题 3.3 可得结论。否则，$n = 4k$，其中 $k = \frac{m}{2}$是一个大于 20 的整数。令 $u = \lceil \frac{k}{2} \rceil$。利用推论 3.4 以及$\mu^1 = (u+3, m-u-3)$ $\mu^2 = (u+2,\ m-u-2)$ $\mu^3 = (u+1, m-u-1)$ $\mu^4 = (3u+6-m, 2m-3u-6)$，并使用归纳法，我们有

$$\langle \mathrm{Res}^{S_n}_{D_n}\chi_\lambda,\psi\rangle \geq n$$

对所有 D_n的不可约特征标 ψ 均成立。

对于 $\lambda = (2^m)$，我们可以将 χ_λ 与符号特征标作张量积，并利用前一种情形得到结论。如果 λ_1 或 λ_1' 大于或等于 $n-7$，则可通过特征标的直接计算验证该定理。定理 1.1 的证明至此完成。

定理 1.1 的证明给出了以下推论。

推论 5.4. 设 n 为正整数，λ 为 n 的一个分拆，且满足 λ_1、$\lambda_1' < n-7$。则有

$$\langle \mathrm{Res}^{S_n}_{D_n}\chi_\lambda,\psi\rangle \geq n,$$

对于 D_n 的所有不可约特征 ψ。

现在我们证明一个引理，这将在定理 1.7 的证明中发挥作用。

引理 5.5. 设 $n = mp$ 和 $m \geq 11$ 、 p 均为奇正整数。设 λ 为 n 的自共轭钩分拆，即 $\lambda = (k+1, 1^k)$，其中 $n = 2k+1$。令 $\mu^1 = (\frac{m+1}{2}, 1^{\frac{m-1}{2}})$ $\mu^2 = \mu^4 = \cdots = \mu^{p-1} = (m-2, 2)$ 且 $\mu^3 = \mu^5 = \cdots = \mu^p = (3、 1^{m-3})$。那么有

$$s_{\mu^1} s_{\mu^2} \cdots s_{\mu^p} \leq s_\lambda.$$

定理 1.7 的证明。

我们将使用 SageMath 直接验证定理对 $n \leq 81$ 的情形。因此，设 $n > 81$。若 n 是素数，则由推论 5.3 可得该定理。现在设 n 为合数。设 $n = pm$ ，其中 p 是 n 的最小素因子。因此， $m \geq 11$。设 λ 为 n 的一个非自共轭分拆。于是由定理 1.1 可得

$$\langle \chi_\lambda, \mathrm{Ind}_{D_n}^{A_n} \psi \rangle$$

对所有 D_n 的不可约特征标 ψ 均成立。因此，我们可以假设 λ 是 n 的自共轭分拆。若 $\lambda \neq (k+1, 1^k)$，其中 $n = 2k+1$，则 λ_1， $\lambda_1' < n-7$。利用定理 1.1 的证明，我们有

$$\langle \chi_\lambda, \mathrm{Ind}_{D_n}^{S_n} \psi \rangle \geq n$$

对所有 D_n 的不可约特征标 ψ 均成立。由于对所有 $g \in D_n$， $\chi_\lambda^{\pm}(g) = \frac{1}{2}\chi_\lambda(g)$，我们有

$$\langle \chi_\lambda^{\pm}, \mathrm{Ind}_{D_n}^{A_n} \psi \rangle \geq \frac{n}{2}.$$

现在假设 $\lambda = (k+1, 1^k)$，其中 $n = 2k+1$。利用引理 5.5，我们有分拆 $\mu^1 = (\frac{m+1}{2}, 1^{\frac{m-1}{2}})$ $\mu^2 = \mu^4 = \cdots = \mu^{p-1} = (m-2, 2)$ 和 $\mu^3 = \mu^5 = \cdots = \mu^p = (3, 1^{m-3})$，它们属于 m，且满足 $s_{\mu^1} s_{\mu^2} \cdots s_{\mu^p} \leq s_\lambda$。现在利用命题 3.1 和定理 1.1，我们有

$$\mathrm{Res}_{D_n}^{S_n} \chi_\lambda \geq \mathrm{Ind}_{\langle w_n^p \rangle}^{D_n} \mathrm{Res}_{\langle w_n^p \rangle}^{S_m^{\times p}} \chi_{\mu^1} \times \chi_{\mu^2} \times \cdots \times \chi_{\mu^p}.$$

由定理 1.1 可知，对于所有的线性特征 ζ of C_m for $i = 1, 2, \ldots, p$, 均有 $\mathrm{Res}_{C_m}^{S_m} \chi_{\mu^i} \geq \frac{m}{6}\zeta$。现在，利用与定理 1.1 证明中相同的计算，我们得到

$$\mathrm{Res}_{D_n}^{S_n} \chi_\lambda \geq (\tfrac{m}{6})^p m^{\frac{p+1}{2}} \psi,$$

对于所有不可约特征 ψ of D_n, 均有。由于 $m \geq 11$ and $p \geq 3$, 我们得到

$$(\tfrac{m}{6})^3 m^2 \geq m^3$$
$$(\tfrac{m}{6})^2 m \geq 2m$$

因此，我们得到

$$\mathrm{Res}_{D_n}^{S_n} \chi_\lambda \geq n^2 \psi.$$

所以，我们得到

$$\begin{aligned} \langle \chi_\lambda^{\pm}, \mathrm{Ind}_{D_n}^{A_n} \psi \rangle &\geq \tfrac{1}{2}\langle \chi_\lambda, \mathrm{Ind}_{D_n}^{S_n} \psi \rangle - \tfrac{1}{4n}\sqrt{n}\phi(n) \\ &\geq \tfrac{n^2}{2} - \tfrac{\sqrt{n}}{4} \\ &> n. \end{aligned}$$

定理 1.7 的证明至此完成。

定理 1.7 的证明给出了以下推论。

推论 5.6. 设 n 为正整数， λ 为 n 的一个分拆，且满足 $\lambda_1, \lambda'_1 < n-7$。那么我们有

$$\langle \chi_\lambda, \mathrm{Ind}_{D_n}^{A_n} \psi \rangle \geq \tfrac{n}{2},$$

对于 D_n的所有不可约特征 ψ 。

致谢

我谨向 Arvind Ayyer、V. Sathish Kumar、Amritanshu Prasad 和 Sheila Sundaram 致谢，感谢他们富有成效的讨论、支持与鼓励。我感谢 Alexey Staroletov 对本稿早期版本提出的意见。我感谢 Maruthu Pandiyan B 提供有用的参考文献副本。作者获得 ANRF国家博士后奖学金（ PDF/2025/003158）资助。

参考文献

[1] Amrutha P、A. Prasad 和 Velmurugan S. 交错群的循环特征标，2024 年。https: // arxiv.org/abs/2403.05109. 1, 1, 1[2] Amrutha P、A. Prasad 和 Velmurugan S. 对称群表示中逐元素不变向量的存在性。代数组合，7(4):915–929，2024 年。1[3] Amrutha P、A. Prasad 和 Velmurugan S. 对称群表示中的局部不变向量。*S´em. Lothar. Combin.*，91B.66，2024 年。第 36 届国际形式幂级数与代数组合学会议论文集。1[4] M. Cabanes 和 B. Sp¨ath. 特征标次数的 McKay猜想。*Ann. of Math. (2)*。1[5] C. W. Curtis 和 I. Reiner。《表示论方法》第一卷。John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1981 年。1[6] S. Fomin 和 N. Lulov. 关于边钩表的数量。*Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg.Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*，223:219–226，340，1995 年。5[7] E. Giannelli 和 S. Law. 对称群的 Sylow分支系数。*J. Lond. Math. Soc.(2)*，103(2):697–728，2021 年。1[8] E. Giannelli 和 G. Volpato. Sylow分支系数与钩形分拆。*Vietnam J. Math.*，52(2):361–377，2024 年。1[9] P. Hall 和 G. Higman. 关于可解群的 p-长 p以及 Burnside问题的约化定理。*Proc. London Math. Soc. (3)*，6:1–42，1956 年。1[10] G. Heide、J. Saxl、P. H. Tiep 和 A. E. Zalesski. 李型单群的共轭作用、诱导表示与 Steinberg平方。*Proc. Lond. Math. Soc. (3)*，106(4):908–930，2013 年。1[11] G. Heide 和 A. E. Zalesski. 关于伴随表示的 Passman问题。载于群、环与代数，第 420 卷当代数学，第 163–176 页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2006 年。1

[12] G. James 和 A. Kerber.《对称群表示论》，《数学及其应用百科全书》第 16 卷。Addison-Wesley Publishing，1981 年。1, 2, 2, 5[13] M. Johnson. 标准杨表与李表示的 Klyachko 定理。组合理论杂志 A 辑，114(1):151–158，2007 年。1, 1[14] A. J¨ollenbeck 和 M. Schocker. 对称群的循环特征标。代数组合杂志，12(2):155–161，2000 年。1[15] A. S. Kleshchev 和 A. E. Zalesski. 交错群的 p阶 p-模射影表示中元素的最小多项式。美国数学会会刊，132(6):1605–1612，2004 年。1[16] A. A. Klyachko. 张量代数中的李元。Sibirsk. Mat. ˇZ.，15:1296–1304，1430，1974 年。1, 1, 1.2, 1.3, 1, 1[17] L. G. Kov´acs 和 R. St¨ohr. 关于李表示的 Klyachko 定理的组合证明。代数组合杂志，23(3):225–230，2006 年。1, 1.5, 1[18] W. Kra´skiewicz 和 J. Weyman. 余不变量代数与 Coxeter 元的作用。拜罗伊特数学论文集，(63):265–284，2001 年。1, 1.4[19] I. G. Macdonald.《对称函数与 Hall 多项式》。《牛津物理科学经典文本》。牛津大学出版社，第二版，2015 年。1, 2[20] M. Schocker. 高阶李模的嵌入。纯粹与应用代数杂志，185(1-3):279–288，2003 年。1[21] A. Staroletov. 对称群与交错群不可约表示中置换的特征值。伦敦数学会通报，2025 年。1[22] S. Sundaram. S_n 的共轭作用及由中心化子诱导的模。代数组合杂志，48(2):179–225，2018 年。1[23] S. Sundaram. 包含所有不可约表示的 S_n 共轭类。以色列数学杂志，225(1):321–342，2018 年。1[24] J. P. Swanson. 关于具有给定模主指标的杨表的存在性。代数组合，1(1):3–21，2018 年。1, 1, 1, 1, 1, 5[25] Sage 开发团队。SageMath，Sage 数学软件系统（版本 10.2），2023 年。1[26] Velmurugan S. 关于对称群与交错群中元素的最小多项式，2024 年。https://arxiv.org/abs/2412.20894. 1, 1, 1, 1[27] N. Yang 和 A. M. Staroletov. 对称群与交错群普通表示中循环置换的幂的最小多项式。代数及其应用杂志，20(11):论文编号 2150209，18，2021 年。1, 1, 1[28] A. E. Zalesski. 有限线性群中元素的不同特征值数量。J. London Math. Soc. (2)，74(2):361–378，2006 年。1[29] A. E. Zalesski. 拟单群表示中素数阶元素的最小多项式。代数杂志，320(6):2496–2525，2008 年。1

[30] A. E. Zalesski. 单代数群和有限 Chevalley 群表示中群元素的特征值。*Acta Appl. Math.*, 108(1):175–195，2009。1[31] A. E. Zalesski. 线性群和有限群表示中群元素的无不动点作用。*S˜ao Paulo J. Math. Sci.*，19(2):41，2025。1[32] A. E. Zalessskiˇ i. 具有循环 Sylow p-子群的拟单群表示中 p-元素的最小多项式与特征值。*J. London Math. Soc. (2)*，59(3):845–866，1999。1[33] A. E. Zalesskiˇı. 特征为 p 的有限 Chevalley 群复表示中阶为 p 的元素的谱。*Vests¯ı Akad. Navuk BSSR Ser. F¯ız.-Mat. Navuk*，(6):20–25，124，1986。1[34] A. E. Zalesskiˇı. 交错群射影表示中素数阶元素的特征值。*Vests¯ı Akad. Navuk Belarus¯ı Ser. F¯ız.-Mat. Navuk*，(3):41–43，131，1996。1