arXiv:2512.14385v1 [math.RT] 16 Dec 2025

量子群表示的维数增长与 Gelfand-Kirillov 维数

VYACHESLAV FUTORNY，XINGPENG LIU

Abstract. 我们考察量子化包络代数表示论中的两个代数不变量：单位根处 De Concini-Kac 量子群的单模的维数增长，以及泛型 q处量子群的简单最高权模的 Gelfand-Kirillov 维数。尽管这两个不变量是在参数 q的不同取值下定义的，但它们在各自的背景中反映出密切相关的特征。我们证明，量子情形中出现了若干新现象，非整数权表示对这两个不变量的贡献不可忽视。基于此，我们确定了每种李型下这些不变量的最小非零值。作为应用，我们证明，只有当底层半单李代数具有类型为 A、 B或 C的单分量时，泛型 q 处的量子尖点模才可能出现；这使量子情形与经典情形之间的表示论差异得到了更明确的呈现。

Contents

1. 引言 1 2. 量子群与表示 4 3. 维数增长与 Gelfand-Kirillov 维数 11 4. 范畴的等价 15
5. 最小增长 26 6. 应用 33 附录 A. 平移函子与结构函子 34 参考文献 38

1. Introduction

设 G 是 $\mathbb{C}$上的连通半单代数群， $\mathfrak{g}$ 是其李代数。本文研究经典包络代数的两个密切相关的量子模拟的表示论：*Drinfeld–Jimbo*量子群 $U_q := U_q(\mathfrak{g})$，其中 q 或者是形式参数，或者不是单位根（一般情形）；以及在单位根处的*De Concini-Kac*特化 U_ζ 。它们分别可视为特征零下的包络代数 $U(\mathfrak{g})$ 和代数闭域 k 上特征为 p的受限李代数 $\mathfrak{g}_k := \mathfrak{g}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} k$ 的包络代数 $U(\mathfrak{g}_k)$ 的量子对应物。众所周知，在特征零和 p的经典情形中，表示论现象在很大程度上呈现出镜像，

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：17B37、17B10；次要分类：20G42、16T20。
Key words and phrases. 量子群、表示、维数增长、Gelfand-Kirillov 维数。

分别对应于一般情形和 q 单位根量子情形。本文旨在利用两个平行的代数不变量，即简单*Gelfand–Kirillov* 维数模 U_q的以及简单 U_ζ-模的维数增长（见第3节），它们在各自的背景下发挥着类似作用，从而解释量子与经典图景之间的某些差异。

设 T 是 G 的一个极大环面，并令 U_q^0（分别是 U_ζ^0）为 U_q（分别是 U_ζ）的 Cartan 部分。这两个代数都是定义在 $\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{C}(q)$ 上的 Laurent 多项式代数，其中 q 是一个形式参数；它们自然同构于 T 的坐标代数（等价地，同构于其特征群 X(T) 的群代数），且与 q的取值无关。令 $Z_{\zeta,0}$ 为 U_ζ的 Frobenius 中心。它是 U_ζ的中心子代数。根据 [DKP92], ，子代数$Z_{\zeta,0}$ 作为 U_ζ 的 Hopf 子代数，可识别为代数群的坐标代数

$$\mathrm{H} = \left\{ (a^- b, b^{-1} a^+) \in \mathrm{B}^- \times \mathrm{B}^+ \;\middle|\; a^\pm \in \mathrm{U}^\pm, b \in \mathrm{T} \right\},$$

其中 B^+ 和 B^- 是 G 的互为相反的 Borel 子群，满足 $\mathrm{B}^+ \cap \mathrm{B}^- = \mathrm{T}$；T 是 G 的一个固定极大环面，而 $\mathrm{U}^\pm$ 表示 $\mathrm{B}^\pm$ 的幺幂根。因此，H 与单位根 ζ的选取无关，并且 H 的任意元素都为任意固定的 ζ 确定了 Z_ζ,0 的一个中心特征。令 $g \in$H，并将 χ_g 记为对应于 Z_ζ, 0 的中心特征。定义 $U_\zeta^{\chi_g}$（或简记为 U_ζ^g）为 U_ζ 关于由 $z - \chi_g(z)$（$z \in Z_\zeta$,0）生成的理想取商所得的商代数。定义 $\pi : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$，使得 $\pi(x, y) = xy^{-1}$。根据 [DKP92]，若 $\pi(g)$ 与 $\pi(g')$ 属于 G 的同一个共轭类，则代数 U_ζ^g 与 $U_\zeta^{g'}$ 同构。因此，对于 G 中的每个共轭类，我们都可以选取一个属于π(H) 的代表元；于是 U_ζ^g 的表示论便归结为 $\pi(g)$ 是这些选定代表元之一的情形。

为阐明维数增长与 Gelfand–Kirillov 维数在各自语境中展现出的相似特征，我们以中心约化代数U_ζ^g 为例，其中 $\pi(g)$ 位于 G 的一个半单共轭类中。特别地，当 g 是 H 中的单位元 1 时，代数 U_ζ^1通常记作 u_ζ，是 Lusztig [Lus90, 第 8]节引入的小量子群。上述同构意味着，就我们的目的而言，只需统一研究代数 $\hat{u}_\zeta = u_\zeta^- \; U_\zeta^0 \; u_\zeta^+$，其中 $u_\zeta^\pm$分别表示 u_ζ的正部与负部。将 T 视为 U_ζ^0的极大谱 Spec(U_ζ^0)。T 中的元素 Λ定义了 $\hat{u}_\zeta = u_\zeta^- \; U_\zeta^0 \; u_\zeta^+$ 的一个不可约表示，即最高权为Λ的婴儿 Verma 模的简单商模，我们将其记作 $L_\zeta(\Lambda)$。设 ℓ 为单位根的阶，并且 $\zeta = e^{2\pi\imath/\ell}$。我们将分析不可约表示 $L_\zeta(\Lambda)$ 的维数如何随 ℓ 变化。事实证明，dim $L_\zeta(\Lambda)$ 是 ℓ的一个多项式函数，而且，

$$\lim_{\ell \to \infty} \log_\ell \dim L_\zeta(\Lambda) \;=\; \text{GK-dim}_{U_q} L_q(\Lambda),$$

其中 $L_q(\Lambda)$ 表示最高权为 U_q 的不可约最高权 Λ-模，而 GK-dim$_{U_q} L_q(\Lambda)$ 表示其 Gelfand-Kirillov 维数（定理 3.3）。这种维数增长行为与经典情形 [BL18]相符。这个等式在量子群表示论中，为一般情形与根单位情形提供了精确对应，其中维数多项式的次数所起的作用，类似于一般情形中的 Gelfand–Kirillov 维数。不过，我们

通过对维数增长进行显式计算，进一步阐明它与经典情形的差异。

设 q 为一个形式参数。现在我们转而研究 U_q 的表示，这些表示通过 U_q^0 的作用按 $\mathrm{T}^{\mathbb{C}(q)}(\cong \mathrm{Spec} U_q^0)$ 进行权分次。记 $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$ 为基本权的 $\mathbb{Q}$-张成空间。对于每个 $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$，都可以在 $\mathrm{T}_{\mathbf{k}}$ 中定义 q^λ 为一个权，其中 $\mathbf{k}$ 是 $\mathbb{C}(q)$ 的代数闭包。按照 Joseph 和 Letzter [JL95]，的说法，我们将这类权称为线性权。众所周知，最高权为 q^λ 的 Verma 模的简单商模在特化 $q \mapsto 1$ 下仍保持简单（见 [EK08] 和 [AM12]）。对于这些简单模，相应的本原理想和 Gelfand-Kirillov 维数与其经典对应物的相应对象一致。然而，当最高权$\Lambda \in \mathrm{T}_{\mathbf{k}}$ 不是线性权时，相应表示究竟应具有怎样的经典对应物仍不清楚，而且这样的对应物实际上可能并不存在。

考虑由所有不可约最高权模 $L_q(\Lambda)$ 生成的 U_q-模的 Serre 子范畴，其中 $\Lambda \in \mathrm{T}^{\mathbb{C}(q)}$（或更一般地，$\Lambda \in \mathrm{T}_{\mathbf{k}}$），记作 $\mathcal{O}_q$。它是经典 Bernstein-Gelfand-Gelfand (BGG) 范畴 $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$ 的一种合理的量子类比，该范畴与李代数 $\mathfrak{g}$ 相关，且包含所有不可约最高权模。此范畴与 $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$ 共享许多结构特征。在经典情形中，Soergel [Soe90]证明，对于 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的对偶空间 $\mathfrak{h}^*$ 中任意权 λ，$\mathcal{O}(\mathfrak{g})$ 的不可分解块 $\mathcal{O}_\lambda(\mathfrak{g})$ 仅取决于相对于权 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ 的“整数”考克斯特群 (W_λ, S_λ)（在群同构意义下），以及 W_λ 在 λ 上的作用，其中 λ 表示 λ 的链接类。一个自然的问题是，类似的结果是否也适用于 $\mathcal{O}_q$。要回答这一问题，主要难点在于确定适当的整数根子系及其对应的魏尔群，它们决定了 $\mathcal{O}_q$ 的块分解（第 4.1 小节）。现有结果表明，这种情形应与经典情形类似，似乎不存在本质差异。然而，我们发现，不可分解块到其对应整数根子系的指派存在一种经典情形中没有的区别，如下图所示:

$$\left\{\mathcal{O}_{q,\overline{\Lambda}} \mid \Lambda \in \mathrm{T}_{\mathbb{C}(q)}\right\} \to \left\{\begin{array}{c}\text{All root}\\ \text{subsystems}\end{array}\right\} \supset \left\{\begin{array}{c}\text{All dual-closed}\\ \text{root subsystems}\end{array}\right\} \leftarrow \left\{\mathcal{O}_{\overline{\lambda}}(\mathfrak{g}) \mid \lambda \in \mathfrak{h}^*\right\}.$$

特别是，与 $\mathcal{O}_q$的不可分解块相关的整数根子系统未必是对偶封闭的（参见引理4.5 和例 4.7），这与经典情形不同。据我们所知，现有文献中尚未出现这一结果。因此，我们给出一个基于Jantzen变形理论，并结合结构函子和平移函子的证明。该证明的主要思路可追溯至经典情形中的 [Soe90] 以及单位根情形中的 [AJS94]。

令 Φ 表示相对于 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ 的根系。我们证明，对于每个真极大根子系 $\Psi \subsetneq \Phi$，都存在一个权 $\Lambda \in \mathrm{T}_{\mathbf{k}}$，使得与$\mathcal{O}_{q,\Lambda}$ 相关联的整数根子系统恰好与 Ψ重合（命题 5.10）。基于前述结论，我们用 Lusztig 的 $\bar{a}$-函数表示 $L_q(\Lambda)$ 的 Gelfand-Kirillov 维数（定理 5.6），从而确定了 $\mathcal{O}_q$ 中所有简单对象的非零最小 Gelfand-Kirillov 维数。当 Φ 不可分解时，我们进一步得出，该非零最小值与经典情形的值一致，即 $h^\vee - 1$（其中 $h^\vee$ 为对偶 Coxeter 数），但类型 B 除外；而在类型 B 中，该值等于 Φ 的秩，记作 $\mathrm{rank}(\Phi) = n$，这与经典情形的值 $2n - 2$ 不同

（定理5.15）。作为一项应用，我们可以探讨一般 q下量子尖点权模的存在性问题；这一问题对于通过抛物诱导分类量子群的单权模至关重要。它也解释了先前工作 [CGLW].中指出的量子情形与经典情形之间的差异。</output>

本文结构安排如下。第2 节汇集了所需的记号，以及关于量子群及其表示论的背景知识。第3节研究不可约 U_ζ-模的维数随单位根 ℓ 的阶 ζ趋于无穷时的增长，并将这一行为与一般情形下的 Gelfand-Kirillov 维数联系起来。第4节致力于研究范畴 $\mathcal{O}_q$ 在我们的一般权设定下的结构及其块分解；特别地，我们重新考察 Soergel 结果的量子类比。第5节确定 $\mathcal{O}_q$ 中简单模的 Gelfand-Kirillov 维数，并计算最小的非零 Gelfand-Kirillov 维数。最后，第6 节讨论一项应用。

致谢。作者谨向 Zongzhu Lin、Olivier Mathieu、Evgeny Mukhin、Victor Ostrik 和 Peng Shan 致谢，感谢他们进行的有益讨论。第二作者感谢深圳国际数学中心提供的经费支持与热情接待。V. F. 得到了中国国家自然科学基金（12350710787 和 12350710178）的部分资助；X. L. 得到了中国博士后科学基金会（2024M751285）和中国国家自然科学基金（12401030）的部分资助。

2. Quantum groups and representations

本文中， $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{N}_+$ 分别表示非负整数集和正整数集。设 q 为一个不定元， $\mathbb{C}(q)$表示以 q 为变量、复系数的有理函数域。令$\mathbf{k}$ 为 $\mathbb{C}(q)$的代数闭包。对于 $m, r \in \mathbb{N}_+$, $m \geqslant r$, 我们采用以下标准记号:

$$[m]_q = \frac{q^m - q^{-m}}{q - q^{-1}}, \quad [m]_q^! = [1]_q[2]_q \cdots [m]_q.$$

我们始终假设 $\zeta \in \mathbb{C}^\times$ 是一个本原 ℓ次单位根，其中 ℓ 是大于 1 且为奇数的整数；若 $\mathfrak{g}$含有类型为 G_2的分量，则 ℓ 还须与 3 互素。

2.1. 量子群。

设 $\mathfrak{g}$ 为秩为 n 的有限维复半单李代数，并取其 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$。令 $I = \{1, 2, \cdots, n\}$，且 $(d_i a_{ij})_{i,j\in I}$ 为 d_i’（它们是互素的正整数）所构成的 $n \times n$ 的对称化 Cartan 矩阵。设 W 为 $\mathfrak{g}$的魏尔群， Φ 表示相对于 $\mathfrak{h}$的 $\mathfrak{g}$ 的根系。令 $\Pi = \{\alpha_i \mid i \in I\} \subset \Phi$ （分别为 $\{\omega_i \mid i \in I\} \subset \mathfrak{h}^*$）表示 $\mathfrak{g}$的单根集（分别为基本权集）。通常， Q （分别为 P）表示 $\mathfrak{g}$ 的根格（分别为权格）。令 $P^+ = \sum_{i\in I} \mathbb{N}\omega_i$, $Q^+ = \sum_{i\in I} \mathbb{N}\alpha_i$，并以 $\Phi^+ = Q^+ \cap \Phi$ 表示正根集。令 $\rho \in P^+$ 为基本权之和。存在一个非退化对称的 W-不变双线性形式 $(\cdot, \cdot)$，定义在 $\mathfrak{h}^*$ 上，并满足 $(\alpha_i, \alpha_j) = d_i a_{ij}$，对所有 $i, j \in I$，均有 $(\alpha_i, \omega_j) = d_i \delta_{ij}$；且对每个 $\alpha \in \Phi$，反射 $s_\alpha \in W$ 在 $\mathfrak{h}^*$ 上的作用为 $s_\alpha(\lambda) = \lambda - (\lambda, \alpha^\vee)\alpha$，其中对任意 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$， $\alpha^\vee = {}^{2\alpha}/_{(\alpha,\alpha)}$。

Hopf 代数 $U_q := U_q(\mathfrak{g})$ 由元素 $E_i, F_i, i \in I$ 以及 $K_\alpha, \alpha \in Q$ 在 $\mathbb{C}(q)$ 上生成，并满足以下关系

$$K_\mu K_{-\mu} = 1, \quad K_\mu K_\nu = K_\nu K_\mu \tag{2.1}$$

$$K_\mu E_i = q^{(\mu,\alpha_i)} E_i K_\mu, \quad K_\mu F_i = q^{-(\mu,\alpha_i)} F_i K_\mu, \tag{2.2}$$

$$E_i F_j - F_j E_i = \delta_{ij} \frac{K_{\alpha_i} - K_{\alpha_i}^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}, \quad q_i = q^{d_i}, \tag{2.3}$$

以及量子 Serre 关系（参见 [Jan95，第 4 节3]）。其余乘法 Δ、余单位 ϵ和反 antipode S 定义如下：

$$\Delta(K_\mu) = K_\mu \otimes K_\mu, \quad \Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + K_{\alpha_i} \otimes E_i, \quad \Delta(F_i) = F_i \otimes K_{\alpha_i}^{-1} + 1 \otimes F_i,$$

$$\epsilon(E_i) = \epsilon(F_i) = 0, \quad \epsilon(K_\mu) = 1,$$

$$S(K_\mu) = K_{-\mu}, \quad S(E_i) = -K_{\alpha_i}^{-1} E_i, \quad S(F_i) = -F_i K_{\alpha_i}.$$

在下一小节中，我们回顾任意变形环 R 上的变形代数 U_R （ U_q ），以及 U_q 在 $\mathbb{C}^\times$ 中 q 取特定值时的特化。容易验证，按照相同的定义，它们也具有 Hopf 代数结构。为避免混淆，我们仍分别用 Δ、 ϵ 和 S 表示相应代数中的余乘法、余单位和反 antipode。

2.2. 特化。设 $A = \mathbb{C}[q, q^{-1}]$。在 U_q 中考虑 De Concini-Kac 形式 [DCK89], ，即由元素 E_i、F_i、K_{α_i} 和 $\frac{K_{\alpha_i} - K_{\alpha_i}^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}$ （$i \in I$）生成的 A-子代数 U_A。令 U_A^+（分别为 U_A^-）为由 E_i（分别为 F_i）生成的 U_A 的 A-子代数，并令 U_A^0 为由 K_{α_i} 和 $\frac{K_{\alpha_i} - K_{\alpha_i}^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}$ 生成的子代数。设 R 为一个 A-代数。定义具有 R-子代数 $U_R^\pm = U_A^\pm \otimes_A R$ 和 $U_R^0 = U_A^0 \otimes_A R$ 的 $U_R = U_A \otimes_A R$。特别地，当 R 是 A 的分式域 $\mathbb{C}(q)$，且具有典范嵌入 $A \hookrightarrow \mathbb{C}(q)$ 时，我们有 $U_R = U_q$；在此情形下，我们将子代数 $U_R^\pm$（分别为 U_R^0）记作 $U_q^\pm$（分别为 U_q^0）。对于 $\xi \in \mathbb{C}^\times$，令 $U_\xi = U_A \otimes_A \mathbb{C}$，其中 $\mathbb{C}$ 通过特化 $q \to \xi$ 视为一个 A-代数。用 U_ξ^+、 U_ξ^- 和 U_ξ^0 表示 U_A^+、U_A^- 和 U_A^0 在 U_ξ 中的像。特别地，若 $\xi = \zeta$，我们得到单位根处的 De Concini-Kac 量子群 ζ 及其相应的子代数 $U_\zeta^\pm$ 和 U_ζ^0。为后续使用，我们还将考虑整形式 $U_{\mathbb{Q}[q,q^{-1}]}$，它是将 A 替换为 $\mathbb{Q}[q, q^{-1}]$ 得到的（并类似地定义 $U^\pm_{\mathbb{Q}[q,q^{-1}]}$ 和 $U^0_{\mathbb{Q}[q,q^{-1}]}$）。若 R 是一个 $\mathbb{Q}[q, q^{-1}]$-代数，我们以相同方式通过基变换定义 U_R、 $U_R^\pm$ 和 U_R^0。

可以引入 Poincar´e-Birkhoff-Witt（PBW）基底$U_q^\pm$。根据 Lusztig [Lus90]，我们有一个由生成元 $T_i, i \in I$生成的辫群通过自同构作用于 U_q，其定义如下：

$$T_i K_\mu = K_{s_i \mu}, \quad T_i E_i = -F_i K_{\alpha_i}, \quad T_i F_i = -K_{\alpha_i}^{-1} E_i,$$

$$T_i E_j = \sum_{s=0}^{-a_{ij}} (-1)^{s-a_{ij}} q_i^{-s} E_i^{(-a_{ij}-s)} E_j E_i^{(s)},$$

$$T_i F_j = \sum_{s=0}^{-a_{ij}} (-1)^{s-a_{ij}} q_i^{-s} F_i^{(s)} F_j F_i^{(-a_{ij}-s)}$$

对于 $i \neq j$. 这里我们用 $E_i^{(r)}$ 和 $F_i^{(r)}$ 表示除幂 $\frac{E_i^r}{[r]_{q_i}^!}$ 和 $\frac{F_i^r}{[r]_{q_i}^!}$ 分别。固定一个最长元素 w_0 的约化表达式 $s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_N}$。然后，我们定义 Φ^+ 中所有正根的凸序：

$$\beta_1 = \alpha_{i_1}, \quad \beta_2 = s_{i_1}\alpha_{i_2}, \quad \cdots, \quad \beta_N = s_{i_1}\cdots s_{i_{N-1}}\alpha_{i_N}.$$

引入根向量 $E_{\beta_r} = T_{i_1}\cdots T_{i_{r-1}}E_{i_r}$ 和 $F_{\beta_r} = T_{i_1}\cdots T_{i_{r-1}}F_{i_r}$。接着，我们选取如下PBW基。对于 U_q^+（或 U_ζ^+），这是由单项式构成的基

$$E^{\underline{m}} = E_{\beta_N}^{m_N}E_{\beta_{N-1}}^{m_{N-1}}\cdots E_{\beta_1}^{m_1}$$

其中 $m_i \geqslant 0$。对于 U_q^-（或 U_ζ^-），这是由单项式构成的基

$$F^{\underline{m}} = F_{\beta_1}^{m_1}F_{\beta_2}^{m_2}\cdots F_{\beta_N}^{m_N}$$

其中 $m_i \geqslant 0$。此外，代数乘法定义了一个 $\mathbb{C}(q)$-向量空间同构 $U_q \cong U_q^- \otimes U_q^0 \otimes U_q^+$，以及一个 $\mathbb{C}$-向量空间同构 $U_\zeta \cong U_\zeta^- \otimes U_\zeta^0 \otimes U_\zeta^+$。注意，所有元素 E_α^ℓ、F_α^ℓ、$\alpha \in \Phi^+$ 和 $K_{\alpha_i}^\ell$、$i \in I$ 都是 U_ζ 中的中心元。

2.3. 中心。首先，设 G 是李代数为 $\mathfrak{g}$ 的（伴随型）复连通代数群，T 是 G 的一个固定极大环面。固定一个 ℓ次本原单位根 ζ。令 $Z_{\zeta,0}$ 为 U_ζ 的子代数，它由元素 E_α^ℓ、F_α^ℓ（其中 $\alpha \in \Phi^+$）以及 $K_{\alpha_i}^{\pm\ell}$（其中 $i \in I$）生成。利用 U_ζ 的定义关系，可以验证 $Z_{\zeta,0}$ 确实是 U_ζ 的中心子代数，且与 w_0 的约化表达式的选取无关。

关于 $Z_{\zeta,0}$ 的几何描述见 [DKP92]。设 B^+ 和 B^- 分别为 G 的一对相对的 Borel 子群，其幺幂根为 U^+ 和 U^-。定义子群 $\mathrm{H} \subset \mathrm{B}^- \times \mathrm{B}^+$ 为复合态射的核

$$\mathrm{B}^- \times \mathrm{B}^+ \longrightarrow \mathrm{T} \times \mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{T}$$

其中第一个映射是模去幺幂根后的自然商映射，第二个映射是在 T 中的群乘法。值得注意的是，H 与 ℓ 和 ζ 的选取无关，且 H 的任一元素都定义了 Z_ζ,0 的一个中心特征。下文中，我们将 H 的元素（以及它的标量扩张，例如 $\mathrm{H} \times_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(q)$）视为 Z_ζ,0 的“普适”特征，并可根据需要将其特化到任意给定的 ℓ 和 ζ。令 $g \in$H，并以 χ_g 表示相应的 Z_ζ,0 的中心特征。定义 $U_\zeta^{\chi_g}$（或简写为 U_ζ^g）为 U_ζ 对由 $z - \chi_g(z)$（其中 $z \in Z_\zeta$,0）生成的理想取商所得的商代数。定义 $\pi : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$，使得 $\pi(x, y) = xy^{-1}$。根据 [DKP92],，若 $\pi(g)$ 与 $\pi(g')$ 属于 G 的同一个共轭类，则代数 U_ζ^g 与 $U_\zeta^{g'}$ 同构。

注意，存在一个由 $wK_\mu = K_{w\mu}$ 给出的规范 W 作用于 U_q^0 的作用，其中 $w \in W$ 和 $\mu \in Q$。定义 $\mathbb{Z}_2^n$ 在 U_q^0 上的作用为

$$\sigma(K_\mu) = \sigma(\mu)K_\mu, \quad \text{for } \sigma \in \mathbb{Z}_2^n, \mu \in Q, \tag{2.4}$$

其中 $\sigma(\mu) \in \{\pm 1\}$ 由扩展嘉当生成元上的作用确定，即第i个 $\mathbb{Z}_2^n$ 副本将 K_{α_i} 乘以 1 或 -1。结合上述内容，我们得到扩展魏尔群 $W = \mathbb{Z}_2^n \rtimes W$ 在 U_q^0上的作用$\widetilde{\ }$。

令 $\mathrm{T}_q = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}(q)\text{-alg}}(U_q^0, \mathbb{C}(q))$。则上述作用在 T_q 上诱导出一个 $\widetilde{W}$-作用，定义如下：

$$(w\Lambda)(K_\mu) = \Lambda(w^{-1}K_\mu) \tag{2.5}$$

对于任意 $w \in W$, $\Lambda \in \mathrm{T}_q$ 和 $\mu \in Q$。注意， W 在 T_q 上的作用保持了 T_q的群结构，即，对于 $w \in W$ 和 Λ，$\Lambda' \in \mathrm{T}_q$，有 $w(\Lambda\Lambda') = (w\Lambda)(w\Lambda')$。

定义代数同态 γ: $U_q^0 \to U_q^0$，使得 $\gamma(K_i) = q_i K_i$。可以验证，对于 $\Lambda \in \mathrm{T}_q$，有 $\Lambda \circ \gamma = q^\rho \Lambda$。令 U_+^+（分别为 U_+^-）表示 U_q^+（分别为 U_q^-）的增广理想，即余单位 ϵ 在 U_q^+（分别为 U_q^-）上的限制的核。利用 PBW 定理，我们得到 U_q 具有如下直和分解

$$U_q = U_q^0 \oplus (U_+^- U_q + U_q U_+^+).$$

令 pr^{U_q} 为从 U_q 到 U_q^0的投影。现在将投影映射 pr^{U_q} 限制到 $Z(U_q)$（U_q的中心）。于是由 [DCK89] 可知，存在一个 $\mathbb{C}(q)$-代数同构，称为*Harish-Chandra* 同构，

$$\gamma^{-1} \circ \mathrm{pr}_{U_q} : Z(U_q) \xrightarrow{\sim} (U_q^0)^{\widetilde{W}} := \{\, u \in U^0 \mid wu = u,\ \forall w \in \widetilde{W} \,\}.$$

令 χ_Λ 表示与权 $\Lambda \in \mathrm{T}_q$ 相关联的 $Z(U_q)$ 的中心特征，其定义为 $\chi_\Lambda(z) = \Lambda(\mathrm{pr}^{U_q}(z))$，其中 $z \in Z(U_q)$。注意， $\Lambda(\mathrm{pr}^{U_q}(z))$ 与 $(\Lambda q^\rho)(\gamma^{-1} \circ \mathrm{pr}^{U_q}(z))$ 相同，由此 Harish-Chandra 同构得到以下结果。

引理 2.1. $\chi_\Lambda = \chi_{\Lambda'}$ 当且仅当 Λq^ρ 和 $\Lambda' q^\rho$ 在 W 下共轭。 □

在经典情形中， W 在 $\mathfrak{h}^*$ 上有一个平移作用，定义为 $w \cdot \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$，其中 $w \in W$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$。类似地，我们在 T_q 上引入 W 的以下平移作用。

定义 2.2. 令 $w \in W$ 和 $\Lambda \in \mathrm{T}_q$。定义 $w \cdot \Lambda = q^{-\rho} w(\Lambda q^\rho)$。

将 q 特化为 ζ，我们从 $Z(U_q)$ 得到 U_ζ 的一个中心子代数，即 Harish-Chandra 中心，记为 $Z_{\zeta,\mathbf{1}}$。根据 Harish-Chandra 同构，$Z_{\zeta,\mathbf{1}}$ 同构于 U_ζ^0 的 $\widetilde{W}$-不变子代数 $(U_\zeta^0)^{\widetilde{W}}$。考虑 $\widetilde{W}$ 在 T 上的平移作用（与其在 T_q 上的作用类似）。取 $[\Lambda] \in \mathrm{T}/(\widetilde{W}, \cdot)$。于是，$U_\zeta$ 的中心约化 $U_{\zeta,\Lambda}$ 定义为 U_ζ 对由 $z - \chi_\Lambda(z)$、$z \in Z_{\zeta,\mathbf{1}}$ 生成的理想取商。令 T/W 表示 T 对通常的 W-作用及 $\mathbb{Z}_2^n$ 的符号平移取商所得的商。

考虑纤维积 $\mathrm{H} \times_{\mathrm{T}/\widetilde{W}} \mathrm{T}/(W, \cdot)$，其中映射 $\mathrm{T}/(W, \cdot) \to \mathrm{T}/W$ 将 $[\Lambda] \mapsto [\Lambda^\ell]$ 映至 ……，而映射 $\mathrm{H} \to \mathrm{T}/\widetilde{W}$ 是 $\pi : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ 与 Steinberg 映射 $\mathrm{G} \to \mathrm{T}/W$ 的复合。这里可能会产生一种误解：我们以自然方式将 T 视为 H 的子群。因此，映射 π 诱导出平方映射 $\mathrm{T} \to \mathrm{G}$，其像 $\mathrm{T}/\mathbb{Z}_2^n$:=T 恰为 G 的极大环面。因此，我们可以考虑 Steinberg 映射 $\mathrm{G} \to \mathrm{T}/W (\cong \mathrm{T}/W)$，详见 [DCP93 的 16.2、16.3] 小节。注意，每个不可约 U_ζ-模都唯一地经由某个中心约化 $U_{\zeta,\Lambda}^g$ 分解，其中 $(g, [\Lambda]) \in \mathrm{H} \times_{\mathrm{T}/\widetilde{W}} \mathrm{T}/(W, \cdot)$。

2.4. 表示。 设 L 是一个不可约 U_ζ-模。注意，$Z_{\zeta,0}$ 通过 Spec$Z_{\zeta,0}$ 中的一个中心特征作用于 L。特别地，中心元 K_μ^ℓ, $\mu \in Q$ 以标量作用。因此，按 U_ζ^0 的意义， L 是一个权 U_ζ- 模，其权都位于 T 中。设 R 是一个 A- 代数（或 $\mathbb{Q}[q,q^{-1}]$- 代数）。我们可以考虑 U_R 的更一般的权。定义

$$\mathrm{T}_R := \mathrm{Hom}_{R\text{-alg}}(U_R^0, R),$$

从 U_R^0 到 R 的所有 R-代数同态的集合。得益于 U_ζ^0 的 Hopf 代数结构（继承自 U_ζ），T_R 具有自然的阿贝尔群结构，其中乘法和逆元定义为

$$(\Lambda\Lambda')(u) = (\Lambda \otimes \Lambda') \circ \Delta(u), \quad \Lambda^{-1}(u) = \Lambda \circ S(u)$$

对于任意 Λ, $\Lambda' \in \mathrm{T}_R$ 和 $u \in U_R^0$。此外，一个 A-代数同态 $R \to R'$ 诱导出群同态 T$_R \to \mathrm{T}_{R'}$；特别地，包含映射 $\mathbb{Q}[q,q^{-1}] \subset A \subset \mathbb{C}(q) \subset \mathbf{k}$ 表明

$$\mathrm{T}_{\mathbb{Q}[q,q^{-1}]} \subset \mathrm{T}_A \subset \mathrm{T}_q \subset \mathrm{T}_{\mathbf{k}}.$$

现在将 $\mathfrak{h}_\mathbb{Q}^*$ 认作基本权 $\{\omega_i \mid i \in I\}$ 的 $\mathbb{Q}$-线性张成空间。每个 $\lambda \in \mathfrak{h}_\mathbb{Q}^*$ 都通过将 K_μ 赋值给 $q^{(\lambda,\mu)}$，在 $\mathrm{T}_{\mathbf{k}}$ 中产生一个权 q^λ。按照 Joseph-Letzter [JL95] 的记号，对于 $\lambda \in \mathfrak{h}_\mathbb{Q}^*$，我们将这样的权 q^λ 称为 $\mathrm{T}_{\mathbf{k}}$ 中的线性权。注意，$q^P := \{q^\lambda \mid \lambda \in P\}$ 属于 T$_A$。将 q 特化为 ζ 后，线性权 q^λ 诱导出一个权$\zeta^\lambda \in$T，其定义为 $K_\mu \mapsto \zeta^{(\lambda,\mu)}$。

设 M 是一个 U_R-模，且 $\Lambda \in$T$_R$。定义

$$M_\Lambda = \{v \in M \mid u.v = \Lambda(u)v, \forall u \in U_R^0\}.$$

那么 M_Λ 是一个 R-模。由定义关系 (2.2)，我们有 $E_i.M_\Lambda \subset M_{\Lambda q^{\alpha_i}}$ 和 $F_i.M_\Lambda \subset M_{\Lambda q^{-\alpha_i}}$。若 M_Λ 非零，则称 Λ 是 M的一个权，并称 M_Λ 是权为 Λ的权 R-模。若 $M = \oplus_\Lambda M_\Lambda$，则称 M 是一个 U_R 的权模。在这种情况下，我们用 $\Omega(M)$ 表示 M的所有权构成的集合。一般而言，权模的形式特征可定义如下（参见 Jos95，第 4.1] 节）。

定义 2.3。 设 $M = \oplus_{\Lambda \in \mathrm{T}_R} M_\Lambda$ 是一个权 U_R-模，且每个 M_Λ 都是有限秩自由R-模。那么 M 具有形式特征，定义为

$$\mathrm{ch}M = \sum_{\Lambda \in \mathrm{T}_R} (\mathrm{rank}_R M_\Lambda)\Lambda.$$

对于 $\Lambda \in \mathrm{T}_R$，令 $M_R(\Lambda) = U_R \otimes_{U_R^0 U_R^+} R_\Lambda$ 表示 U_R的 Verma 模，其中 R_Λ 是一个 $U_R^0U_R^+$- 模，U_R^+ 在其上平凡作用，且对所有 $u \in U_R^0$ 都有 $u.1_R = \Lambda(u)$。显然，$M_R(\Lambda)$ 是一个权模。设 $\mathbb{F}$ 是一个包含 $\mathbb{Q}[q,q^{-1}]$的子域，并设$\Lambda \in$T$_\mathbb{F}$。于是，我们分别用 $M_q(\Lambda)$ 和 $L_q(\Lambda)$ 表示 $U_\mathbb{F}$ 上的 Verma 模 $M_\mathbb{F}(\Lambda)$ 及其简单商模 $L_\mathbb{F}(\Lambda)$。

假设 $\Lambda \in \mathrm{T}_q$。令 ℓ 为足够大的正整数，使得 $\Lambda \in \mathrm{T}^{A_\zeta}$，其中 $A_\zeta = \mathbb{C}[q]_{(q-\zeta)} \subset \mathbb{C}(q)$ 是 $\mathbb{C}[q]$ 在极大理想 $(q-\zeta)$ 处的局部化。由于 $A \subset A_\zeta$，环 A_ζ 自然继承了一个 A-代数结构。

定义 2.4. 令 $\Lambda \in \mathrm{T}^{A_\zeta}$。定义 $\Lambda_\zeta \in \mathrm{T}$ 为 Λ 在特化映射 $(-)_\zeta : \mathrm{T}^{A_\zeta} \to$T下的像。

我们可以定义 Verma 模 $M_q(\Lambda)$ 的一个 A_ζ-形式。具体而言，取一个最高权向量 v_Λ，并考虑其 U_{A_ζ}-子模 $M_{A_\zeta}(\Lambda) = U_{A_\zeta}.v_\Lambda$。这定义了 $M_q(\Lambda)$ 的一个A_ζ-子模，而它在 $q=\zeta$ 处的特化给出一个 U_ζ-模 $M_\zeta(\Lambda_\zeta) := M_{A_\zeta}(\Lambda)/(q-\zeta)M_{A_\zeta}(\Lambda)$，我们也将其简记为 $M_\zeta(\Lambda)$。注意，U_ζ-模$M_\zeta(\Lambda)$ 是不可分解但可约的。令 $M_\zeta(\Lambda)$ 表示 $M_\zeta(\Lambda)$ 除以由所有向量 $F_\alpha^\ell.\bar{v}_\Lambda$, $\alpha\in\Phi^+$ 生成的U_ζ-子模所得的商。我们称 $M_\zeta(\Lambda)$ 为对角U_ζ-模（参见 [DCK89，第 3.2] 节）。

2.5. Jantzen 过滤。量子群 U_q 具有量子 Shapovalov 形式，该形式在 [DCK89, JL95] 中引入。定义 $\mathcal{S}$上的双线性形式 U_q为 $\mathcal{S}(a,b) = \mathrm{pr}(\delta(a)b)$，其中$a$，$b\in U_q$，且 $\delta: U_q\to U_q$ 是由下式定义的 $\mathbb{C}(q)$-代数反自同构

$$\delta(E_i)=F_i,\quad \delta(F_i)=E_i,\quad \delta(K_i)=K_i,\quad \text{for } i\in I.$$

容易验证，$\mathcal{S}$ 是对称的且为反变的，即对于a、b、$c\in U_q$，有 $\mathcal{S}(ab,c) = \mathcal{S}(b,\delta(a)c)$。形式 $\mathcal{S}$可由其在U_q^-上的限制计算得到。对于 $\nu\in Q^+$，令 $U^-_{-\nu}$为 U_q^-中由基 $\{F^m \mid \sum_i m_i\beta_i=\nu\}$张成的 $\mathbb{C}(q)$-线性子空间。注意，除非 $\overline{\mu}=\nu$属于 Q^+，否则$\mathcal{S}(U^-_{-\mu}, U^-_{-\nu}) = 0$。令 $\mathcal{S}_\nu$为 $\mathcal{S}$在 $U^-_{-\nu}$上的限制。于是，相对于基 $\{F^m \mid \sum_i m_i\beta_i=\nu\}$ 的矩阵 $\mathcal{S}_\nu$的条目属于 U_q^0。由于 E_i与 F_i之间交换关系的特殊性，这些条目实际上属于由元素 K_{α_i}、$i\in I$在环 $\mathbb{Q}[q,q^{-1},(q_i-q_i^{-1})^{-1}$、$i\in I]$上生成的 U_q^0的子代数，即 $U^0_{\mathbb{Q}[q,q^{-1}]}$。

对于正根 $\alpha\in\Phi^+$，若对某些 $i\in I$, $w\in W$ 有 $\alpha = w(\alpha_i)$，令 $q_\alpha = q_i$ and$[K_\alpha; m] = w([K_{\alpha_i}; m])$，其中 $m\in\mathbb{Z}$ and

$$[K_{\alpha_i};m]_q := \frac{K_{\alpha_i}q^m - K_{\alpha_i}^{-1}q^{-m}}{q_i-q_i^{-1}}.$$

于是我们可以表述为

$$\det(\mathcal{S}_\nu) = \prod_{\alpha\in\Phi^+}\prod_{m\in\mathbb{N}_+}\Big([m]_{q_\alpha}[K_\alpha;(\rho,\alpha)-\frac{m}{2}(\alpha,\alpha)]_q\Big)^{\mathrm{p}(\nu-m\alpha)}, \tag{2.6}$$

其中 p 是*Kostant* 分拆函数 $Q^+\to\mathbb{N}$。

$\mathcal{S}$ 的重要性在于，它在每个 Verma 模上诱导出一个双线性形式。设 R 是一个 $\mathbb{Q}[q,q^{-1},(q_i-q_i^{-1})^{-1}, i\in I]$-代数。对于任意 $\Lambda\in\mathsf{T}_R$，映射

$$(av_\Lambda, bv_\Lambda)\mapsto(\Lambda\circ\mathcal{S})(a,b)$$

在 $M_R(\Lambda)$ 上定义了一个对称的 R-双线性形式，记为 $\mathcal{S}_R^\Lambda$。特别地，如果 R 进一步是一个域，则可以证明，$\mathcal{S}_R^\Lambda$ 的根基恰好是 $M_R(\Lambda)$ 的唯一极大子模。因此，$M_R(\Lambda)$ 不可约，当且仅当 $\mathcal{S}_R^\Lambda$ 的根基是平凡的。例如，当 $R=\mathbf{k}$ 时，标准论证给出

引理 2.5。(1) *Verma* 模 $M_q(\Lambda)$ 不可约，当且仅当对任意 $\alpha\in\Phi^+$，$q^{2(\rho,\alpha)}\Lambda(K_{2\alpha}) \notin q^{\mathbb{N}_+(\alpha,\alpha)}$。(2) 若对某个 $m\in\mathbb{N}_+$，有 $q^{2(\rho,\alpha)}\Lambda(K_{2\alpha}) = q^{m(\alpha,\alpha)}$，则 $M_q(\Lambda q^{-m\alpha})$ 可嵌入 $M_q(\Lambda)$。□

回顾一下，包络代数 $U(\mathfrak{g})$ 的扬岑过滤为理解 Verma 模的结构提供了一种概念性方法。其 q 类比物在量子群中也发挥着类似的作用。

令 $\mathbb{F}$ 为包含 $\mathbb{Q}[q, q^{-1}, (q_i - q_i^{-1})^{-1},\ i \in I]$ 的 $\mathbf{k}$ 子域。令 $B = \mathbb{F}[t, t^{-1}]$，其中 t 是一个不定元。令 $T = (t-1)$ 表示 B 的极大理想，其赋值为

$$\mathrm{val}_T : f(t) \mapsto m \quad \text{if } f(t) \in T^m \setminus T^{m+1} \text{ for } m \in \mathbb{N}.$$

令 Λ 为 $\mathsf{T}_{\mathbb{F}}$ 中的一个权。定义 $\Lambda' = \Lambda t^{\rho} \in \mathsf{T}_B$，其中 $t^{\rho}:\ K_{\mu} \mapsto t^{(\rho,\mu)} \in \mathsf{T}_B$。考虑单参数变形 $M_B(\Lambda')$。对于每个 $i \in \mathbb{N}$，定义

$$F^i M_B(\Lambda') = \left\{ v \in M_B(\Lambda') \;\middle|\; \mathcal{S}^{\Lambda'}\left(v, M_B(\Lambda')\right) \subset T^i \right\}.$$

由 $\mathcal{S}^{\Lambda'}$ 的反变性，$F^i M_B(\Lambda')$ 定义了一个递减的 U_B-子模序列$M_B(\Lambda') = F^0 M_B(\Lambda') \supset F^1 M_B(\Lambda') \supset F^2 M_B(\Lambda') \supset \cdots$，当 i 足够大时，满足 $F^i M_B(\Lambda') = 0$。令 $F^i M_q(\Lambda) = F^i M_B(\Lambda') \otimes_B B/T$。于是，$F^i M_q(\Lambda)$ 构成一个递减的 $U_{\mathbb{F}}$-子模序列:

$$M_q(\Lambda) = F^0 M_q(\Lambda) \supset F^1 M_q(\Lambda) \supset F^2 M_q(\Lambda) \supset \cdots$$

当 $F^i M_q(\Lambda) = 0$ 对足够大的 i成立时。这个滤过称为扬岑过滤 $M_q(\Lambda)$。这里，$F^1 M_q(\Lambda)$ 是 $M_q(\Lambda)$ 的唯一极大子模，每个非零商 $F^i M_q(\Lambda)/F^{i+1} M_q(\Lambda)$ 都带有非退化反变形式，并且对于每个 $\beta \in Q^+$，我们有 $\dim_{\mathbb{F}} F^i M_q(\Lambda)_{\Lambda q^{-\beta}} = \mathrm{rank}_B F^i M_B(\Lambda')_{\Lambda' q^{-\beta}}$，其中 $F^i M_B(\Lambda')_{\Lambda' q^{-\beta}}$是一个自由的 B-模。

子模滤过 $\{F^i M_q(\Lambda)\}_i$ 的特征标和公式可以确定。我们先引入以下记号。

定义 2.6. 定义 $\mathcal{T}_{\Lambda}$ 为 $\mathbb{N}_+ \times \Phi^+$ 的一个子集，如下所示:

$$\mathcal{T}_{\Lambda} = \left\{ (m, \alpha) \in \mathbb{N}_+ \times \Phi^+ \;\middle|\; q^{2(\rho,\alpha) - m(\alpha,\alpha)} \Lambda(K_{2\alpha}) = 1 \right\}.$$

固定 $\nu \in Q^+$。考虑限制在 $M_B(\Lambda')$ 的 $\Lambda' q^{-\nu}$-权空间上的行列式 (2.6)。因子 $\Lambda'\left([K_{\alpha}; (\rho,\alpha) - \frac{m}{2}(\alpha,\alpha)]\right)$ 处的 val_T 值，除非 $(m,\alpha) \in \mathcal{T}_{\Lambda}$，否则为0；在这种情况下，该值为 1。因此，对于固定的 ν 和 $(m,\alpha) \in \mathcal{T}_{\Lambda}$，对特征标和 $\sum \mathrm{ch} F^i M_q(\Lambda)$ 的贡献为 $\mathrm{p}(\nu - m\alpha)\Lambda q^{-\nu}$。由此，我们得到以下扬岑求和公式

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{ch} F^i M_q(\Lambda) = \sum_{\nu \in Q^+} \sum_{(m,\alpha) \in \mathcal{T}_{\Lambda}} \mathrm{p}(\nu - m\alpha) \Lambda q^{-\nu} = \sum_{(m,\alpha) \in \mathcal{T}_{\Lambda}} \mathrm{ch} M_q(\Lambda q^{-m\alpha}). \tag{2.7}$$

注 2.7. 对于任意单位根 ζ，注意到 $\mathbb{Q}[q, q^{-1}, (q_i - q_i^{-1})^{-1},\ i \in I]$ 包含于 A_{ζ}。令 $\Lambda \in \mathrm{T}^{A_{\zeta}}$。将乘积公式 (2.6)应用于对角 $1 \le m \le \ell - 1$-模 U_{ζ} $M_{\zeta}(\Lambda)$，并令各因子由 U_{ζ}标记，同样可得一个有限的递减序列，由 M_{ζ}-子模组成，并且对 Λ)有相应的求和公式。

3. Dimension growth and Gelfand-Kirillov dimension

本节中，我们研究当单位根 ζ 的阶 ℓ 趋于无穷大（ζ 相应变化）时，U_ζ 的不可约表示的维数增长，并建立这一增长与一般情形下不可约表示的 Gelfand-Kirillov 维数之间的联系。

3.1. 多项式增长。 设 $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是一个函数。 f 的多项式增长 是由下式定义的 $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 中的一个数

$$d_f=\limsup_{m\to\infty}\frac{\log f(m)}{\log m}.$$

设 F 是任意特征为零的域。设 $\mathcal{A}$ 是有限生成的含幺关联 F-代数， $V\subset\mathcal{A}$ 是一个生成 F-子空间。令 $\mathcal{A}_n=\sum_{i=0}^n V^i\subset\mathcal{A}$，其中 $V^0=\mathrm{F}.1$，且 $f_{\mathcal{A}}(n)=\dim_{\mathbf{F}}\mathcal{A}_n$。则 $\mathcal{A}$ 的 Gelfand-Kirillov （GK）维数定义为 $d_{f_{\mathcal{A}}}$。类似地，对于有限生成的 $\mathcal{A}$- 模 M，我们取 M^0为 M的有限维 F-子空间，使其作为 $\mathcal{A}$-模生成 M。令 $M^n=V^nM^0$，且 $f_M(n)=\dim_{\mathbf{F}}M^n$。则 M 的 GK 维数定义为 d_{f_M}。注意， $d_{f_{\mathcal{A}}}$ 和 d_{f_M} 与生成子空间的选取无关。因此，我们分别将 GK 维数$d_{f_{\mathcal{A}}}$和 d_{f_M}记为 $d(\mathcal{A})$ 和 $d_{\mathcal{A}}(M)$（或简写为 $d(M)$）。关于更一般的理论，可参见 [KL00]。

以下结果可见于 [Jos95，附录 A.3。6]。

引理 3.1。 设 $N\subset M$ 是有限生成的 $\mathcal{A}$-模，且 V 是有限维的 $\mathcal{A}$-模。那么

(1) $d_{\mathcal{A}}(M)\geqslant$最大值$\{d_{\mathcal{A}}(N)\ d_{\mathcal{A}}(M/N)\}$.(2) $d_{\mathcal{A}}(M)=$最大值$\{d_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}m_i)\mid i=1,\dots,r\}$, 对于 $m_1,\dots,m_r$ 中任意一组有限生成元 M。(3) 若 $\mathcal{A}$ 是反 *antipode* 为满射的 *Hopf* 代数，则

$$d_{\mathcal{A}}(M\otimes V)=d_{\mathcal{A}}(M)=d_{\mathcal{A}}(V\otimes M).$$ □

对于任意有限维 U_q-模 M，显然 $d_{U_q}(M)=0$。设 M 是最高权 U_q-模。由于 M 在 U_q^- 的作用下由其最高权向量生成，因此有 $d_{U_q}(M)=d_{U_q^-}(M)$。对于 Verma 模 $M_q(\Lambda)$，GK 维数由 $d_{U_q}(M_q(\Lambda))=|\Phi^+|$给出。因此可得 $d_{U_q}(L_q(\Lambda))\leqslant|\Phi^+|$。

关于 $L_q(\Lambda)$ 的 GK 维数公式，我们将在第 5 节中进行更详细的讨论。接下来，我们将关注单位根处不可约表示的维数增长。

3.2. 维数增长与 GK 维数。 记 u_ζ 为小量子群，它是将 U_ζ 对由 ℓ次幂 $E_\alpha^\ell, F_\alpha^\ell, \alpha\in\Phi^+$ 和 $K_{\alpha_i}^\ell, i\in I$生成的理想取商所得。它具有三角分解 $u_\zeta=u_\zeta^-u_\zeta^0u_\zeta^+$，其三个部分的定义显然。定义 $\hat{}u_\zeta=u_\zeta^-U_\zeta^0u_\zeta^+$. 则有

引理 3.2。 设 L 是一个简单的$\hat{}^{u}\zeta$-模。则存在唯一的对角 *Verma* 模 $M_\zeta(\Lambda)$，其中某个 $\Lambda \in \mathrm{T}$满足条件，使得 L是其同态像；我们将这个简单商模记为 $L_\zeta(\Lambda)$。

证明。显然， L 是有限维的。由于 L 上的每个算子 K_{α_i} 的最小多项式都有互异的根，L 是$\hat{}^{u}\zeta$的权模。注意到，由于 $E_\alpha^\ell = 0$，所有算子E_α、 $\alpha \in \Phi^+$ 在 L 上都是幂零的。因此，我们可以找到一个非零向量 $v \in L$（在标量倍数意义下唯一），使得 $E_\alpha.v = 0$，$K_{\alpha_i}.v = a_i v$， $i \in I$，其中某些标量为 $a_i \in \mathbb{C}^\times$。由 L的简单性可知， $L = \hat{}^{u}\zeta.v$ 。因此，L是$M_\zeta(\Lambda)$的同态像，其中 $\Lambda \in \mathrm{T}$由对每个 $i \in I$满足 $K_{\alpha_i} \mapsto a_i$来确定。□

对于任意 $\Lambda \in \mathrm{T}_q$，存在一个正整数 ℓ_0 ，使得对于所有阶为 $\ell \geqslant \ell_0$的单位根 ζ ，$\Lambda \in \mathrm{T}^{A_\zeta}$ 成立。为方便技术处理，我们在论文开篇假设 ℓ 是一个奇正整数，并采用了若干标准的简化假设。

现在我们固定 $\zeta = e^{\frac{2\pi\imath}{\ell}}$ ，使其满足 $\imath = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$。对于 $\Lambda \in \mathrm{T}_q$，如果正整数ℓ 相对于 Λ 满足上述假设且 ℓ $\Lambda \in \mathrm{T}^{A_\zeta}$，我们就称其为可容许的。这定义了一个函数

$$\{\text{admissible } \ell\} \to \mathbb{N}, \quad \ell \mapsto \dim L_\zeta(\Lambda).$$

这个函数的多项式增长可以如下描述。

定理 3.3。 对于任意 $\Lambda \in \mathrm{T}_q$，有

$$\lim_{\ell \to \infty} \frac{\log \dim L_\zeta(\Lambda)}{\log \ell} = d_{U_q}\left(L_q(\Lambda)\right),$$

其中，极限取遍相对于 Λ 的所有可容许整数 ℓ 。

定理 3.3的证明将在接下来的几个小节中进行，采用别兹鲁卡夫尼科夫和洛谢夫在受限李代数背景下改编的方法 [BL18] ；该方法建立在埃廷戈夫针对有理切尔恩尼科夫代数的方法之上。

3.3. **定理 3.3的证明**。 设 $h = h(q) \in \mathbb{C}(q)$ 是一个有理函数。那么 h 在 $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sing}(h)$ 上定义了一个全纯函数，其中 $\mathrm{Sing}(h) \subset \mathbb{C}$ 是 极点的有限集合，属于h。令 $\mathrm{Tor}(\mathbb{C}^\times)$ 表示乘法群 $\mathbb{C}^\times$ 的挠子群，即 $\mathbb{C}$ 中所有单位根组成的集合。

以下复分析中的初等事实将会很有用。

引理 3.4。 假设 h 将 $\mathrm{Tor}(\mathbb{C}^\times)$ 中的无穷多个元素映射到$\mathrm{Tor}(\mathbb{C}^\times)$中。那么存在 $\zeta_0 \in \mathrm{Tor}(\mathbb{C}^\times)$ 和 $m \in \mathbb{Z}$，使得对所有 $q \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sing}(h)$，都有 $h(q) = \zeta_0 q^m$ 。

证明。 注意到对于无穷多个 $q \in \mathrm{Tor}(\mathbb{C}^\times)$，有 $h(q) = h(\bar{q}^{-1})^{-1}$ ，因此根据解析延拓，该恒等式对所有 $q \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sing}(h)$ 都成立。这意味着 h 的非零极点和零点重合，从而 h 必定是形如 q^m 和 $\frac{q-a}{1-\bar{a}q}$ 的函数之积，其中 $m \in \mathbb{Z}$ 和 $a \in \mathrm{Tor}(\mathbb{C}^\times)$。证明完毕。□

注意到 U_q^-，因此 $M_q(\Lambda)$ 及其特化 $M_\zeta(\Lambda)$ 都具有自然的 $\mathbb{N}$-分次，其定义为对所有 $i \in I$，$\deg F_i = 1$ 。相应的不可约模 $L_q(\Lambda)$ 和 $L_\zeta(\Lambda)$ 继承此分次，分别成为它们的分次商。我们将分次模 M 的 *j-th graded component* 记作 M_j 。于是有以下结果。

引理 3.5。 设 $\Lambda \in \mathrm{T}_q$，并假设 ℓ 是一个充分大的可容许整数。那么存在一个与 ℓ 无关的正整数 m_Λ，使得

$$\dim_{\mathbb{C}(q)} L_q(\Lambda)_j = \dim_{\mathbb{C}} L_\zeta(\Lambda)_j$$

对所有 $j < \frac{\ell}{m_\Lambda}$ 均成立。

证明。考虑一个 A_ζ-代数 R。我们主要关注两种特定的 A_ζ-代数：（1）$R = \mathbf{k}$，其中 A_ζ-代数结构由自然包含映射 $A_\zeta \hookrightarrow \mathbf{k}$ 给出；（2）$R = \mathbb{C}$，其中 $A_\zeta \to \mathbb{C}$ 通过特化 $q \mapsto \zeta$。注意，$\mathbb{C}[q, q^{-1}, (q_i - q_i^{-1})^{-1},\ i \in I] \subset A_\zeta$。于是，Verma 模 $M_R(\Lambda')$ 具有一个反变形式 $\mathcal{S}_R^{\Lambda'}$，它是 $\mathcal{S}$ 的 R-变形形式在 $\Lambda' \in \mathrm{T}_R$ 处的特化（见第 2.5 小节）。对于上述两种情况，我们分别将记号简化为 $\mathcal{S}_q^{\Lambda'}$ 和 $\mathcal{S}_\zeta^{\Lambda'}$。令 $\mathcal{S}_R^{\Lambda',}{}_j$ 表示 $\mathcal{S}_R^{\Lambda'}$ 在 j 阶分次分量 $M_R(\Lambda')_j$ 上的限制。考虑单参数变形 $M_{R[t^{\pm 1}]}(\Lambda t^\rho)$，其中 t 是一个独立变量。类似地，我们分别用 $\mathcal{S}_q^{\Lambda t^\rho}$ 和 $\mathcal{S}_\zeta^{\Lambda t^\rho}$ 表示 $\mathcal{S}^{\Lambda t^\rho}\,\mathbf{k}_{[t^{\pm 1}]}$ 和 $\mathcal{S}^{\Lambda t^\rho}_{\mathbb{C}[t^{\pm 1}]^\circ}$。

注意到，$L_q(\Lambda) \otimes_{\mathbb{C}(q)} \mathbf{k}$（分别地，$L_\zeta(\Lambda)$）是 $M_q(\Lambda) \otimes_{\mathbb{C}(q)} \mathbf{k}$（分别地，$M_\zeta(\Lambda)$）对 $\mathcal{S}_q^\Lambda$（分别地，$\mathcal{S}_\zeta^\Lambda$）的根基取商所得。因此，只需证明存在一个与 ℓ 无关的正整数 m_Λ，使得对于所有 $j < \frac{\ell}{m_\Lambda}$，$\mathcal{S}_{q,j}^\Lambda$ 和 $\mathcal{S}_{\zeta,j}^\Lambda$ 的根基具有相同的维数。

我们首先断言，存在一个与 ℓ 无关的正整数 m_Λ，使得

$$\mathrm{val}_T\left(\det \mathcal{S}_{\zeta,j}^{\Lambda t^\rho}\right) = \mathrm{val}_T\left(\det \mathcal{S}_{q,j}^{\Lambda t^\rho}\right) \tag{3.1}$$

对于所有 $j < \frac{\ell}{m_\Lambda}$。事实上，由（2.6）可知，对于 $j < \ell$，

$$\det \mathcal{S}_{\zeta,j}^{\Lambda t^\rho} = \prod_{\nu,\alpha} \prod_{1 \leqslant m \leqslant j} \left([m]_{\zeta_\alpha} \Lambda_\zeta t^\rho \left([K_\alpha; (\rho,\alpha) - \frac{m}{2}(\alpha,\alpha)]_\zeta\right)\right)^{\mathrm{p}(\nu - m\alpha)},$$

其中乘积遍历所有高度为 j 的 $\nu \in Q^+$ 和 $\alpha \in \Phi^+$。行列式 $\det \mathcal{S}_{q\,j}^{\Lambda t^\rho}{}_,$ 在将 ζ 替换为 q 后，具有相同的形式。val_T 在 $\det \mathcal{S}_{\zeta\,j}^{\Lambda t^\rho}{}_,$（分别地，$\det \mathcal{S}_{q\,j}^{\Lambda t^\rho}{}_,$）处的取值，等于 $\det \mathcal{S}_{\zeta\,j}^{\Lambda t^\rho}{}_,$（分别地，$\det \mathcal{S}_{q\,j}^{\Lambda t^\rho}{}_,$）在 $t = 1$ 处的消失阶数。注意

$$\mathrm{val}_T\left(\Lambda t^\rho([K_\alpha; (\rho,\alpha) - \frac{m}{2}(\alpha,\alpha)]_q)\right) = 1$$

当且仅当 $\Lambda(K_{2\alpha}) q^{2(\rho,\alpha) - m(\alpha,\alpha)} = 1$。现在假设存在某个 $\alpha \in \Phi^+$，使得对于 $1 \leqslant m \leqslant j$，$\Lambda(K_{2\alpha}) q^{2(\rho,\alpha) - m(\alpha,\alpha)} \neq 1$。那么在特化 $q \mapsto \zeta$ 下，有以下两种可能的情况：

(a)。 对于所有充分大的可取值 ℓ，$\Lambda_\zeta(K_{2\alpha})$ 都不是单位根。那么

$$\Lambda_\zeta(K_{2\alpha}) \zeta^{2(\rho,\alpha) - m(\alpha,\alpha)} \neq 1$$

对于 $1 \leqslant m \leqslant j < \ell$。

(b)。 存在无穷多个可容许的 ℓ 使得 $\Lambda_\zeta(K_{2\alpha})$ 是单位根。于是由引理 3.4，对于 $\ell \gg 0$，

$$\Lambda_\zeta(K_{2\alpha}) = \zeta_{0,\alpha} \zeta^{m_\alpha}$$

对于某个单位根 $\zeta_{0,\alpha}$ 以及 $m_\alpha \in \mathbb{Z}_\circ$ 设 $\zeta_{0,\alpha} = e^{\frac{2\pi\imath a_\alpha}{b_\alpha}}$，其中 a_α，$b_\alpha \in \mathbb{Z}_+$，$\gcd(a_\alpha, b_\alpha) = 1$，且 $a_\alpha \leqslant b_{\alpha\circ}$ 于是 $\Lambda_\zeta(K_{2\alpha})\zeta^{2(\rho,\alpha)-m(\alpha,\alpha)} = e^{2\pi\imath\kappa_\alpha}$，其中

$$\kappa_\alpha = \frac{a_\alpha}{b_\alpha} + \frac{m_\alpha + 2(\rho,\alpha) - m(\alpha,\alpha)}{\ell}. \tag{3.2}$$

设 $\Gamma \subset \Phi^+$ 为 Φ^+ 中满足条件（$\mathbf{b}$）的所有根的集合。对于足够大的可容许 ℓ，我们可以找到一个正整数 m_Λ，例如 $m_\Lambda = 2\max\{d_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$，且与 ℓ 无关，使得对于 $\alpha \in \Gamma$，对所有 $1 \leqslant m \leqslant j < \frac{\ell}{m_\Lambda}$ 都有 $0 < \kappa_\alpha < 1$，即 $\Lambda_\zeta(K_{2\alpha})\zeta^{2(\rho,\alpha)-m(\alpha,\alpha)} \neq 1$。这就完成了该断言的证明。

回顾上一节中引入的扬岑过滤。对于每个 j 次分次分量以及每个 $i \in \mathbb{N}$，定义

$$F^i M_\zeta(\Lambda)_j := F^i M_\zeta(\Lambda) \cap M_\zeta(\Lambda)_j \quad \text{and} \quad F^i M_q(\Lambda)_j := F^i M_q(\Lambda) \cap M_q(\Lambda)_j.$$

赋值恒等式（3.1）意味着，对于任意 $j < \frac{\ell}{m_\Lambda}$，

$$\sum_{i=1}^{\infty} \dim_{\mathbb{C}} F^i M_\zeta(\Lambda)_j = \sum_{i=1}^{\infty} \dim_{\mathbf{k}} F^i M_q(\Lambda)_j.$$

由于对于每个可容许的 ℓ，我们总有 $\dim_{\mathbf{k}} F^i M_q(\Lambda)_j \geqslant \dim_{\mathbb{C}} F^i M_\zeta(\Lambda)_j$，因此两边必须逐项相等：

$$\dim_{\mathbf{k}} F^i M_q(\Lambda)_j = \dim_{\mathbb{C}} F^i M_\zeta(\Lambda)_j$$

对所有 i 和所有 $j < \frac{\ell}{m_\Lambda}$ 均成立。特别地，这给出 $\dim_{\mathbf{k}} F^1 M_q(\Lambda)_j = \dim_{\mathbb{C}} F^1 M_\zeta(\Lambda)_j$，这表明对于所有 $j < \frac{\ell}{m_\Lambda}$，$\mathcal{S}^\Lambda_{q,j}$ 的根基与 $\mathcal{S}^\Lambda_{\zeta,j}$ 的根基维数相同。□

注 3.6。如证明中所示（参见情形 ($\boldsymbol{b}$)），对于每个 ℓ，都必须固定一个特定的 ℓ次本原单位根 ζ，而不能任意选取一个。否则，正如方程 κ_α 中的表达式 (3.2) 所示，m_Λ 的选取可能取决于 ℓ。

现在我们继续证明定理 3.3。

定理 3.3 的证明。 考虑小量子群 u_ζ^- 的负部分 u_ζ，它定义为 U_ζ^- 在 u_ζ 中的像。回忆一下，u_ζ^- 的维数为 ℓ^N，其一组基为

$$\left\{F^{\underline{m}} \mid \underline{m} \in \{0, 1, \ldots, \ell-1\}^N\right\}.$$

对角 Verma 模 $M_\zeta(\Lambda)$ 同构于作为 u_ζ^--模的 u_ζ^-。由于简单 U_ζ-模 $L_\zeta(\Lambda)$ 是 $M_\zeta(\Lambda)$ 的一个商，因此可得 $\dim L_\zeta(\Lambda) \leqslant \dim M_\zeta(\Lambda) = \dim u_\zeta^-$。根据引理 3.5，我们可以固定一个与 ℓ 无关的正整数 m_Λ，使得对于所有 $j < \frac{\ell}{m_\Lambda}$，都有 $\dim L_\zeta(\Lambda)_j = \dim_{\mathbb{C}(q)} L_q(\Lambda)_j$。由此得到不等式：

$$\sum_{j<\ell/m_\Lambda} \dim_{\mathbb{C}(q)} L_q(\Lambda)_j = \sum_{j<\ell/m_\Lambda} \dim L_\zeta(\Lambda)_j \leqslant \dim L_\zeta(\Lambda). \tag{3.3}$$

Let $\nu = \sum_{i=1}^n n_i\alpha_i \in Q^+$，并将其高度定义为 $\mathrm{ht}(\nu) = \sum_{i=1}^n n_i$。接下来我们计算

$$(2\ell-2)(\rho,\rho) = (\ell-1)\sum_{\alpha\in\Phi^+}(\rho,\alpha) \geqslant (\ell-1)\sum_{\alpha\in\Phi^+}\mathrm{ht}(\alpha).$$

由此可得，对于 $\overline{\ } j > (2\ell-2)(\rho,\ \rho)$，有 $M_\zeta(\Lambda)_j = 0$，因此对于这样的 j，有 $L_\zeta(\Lambda)_j = 0$。对于 $m \in \{0,\dots,\ell-1\}^N$，定义 $|m| = m_1 + \ldots + m_N$。令 α_0 为 Φ^+ 中的最高正根，并令 $b = \lfloor m_\Lambda \frac{\ell}{\mathrm{ht}(\alpha_0)} \rfloor$。现在考虑 u_ζ^- 的以下子空间：

$$(u_\zeta^-)^{\leqslant b} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{F^{\underline{m}} \mid \underline{m} \in \{0,1,\dots,\ell-1\}^N, \text{ and } |\underline{m}| \leqslant b\}.$$

其维数由二项式系数 $\binom{b+N}{N}$，给出，该系数大于 $\frac{\ell^N}{C}$，其中我们令 $C = m_\Lambda \mathrm{ht}(\alpha_0) N!$，这是一个与 ℓ 无关的常数。于是 $\dim u_\zeta^- \leqslant C \dim (u_\zeta^-)^{\leqslant b}$。由于简单模 $L_\zeta(\Lambda)$ 是由一维子空间 $L_\zeta(\Lambda)_0$ 在 u_ζ^- 的作用下生成的，因此我们有

$$L_\zeta(\Lambda) = u_\zeta^- L_\zeta(\Lambda)_0 \supset (u_\zeta^-)^{\leqslant b} L_\zeta(\Lambda)_0.$$

由此可得

$$\dim L_\zeta(\Lambda) = \dim u_\zeta^- L_\zeta(\Lambda)_0 \leqslant C \dim (u_\zeta^-)^{\leqslant b} L_\zeta(\Lambda)_0.$$

此外，由于 $(u_\zeta^-)^{\leqslant b} L_\zeta(\Lambda)_0 \subset \oplus_{j<\ell/m_\Lambda} L_\zeta(\Lambda)_j$，我们得出上界：

$$\dim L_\zeta(\Lambda) \leqslant C \sum_{j<\ell/m_\Lambda} \dim L_\zeta(\Lambda)_j = C \sum_{j<\ell/m_\Lambda} \dim_{\mathbb{C}(q)} L_q(\Lambda)_j. \tag{3.4}$$

最后，结合不等式（3.3）和（3.4），我们得到所需结果。 □

4. Equivalence of categories

设 $\mathbb{F}$ 是一个域，使得 $\mathbb{Q}(q) \subset \mathbb{F} \subset \mathbf{k}$，并设 $\mathcal{O}_{q,\mathbb{F}}$ 为所有有限生成权 $U_{\mathbb{F}}$-模中 $U_{\mathbb{F}}^+$ 局部有限作用的全子范畴。本节将阐述 Soergel 对 $\mathcal{O}_{q,\mathbb{F}}$ 的分块所作的结构性描述。

4.1. 整 Weyl 群与根子系。 由于 W 在 $\mathrm{T}_{\mathbb{F}}$ 中对一般权的作用可能导致符号不一致，我们通过 $\mathbb{Z}_2^n$ 的作用对此作出调整。具体而言，我们引入以下有用的记号。

定义 4.1. 设 $\alpha \in \Phi$ 和 $\Lambda \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}$ 满足 $\Lambda(K_{2\alpha}) \in q^{\mathbb{Z}(\alpha,\alpha)}$。定义相对于 Λ 和 α 的修正反射 $s_\alpha^\Lambda \in \widetilde{W}$ 为

$$s_\alpha^\Lambda = (\sigma_\alpha^\Lambda, s_\alpha) \in \mathbb{Z}_2^n \rtimes W,$$

其中，对于 $\mu \in Q$，若 $\Lambda(K_\alpha) \in -q^{\mathbb{Z}(\alpha,\alpha)/2}$，则 σ_α^Λ 由 $\sigma_\alpha^\Lambda(K_\mu) = (-1)^{(\mu,\alpha^\vee)} K_\mu$ 定义；否则，对于 $\mu \in Q$，$\sigma_\alpha^\Lambda(K_\mu) = K_\mu$。

回忆一下子集 $\mathcal{T}_\Lambda$ 见定义 2.6。我们有以下结果。

引理 4.2。 设 $\Lambda \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}$ 满足 $\Lambda(K_{2\alpha}) \in q^{\mathbb{Z}(\alpha,\alpha)}$，其中某个 $\alpha \in \Phi$。则
(1) 若 $\Lambda' = \Lambda q^\mu$ 对于 $\mu \in P$ 成立，则 $s_\alpha^{\Lambda'} = s_\alpha^\Lambda$。(2) 若 $\Lambda' = \sigma\Lambda$ 对于 $\sigma \in \mathbb{Z}_2^n$ 成立，则 $s_\alpha^{\Lambda'} = \sigma' s_\alpha^\Lambda$，其中 $\sigma' \in \mathbb{Z}_2^n$ 通过 $K_\mu \mapsto \sigma(\alpha)^{(\mu,\alpha^\vee)} K_\mu$ 定义。(3) 若存在一个整数 $m \in \mathbb{N}_+$，使得 $(m,\alpha) \in \mathcal{T}_\Lambda$，则 $s_\alpha^\Lambda \cdot \Lambda = \Lambda q^{-m\alpha}$。

证明。对于 (1)，由于 $2(\mu,\alpha) = (\mu,\alpha^\vee)(\alpha,\alpha)$ 且 $(\mu,\alpha^\vee) \in \mathbb{Z}$，因此 $\Lambda'(K_{2\alpha}) \in q^{\mathbb{Z}(\alpha,\alpha)}$，所以 $s_\alpha^{\Lambda'}$ 定义良好。注意到 $\sigma_\alpha^\Lambda = \sigma_\alpha^{\Lambda'}$。因此，$s_\alpha^\Lambda = s_\alpha^{\Lambda'}$。对于 (2)，注意到 $(\sigma\Lambda)(K_\alpha) \in -q^{\mathbb{Z}(\alpha,\alpha)/2}$ 当且仅当 $\Lambda(K_\alpha) \in -\sigma(\alpha)q^{\mathbb{Z}(\alpha,\alpha)/2}$。根据定义，$\sigma_\alpha^{\Lambda'}(K_\mu) = \sigma(\alpha)^{(\mu,\alpha^\vee)}\sigma_\alpha^\Lambda(K_\mu)$，因此证实了断言 (2)。对于 (3)，容易验证，对于 $\mu \in Q$，有 $(\rho - s_\alpha\rho,\mu) = (\mu,\alpha^\vee)(\rho,\alpha)$。接下来

$$\begin{aligned} s_\alpha^\Lambda \cdot \Lambda(K_\mu) &= \left(q^{-\rho}s_\alpha^\Lambda(\Lambda q^\rho)\right)(K_\mu) \\ &= q^{(s_\alpha\rho-\rho,\mu)}(s_\alpha\Lambda)(K_\mu)\sigma_\alpha^\Lambda(\mu) \\ &= q^{(s_\alpha\rho-\rho,\mu)}\Lambda(K_\alpha)^{-(\mu,\alpha^\vee)}\Lambda(K_\mu)\sigma_\alpha^\Lambda(\mu) \\ &= q^{(s_\alpha\rho-\rho,\mu)+(\mu,\alpha^\vee)(\rho,\alpha)-\frac{m(\alpha,\alpha)}{2}(\mu,\alpha^\vee)}\Lambda(K_\mu) \\ &= (q^{-m\alpha}\Lambda)(K_\mu) \end{aligned}$$

对于任意 $\mu \in Q$。于是，断言（3）得证。 □

回顾与整数韦伊群和整数根子系统（W_λ，Φ_λ）相关的 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$，参见 [Hum08]:

$$W_\lambda = \{w \in W \mid w\lambda - \lambda \in Q\},$$
$$\Phi_\lambda = \{\alpha \in \Phi \mid (\lambda,\alpha^\vee) \in \mathbb{Z}\}.$$

对于权 $\Lambda \in \mathrm{T}_\mathbb{F}$，定义 Φ_Λ 的一个子集 Φ 为

$$\Phi_\Lambda = \{\alpha \in \Phi \mid \Lambda(K_{2\alpha}) \in q^{\mathbb{Z}(\alpha,\alpha)}\}.$$

若子集 $\Psi \subset \Phi$ 满足 $-\alpha \in \Psi$，且 $s_\beta\alpha \in \Psi$ 满足 $\alpha,\ \beta \in \Psi$，则称其为 Φ 的一个根子系。可以验证，Φ_Λ 是 Φ 的一个根子系。

Let $\widetilde{W}_\Lambda$ 由所有修正反射生成群，$\sim$ $\sim\alpha \in \Phi_\Lambda$。定义 $\widetilde{W}_\Lambda$ 为 W_Λ 在典范投影 $W \to W$下的像。注意 $W_\Lambda \cap \mathbb{Z}_2^n$ 是平凡的，因此投影映射 $W_\Lambda \to W_\Lambda$ 实际上是群同构。由引理4.2可得

推论 4.3。对于任意权 $\Lambda, \Lambda' \in \mathrm{T}_\mathbb{F}$，有

(1) 若 $\Lambda' = \Lambda q^\mu$ 对某个 $\mu \in P$成立，则 $\Phi_{\Lambda'} = \Phi_\Lambda$ 且 $W_\Lambda = W_{\Lambda'}$。

(2) 若 $\Lambda' = \sigma\Lambda$ 对某个 $\sigma \in \mathbb{Z}_2^n$成立，则 $\Phi_{\Lambda'} = \Phi_\Lambda$ 且 $W_\Lambda \cong W_{\Lambda'}$。

证明。(1)显然。对于(2)，根据定义，直接验证可得 $\Phi_{\Lambda'} = \Phi_\Lambda$，从而 $W_{\Lambda'} = W_\Lambda$。因此，上述同构成立，它将修正反射 s_α^Λ 映射为 $s_\alpha^{\Lambda'}$，其中 $\alpha \in \Phi_\Lambda$。□

更一般地，我们可以用相同的方式为权 $\Lambda \in \mathbf{T_k}$ 定义 Φ_Λ 和 W_Λ。于是得到以下结果。

命题 4.4. 对于线性权 $\Lambda = q^\lambda, \lambda \in \mathfrak{h}^*_\mathbb{Q}$，我们有

1) $\Phi_\Lambda = \Phi_\lambda$ 和 $W_\Lambda = W_\lambda$; 2) $\widetilde{W}_\Lambda = \{w \in \widetilde{W} \mid w\Lambda = \Lambda q^\beta, ,$ 其中某个 $\beta \in Q\}$。

证明。显然，$q^{2(\lambda,\alpha)} \in q^{\mathbb{Z}(\alpha,\alpha)}$ 当且仅当 $2(\lambda,\ \alpha) \in \mathbb{Z}(\alpha,\ \alpha)$，也就是说，$(\lambda,\ \alpha^\vee) \in \mathbb{Z}$。对于任意 $\check{}w \in \widetilde{W}$，记 $\check{}w = \sigma w$，其中 $\sigma \in \mathbb{Z}_2^n$，$w \in W$。设对于某个$\beta \in Q$，$\check{}w\Lambda = \Lambda q^\beta$。由 $\widetilde{W}$-作用在 T_q 上的定义可得 $\check{}w\Lambda = \sigma q^{w\lambda} = q^{\lambda+\beta}$，这意味着

$\widetilde{}$是 σ 在 $\mathbb{Z}_2^n$ 中的恒等元，且 $w\lambda = \lambda + \beta$。因此， $\Phi_\Lambda = \Phi_\lambda$ 且 $W_\Lambda = W_\Lambda$。根据 [Hum08，定理 3。4], 可知 W_λ 是由 W 中的 s_α （对 $\alpha \in \Phi_\lambda$）生成的整魏尔子群。因此 $W_\lambda = W_\Lambda$。第二个断言可直接验证。 □

定义 $\Phi_\Lambda^\pm = \Phi_\Lambda \cap \Phi^\pm$，并令 $\Pi_\Lambda \subset \Phi_\Lambda^+$ 为 Φ_Λ 的单根集合。用 $S_\Lambda = \{s_\alpha \mid \alpha \in \Pi_\Lambda\}$ 表示相应的简单反射集合。于是，$(W_\Lambda,\ S_\Lambda)$ 构成与 $\Lambda \in \mathrm{T}_\mathbb{F}$ 相关联的一个 考克斯特群 。类似地，$(W_\lambda,\ S_\lambda)$ 是与 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ 或 $\lambda \in \mathfrak{h}_\mathbb{Q}^*$ 的线性权 q^λ 相对应的考克斯特群。

记 $\Phi^\vee = \{\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha,\ \alpha)} \mid \alpha \in \Phi\}$。这是 Φ 的对偶系 。如果只要 $\alpha,\ \beta \in \Psi$ 且 $\alpha+\beta \in \Phi$ 时， $\alpha+\beta \in \Psi$ 成立，则称根子系 $\Psi \subset \Phi$ 为闭 。容易验证以下结果。

引理 4.5. 设 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$。则 $\Phi_\lambda^\vee$ 是 $\Phi^\vee$的一个闭根子系。 □

注 4.6. 注意，并非每个对偶封闭根子系都能表示为某个权λ对应的 Φ_λ 。例如，在类型为 B_3 的根系中，仅由短根构成的子系就是一个反例。

我们以一个例子结束本小节，其中引理 4.5 对于与非线性权 Φ_Λ $\Lambda \in \mathrm{T}_\mathbb{F}$相关联的根子系失效。

例 *4.7.* 假设 Φ 是类型为 B_2 的根系，其单根为 α_1 *(*长根*)*和α_2*(*短根*)*。令 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$和 $\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2$。设 $\Lambda \in \boldsymbol{T}^{\mathbb{C}(q)}$ 满足 $\Lambda(K_{\alpha_1}) = 1$ 且 $\Lambda(K_{\alpha_2}) = \imath q^{-1}$。那么直接计算可得 $\Phi_\Lambda = \{\pm\alpha_1, \pm\beta\}$，它构成一个类型为 $A_1 \times A_1$的根系。注意， $\alpha = \alpha_1^\vee + \beta^\vee \in \Phi^\vee$ ，而 $\Lambda(K_{2\alpha}) = -q^{-2} \in -q^{\mathbb{Z}(\alpha,\alpha)}$，因此其对偶 $\Phi_\Lambda^\vee$ 不是闭的。于是，根据引理 *4.5*， Φ_Λ 不可能是任意权 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ 对应的 Φ_λ 。□

4.2. **变形范畴** $\mathcal{O}_R$。 从现在起，设 R 是一个交换诺特 $U_\mathbb{F}^0$-代数，并配备结构映射 τ: $U_\mathbb{F}^0 \to R$。我们将这样的代数R称为 变形代数。回顾 R-子代数 $U_R^\pm$和 U_R^0，它们是在第 2.2小节中引入的。对于 $\Lambda \in \mathrm{T}_\mathbb{F}$，我们如下定义相应的权 $\tau\Lambda \in \mathrm{T}_R$ 。给定 $K = \sum_\mu K_\mu \otimes r_\mu$中的一个元素 $U_R^0 = U_\mathbb{F}^0 \otimes_\mathbb{F} R$，其中 $r_\mu \in R$，令

$$(\tau\Lambda)(K) = \sum_\mu \Lambda(K_\mu)\tau(K_\mu)r_\mu.$$

由此得到如下变形范畴 $\mathcal{O}_R$的概念。

定义 4.8。 令 $\mathcal{O}_R$ 表示所有满足以下条件的 U_R-模 M 所组成的全子范畴：

(i) M 作为 U_R-模是有限生成的。(ii) M 是一个具有权空间分解 $M = \oplus_{\Lambda \in \mathrm{T}_\mathbb{F}} M_{\tau\Lambda}$的权 U_R-模。(iii) 对于每个 $v \in M$， U_R^+-模 $U_R^+.v$作为 R-模是有限生成的。

注 4.9。 范畴 $\mathcal{O}_R$ 是一个阿贝尔的、 R-线性范畴。在特殊情形 $R = \mathbb{F}$下，对于任意 $U_\mathbb{F}^0$-结构 τ: $U_\mathbb{F}^0 \to \mathbb{F}$，即 $\tau \in \mathrm{T}_\mathbb{F}$，有 $\mathcal{O}_R = \mathcal{O}_{q,\ \mathbb{F}}$。此外，对于每个$M$属于 $\mathcal{O}_R$，其权集满足 $\Omega(M) \subset \tau\mathrm{T}_\mathbb{F}$。

对于任意 $\Lambda \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}$，变形 Verma 模 $M_R(\tau\Lambda)$ 属于 $\mathcal{O}_R$。注意，$M_R(\tau\Lambda)$ 作为 R-模是自由的，因此 $\mathcal{O}_R$ 中带有 *Verma* 旗 （一种有限滤过，其子商同构于 Verma 模）的每个模在 R上都是自由的。对于任意变形代数的态射 $R \to R'$，存在一个基变换函子

$$(\text{-}) \otimes_R R' : \mathcal{O}_R \longrightarrow \mathcal{O}_{R'}.$$

特别地，有一个 $U_{R'}$-模同构 $M_R(\tau\Lambda) \otimes_R R' \cong M_{R'}(\tau'\Lambda)$，其中$\tau'$: $U_q^0 \to R'$是结构映射。

为方便起见，在不会引起混淆时，我们将 $\tau\Lambda$ 简记为 Λ，以指称T_R 中的权。按照这一约定，对于每个 $\Lambda \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}$，记号 $M_R(\Lambda)$ 和 $M_{R'}(\Lambda)$ 都是良定义的。

设 R 是一个局部变形代数，极大理想为 $\mathfrak{m}$，其剩余域为 $\mathbb{K} = R/\mathfrak{m}$ 。标准的变形论论证表明，基变换函子 (-) $\otimes_R \mathbb{K}$ 在以下两个同构类之间诱导一个双射

$$\{\text{simple objects in } \mathcal{O}_R\} \overset{1-1}{\longleftrightarrow} \{\text{simple objects in } \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\}.$$

$\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ 的单模（因而也包括 $\mathcal{O}_R$ 的单模）由其最高权参数化，即由 $\mathrm{T}_{\mathbb{F}}$ 中的元素参数化。对于 $\Lambda \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}$，令 $L_{\mathbb{K}}(\Lambda)$ 是 $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ 中最高权为 Λ 的一个单模。它是 $M_{\mathbb{K}}(\Lambda)$ 的一个商。

对于任意变形代数，变形范畴 $\mathcal{O}_R$ 都有足够多的射影对象 R。现在我们汇集若干变形理论中的标准结果，以供后文使用；详见 [AJS94，第 3 节及 4] 。设 P 是 $\mathcal{O}_R$中的一个射影模。那么对于任意变形代数之间的态射$R \to R'$，模 $P \otimes_R R'$ 是 $\mathcal{O}_{R'}$中的射影模，并且自然映射

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_R}(P, \text{-}) \otimes_R R' \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{R'}}(P \otimes_R R', \text{-} \otimes_R R') \tag{4.1}$$

是从 $\mathcal{O}_R$ 到 R'-模范畴的函子同构。进一步假设 R 是一个局部变形代数，其极大理想为 $\mathfrak{m}$，并令 $\mathbb{K} = R/\mathfrak{m}$ 表示其剩余域。那么函子 (·) $\otimes_R \mathbb{K}$ 在 $\mathcal{O}_R$ 中的射影对象同构类与 $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$中的射影对象同构类之间给出一个双射。对于每个 $\Lambda \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}$，令 $P_R(\Lambda)$表示 $\mathcal{O}_R$中 $M_R(\Lambda)$ 的（不可分解）射影覆盖。$\mathcal{O}_R$ 中的每个射影对象都同构于若干射影覆盖的直和。

4.3. 链结原理与块分解。 设 R 为剩余域为 $\mathbb{K}$ 的局部变形代数。$\mathrm{T}_{\mathbb{F}}$ 上由 $\Lambda \uparrow_R \Lambda'$ 生成的 偏序 $\uparrow_R$ 满足：若 $\Lambda = \Lambda'$，或存在整数 $m \in \mathbb{N}_+$ 和根 $\alpha \in \Phi$，使得 $(\tau\Lambda')(K_{2\alpha}) = q^{(-2\rho+m\alpha,\alpha)}$ 属于 $\mathbb{K}$ 且 $\Lambda' = \Lambda q^{m\alpha}$。于是我们有如下论证。

引理 *4.10.* 设 R 是一个局部变形代数，其剩余域为 $\mathbb{K}$。对于任意 $\Lambda \in T_{\mathbb{F}}$，投射覆盖 $P_R(\Lambda)$ 都有一个 *Verma* 旗，其因子形如 $M_R(\Lambda')$，其中$\Lambda' \in T_{\mathbb{F}}$ 且 $\Lambda'\Lambda^{-1} \in q^{Q_+}$。任何这样的 $M_R(\Lambda')$ 恰好出现 $[M_{\mathbb{K}}(\Lambda') : L_{\mathbb{K}}(\Lambda)]$ 次。此外，$[M_{\mathbb{K}}(\Lambda') : L_{\mathbb{K}}(\Lambda)]$ 非零，当且仅当 $\Lambda \uparrow_R \Lambda'$，等价地，当 $\Lambda \uparrow_{\mathbb{K}} \Lambda'$。

证明。 证明过程与单位根情形相同（参见 [AJS94，引理 2.16，命题 4。15]）。根据附录 A.1 对于任意有限维模 $E \otimes M_R(\Lambda')$ 的张量积 $E \in \mathcal{O}_{q,\ \mathbb{F}}$ 以及任意权 $\Lambda' \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}$，均属于 $\mathcal{O}_R$，而后者具有一个 Verma 旗。对于适当的 $P_R(\Lambda$ 和 E， Λ'（不可分解）投射覆盖 $P_R(\Lambda)$ 是该张量积的一个直和项。因此 Jantzen 求和公式（2.7）可用于归纳推出重数非零。 □

如果两个权 Λ 和 Λ' 在 R 上相链接，即 $\Lambda \uparrow_R \Lambda'$ 或 $\Lambda' \uparrow_R \Lambda$，则称它们相链接，并在此情形下记作$\Lambda \sim_R \Lambda'$。令 $X \subset \mathrm{T}_{\mathbb{F}}/\sim_R$ 为链接类的任意并集。定义 $\mathcal{O}_{R,X}$ 为 $\mathcal{O}_R$ 的全子范畴，它由所有这样的模 M 构成：其简单子商的最高权属于 X中的链接类。特别地，如果 X 仅由一个链接类组成，那么 $\mathcal{O}_{R,X}$ 称为 $\mathcal{O}_R$的块。我们有$\mathcal{O}_R$的块分解：

$$\mathcal{O}_R = \bigoplus_{X \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}/\sim_R} \mathcal{O}_{R,X}.$$

对于局部变形代数 $R \to R'$之间的任意态射，基变换 $(\cdot) \otimes_R R'$ 将$\mathcal{O}_{R,X}$ 映到 $\mathcal{O}_{R',X}$中。注意， R' 上的链接类比 R上的更细。

定义 4.11。 设 R 为剩余域为 $\mathbb{K}$的局部变形代数，并令 $\tau : U_{\mathbb{F}}^0 \to R$ 为结构映射。定义

$$\Phi_{R,\Lambda} = \{\alpha \in \Phi \mid (\tau\Lambda)(K_{2\alpha}) \in q^{\mathbb{Z}(\alpha,\alpha)} \ in\ \mathbb{K}\}.$$

类比于 Φ_Λ，集合 $\Phi_{R,\Lambda}$ 构成 Φ 的一个根子系。对于每个 $\alpha \in \Phi_{R,\Lambda}$，令 $s_{R,\alpha}^{\Lambda}$ 表示定义 4.1 中的修正反射 $s_\alpha^{\tau\Lambda}$，其中将 Λ 替换为 $\tau\Lambda$。于是我们定义 $\widetilde{W}_{R,\Lambda} \subset \widetilde{W}$ 为由 $s_{R,\alpha}^{\Lambda}$, $\alpha \in \Phi_{R,\Lambda}$ 生成的子群，并令 $W_{R,\Lambda} \subset \widetilde{W}$ 表示其在投影 $\widetilde{W} \to W$ 下的像。若 $X \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}/\sim_R$ 且 $\Lambda \in X$，则引理 4.2(3) 表明 $X = W_{R,\Lambda} \cdot \Lambda$。我们还分别用 $\Phi_{R,X}$, $W_{R,X}$ 和 $W_{R,X}$ 表示 $\Phi_{R,\Lambda}$, $W_{R,\Lambda}$ 以及 $W_{R,\Lambda}$。

由于 $\widetilde{W}_{R,X}$ 是有限的，因此若 $\Lambda''(\Lambda')^{-1} \in q^{Q_+}$，则集合 X 关于由 $\Lambda' \le \Lambda''$ 定义的偏序有唯一的最高（分别为最低）权。

定义 4.12. 令 $X \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}/\sim_R$。若权 $\Lambda \in X$ 满足 $\Lambda' \le \Lambda$ （分别地，满足 $\Lambda \le \Lambda'$），对所有 $\Lambda' \in X$均成立，则称其为支配 （分别地，反主导）。

注 4.13. 设 $\Lambda = q^\lambda$ 对某个 $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$成立。当 $R = \mathbb{F}$ 带有结构映射$\tau : K_{\alpha_i}^{\pm 1} \mapsto 1$时，对所有 $\Lambda' \in X$ 均有 $\Lambda' \le \Lambda$ （分别地， $\Lambda \le \Lambda'$）这一条件等价于$(\lambda + \rho,\ \alpha^\vee) \notin -\mathbb{N}_+$（分别地，$(\lambda + \rho,\ \alpha^\vee) \notin \mathbb{N}_+$）对所有 $\alpha \in \Phi^+$均成立；若 λ 满足后一条件，则称 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ 为支配（分别地，反主导）。因此，上述术语与经典情形中使用的术语一致。

设 Λ， $\Lambda' \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}$ 满足 $\Lambda'\Lambda^{-1}$ 具有如下形式： q^ν 其中某个 $\nu \in P$；我们称这样的权为相容的。设 R 是一个局部变形代数。根据推论4.3，可得

$$\Phi_{R,\Lambda} = \Phi_{R,\Lambda'} \quad \text{and} \quad \widetilde{W}_{R,\Lambda} = \widetilde{W}_{R,\Lambda'}.$$

选择 $w \in W$，使得 $U_{\mathbb{F}}$-模 $L_q(w\Gamma)$ 是有限维的，其中 $\Gamma := \Lambda'\Lambda^{-1}$。令 X， $X' \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}/\sim_R$ 分别表示包含 Λ 和 Λ' 的链接类。对于任意

模 $M \in \mathcal{O}_{R,\ X}$，我们定义从 $\mathcal{O}_{R,\ X}$ 到 $\mathcal{O}_{R,\ X'}$ 的 平移函子 $T_\Lambda^{\Lambda'}$，其定义为

$$T_\Lambda^{\Lambda'}(M) = \mathrm{pr}_{X'}(L_q(w\Gamma) \otimes M)\,,$$

其中 $\mathrm{pr}_{X'}$ 表示从 $\mathcal{O}_R$ 到块 $\mathcal{O}_{R\text{的投影函子},\ X'}$。从本质上说，这些函子的行为与经典情形相同。它们的正合性、双伴随性及其他性质总结于附录A.1中。

4.4. 变形端同态代数。设 $X \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}/\sim_R$。假设 $\Lambda \in X$ 是反主导的，并令

$$\mathcal{Z}_{R,X} := \mathrm{End}_{\mathcal{O}_R}(P_R(\Lambda)),$$

反主导射影覆盖 $P_R(\Lambda)$ 的端同态 R-代数。以下结果描述了此代数在两种特殊情形下的结构。

引理 4.14 ([Fie06，第 3 节。1])。 设 R 是一个极大理想为 $\mathfrak{m}$的离散赋值环，并设$X \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}/\sim_R$。则
(1) 如果 X 只含一个元素，那么 R-代数 $\mathcal{Z}_{R,\ X}$ 同构于 R。(2) 如果 X 含有两个元素，那么 $\mathcal{Z}_{R,\ X}$ 同构于 $R \times_{\mathbb{K}} R$，即两个投影映射 $R \to \mathbb{K}\colon = R/\mathfrak{m}$的纤维积（拉回）。

证明。对于 (1)，若 X 只包含一个元素 Λ，且它既是支配的又是反支配的，则 $P_R(\Lambda) \cong M_R(\Lambda)$，因此 $\mathcal{Z}_{R,X} \cong R$。对于 (2)，假设 $X = \{\Lambda, \Lambda'\}$，其中 $\Lambda' = s_\alpha^\Lambda \cdot \Lambda$ 是支配的，且 $\Phi_{R,X} = \{\pm\alpha\}$。回顾一下， $M_R(\Lambda')$ 上的双线性形式 $\mathcal{S}_R^{\Lambda'}$ 定义了一个由 U_R-子模构成的递减序列 $\left\{F^i M_R(\Lambda')\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ （见小节 2.5）。应用 (-) $\otimes_R \mathbb{K}$，我们得到相应的由 $U_{\mathbb{K}}$-子模构成的滤过。在此情形下，(2.7) 右端是 $M_{\mathbb{K}}(\Lambda)$ 的特征，因此

$$F^1 M_R(\Lambda') \otimes_R \mathbb{K} \cong M_{\mathbb{K}}(\Lambda) \quad \text{and} \quad F^2 M_R(\Lambda') \otimes_R \mathbb{K} = 0.$$

由于 $F^1 M_R(\Lambda') \otimes_R \mathbb{K}$ 是 $M_{\mathbb{K}}(\Lambda')$ 的唯一极大子模，我们有 $[M_{\mathbb{K}}(\Lambda') : L_{\mathbb{K}}(\Lambda)] = 1$。因此，$M_R(\Lambda')$ 在 $P_R(\Lambda)$ 中的重数为一，而 $P_R(\Lambda)$ 有一个 Verma 旗，其子商为 $M_R(\Lambda)$ 和 $M_R(\Lambda')$（见引理 4.10）。由于支配的 Verma 模必须作为子模出现，我们得到短正合列：

$$0 \longrightarrow M_R(\Lambda') \longrightarrow P_R(\Lambda) \longrightarrow M_R(\Lambda) \longrightarrow 0.$$

令 $\iota\colon M_R(\Lambda') \to P_R(\Lambda)$ 表示包含映射，并令 $\iota'\colon M_{\mathbb{K}}(\Lambda') \to P_{\mathbb{K}}(\Lambda)$ 为其基变换。在闭点上，存在典范映射 $\pi'\colon P_{\mathbb{K}}(\Lambda) \twoheadrightarrow M_{\mathbb{K}}(\Lambda) \hookrightarrow M_{\mathbb{K}}(\Lambda')$，根据 (4.1)，它可提升为态射 $\pi\colon P_R(\Lambda) \to M_R(\Lambda')$。权的考量给出 $\pi' \circ \iota' = 0$，而 $\pi \circ \iota$ 属于 $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_R}(M_R(\Lambda')) \cong R$，因此等于某个 $x_\alpha \in \mathfrak{m}$ 的乘法。若 $\mathrm{val}_{\mathfrak{m}}(x_\alpha) \geqslant 2$，则 $\mathrm{Im}(\pi) \subset F^2 M_R(\Lambda')$，于是

$$\mathrm{Im}(\pi') = \mathrm{Im}(\pi) \otimes_R \mathbb{K} \subset F^2 M_R(\Lambda') \otimes_R \mathbb{K} = 0,$$

与 $\pi' \neq 0$ 矛盾。此外，由于 $F^1 M_R(\Lambda') \neq 0$， $x_\alpha \neq 0$。因此 $\mathrm{val}_{\mathfrak{m}}(x_\alpha) = 1$；特别地，$\mathfrak{m}$ 是由 x_α 生成的主理想。最后，对于 $f \in \mathcal{Z}_{R,\ X}$，注意到 $f(M_R(\Lambda')) \subset M_R(\Lambda')$，因为 $\Lambda' > \Lambda$，因此 f 在 $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_R}(M_R(\Lambda')) \cong R$ 和 $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_R}(M_R(\Lambda)) \cong R$ 中诱导出标量。这给出一个自然映射

$$\mathcal{Z}_{R,X} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{O}_R}(M_R(\Lambda')) \oplus \mathrm{End}_{\mathcal{O}_R}(M_R(\Lambda)) \xrightarrow{\sim} R \oplus R.$$

由于 $x_\alpha \neq 0$，该映射是单射，其像为 $\{(r_{\Lambda'},\ r_\Lambda) \mid r_\Lambda \equiv r_{\Lambda'} \text{ 模 } x_\alpha\}$；它将 $\iota\circ\pi \in \mathcal{Z}_{R,X}$ 映射为 $R\oplus R$ 中的 $(x_\alpha,\ 0)$。因此 $\mathcal{Z}_{R,X} \cong R\times_{\mathbb{K}} R$。□

注 4.15。(i) 在情形 *(1)* 和 *(2)* 中，$\mathcal{O}_{R,X}$ 等价于有限生成 R-模范畴，或等价于 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ *(*或 $U_{q,\mathbb{F}}(\mathfrak{sl}_2)$*)* 的变形主块。(ii) 代数 $\mathcal{Z}_{R,X}$ 是 $W_{R,X}$ 的 ***Soergel*** 余不变代数的变形版本（见 *[Soe90*，端同态定理 *]*）。正如 ***Fiebig*** （同上）所示，该代数本质上是 $\mathcal{O}_{R,X}$ 的范畴中心（或 ***Bernstein*** 中心）。

令 $\mathrm{Frac}(U_{\mathbb{F}}^0)$ 表示 $U_{\mathbb{F}}^0$ 的分式域。考虑 $U_{\mathbb{F}}^0$ 的一个素理想处的 $U_{\mathbb{F}}^0$ 的局部化 R。我们将包含映射 $U_{\mathbb{F}}^0 \overset{\tau}{\hookrightarrow} R \subset \mathrm{Frac}(U_{\mathbb{F}}^0)$ 视为局部变形代数 R 的结构映射。对于一个高度一素理想 $\mathfrak{p}\subset R$，假设存在 $\alpha\in\Phi$ 使得

$$\tau(K_{2\alpha}) + a \in \mathfrak{p}$$

对某个 $a\in\mathbb{F}$。那么 $\mathfrak{p}$ 是由 τ的一个素因子生成的主理想$K_{2\alpha}$（$+a$，因为R 是一个诺特唯一分解整环（见 [Mat87，定理 20。1]）。因此，$R_{\mathfrak{p}}$ 是一个离散赋值环，并且 T 中的任一链接类$_{\mathbb{F}}/\sim_{R_{\mathfrak{p}}}$ 都由一个或两个元素组成。由于 R 是一个整闭整环，[Mat87，定理 11。5] 表明，R 是其在高度一素理想处的所有局部化的交。因此，对于 $X\in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}/\sim_R$ 且 $\Lambda\in X$ 反主导，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{R,X} &\cong \mathrm{End}_{\mathcal{O}_R}(P_R(\Lambda))\otimes_R \bigcap_{\mathrm{ht}\mathfrak{p}=1} R_{\mathfrak{p}}\\ &\cong \bigcap_{\mathrm{ht}\mathfrak{p}=1} \mathrm{End}_{\mathcal{O}_R}(P_R(\Lambda))\otimes_R R_{\mathfrak{p}}\\ &\cong \bigcap_{\mathrm{ht}\mathfrak{p}=1} \mathrm{End}_{\mathcal{O}_{R_{\mathfrak{p}}}}(P_{R_{\mathfrak{p}}}(\Lambda)).\end{aligned}$$

注意，Λ 在其 T 的链接类中仍然是反主导的$_{\mathbb{F}}/\sim_{R_{\mathfrak{p}}}$，对于高度一素理想$\mathfrak{p}\subset R$。因此，$\mathcal{Z}_R(X$（从而$\mathcal{Z}_{R,X}\otimes_R\mathbb{K}$）可以通过引理4.14给出组合描述。更确切地说，在此描述下，我们可以得到 $\mathcal{Z}_{R,X}$ 由元组 $z=\widetilde{(z_w)}$ 构成，其元素属于直和 $\bigoplus_w R$，由 $w\in W_{R,\Lambda}/\mathrm{Stab}_R(\Lambda)$（等价地，由 X 中的权）进行索引，并满足 $z_w \equiv z_{s^\Lambda_{R,\alpha}w}$ (模 x_α)，对所有 $\alpha\in\Phi_{R,X}$均成立。特别地，这意味着 $\mathcal{Z}_{R,X}$ 是一个交换的 R-代数。在此记

$$\mathrm{Stab}_R(\Lambda) = \mathrm{Stab}_{\widetilde{W}_{R,\Lambda}}(\Lambda) := \{w\in \widetilde{W}_{R,\Lambda} \mid w\cdot\Lambda=\Lambda\}\subset \widetilde{W}_{R,\Lambda}.$$

设 Λ，$\Lambda'\in\mathrm{T}_{\mathbb{F}}$ 是两个相容权。若 Λ，Λ' 满足下列条件，我们称它们属于$W_{R,\Lambda}$ 的同一$\widetilde{\ }$“面”的闭包

$$q^{2(\rho,\alpha)}(\tau\Lambda)(K_{2\alpha})\in q^{\mathbb{N}(\alpha,\alpha)} \quad\text{iff}\quad q^{2(\rho,\alpha)}(\tau\Lambda')(K_{2\alpha})\in q^{\mathbb{N}(\alpha,\alpha)} \quad \text{for all } \alpha\in\Phi_{R,\Lambda}. \tag{4.2}$$

于是我们得到以下结果。

命题 4.16。设 R 如上，并设 $X,X'\in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}/\sim_R$ 具有反支配权$\Lambda\in X$, $\Lambda'\in X'$。若 Λ,Λ' 相容且满足条件 (4.2) 和 $\mathrm{Stab}_R(\Lambda)\subset\mathrm{Stab}_R(\Lambda')$，则

$$\mathcal{Z}_{R,X} \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}_{R,X'}^{\bigoplus |\mathrm{Stab}_R(\Lambda')/\mathrm{Stab}_R(\Lambda)|}$$

作为 $\mathcal{Z}_{R,X'}$-模。此外，存在一个从 R-代数 $\mathcal{Z}_{R,X'} \to \mathcal{Z}_{R,X}$到 $\mathcal{Z}_{R,X}$ 的自然嵌入，它将每个 $z \in \mathcal{Z}_{R,X'}$ 映射为 $|\mathrm{Stab}_R(\Lambda')/\mathrm{Stab}_R(\Lambda)|$ 个 z 的副本，依照上述同构的意义。

证明。我们首先注意到从 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\mathbb{K}}\big(T^\Lambda_{\Lambda'}\big(P_\mathbb{K}(\Lambda')\big), L_\mathbb{K}(w\cdot\Lambda)\big)$ 到 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\mathbb{K}}\big(P_\mathbb{K}(\Lambda') T^{\Lambda'}_\Lambda\big(L_\mathbb{K}(w\cdot\Lambda)\big)\big)$ 的自然同构。当 w 位于 $\mathsf{Stab}_R(\Lambda)$ 中时，后一个空间在 $\mathbb{K}$ 上是一维的；否则它为零。这是因为 $T^{\Lambda'}_\Lambda\big(L_\mathbb{K}(\Lambda)\big) \cong L_\mathbb{K}(\Lambda')$，这一事实源于：包含 Λ' 的整数部分 λ' 位于包含 Λ 的整数部分 $\hat{}\lambda$ 的面的上闭包中（参见引理 A.3 和 [Hum08，定理 7.11]）。由于 $T^\Lambda_{\Lambda'}\big(P_R(\Lambda')\big)$ 是射影对象，上述计算表明它恰好是 $P_R(\Lambda)$。于是，$T^\Lambda_{\Lambda'}$ 诱导出一个 R-代数同态 $\mathcal{Z}_{R,X'} \to \mathcal{Z}_{R,X}$。此外，根据推论 A.5(1)，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{R,X} &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_R}\big(T^\Lambda_{\Lambda'}(P_R(\Lambda')), P_R(\Lambda)\big)\\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_R}\big(P_R(\Lambda'), T^{\Lambda'}_\Lambda(P_R(\Lambda))\big)\\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_R}\big(P_R(\Lambda'), P_R(\Lambda')^{\oplus r}\big)\\ &\cong \mathcal{Z}^{\oplus r}_{R,X'}\end{aligned}$$

其中 $r := |\mathsf{Stab}_R(\Lambda')/\mathsf{Stab}_R(\Lambda)|$。在上述态射下，每个 $z \in \mathcal{Z}_{R,X'}$ 都映射到 $\mathcal{Z}_{R,X}$ 中 z 的 r 个副本。因此，该态射是单射。□

注 4.17。将 $\mathcal{Z}_{R,X}$ 描述为元组 $z = (z_w) \in \bigoplus_w R$，自然地得到商群 $W_{R,\Lambda}/\mathrm{Stab}_R(\Lambda)$ 的一个作用，其定义如下：

$$x.z = (z'_w), \qquad z'_w = z_{wx}, \quad \forall x \in \widetilde{W}_{R,\Lambda}/\mathrm{Stab}_R(\Lambda).$$

在此作用下，上述命题中的子代数 $\mathcal{Z}_{R,X'}$ 可识别为 $\mathcal{Z}_{R,X}$ 的$\mathrm{Stab}_R(\Lambda')/\mathrm{Stab}_R(\Lambda)$-不变子代数。

4.5. **范畴 $\mathcal{O}_{q,\mathbb{F}}$ 的组合结构**。为了确定每个块 $\mathcal{O}_{R,X}$ 的范畴结构，我们研究 $\mathcal{O}_{R,X}$ 中投射生成元的自同态代数。具体而言，考虑 $\mathcal{O}_{R,X}$ 中的极小投射生成元 $P_{R,X} = \oplus_{\Lambda\in X} P_R(\Lambda)$，并令 $E_{R,X} = \mathsf{End}_{\mathcal{O}_R}(P_{R,X})$。那么函子

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_R}(P_{R,X}, \text{-}) : \mathcal{O}_{R,X} \longrightarrow \text{mod-}E_{R,X} \tag{4.3}$$

是以下范畴之间的等价：R-线性范畴，其中 mod-$E_{R,X}$ 表示有限生成右$E_{R,X}$-模的范畴。这是一个标准论证；例如，参见 [Bas68，定理 II.1。3] 关于更一般的情形。

令 $\mathcal{R}$ 为 $U^0_\mathbb{F}$ 在由 $K_\alpha - 1$ 生成的极大理想处的局部化，其中对所有 $\alpha \in \Phi$ 均成立。我们称这样的 $\mathcal{R}$ 为类型 **1**。典范嵌入 $\tau\colon U^0_\mathbb{F} \hookrightarrow \mathcal{R}$ 充当结构映射，而复合映射 $U^0_\mathbb{F} \hookrightarrow \mathcal{R} \to \mathbb{F}$ 由求值 $K_\alpha \mapsto 1$ 给出，其中对所有 $\alpha \in \Phi$ 均成立。在本小节中，我们始终将 $\mathbb{F}$ 视为 $\mathcal{R}$ 的剩余域。于是 $\mathcal{O}_\mathbb{F}$ 与 $\mathcal{O}_{q,\mathbb{F}}$ 重合，并且对任意 $\Lambda \in \mathsf{T}_\mathbb{F}$，有

$$\Phi_{\mathcal{R},\Lambda} = \Phi_\Lambda, \quad \widetilde{W}_{\mathcal{R},\Lambda} = \widetilde{W}_\Lambda.$$

对于任意素理想 $\mathfrak{p} \subset \mathcal{R}$，令 $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$ 表示 $\mathcal{R}$ 在 $\mathfrak{p}$ 处的局部化，并令 $\mathbb{K}_\mathfrak{p} = \mathcal{R}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}\mathcal{R}_\mathfrak{p}$ 为其剩余域。对于每个 $\alpha \in \Phi$，用 $\mathcal{R}_\alpha$ 表示 $\mathcal{R}$ 在由 $\tau(K_\alpha) - 1$ 生成的素理想处的局部化，其剩余域为 $\mathbb{K}_\alpha$。

引理 4.18。令 $\Lambda \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}$，并令 $\mathfrak{p} \subset \mathcal{R}$ 为任意素理想。那么，根 $\alpha \in \Phi_{\mathcal{R}_{\mathfrak{p}},\Lambda}$ 当且仅当 $\alpha \in \Phi_\Lambda$ 且 $\tau(K_\alpha) - 1 \in \mathfrak{p}$。特别地，$\Phi_{\mathcal{R}_\alpha,\Lambda}$ 要么为空，要么等于 $\{\pm\alpha\}$，相应的链接类要么为 $\{\Lambda\}$，要么为 $\{\Lambda, s_\alpha^\Lambda \cdot \Lambda\}$。

证明。根据假设，$\mathcal{R}$ 是一个局部代数，其极大理想由 $\tau(K_\mu) - 1$ 对所有 $\mu \in P$ 生成。根据定义4.11，$\alpha \in \Phi_{R_{\mathfrak{p}},\Lambda}$ 当且仅当 $(\tau\Lambda)(K_{2\alpha}) \in q^{\mathbb{Z}(\alpha,\alpha)}$ 在 $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ 中。此时，我们有 $\tau(K_{2\alpha}) = 1$ 在 $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ 中，并且 $\Lambda(K_{2\alpha}) \in q^{\mathbb{Z}(\alpha,\alpha)}$，因此 $\tau(K_{2\alpha}) - 1 \in \mathfrak{p}$，$\alpha \in \Phi_\Lambda$。□

回顾与 $\Lambda \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}$ 相关联的 Coxeter 系统 (W_Λ, S_Λ)（见小节 4.1），并且设 $\Lambda = \overline{W_\Lambda \cdot \Lambda}$。我们将证明，块 $\mathcal{O}_{\mathbb{F},\Lambda}$ 仅取决于该 Coxeter 系统的同构类及其在 Λ上的作用。

为后文使用，先回顾一下 $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$ 中的一些基本概念和结果。

定义 4.19。若一个权 Λ 满足 正则 条件，即 $\mathrm{Stab}(\Lambda) := \mathrm{Stab}_{\widetilde{W}_\Lambda}(\Lambda)$ 是平凡的，则称其为正则权。

下面的事实是显然的。

引理 4.20。设 w 是 W_Λ 中使得 $w \cdot \Lambda$ 支配（或反主导）的唯一元素。那么 Λ 是正则的。□

对于任意 $\Lambda \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}$，如果 Λ 满足 整权 条件 $\Phi_\Lambda = \Phi$；在此情况下，$W_\Lambda = W$。显然，对于任意 $\lambda \in P$，线性权 q^λ 是整权，且只有这些线性权是整权。回顾 $\mathbb{Z}_2^n$ 在 T 上的作用$_{\mathbb{F}}$（参见（2.4）和（2.5））。那么半直积子群

$$\mathcal{P} := \mathbb{Z}_2^n \rtimes \{q^\lambda \mid \lambda \in P\}$$

T 的$_{\mathbb{F}}$恰好是 T 中的所有整权$_{\mathbb{F}}$。此外，子集 $\mathbb{Z}_2^n \rtimes \{q^\lambda \mid \lambda \in P^+\}$ $\mathcal{P}$，记作 $\mathcal{P}^+$，通过其最高权 $U_{\mathbb{F}}$来参数化所有有限维简单 [Jan95]-模的同构类 [Jan95]。例如，每个权 $\sigma \in \mathbb{Z}_2^n \subset \mathcal{P}^+$ 对应于一个一维 $U_{\mathbb{F}}$-模，在该模上 $K_{\alpha_i}^{\pm 1} = \sigma(\alpha_i)$，且 $E_i = F_i = 0$，$i \in I$。因此，它诱导出一个范畴等价

$$\mathcal{F}_\sigma : \mathcal{O}_{\mathbb{F},\overline{\sigma\Lambda}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathbb{F},\overline{\Lambda}} \tag{4.4}$$

通过将每个模 M 映射为 M 与由上述 σ 确定的一维 $U_{\mathbb{F}}$-模的张量积。

为简便起见，将 $\sim$ 记为 $\sim_{\mathcal{R}} = \sim_{\mathbb{F}}$。令 $X \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}/\sim$，并选取 $\Lambda \in X$ 为反占优的。我们已知前一小节中定义的代数 $\mathcal{Z}_{\mathcal{R},X}$ 是一个交换 $\mathcal{R}$-代数。定义结构函子

$$\mathbb{V}_{\mathcal{R},X} := \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_R}(P_{\mathcal{R}}(\Lambda), \text{-}) : \mathcal{O}_{\mathcal{R},X} \longrightarrow \mathcal{Z}_{\mathcal{R},X}\text{-mod},$$

它是 [Soe90]中所考察的经典函子的类似物。此处我们省略对其性质的详细讨论，因为这些性质与经典情形中的性质相似；更多性质请参见附录A.2 。

令 $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ 为 $\mathcal{O}_{\mathcal{R}}$ 的全子范畴，由具有 Verma 旗的模组成。特别地，$\mathcal{O}_{\mathcal{R}}$ 中的所有投射对象都属于 $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$。令$\mathcal{M}_{\mathcal{R},X}$ 为 $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$中对应的块。令 X，$X' \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}/\sim$ 具有反主导权 $\Lambda \in X$、$\Lambda' \in X'$。假设

满足 Λ、Λ' 相容，满足条件 (4.2)，且 Stab(Λ) $\subset$ Stab(Λ′)。那么命题 4.16 表明，$\mathcal{Z}_{\mathcal{R},X'}$ 可以自然地嵌入$\mathcal{Z}_{\mathcal{R},X}$中。因此，我们可以定义诱导函子 Ind(-) $= \mathrm{Ind}^{\mathcal{Z}_{\mathcal{R},\mathcal{Z}_{\mathcal{R}\Lambda'}}}_{\Lambda}$(-) $= \mathcal{Z}_{\mathcal{R},\Lambda} \otimes_{\mathcal{Z}_{\mathcal{R},\Lambda'}}$(-)以及限制函子 Res(-) $= \mathrm{Res}^{\mathcal{Z}_{\mathcal{R},\mathcal{Z}_{\mathcal{R}\Lambda'}}}$(-)，后者是 Ind(-) 的右伴随。

引理 4.21. 设 $X, X' \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}/\sim$满足 $\Lambda \in X$, $\Lambda' \in X'$为反主导。假设 Λ, Λ'彼此相容，满足条件 (4.2) 且 $\mathrm{Stab}(\Lambda) \subset \mathrm{Stab}(\Lambda')$。则有如下函子同构：

(1) $\mathbb{V}_{\mathcal{R},X'} \circ T_{\Lambda}^{\Lambda'} \cong \mathrm{Res} \circ \mathbb{V}_{\mathcal{R},X} : \mathcal{M}_{\mathcal{R},X} \xrightarrow{\quad} \mathcal{Z}_{\mathcal{R},X'}$-模,(
2) $\mathbb{V}_{\mathcal{R},X} \circ T_{\Lambda'}^{\Lambda} \cong \mathrm{Ind} \circ \mathbb{V}_{\mathcal{R},X'} : \mathcal{M}_{\mathcal{R},X'} \xrightarrow{\quad} \mathcal{Z}_{\mathcal{R},X}$-模。

证明。 X 由两个元素组成且 X' 由一个元素组成的关键情形已在命题 A.8(2)中处理。由引理 4.18 可知，在 $\sim$ 下，每个链接类 $X = W_{R,\Lambda} \cdot \Lambda$ 都分解为$\sim_{\mathcal{R}_\alpha}$下的链接类，且每个链接类包含一个或两个元素。利用 $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ 中的对象是其在高度一素理想处局部化的交（因为它们是自由的 $\mathcal{R}$-模；参见第 4.4 小节中的类似讨论）这一事实，我们证明第一个断言；第二个断言的证明类似。对于$M \in \mathcal{M}_{\mathcal{R},X}$，由推论 A.7(1)，$\mathcal{Z}_{\mathcal{R},X'}$-模$\mathbb{V}_{\mathcal{R},X'}\big(T_{\Lambda}^{\Lambda'}($ $M)\big)$ 也是自由的 $\mathcal{R}$-模。对每个素数 $\mathfrak{p}$，令$X_{\mathfrak{p}} \subset X$ （分别为 $X'_{\mathfrak{p}} \subset X'$）表示关于$\sim_{\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}}$ 包含权Λ （分别为 Λ'）的链接类。设 $M_{\mathfrak{p}} := M \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$。于是由命题 A.2、推论 A.7(2)和命题 A.8(2)，可得

$$\mathbb{V}_{\mathcal{R},X'}\big(T_{\Lambda}^{\Lambda'}(M)\big) = \bigcap_{\mathrm{ht}\mathfrak{p}=1} \mathbb{V}_{\mathcal{R},X'}\big(T_{\Lambda}^{\Lambda'}(M)\big) \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}_{\mathfrak{p}} \cong \bigcap_{\mathrm{ht}\mathfrak{p}=1} \mathbb{V}_{\mathcal{R}_{\mathfrak{p}},X'_{\mathfrak{p}}}\big(T_{\Lambda}^{\Lambda'}(M_{\mathfrak{p}})\big)$$
$$\cong \bigcap_{\mathrm{ht}\mathfrak{p}=1} \mathrm{Res}\big(\mathbb{V}_{\mathcal{R}_{\mathfrak{p}},X_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})\big) \cong \mathrm{Res}\big(\mathbb{V}_{\mathcal{R},X}(M)\big).$$

这一识别具有函子性，因此给出了 (1) 中的同构。 □

设 $X' \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}/\sim$。任取 $\Lambda' \in X'$。根据前面的讨论，我们已经知道 $\mathcal{Z}_{\mathcal{R},X'}$ 的代数结构（第 4.4 小节）。现在我们要描述 $\mathcal{Z}_{\mathcal{R},X'}$-模 $\mathbb{V}P_{\mathcal{R}}(\Lambda')$ 的结构。若 Λ' 是支配的，则有同构 $P_{\mathcal{R}}(\Lambda') \cong M_{\mathcal{R}}(\Lambda')$，因此由引理 A.6(2) 可得 $\mathbb{V}P_{\mathcal{R}}(\Lambda') \cong \mathcal{Z}_{\mathcal{R},X'}/\mathcal{I}_{\Lambda'}$。一般而言，对于任意权 $\Lambda' \in X'$，也可以根据先前的结果和附录 A 中的讨论，对 $\mathcal{Z}_{\mathcal{R},X'}$-模 $\mathbb{V}P_{\mathcal{R}}(\Lambda')$ 作归纳描述。这个归纳描述表明，模结构仅取决于相应的考克斯特群及其在 Λ' 上的作用。构造过程概述如下。

(i) 设 $\Lambda' \in X'$ 是支配的。选取一个与 Λ' 兼容且满足条件（4.2）的正则支配权 $\Lambda \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}$ （相对于 $\sim$），并令 $X \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}/\sim$ 为相应的链接类。那么 $T_{\Lambda}^{\Lambda'} : \mathcal{O}_{\mathcal{R},X} \to \mathcal{O}_{\mathcal{R},X'}$ 诱导出一个 $\mathcal{R}$-代数的嵌入

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{R},X'} \longrightarrow \mathcal{Z}_{\mathcal{R},X}$$

且 $\mathcal{Z}_{\mathcal{R},X'}$ 可以实现为不变子代数 $\mathcal{Z}^{\mathrm{Stab}(\Lambda')}{}_{\mathcal{R},X}$ (命题4.16)

(ii) 设 $w \in W_{\Lambda'}$，并用 $\bar{w} \in W_{\Lambda'}/\mathrm{Stab}(\Lambda')$ 表示其像。则模$T_{\Lambda}^{\Lambda'} P_{\mathcal{R}}(w \cdot \Lambda)$ 分解为 $|\mathrm{Stab}(\Lambda')|$ 个 $P_{\mathcal{R}}(\bar{w} \cdot \Lambda')$ 的直和，且可能还包含

其他直和项 $P_{\mathcal{R}}(\bar{w}'\cdot\Lambda')$，其中 $\bar{w}'\cdot\Lambda'>\bar{w}\cdot\Lambda'$。应用函子 $\mathbb{V}$ 可得

$$\mathbb{V}_{\mathcal{R},X'}\circ T_{\Lambda}^{\Lambda'}\big(P_{\mathcal{R}}(w\cdot\Lambda)\big)\cong \mathrm{Res}\circ\mathbb{V}_{\mathcal{R},X}\big(P_{\mathcal{R}}(w\cdot\Lambda)\big).$$

因此，$\mathbb{V}\big(T_{\Lambda}^{\Lambda'}P_{\mathcal{R}}(w\cdot\Lambda)\big)$ 分解为 $|\mathrm{Stab}(\Lambda')|$ 个 $\mathbb{V}P_{\mathcal{R}}(\bar{w}\cdot\Lambda')$ 的副本，以及可能的其他项 $\mathbb{V}P_{\mathcal{R}}(\bar{w}'\cdot\Lambda')$，其中 $\bar{w}'\cdot\Lambda'>\bar{w}\cdot\Lambda'$（引理 4.21 和推论 A.5）。因此，上述同构给出了 $\widetilde{\mathbb{V}P_{\mathcal{R}}(\bar{w}\cdot\Lambda')}$ 的归纳描述，前提是对于所有满足 $w'\cdot\Lambda>w\cdot\Lambda$ 的 $w'\in W_{\Lambda}(=W_{\Lambda'})$，$\mathbb{V}P_{\mathcal{R}}(w\cdot\Lambda)$ 已知。

(iii) 利用 (4.4)，不失一般性地假设 $W_{\Lambda}=W_{\Lambda}$。选取关于考克斯特群 $(W_{\Lambda},S_{\Lambda})$ 的一个约化表达式 $w=s_{\gamma_1}\cdots s_{\gamma_t}$，其中$s_{\gamma_i}\in S_{\Lambda}$。随后我们按 w 的长度归纳构造 $\mathbb{V}P_{\mathcal{R}}(w\cdot\Lambda)$。记 Θ_i 为经过“s_{γ_i}-墙”的平移（见附录 A.1）。考虑 $\mathcal{Z}_{\mathcal{R},X}$-模$\Theta_t\cdots\Theta_1P_{\mathcal{R}}(\Lambda)$。射影对象 $P_{\mathcal{R}}(w\cdot\Lambda)$ 被唯一确定为这样的不可分解直和项：它不同构于任何满足 $l(w')<l(w)$ 的 $P_{\mathcal{R}}(w'\cdot\Lambda)$。类似地，$\mathbb{V}P_{\mathcal{R}}(w\cdot\Lambda)$ 可以实现为以下对象的直和项

$$\mathcal{Z}\otimes_{\mathcal{Z}_t}\mathcal{Z}\cdots\otimes_{\mathcal{Z}_2}\mathcal{Z}\otimes_{\mathcal{Z}_1}\mathcal{Z}/\mathcal{I}_{\Lambda},$$

它不同构于任意长度小于 w 的 $w'\in W_{\Lambda}$ 所对应的 $\mathbb{V}P_{\mathcal{R}}(w'\cdot\Lambda)$（参见引理 A.6）。这里 $\mathcal{Z}:=\mathcal{Z}_{\mathcal{R},X}$，且 $\mathcal{Z}_i:=\mathcal{Z}_{\mathcal{R}}^{\langle s_{\gamma_i}\rangle}{}_{X}$。因此，我们得到了对 $\mathbb{V}P_{\mathcal{R}}(w\cdot\Lambda)$ 的归纳描述。

此外，将函子 $\mathbb{V}$ 限制到 $\mathcal{M}_{\mathcal{R},X}\subset\mathcal{O}_{\mathcal{R},X}$，可得以下结果。范畴 $\mathcal{O}_{\mathcal{R},X}$ 的范畴结构由其子范畴 $\mathcal{M}_{\mathcal{R},X}$ 决定，这使我们能够进一步理解 $\mathcal{O}_{\mathcal{R},X}$ 的结构。

命题 4.22. 函子 $\mathbb{V}:\mathcal{M}_{\mathcal{R},X}\to\mathcal{Z}_{\mathcal{R},X}$-模 是全忠实的，即：

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_{\mathcal{R},X}}(M,N)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}_{\mathcal{R},X}\text{-mod}}(\mathbb{V}M,\mathbb{V}N)$$

对于任意 $M,N\in\mathcal{M}_{\mathcal{R},X}$，它都是一个同构。

证明。 证明采用与引理 4.21 的证明相同的策略。在局部化的情形下，命题 A.8 给出了所需的识别，由此即可得到该结论。□

设 $U_q'=U_q(\mathfrak{g}')$ 是相对于另一个有限维半单李代数 $\mathfrak{g}'$ 的量子群。下文中，我们暂时使用带撇号的符号 $U_{\mathbb{F}}'$、$\mathbf{T}_{\mathbb{F}}'$、$\widetilde{\ }$、$\widetilde{W'}$、$\mathcal{O}_{q,\mathbb{F}}'$ 等，来表示与量子群 U_q' 对应的 $U_{\mathbb{F}}$、$\mathbf{T}_{\mathbb{F}}$，W，$\mathcal{O}_{q,\mathbb{F}}$ 的对应对象。

现在陈述本节的主要结果。

定理 4.23。 设 $\Lambda\in\mathrm{T}_{\mathbb{F}}$ 和 $\Lambda'\in\mathrm{T}_{\mathbb{F}}'$ 是权，且二者均为支配权或反主导权。假设存在一个考克斯特群同构

$$(W_{\Lambda},S_{\Lambda})\cong(W_{\Lambda'}',S_{\Lambda'}')$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$从而诱导出群的同构 $W_{\Lambda}\to W_{\Lambda'}'$，$x\mapsto x'$ 以及链接类之间的双射

$$\overline{\Lambda}\longrightarrow\overline{\Lambda'},\quad x\cdot\Lambda\longmapsto x'\cdot\Lambda'.$$

那么，相应的块 $\mathcal{O}_{\mathbb{F},\Lambda}$ 和 $\mathcal{O}'_{\mathbb{F},\Lambda'}$ 作为范畴是等价的。在此等价下，*Verma* $U_{\mathbb{F}}$-模 $M_q(x\cdot\Lambda)$ 及其简单商模 $L_q(x\cdot\Lambda)$ 分别对应于 *Verma* $U'_{\mathbb{F}}$-模 $M'_q(x'\cdot\Lambda')$ 及其简单商模 $L'_q(x'\cdot\Lambda')$。

证明。根据等价（4.4），我们可以固定情形，使得 $W_\Lambda = W_{\widetilde{\Lambda}}$ 和 $W'_{\Lambda'} = W'_{\widetilde{\Lambda}'}$。为分析块 $\mathcal{O}_{\mathbb{F},\Lambda}$（或 $\mathcal{O}_{\mathcal{R},\Lambda}$），只需了解端同态代数 $E_{\mathcal{R},\Lambda}$。事实上，等价（4.3）结合基变换同构 $P_{\mathbb{F}}(w\cdot\Lambda)\cong P_{\mathcal{R}}(w\cdot\Lambda)\otimes_{\mathcal{R}}\mathbb{F}$ 和（4.1），将问题归结为描述空间 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{R}}}(P_{\mathcal{R}}(x\cdot\Lambda), P_{\mathcal{R}}(y\cdot\Lambda))$，其中 $x,y\in W_\Lambda$。命题 4.22 给出了涉及 $\mathbb{V}$ 的函子性识别，因此只需确定 $\mathbb{V}P_{\mathcal{R}}(x\cdot\Lambda)$。此前得到的组合描述表明，每个 $\mathbb{V}P_{\mathcal{R}}(x\cdot\Lambda)$ 的结构，以及由此得到的 $E_{\mathcal{R},\Lambda}$，完全由 Coxeter 系统 (W_Λ, S_Λ) 和 Λ 的稳定子决定。证明完毕。□

–

上述定理是 Soergel 对结构描述的一种量子类比 [Soe90]。虽然我们研究的是 $\mathcal{O}_{q,\mathbb{F}}$，但其“非整数”块可通过对整数魏尔子群和根子系作适当扩张，以类似的组合方式加以描述。如上所述，这一推广似乎并未引入任何本质差异。然而，例 4.7 表明，量子情形下的整数根子系与经典情形存在某些差异，下一节将对此进行讨论。

5. Minimal growth

本节中，我们通过 Lusztig 的**a** 函数，确定 $\mathcal{O}_{q,\mathbb{F}}$ 中每个简单模的 GK 维数。此外，我们还计算非零的最小 GK 维数，并指出其与经典情形的区别。

5.1. **Lusztig 的 a 函数。** 设 $S=\{s_\alpha \mid \alpha\in\Pi\}\subset W$。在 [Lus84], Lusztig 将主分块 $\mathcal{O}_{\bar{0}}(\mathfrak{g})$ 中简单对象的 GK 维数与一个函数 $\mathbf{a}: W\to\mathbb{N}$ 联系起来，该函数定义于 Coxeter 系统 (W, S)。下面简要回顾相关定义。

设 v 为一个不定元。*Hecke* 代数 $\mathcal{H}$ 是由元素 $T_w, w\in W$ 生成的 $\mathbb{Z}[v,v^{-1}]$-代数，并满足以下关系：

$$(T_s+v^{-1})(T_s-v)=0 \quad \text{for any } s\in S, \tag{5.1}$$

$$T_wT_{w'}=T_{ww'} \quad \text{if } l(ww')=l(w)+l(w'), \tag{5.2}$$

其中，l 是 (W,S) 的长度函数。令 $\{C_w, w\in W\}$ 为 $\mathcal{H}$ 的*Kazhdan-Lusztig* 基，它被刻画为满足以下条件的唯一元素 $C_w\in\mathcal{H}$：

$$\overline{C_w}=C_w, \quad C_w\equiv T_w (\mathrm{mod}\ \mathcal{H}_{<0})$$

其中，$\bar{()}:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ 是横杠对合，满足 $\bar{v}=v^{-1}$, $T_w=T_{w^{-1}}^{-1}$ 和 $\overline{\mathcal{H}_{<0}}=\oplus_{w\in W}v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}]T_w$。假设对于某些 $h_{x,y,z}\in\mathbb{Z}[v,v^{-1}]$，有 $C_xC_y=\sum_{z\in W}h_{x,y,z}C_z$。那么我们有以下定义。

定义 5.1。 函数 $\mathbf{a}: W\to\mathbb{N}$ 定义为

$$\mathbf{a}(z)=\max\{\deg h_{x,y,z} \mid x,y\in W\}$$

对于每个 $z\in W$。

对每个 $\Lambda \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}$，我们关联一个 Coxeter 系统（$W_\Lambda$，$S_\Lambda$）（参见小节 4.1），并据此定义相应的 Hecke 代数 $\mathcal{H}_\Lambda$ 和 Lusztig 函数$\mathbf{a}_\Lambda$：$W_\Lambda \to \mathbb{N}$。一般而言，$\mathcal{H}_\Lambda$ 不一定是 $\mathcal{H}$ 的子代数，且 $\mathbf{a}_\Lambda$ 不一定是 $\mathbf{a}: W \to \mathbb{N}$ 的限制，因为 S_Λ（任意可能的选择）并非总能实现为 S 的子集。

设 w_0 为 (W,S) 的 $l(w_0) = |\Phi^+|$, $w_0 \cdot 0 = -2\rho \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$是反主导的，而 $L(ww_0 \cdot 0)$, $w \in W$ 都是 $\mathcal{O}_{\bar{0}}(\mathfrak{g}$中的简单对象。根据 [Lus84]，以下性质成立。

引理 5.2。对每个 $w \in W$，我们有

$$\mathbf{a}(w) = l(w_0) - d_{U(\mathfrak{g})}\left(L(ww_0 \cdot 0)\right). \qquad \square$$

给定 y，$w \in W$，若 C_y 关于基 $\{C_w, w \in W\}$ 的乘积 CC_w 的展开中出现，其中 $C \in \mathcal{H}$，则记为 $y \leftarrow^L w$。将 $\leftarrow^L$ 扩展为 W 上的预序 $\prec^L$。令 $\sim^L$ 为相应的等价关系，即当且仅当 $w \prec^L w'$ 和 $w' \prec^L w$ 时有 $w \sim^L w'$。此外，我们定义 $w \prec^R w'$ 为 $w^{-1} \prec^L w'^{-1}$，定义 $w \sim^R w'$ 为 $w^{-1} \sim^L w'^{-1}$。令 $\prec^{LR}$ 为由 $\prec^L$ 和 $\prec^R$ 生成的预序。类似地，在 W 上有与 $\prec^{LR}$ 对应的等价关系 $\sim^{LR}$。对于 $\sim^L$、$\sim^R$、$\sim^{LR}$，W 上的等价类分别称为 W的左胞腔、右胞腔、双侧胞腔。

显然，$\{1\}$ 和 $\{w_0\}$ 是 W的双侧胞腔。令

$$\mathscr{C} = \{w \in W \mid w \neq 1 \text{ 且具有唯一约化表达式}\}.$$

根据 [Lus83，命题 3。8] 以及 [KL79，注 3。3] $\mathscr{C}$ 以及 $w_0\mathscr{C} := \{w_0 w \mid w \in \mathscr{C}\}$ 是 W的双侧胞腔。

引理 5.3。设 w，$w' \in W$。则

(1) $a(1) = 0$，$a(w_0) = l(w_0)$。*(2)* $a(w) = a(w^{-1})$。*(3)* 若 $w \prec^{LR} w'$，则 $a(w) \geqslant a(w')$。因此，函数 $a: W \to \mathbb{N}$ 在 W的每个双侧胞腔上为常数。*(4)* 对任意 $w \in W \setminus \{1, w_0\}$，有 $a(\mathscr{C}) \leqslant a(w) \leqslant a(w_0\mathscr{C})$。*(5)* $a(\mathscr{C}) = 1$ 且 $a(w_0\mathscr{C}) = l(w_0) - \langle \rho, \theta_s^\vee \rangle$，其中 θ_s 是 Φ中的短最高根。

证明。断言 (1)–(3) 见 [Lus03]。对于 (4)，只需证明 $x \prec^{LR} w \prec^{LR} y$ 对任意 $x \in w_0\mathscr{C}$和 $y \in \mathscr{C}$均成立。由于 $w \neq 1$，存在 $s \in S$ 使得 $l(w) = l(sw) + l(s)$；因此由 [KL79, (2.3a, 2.3b)]可得 $w \prec^R s$。由于 $s \in \mathscr{C}$，且 $\mathscr{C}$是 W的一个双侧胞腔，我们得到 $w \prec^{LR} y$ 对所有 $y \in \mathscr{C}$均成立。对于 $x \prec^{LR} w$ 且 $x \in w_0\mathscr{C}$ 的情形，论证类似。对于 (5)，等式 $\mathrm{a}(\mathscr{C}) = 1$ 由 $s \in \mathscr{C}$ 和 $\mathrm{a}(s) = 1$得出。根据引理 5.2，函数 a 达到其最大值（除 $l(w_0)$ 外）这一事实意味着 $d\big(L(ww_0 \cdot 0)\big)$ 达到其可能的最小非零值，即最小特殊幂零轨道维数的一半，恰为 $\langle \rho, \theta_s^\vee \rangle = h - 1$，其中 h 是 $\mathfrak{g}$的考克斯特数。$\square$

5.2. **GK 维数公式**。设 $\Lambda \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}$。回忆一下，$W_\Lambda = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Phi_\Lambda \rangle$，并且当 $\Lambda \in \mathcal{P}$ 时 $W_\Lambda = W$。

定义 5.4。定义 (-)：$W_\Lambda \to W_\Lambda$ 为投影 $W_\Lambda \to W_\Lambda$ 的逆映射。

那么我们得到如下结果。

引理 5.5。设 $\Lambda \in \mathcal{P}$。那么 $d(L_q(\Lambda)) = |\Phi^+| - \mathbf{a}(w)$，其中 w 是 W 中满足 $\check{}w^{-1} \cdot \Lambda$ 为反主导的最短长度唯一元素。

证明。由等价关系 (4.4) 和引理 3.1(3)，不妨设 $\Lambda = q^\lambda$ for some $\lambda \in P$，从而 $W_\Lambda = W$。根据 [EK08, 定理 4.2]（或 [AM12, 定理 6.2]），我们有 $L_q(\Lambda)$ 与不可约 $\mathfrak{g}$-模 $L(\lambda)$ 具有相同的特征公式。利用 $U_\mathbb{F}^-$ 和 $U(\mathfrak{n}^-)$ 的典范滤过，我们得到 $d_{U_\mathbb{F}}(L_q(\Lambda)) = d_{U(\mathfrak{g})}(L(\lambda))$。令 w 为满足 $w^{-1} \cdot \lambda$ 为反主导的最短长度唯一元素。于是，根据 [Hum08, 第 7.7 节]，我们有

$$T^\lambda_{ww_0 \cdot 0} L(ww_0 \cdot 0) = L(\lambda), \tag{5.3}$$

其中，$T^{\mu'}_\mu : \mathcal{O}_{\bar{\mu}}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{O}_{\bar{\mu'}}(\mathfrak{g})$ 是詹森平移函子，它由自然投影 $\mathcal{O}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{O}_{\bar{\mu'}}(\mathfrak{g})$ 与函子 $L(\tilde{\nu}) \otimes (\text{-})$ 的复合定义，其中 $\tilde{\nu} \in W\nu \cap P^+$ 和 $\nu := \mu' - \mu \in P$。由 $T^{\mu'}_\mu$ 的双伴随性（见 [Hum08, 第 7.2 节]），$L(\lambda)$ 和 $L(ww_0 \cdot 0)$ 具有相同的 Gelfand-Kirillov 维数。因此，根据引理 5.2，我们有 $d_{U_\mathbb{F}}\big(L_q(\Lambda)\big) = |\Phi^+| - \mathbf{a}(w)$。□

对于一般的权 Λ，定义 $\mathfrak{g}_\Lambda$ 为根系是Φ_Λ的半单李代数，并令 $U'_q = U_q(\mathfrak{g}_\Lambda)$。注意，$U'_q$ 不一定是 U_q的子代数，因为 Φ_Λ 在 Φ中可能不是闭的。子代数 U'^0_q和 $U'^\pm_q$的定义方式与 $U_q(\mathfrak{g})$相同。由于 $\Phi_\Lambda \subset \Phi$是一个根子系，我们可以通过自然嵌入 $\mathbb{Z}\Phi_\Lambda \subset \mathbb{Z}\Phi$将 U'^0_q视为 U^0_q的子代数。令 Λ^{res} 表示 Λ 在 $U'^0_\mathbb{F}$上的限制。那么，显然 Λ^{res} 是$U'_\mathbb{F}$的一个整权，并且有 $(W_\Lambda)_{\Lambda^{\text{res}}} = W_\Lambda$。此外，$\text{Stab}_{\widetilde{W}_\Lambda}(\Lambda) = \text{Stab}_{\widetilde{W}_\Lambda}(\Lambda^{\text{res}})$。根据定理 4.23，对于某些整数 $a(y,\Lambda)$，$\text{ch}L_q(\Lambda) = \sum_{y \in W_\Lambda} a(y,\Lambda)\text{ch}M_q(\check{}y \cdot \Lambda)$ 当且仅当 $\text{ch}L_q(\Lambda^{\text{res}}) = \sum_{y \in W_\Lambda} a(y,\Lambda)\text{ch}M_q(\check{}y \cdot \Lambda^{\text{res}})$。另一方面，对于任意 $y \in W_\Lambda$，我们有

$$d_{U_\mathbb{F}}(M_q(\check{y} \cdot \Lambda)) = |\Phi^+ \setminus \Phi^+_\Lambda| + d_{U'_\mathbb{F}}\left(M_q(\check{y} \cdot \Lambda^{\text{res}})\right),$$

其中 $\Phi^+_\Lambda := \Phi_\Lambda \cap \Phi^+$（参见第 3.1 小节）。因此可得 $d_{U_\mathbb{F}}(L_q(\Lambda)) = |\Phi^+ \setminus \Phi^+_\Lambda| + d_{U'_\mathbb{F}}(L_q(\Lambda^{\text{res}}))$。注意，当且仅当 $\check{}y \cdot \Lambda$ 是（反）支配的，$\check{}y \cdot \Lambda^{\text{res}}$ 才是（反）支配的。于是由引理 5.5 可得 $d_{U'_\mathbb{F}}(L_q(\Lambda^{\text{res}})) = |\Phi^+_\Lambda| - \mathbf{a}_\Lambda(w)$，其中 $w \in W_\Lambda$ 是使 $\check{}w^{-1} \cdot \Lambda$ 在轨道 $\bar{\Lambda}$ 中为反主导的最短元素。结合上述两个等式，即可得到所需的 $d\big(L_q(\Lambda)\big)$ 的维数公式。

定理 5.6. 设 $\Lambda \in \mathrm{T}_\mathbb{F}$。则有

$$d(L_q(\Lambda)) = |\Phi^+| - \mathbf{a}_\Lambda(w)$$

其中 $w \in W_\Lambda$ 是使 $\check{}w^{-1} \cdot \Lambda$ 在轨道 Λ 中为反主导的最短元素。

□

每个简单 $U_\mathbb{F}$-模 $L_q(\Lambda)$ 对于 $\Lambda \in \mathcal{P}^+$ 都是有限维的；因此其 GK 维数为零。要计算 $L_q(\Lambda)$ 对于 $\Lambda \in \mathrm{T}_\mathbb{F} \setminus \mathcal{P}^+$ 的最小 GK 维数。定理 5.6告诉我们，只需找出函数 $\mathbf{a}_\Lambda$可能达到的最大值。本节余下部分将对此进行探讨。

5.3. **极大根子系统**。 设 Φ 不可约。众所周知， Φ 的所有根子系的分类可由闭根子系统的分类推得，参见 [Car72]。Borel-de Siebenthal [BdS49] 以及 Dynkin [Dyn52]利用魏尔群与李代数之间的联系，确定了闭根子系统在同构意义下的分类。关于直接以根系术语表述这些结果的论述，可参见 [Kan01] 和 [DL11]。

我们来回顾一些必要的事实。

定义5.7。 如果不存在满足 $\Psi \subsetneq \Psi' \subsetneq \Phi$ 的适当（分别为闭）子系 Ψ *of* Φ 极大，则称其为 Ψ'。

以下结果归功于 Borel-de Siebenthal [BdS49]。

定理5.8。 将最高根 θ 在 Φ 中关于单根展开：

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} h_i \alpha_i.$$

于是， Φ 的极大闭根子系统（在 W-共轭意义下）是那些具有以下基的子系统（我们用帽号“$\hat{}\alpha$”表示消去 α）：

(1) $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \hat{}\alpha_i, \ldots\ldots, \alpha_n\}$ 和 $h_i = 1$;

(2) $\{-\theta, \alpha_1, \ldots, \hat{}\alpha_i, \ldots\ldots, \alpha_n\}$ 和 h_i 是素数。 □

我们指出，任何闭的极大根子系必然是极大闭子系；然而，极大闭子系不一定是极大根子系。事实上，以下结果对此作出了精确说明，其中一个证明见 [DL11，推论 2]。

引理*5.9*。 *</style}*若 Ψ 是 Φ的极大根子系，则 Ψ 在 Φ中闭，或 $\Psi^\vee$在 $\Phi^\vee$中闭。□

结合定理5.8 与引理5.9，即可轻松确定所有极大根子系。特别是，下表列出了秩为 W和秩为 n 时，所有相差一个 $n-1$-共轭的极大根子系。该结果亦见 [Osh，注8。4]。

我们将 Φ 一个整数 $\gamma = \gamma(\Phi$与 h_i 在 θ 的最高根 Φ的表达式中所有素系数的最小公倍数定义为 $\gamma(\Phi) = \gamma(\Phi^\vee)$。显然，5.8定理给出 γ 是满足以下条件的最小正整数：
$\gamma Q \subset \mathbb{Z}\Psi$ 对任意满秩极大闭根子系 $\Psi \subset \Phi$，

以下结果给出了极大根子系的刻画。

命题 5.10。[1] 设 $\mathbb{F} = \mathbb{C}(q^\gamma)$。则 Φ 的任意极大根子系 Ψ 都具有 Φ_Λ 的形式，其中 $\Lambda \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}$。特别地，如果 $\Psi^\vee$ 在 $\Phi^\vee$ 中是闭的，则 $\Psi = \Phi_\lambda$ 对某个 $\lambda \in \frac{1}{\gamma}P$ 成立。

–

[1]我们记 X_n^L（分别为 X_n^S）表示由 Φ 中的长根（分别为短根）构成的 Φ 型根子系的同构类，其中 X_n 见表1。

TYPE	RANK $n-1$	RANK n	Ψ_{max}
A_n	$A_i \times A_{n-i-1}\,(0 \leqslant i \leqslant n-1)$		A_{n-1}
B_n		$B_i \times B_{n-i}\,(1 \leqslant i \leqslant n-1),\quad D_n^L$	D_n^L
C_n		$C_i \times C_{n-i}\,(1 \leqslant i \leqslant n-1),\quad D_n^S$	D_n^S
D_n	$A_{n-1},\ D_{n-1}$	$D_i \times D_{n-i}\,(2 \leqslant i \leqslant n-2)$	D_{n-1}
E_6	D_5	$A_1 \times A_5,\quad A_2 \times A_2 \times A_2$	D_5
E_7	E_6	$A_1 \times D_6,\quad A_7,\quad A_2 \times A_5$	E_6
E_8		$D_8,\quad A_1 \times E_7,\quad A_8$ $A_2 \times E_6,\quad A_4 \times A_4$	$A_1 \times E_7$
F_4		$B_4,\quad C_4,\quad A_2^L \times A_2^S$	$B_4,\quad C_4$
G_2		$A_1^L \times A_1^S,\ A_2^L,\ A_2^S$	$A_2^L,\ A_2^S$

TABLE 1. Φ的极大根子系统

证明。设 Ψ是 Φ 的极大根子系。由引理 5.9，要么 Ψ 在 Φ 中是闭的，要么 $\Psi^\vee$ 在 $\Phi^\vee$ 中是闭的。对于后一种情况，只需找到 $\lambda \in \frac{1}{\gamma}P$ 使得

$$\Psi \subset \Phi_\lambda \subsetneq \Phi. \tag{5.4}$$

由于 $\Psi^\vee$ 在 $\Phi^\vee$中是闭的， [Kan01第12节3] 中的命题给出了 $\mathbb{Z}$格的真包含映射

$$Q' := \mathbb{Z}\Psi^\vee \subsetneq \mathbb{Z}\Phi^\vee = Q^\vee.$$

若秩 $Q' =$ 秩 $Q^\vee$，则由定理5.8，商 $Q^\vee/Q'$ 是挠的，且 $\gamma Q^\vee \subset Q'$。它们对应的对偶格满足 $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(Q^\vee,\mathbb{Z}) \subsetneq \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(Q',\mathbb{Z})$。由于双线性型$(\cdot,\cdot)$在 $\mathfrak{h}^*_\mathbb{Q}$上非退化，$\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(Q',\mathbb{Z})$中的每个同态都唯一对应于 $\frac{1}{\gamma}P$中的一个元素 λ，而$\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(Q^\vee,\mathbb{Z})$在此型下与 P相对应，即

$$P = \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(Q^\vee,\mathbb{Z}) \subsetneq \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(Q',\mathbb{Z}) \subset \frac{1}{\gamma}P.$$

这样的 λ 恰好是满足条件(5.4)的所需权，只要 $\lambda \notin P$。若秩 $Q' <$ 秩 $Q^\vee$，则正交补

$$(Q')^\perp = \{\lambda \in \mathfrak{h}^*_\mathbb{Q} \mid (\lambda,\mu) = 0, \forall \mu \in Q'\}$$

非零，并且任意 $\lambda \in (Q')^\perp \cap (\frac{1}{\gamma}P \setminus P)$满足 (5.4)。那么，根据命题 4.4，此情形的断言得证。对于前一种情形，我们可以假设秩 $\Psi = n$ ，因为秩为 $n-1$ 的任何极大根子系都必须是对偶封闭的（见表 1）。利用以下事实：对于任意 $w\Phi_\Lambda = \Phi_{w\Lambda}$ 以及 $w \in W$ 和 $\Lambda \in \mathrm{T}_\mathbb{F}$，只需证明定理 Ψ 5.8 中类型（2）的任意根子系 都具有如下形式 Φ_Λ，其中某个 $\Lambda \in \mathrm{T}_\mathbb{F}$。假设 Ψ 有一个基

$$\{-\theta, \alpha_1, \cdots, \hat{\alpha}_i, \cdots, \alpha_n\},$$

其中 h_i 是素数，并固定一个本原 $2h_i$ 次单位根 ε。按如下方式选取 $\mathrm{T}_\mathbb{F}$ （也属于 T_q）中的一个 Λ ：

$$\Lambda(K_i) = \varepsilon q^{d_i}, \quad \Lambda(K_j) = 1, \quad \text{for all } j \neq i.$$

可以验证， $2h_i d_i$ 总是能被（θ， θ）整除；又因为 Ψ 是闭的，所以 $\Psi = \mathbb{Z}\Psi \cap \Phi$。因此 $\Psi = \Phi_\Lambda$。 □

由上述证明可知， Φ 的每个极大根子系都可以表示为 Φ_Λ ，其中 $\Lambda \in \mathrm{T}_{\mathbf{k}}$。另一方面，一般而言， Φ 的根子系未必具有 Φ_Λ的形式，正如注4.6所述。

5.4. 最小 GK 维数。在本小节中，令 $\mathfrak{g}$ 始终为单李代数。我们的目标是确定 $\mathcal{O}_{q,\mathbb{F}}$ 中不可约对象的最小 GK 维数。我们根据最高权是否属于 $\mathrm{T}_{\mathbb{F}}$ 的以下某个子集，对三种情形进行比较分析：$\mathrm{T}_{\mathbb{F}} \setminus \mathcal{P}$、线性但非整数权的集合，以及 $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}^+$。

令 Ψ_{max} 表示 Φ 的一个真根子系，其基数 $|\Psi_{max}|$ 在 Φ的所有真子系中最大。那么 Ψ_{max} 必为极大根子系。 Ψ_{max} 的可能类型列于表 1中。定义 $\Psi^+_{max} = \Phi^+ \cap \Psi_{max}$。令 $\kappa_0 = |\Phi^+ \setminus \Psi^+_{max}|$。于是我们有

命题 5.11。令 $\Lambda \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}} \setminus \mathcal{P}$。则 $d\big(L_q(\Lambda)\big) = \kappa_0$ 当且仅当

(1) Λ 关于该等价类 $\sim$是主正则的，并且(2) 相关的真子系 Φ_Λ 在所有真子系中具有最大基数。

证明。令 $w \in W_\Lambda$ <style id='6}是使得 ˇ$w\cdot\Lambda$ 在 Λ中为反主导的最短长度唯一元素。如果 Λ 是主正则的，那么 w 就是 W_Λ中的最长元素。在这种情况下，$\mathbf{a}_\Lambda(w)$ 根据引理 $|\Phi^+_\Lambda|$ 5.3等于，这就证明了“如果”部分。对于“仅当”部分，由于 $\Lambda \notin \mathcal{P}$，$\Phi_\Lambda$ 是 Φ的真子系，因此我们有

$$2\mathbf{a}_\Lambda(w) \leqslant |\Phi_\Lambda| \leqslant |\Phi| - 2\kappa_0.$$

如果 $d(L_q(\Lambda)) = \kappa_0$，那么 $\mathbf{a}_\Lambda(w) = |\Phi^+| - \kappa_0$ 以及 $|\Phi_\Lambda| = |\Phi| - 2\kappa_0$。于是 Φ_Λ 是 Φ中具有最大基数的真子系，而 w 在 Coxeter 系统（W_Λ， S_Λ）中必定是最长元素（因而是唯一的）。根据引理 4.20，可知 Λ 是主正则的。 □

对于域 $\mathbb{F}$，若 $\mathbb{Q}(q) \subset \mathbb{F} \subset \mathbf{k}$，则并非总是存在 $\Lambda \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}} \setminus \mathcal{P}$，使得相应的真子系 Φ_Λ 与某个指定类型的 Ψ_{max} 重合。例如，考虑 $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(q^\gamma)$。在这种情况下，以下情形中无法实现 $\Lambda \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}$ 的 Φ_Λ：

$$(\Phi, \Psi_{max}): \quad (B_n, D_n^L), \quad (F_4, B_4), \quad (G_2, A_2^L).$$

为作说明，我们以情形（B_n， D_n^L）为例；其他情形可类似处理。

例5.12。设 Φ 为 B_n型根系。为与我们的约定一致，令 Φ 由向量 $\pm\epsilon_i$ （平方长度为2）和 $\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j)$ （平方长度为4）组成，其中 $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$，且 ϵ_i'构成 $\mathfrak{h}^*$ 的正交基，并满足$(\epsilon_i, \epsilon_i) = 2$。取$\Psi_{max} = \{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j) \mid 1 \leqslant i \neq j \leqslant n\}$，它是 D_n 型，基为 $\{\epsilon_1 - \epsilon_2, \cdots, \epsilon_{n-1} - \epsilon_n, \epsilon_{n-1} + \epsilon_n\}$，并考虑 $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(q^\gamma)$。若对某个 $\Lambda \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}$有 $\Psi_{max} = \Phi_\Lambda$，则我们将得到

$$\Lambda(K_{2(\epsilon_{n-1}-\epsilon_n)}) \in q^{4\mathbb{Z}} \quad and \quad \Lambda(K_{2(\epsilon_{n-1}+\epsilon_n)}) \in q^{4\mathbb{Z}}, \quad but \quad \Lambda(K_{2\epsilon_n}) \notin q^{2\mathbb{Z}}.$$

这迫使值 $\Lambda(K_{\epsilon_n})$ 必须具有 $\imath q^m$ 或 $-\imath q^m$ 的形式，其中 $m \in \mathbb{Z}$，这与假设 $\Lambda \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}$矛盾。 □

当 Λ 遍历所有线性（或整）权时，最小 GK 维数早已得到确立，因为可以通过经典量子等价从相应的经典结果推导得出（参见 [EK08，定理 4。2]）。现在考虑 T 的以下子集$_{\mathbf{k}}$:

$$X_1 = \mathbb{Z}_2^n \rtimes \{q^\lambda \mid \lambda \in \frac{1}{\gamma} P\} \setminus \mathcal{P}^+, \qquad X_2 = \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}^+,$$

并定义

$$\kappa_i = \min\{\, d(L_q(\Lambda)) \mid \Lambda \in X_i \,\}, \quad \text{for } i = 1, 2.$$

由于 $X_2 \subset X_1$，可得 $\kappa_1 \leqslant \kappa_2$。此外，我们有以下结果。

引理5.13。 设 θ_s 表示 Φ中的最高短根（在单边类型中，它与最高根 θ 重合）。则

$$\kappa_1 = (\rho, \theta^\vee), \quad \kappa_2 = (\rho, \theta_s^\vee).$$

证明。 这是由引理5.3(5) 和命题 5.10直接得出的证明。 □

注5.14。 关于最小*GK*维数的经典结果可见于 *[Jos74，表 1]*，其中对 $E_{7,\ 8}$ 中的结果作了修正 *[Jos76，第3]* 节，以及 *[BMXX，表 1]*。

设 h 和 $h^\vee$ 分别表示考克斯特数和对偶 *Coxeter* 数。 $\mathfrak{g}$（参见 [Kac90，第 6]章）。由引理 5.13，可得 $\kappa_1 = h^\vee - 1$ （另见 [W99]）以及$\kappa_2 = h - 1$。结合命题 5.10、命题 5.11 和引理 5.13，我们得到以下结果。

$_1$**定理 5.15**。 对于域 $\mathbb{F}$，其中 $\mathbb{C}(q^\gamma) \subset \mathbb{F} \subset \mathbf{k}$，有

$$\min\{\, d\,(L_q(\Lambda)) \mid \Lambda \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}} \setminus \mathcal{P}^+ \,\} = \min\{\kappa_0, \kappa_1\}.$$

以下列出了 κ_i 的具体取值，见表*2*，其中每种类型的最小值$\{\kappa_0, \kappa_1\}$ 均以红色标出。 □

类型 A_n	B_n	C_n	D_n	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
κ_0	n	n	n	$2n-2$	16	27	56	8	3
κ_1	n	$2n-2$	n	$2n-3$	11	17	29	8	3
κ_2	n	$2n-1$	$2n-1$	$2n-3$	11	17	29	11	5

$_1$TABLE 2. 域 $\mathbb{C}(q^\gamma)$ 上的最小 GK 维数

由表 2可见，除类型 $B_n (n \geqslant 3)$ 外，最小值与经典情形中的值相同，即 κ_1。根据前述结论（见例 5.12），域 $\mathbb{Q}(q^\gamma)$ 上各类型的$_1$最小 GK 维数也为 κ_1。

6. Application

本节将应用上一节的结果，探讨量子尖点权模的存在性问题；这一问题对于通过抛物诱导分类简单权模至关重要。

回顾一下，一个简单权 $\mathfrak{g}$-模 L （其中 $\dim L_\lambda < \infty$ 对任意 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$），若不能由 $\mathfrak{g}$ 的任意真抛物子代数上的模诱导得到，则称为尖点模。已知，这类模仅在 $\mathfrak{g}$由类型 A 或类型 C的简单分量构成时才存在。关于尖点模的更多性质可参见 [Fer90]。简而言之，它们是无限维的，其权空间的维数一致有界，并且 $\mathfrak{g}$ 的每个根向量都在其上单射作用（因此，所有权空间的维数都相同）。令 $\check{U}_q := U_q \otimes_{\mathbb{C}} \mathbf{k}$。现在设 M_q 是一个无限维不可约权 $\check{U}_q$-模。假设存在一个正整数 d 使得

$$\dim_{\mathbf{k}} (M_q)_\Lambda = d, \quad \text{for all } \Lambda \in \Omega(M_q).$$

显然， M_q 是有限生成的，且任意非零权空间都可作为 M_q的生成空间。对于每个 $\beta \in Q$, 令$(\check{U}_q)_\beta$ 为$\check{U}_q$ 相对于 Cartan 部分 $\check{U}_q^0$的伴随作用下的 β-权空间。对于任意单项式 $u = F^k K_\mu E^r \in \check{U}_q$，定义该单项式的高度为

$$\mathrm{ht}(u) := \sum_i (k_i + r_i)\mathrm{ht}(\beta_i),$$

其中，$\mathrm{ht}(\beta_i)$ 是正根 β_i 关于 Π 中单根的高度，并将 $\check{U}_q^{(m)}$记为由满足 $\mathrm{ht}(u) \leqslant m$ 的单项式 $u \in \check{U}_q$ 张成的 $\mathbf{k}$-线性空间。于是我们得到 $\check{U}_q$ 的滤过 $\{\check{U}^{(m)}{}_q\}_{m\geqslant 0}$，且 $\check{U}_q^{(1)}$ 是 $\check{U}_q$ 的生成空间。固定 M_q 的一个非零权空间 $(M_q)_{\Lambda_0}$。令 $r = \max\{(\rho, \alpha^\vee) \mid \alpha \in \Phi\}$。于是我们有

$$\sum_{\substack{|(\rho,\beta)|\leq m \\ \beta\in Q}} (\check{U}_q)_\beta (M_q)_{\Lambda_0} \subset \check{U}_q^{(m)}(M_q)_{\Lambda_0} \subset \sum_{\substack{|(\rho,\beta)|\leq mr \\ \beta\in Q}} (\check{U}_q)_\beta (M_q)_{\Lambda_0},$$

对所有 $m \in \mathbb{N}$ 均成立。因此,

$$d(2m+1)^n \leqslant \dim_{\mathbf{k}} \check{U}_q^{(m)}(M_q)_{\Lambda_0} \leqslant d(2mr+1)^n.$$

这意味着 $\lim_{m\to\infty} \log_m \dim_{\mathbf{k}} \check{U}_q^{(m)}(M_q)_{\Lambda_0} = n$，因此，GK 维数 $d(M_q)$ 恰好等于 $\mathfrak{g}$ 的秩。此外，我们有以下结果。

定理 6.1. </style>代数 U_q 存在尖点模，当且仅当底层半单李代数 $\mathfrak{g}$ 由类型为 A、B 或 C 的简单分量构成。

证明。在不失一般性的情况下，我们可以假设 $\mathfrak{g}$是单的。设 M_q 是这样的$\check{U}_q$-模。考虑它的湮灭子 $\mathrm{Ann}_{\check{U}_q} M_q$，它是$\check{U}_q$的一个本原理想。根据 [JL95，§ 6]，，该理想也湮灭某个最高权模，记作 $L_q(\Lambda)$，其中$\Lambda \in \mathsf{T}_{\mathbf{k}}$。由于表示映射$\check{U}_q/\mathrm{Ann}_{\check{U}_q} M_q \to \mathrm{End}(M_q)$是单射，且$\check{U}_q$是诺特的，因此 $d\big(\check{U}_q/\mathrm{Ann}_{\check{U}_q} M_q\big) \leqslant 2d(M_q) = 2n$。于是，根据 [JL95，引理 6.2 (v)]，以及 $L_q(\Lambda)$具有相同湮灭子 $\mathrm{Ann}_{\check{U}_q} M_q$这一事实，我们有 $d(L_q(\Lambda)) = n$。根据我们此前的结果，只有当 $\mathfrak{g}$ 属于类型 A、 B 或 C时，才会出现这样的 Gelfand-Kirillov 维数 n 。反过来，根据 [FHW15]和 [CGLW，定理 7.2]，，可以明确地

构造一族这样的模，使每个权重数都为 1，适用于类型为 A、 B 和 C的量子群。因此，定理得证。□

注 6.2。 (i) 定理*6.1* 中的结果不仅对不定元 q 成立，对任意特化 $q \to \xi$也成立，其中 $\xi \in \mathbb{C}$ 是超越的。事实上，由于 *[CGLW]* 中的构造适用于每个非单位根 ξ，自然可以预期，定理 *6.1* 的结论应对所有满足 $q \to \xi$且 ξ 不是单位根的特化保持有效。(ii) 事实上，上述讨论结合例 *5.12* 和定理 *5.15*表明， U_q 存在尖点模会导出与定理 *6.1*中相同的结论。相反，在考虑 $U_{\mathbb{Q}(q)}$时，类型为 B 的尖点模不存在。

Appendix A. Translation functors and structure functors

关于 $\mathcal{O}_{q,\mathbb{F}}$ 的翻译函子和结构函子，其行为基本上与经典情形相同。然而，在我们的设定中，应特别注意“非整数”块。本附录主要按照[AJS94]和 [Fie06]的工作，总结它们在变形框架中的性质。

A.1. 平移函子。 设 R 为一个变形代数。对于任意模 $M \in \mathcal{O}_R$和任意有限维模 $E \in \mathcal{O}_{q,\mathbb{F}}$, 张量积 $E \otimes M$（其中记$\otimes$ 为 $\otimes_{\mathbb{F}}$）带有自然的 U_R-模结构，使其成为 $\mathcal{O}_R$的一个对象；具体而言， R 的作用仅定义在第二个因子上，而 $U_{\mathbb{F}}$-作用则通过余乘法 Δ给出。这两个作用显然相容。 $E \otimes M$的权空间具有如下形式

$$(E \otimes M)_{\tau\Lambda} = \oplus_{(\mu,\Lambda')} E_{q^\mu} \otimes M_{\tau\Lambda'},$$

其中求和遍历所有满足 $q^\mu \Lambda' = \Lambda$ 的配对 $(\mu, \Lambda') \in P \times \mathrm{T}_{\mathbb{F}}$。此外，一般而言，基变换具有如下相容性：对于任意变形代数之间的态射 $R \to R'$ ，存在自然同构

$$(E \otimes M) \otimes_R R' \cong E \otimes (M \otimes_R R') \tag{A.1}$$

在范畴 $\mathcal{O}_{R'}$ 中。

引理 A.1。 对于任意 $\Lambda \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}$ 以及任意有限维模 $E \in \mathcal{O}_{q,\mathbb{F}}$，存在一个有限递减滤过

$$E \otimes M_R(\Lambda) = M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_r \supset 0$$

在 $\mathcal{O}_R$ 中，其商同构于 $M_R(q^\nu \Lambda)$，其中 q^ν 遍历 E 的所有权，并按权重数计数。

证明。 给 E 的一组基排序，这组基由权为 $q^{\nu_1}, \ldots, q^{\nu_r}$ 的向量 $v_1, \ldots, v_r$ 组成（允许重复），使得 $i \leqslant j$只要 $\nu_i \leq \nu_j$。这诱导出一个滤过 $0 \subset E_r \subset \cdots \subset E_1 = E$，其中 E_i 是由 $v_i, \ldots, v_r$ 张成的 $U_q^0 U_q^+$-子模。注意， $E \otimes M_R(\Lambda)$ 同构于一个自由 U_R^--模，而每个 $E_i \otimes M_R(\Lambda)$ 都是秩为 $\dim E_i$ 的自由 U_R^--子模（ E_i 上的 U_R^- 作用是平凡的）。因此， $E \otimes M_R(\Lambda)$ 上相应的 U_R-模滤过的商同构于 Verma U_R-模 $M_R(q^{\nu_i}\Lambda)$。 □

对于任意 $\Lambda, \Lambda' \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}$，若 $\Gamma := \Lambda'\Lambda^{-1} \in \mathcal{P}$，则 $\mathcal{P}^+$ 中存在唯一一个属于轨道 $W_\Gamma \Gamma$ 的元素；记为 $\Gamma := w\Gamma$，其中某个 $w \in W_\Gamma$。设 R 为一个局部变形代数，并设 $X, X' \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}/\sim_R$ 分别为包含 Λ 和 Λ' 的链接类。对于任意模 $M \in \mathcal{O}_{R,X}$，我们定义平移函子

$$T_\Lambda^{\Lambda'}(M) = \mathrm{pr}_{X'}\left(L_q(\overline{\Gamma}) \otimes M\right)$$

其中 pr_X 表示从 $\mathcal{O}_R$ 到块 $\mathcal{O}_{R,\ X}$的投影函子。

命题 A.2。设 X、$X' \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}/\sim_R$ 分别为包含 Λ 和 Λ' 的链接类。假设 $\Lambda'\Lambda^{-1} \in \mathcal{P}$。则

（1）$T_\Lambda^{\Lambda'}$ 是从 $\mathcal{O}_{R,\ X}$ 到 $\mathcal{O}_{R,\ X'}$的正合函子。（2）对于局部变形代数的任意态射 $R \to R'$，有

$$T_\Lambda^{\Lambda'}(M \otimes_R R') \cong T_\Lambda^{\Lambda'}(M) \otimes_R R'$$

对于任意 $M \in \mathcal{O}_{R,\ X}$。

（3）如果 $P \in \mathcal{O}_{R,\ X}$ 是射影对象，那么 $T_\Lambda^{\Lambda'}(P)$ 在 $\mathcal{O}_{R,\ X'}$中也是射影对象。（4）$T_\Lambda^{\Lambda'}$ 既是 $T_{\Lambda'}^{\Lambda}$的左伴随，也是其右伴随，反之亦然。

证明。第一条结论显然，第二条由同构（A.1）推出。注意，若 $P \in \mathcal{O}_R$ 是射影对象，则对于任意有限维 U_q-模 L，$L \otimes P \in \mathcal{O}_R$ 也是射影对象，于是（3）得证。对于（4），交换 Λ 和 Λ' 的角色，可得到平移函子 $T_{\Lambda'}^{\Lambda}$，其中涉及的有限维简单模同构于对偶 $L_q(\Gamma)^*$。对于任意 $M \in \mathcal{O}_{R,\ X}$、$N \in \mathcal{O}_{R,\ X'}$，我们有如下同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_R}(M, T_{\Lambda'}^{\Lambda}(N)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_R}(T_\Lambda^{\Lambda'}(M), N), \tag{A.2}$$

并通过映射 $v \mapsto (v : f \mapsto f(K_{2\rho}^{-1}\overline{v}))$ 将 $U_{\mathbb{F}}$-模 $L_q(\Gamma)$ 与其双对偶相认同，可得到另一个同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_R}(N, T_\Lambda^{\Lambda'}(M)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_R}(T_{\Lambda'}^{\Lambda}(N), M). \tag{A.3}$$

同构（A.2）和（A.3）表明 $T_\Lambda^{\Lambda'}$ 既是 $T_{\Lambda'}^{\Lambda}$ 的左伴随，也是其右伴随，反之亦然。更多细节请参见 [AJS94，第 7 小节。6]。□

我们进一步假设整权 Γ 具有如下形式：q^ν 对于某个 $\nu \in P$。在此情况下，我们称 Λ和 Λ' 相容。于是推论4.3 给出

$$\Phi_{R,\Lambda} = \Phi_{R,\Lambda'} \quad \text{and} \quad \widetilde{W}_{R,\Lambda} = \widetilde{W}_{R,\Lambda'}.$$

回顾条件（4.2）：两个相容权 Λ，Λ' 对于 $W_{R,\ \Lambda}$ 若满足以下条件，则它们属于同一个“面”的闭包

$$q^{2(\rho,\alpha)}(\tau\Lambda)(K_{2\alpha}) \in q^{\mathbb{N}(\alpha,\alpha)} \quad \text{iff} \quad q^{2(\rho,\alpha)}(\tau\Lambda')(K_{2\alpha}) \in q^{\mathbb{N}(\alpha,\alpha)} \quad \text{for all } \alpha \in \Phi_{R,\Lambda}. \tag{A.4}$$

直观地说，满足上述条件的权 $\tau\Lambda$和 $\tau\Lambda'$确定了欧几里得子空间 $E(\tau\Lambda)$ 中的两个整权，该子空间由 $\Phi_{R,\Lambda}$ 张成；这两个整权按经典意义属于同一个面的闭包。

引理 *A.3.* 设 $\Lambda, \Lambda' \in T_{\mathbb{F}}$ 是相对于 $\sim_R$ 的反主导权。假设 Λ, Λ'相容且满足条件 *(A.4)*。设 $w \in \widetilde{W}_{R,\Lambda}$。那么 $T_{\Lambda}^{\Lambda'} M_R(w \cdot \Lambda)$ 有一个 *Verma* 旗，其子商同构于 $M_R(w\bar{x} \cdot \Lambda')$，其中 $\bar{x} \in Stab_R(\Lambda)/Stab_R(\Lambda) \cap Stab_R(\Lambda')$，且每个子商都恰好出现一次。

证明。首先，$T_{\Lambda}^{\Lambda'}(M_R(w \cdot \Lambda))$具有一个 Verma 旗，其子商由 $q^{\nu} w \cdot \Lambda$属于 $\widetilde{W}_{R,\Lambda'} \cdot \Lambda'$的参数化。将 $\tau\Lambda$与其整数部分 $\hat{} \lambda \in E(\tau\Lambda)$关联，使得 $(\hat{}\lambda, \alpha^{\vee}) \in \mathbb{Z}$且 $(\tau\Lambda)(K_\alpha) = \sigma(K_\alpha) q^{(\hat{\lambda},\alpha)}$对所有$\alpha \in \Phi_{R,\Lambda}$成立，其中 $\sigma \in \mathbb{Z}_2^n$由$(\tau\Lambda)(K_\alpha)$的符号确定。随后可验证，对任意 $\alpha, \beta \in \Phi_{R,\Lambda}$，有 $(\tau\Lambda)(s_{R,\alpha}^{\Lambda} \cdot \tau\Lambda)^{-1}(K_\beta) = q^{(\hat{\lambda} - s_\alpha \cdot \hat{}\lambda, \beta)\check{}\hat{}}$。将定义 5.4 中的 (-) 限制后，我们得到关于平移作用，λ 在$W_{R,\Lambda}$中的稳定子与 $\mathrm{Stab}_{\widetilde{W}_{R,\Lambda}}(\Lambda)$ 同构。利用 (A.4)，我们可以在欧几里得空间 $E(\tau\Lambda)$中考察 $\tau\Lambda, \tau\Lambda'$的整数部分。重复 Jan03 第 II. 7.8] 节和 Hum08 引理 7.5], 中的经典论证，可验证出现的权恰为 $w\bar{x} \cdot \Lambda'$，其中 $\bar{x} \in \mathrm{Stab}_R(\Lambda)/\mathrm{Stab}_R(\Lambda) \cap \mathrm{Stab}_R(\Lambda')$，且每个作为子商出现的 Verma 模的重数均为 1。□

注 A.4. 由此可知，平移函子 $T_{\Lambda}^{\Lambda'}$ 将带有 *Verma* 旗的模映射为带有 *Verma* 旗的模。

推论 A.5. 设 X、$X' \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}/\sim_R$ 分别为包含反主导权 Λ 和 Λ' 的链接类。设 Λ、Λ' 如上引理所述，并且设$\mathrm{Stab}_R(\Lambda) \subset \mathrm{Stab}_R(\Lambda')$。则有如下结论：

(1) 对于 $w \in \widetilde{W}_R$、x，模 $T_{\Lambda}^{\Lambda'} P_R(w \cdot \Lambda)$ 分解为 $|Stab_R(\Lambda')/Stab_R(\Lambda)|$ 个 $P_R(w \cdot \Lambda')$ 的直和副本，此外可能还有满足 $w' \cdot \Lambda' > w \cdot \Lambda'$ 的 $P_R(w' \cdot \Lambda')$ 直和项。*(2)* 进一步假设 $Stab_R(\Lambda) = Stab_R(\Lambda')$。那么函子 $T_{\Lambda}^{\Lambda'} : \mathcal{O}_{R、x} \to \mathcal{O}_{R、x'}$ 以及 $T_{\Lambda}^{\Lambda'} : \mathcal{O}_{R、x'} \to \mathcal{O}_{R、x}$ 互为逆等价。

证明。对于 (1)，显然，$T_{\Lambda}^{\Lambda'} P_R(w \cdot \Lambda)$ 是带有 Verma 旗的射影对象，而引理 4.10 表明，$P_R(w \cdot \Lambda)$ 的 Verma 子商恰好是满足$w' \cdot \Lambda \geq w \cdot \Lambda$的 $M_R(w' \cdot \Lambda)$，且 $M_R(w \cdot \Lambda)$ 出现一次。因此，引理 A.3 表明，$T_{\Lambda}^{\Lambda'} P_R(w \cdot \Lambda)$ 的任一不可分解直和项必为满足 $w' \cdot \Lambda' \geq w \cdot \Lambda'$的 $P_R(w' \cdot \Lambda')$。由关于 Λ, Λ' 的假设，不等式 $w' \cdot \Lambda' \geq w \cdot \Lambda'$ 迫使 $w' \cdot \Lambda \geq w \cdot \Lambda$；特别地，对于所有 $x \in \mathrm{Stab}_R(\Lambda')$，都有$wx \cdot \Lambda \geq w \cdot \Lambda$。因此，直和项 $P_R(w \cdot \Lambda')$ 出现的重数为 $|\mathrm{Stab}_R(\Lambda')/\mathrm{Stab}_R(\Lambda)|$。对于 (2)，由引理 A.3，对于所有 $w \in \widetilde{W}_{R,\Lambda}$，有 $T_{\Lambda}^{\Lambda'} M_R(w \cdot \Lambda) \cong M_R(w \cdot \Lambda')$，且$T_{\Lambda'}^{\Lambda} M_R(w \cdot \Lambda') \cong M_R(w \cdot \Lambda)$。由此可知，$T_{\Lambda}^{\Lambda'} \circ T_{\Lambda'}^{\Lambda}$和 $T_{\Lambda'}^{\Lambda} \circ T_{\Lambda}^{\Lambda'}$在由具有 Verma 旗的模构成的全子范畴上自然同构于恒等函子；特别地，这对射影对象也成立。由于投射模生成该范畴，且所涉及的函子都是正合的，我们得出它们在整个范畴上自然同构于恒等函子。□

设 $R = \mathcal{R}$ 如小节 4.5所述，并设 $\Lambda, \Lambda' \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}$ 为满足条件（A.4）的相容权。当 Λ 为正则且 $\mathrm{Stab}_R(\Lambda) = \{e, s\}$ 对于某个反射 s 属于$\widetilde{W}_\Lambda$时，我们称复合映射 $\Theta_s := T_{\Lambda'}^{\Lambda} \circ T_{\Lambda}^{\Lambda'}$为“-墙”上的穿越平移$s$。根据上述推论，$\Theta_s$ 与 Λ的具体选择无关Λ'。

A.2. **结构函子**。设 R 是 $U_{\mathbb{F}}^0$ 在一个素理想处的局部化，且 $\mathbb{K}$ 是其剩余域，令 $X \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}/\sim_R$。假设 $\Lambda \in X$ 是反主导的。回忆

R-代数$\mathcal{Z}_{R,\ X}\ =\ \mathrm{End}_{\mathcal{O}_R}(P_R(\Lambda))$ 是交换的（参见小节 4.4）。结构函子定义如下:

$$\mathbb{V}=\mathbb{V}_{R,X}:=\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_R}(P_R(\Lambda),\text{-}):\mathcal{O}_{R,X}\longrightarrow\mathcal{Z}_{R,X}\text{-mod}$$

其中 $\mathcal{Z}_{R,\ X}$-模表示有限生成的 $\mathcal{Z}_{R,\ X}$-模的范畴。

引理 A.6。 (1) 函子 $\mathbb{V}$ 是一个正合函子，即将 $\mathcal{O}_{R,\ X}$ 中的短正合列映射为 $\mathcal{Z}_{R,\ X}$-模中的短正合列。

(2) 对于任意 $w\in W_{R,\ X}$，存在一个同构

$$\mathbb{V}M_R(w\cdot\Lambda)\cong\mathcal{Z}_{R,X}/\mathcal{I}_{w\cdot\Lambda},$$

其中 $\mathcal{I}_{w\cdot\Lambda}\subset\mathcal{Z}_{R,\ X}$ 是由在 $\mathbb{V}M_R(w\cdot\Lambda$上作用平凡的元素生成的理想).

证明。 第一个断言是显然的。对于 (2)，利用公式 (4.1) 和引理4.10 ，我们得到 $\dim_{\mathbb{K}}\mathbb{V}M_R(\Lambda')\otimes_R\mathbb{K}=1$。因此，根据中山引理， $\mathbb{V}(M_R(\Lambda'))$ 作为 R- 模由单个元素生成，记为 f。于是，通过将 z 映射到 $z.f$ ，映射 $\mathcal{Z}_{R,\ X}\ \to\mathbb{V}M_R(\Lambda')$ 是满射。这就证明了 (2)。□

令 $\mathcal{M}_R$ 为 $\mathcal{O}_R$ 的全子范畴，其中的模具有 Verma 旗。特别地， $\mathcal{O}_R$ 中的所有投射对象都 $\mathcal{M}_R$属于 $\mathcal{M}_{R,\ X}=\mathcal{M}_R\cap\mathcal{O}_{R,\ X}$ 是 $\mathcal{M}_R$的相应块。利用公式（4.1）以及引理 A.6（1）和（2）的证明中的论证，我们可以直接推出以下结论。

推论 A.7。 （1）如果 $M\in\mathcal{M}_{R,\ X}$，则 $\mathbb{V}M$ 在 R上是有限秩自由的。特别地，$\mathbb{V}M_R(w\cdot\Lambda)$ 在 R上是秩一自由的。

（2） $\mathbb{V}$ 与基变换 $R\to R'$可交换，即存在函子的自然同构

$$\mathbb{V}_{R,X}(\text{-})\otimes_R R'\cong\bigoplus_i\mathbb{V}_{R',X_i}(\text{-}\otimes_R R'),$$

其中， $X=\sqcup_iX_i$ 是 X 在 $\sim_{R'}$下的分裂。 □

当 X 只包含一个元素时，函子 $\mathbb{V}:\mathcal{O}_{R,\ X}\to R$-模是范畴等价。如果 X 包含两个元素，且 $\Lambda\in X$ 反主导，令 $X'\in\mathrm{T}_{\mathbb{F}}/\sim_R$ 为包含单个元素 Λ'的类。进一步假设 Λ 和 Λ' 相容并满足条件（A.4）。命题 4.16 随后推出 $\mathcal{Z}_{\mathcal{R},\ X'}\hookrightarrow\mathcal{Z}_{\mathcal{R},\ X}$。定义 $\mathrm{Ind}^{\Lambda}(\text{-})=\mathrm{Ind}^{\mathcal{Z}_{\mathcal{R},\ \mathcal{Z}_{\mathcal{R}}\Lambda'}}_{\mathcal{Z}_{\mathcal{R}}\Lambda'}(\text{-})=\mathcal{Z}_{\mathcal{R},\ \Lambda}\otimes_{\mathcal{Z}_{\mathcal{R}},\ \Lambda'}(\text{-})$ 为诱导函子，并令 $\mathrm{Res}(\text{-})=\mathrm{Res}^{\mathcal{Z}_{\mathcal{R}},\ \mathcal{Z}_{\mathcal{R}}\Lambda'}_{\Lambda}(\text{-})$ 表示限制函子。于是得到以下结果。

命题 A.8。 设 $X\in\mathrm{T}_{\mathbb{F}}/\sim_R$ 有两个元素是 $\Lambda\in X$ 反主导的。则（1）对于任意 M、$M'\in\mathcal{M}_{R,\ X}$，我们有一个自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_{R,X}}(M,M')\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}_{R,X}\text{-mod}}(\mathbb{V}M,\mathbb{V}M')$$

(2) 设 $X'\in\mathrm{T}_{\mathbb{F}}/\sim_R$ 由一个元素组成 Λ'，且 Λ， Λ' 彼此相容，并满足条件 (A.4)。则存在函子同构

$$\mathbb{V}_{R,X'}\circ T^{\Lambda'}_{\Lambda}\cong\mathrm{Res}\circ\mathbb{V}_{R,X}:\mathcal{M}_{R,X}\longrightarrow\mathcal{Z}_{R,X'}\text{-mod}$$

and

$$\mathbb{V}_{R,X}\circ T^{\Lambda}_{\Lambda'}\cong\mathrm{Ind}\circ\mathbb{V}_{R,X'}:\mathcal{M}_{R,X'}\longrightarrow\mathcal{Z}_{R,X}\text{-mod}.$$

证明。 证明与 [Fie06],中定理5和定理6的论证基本相同，其中 X 包含两个元素的情形称为 次一般情形，而 X'对应于 一般 情形。 □

References

[AJS94] H. H. Andersen, J. C. Jantzen, W. Soergel, *Representations of quantum groups at a p-th root of unity and of semisimple groups in characteristic p: independence of p*, 《Ast´erisque》第 220 号（1994），321 页。3、18、19、34、35[AM12] H. H. Andersen, V. Mazorchuk, *Category $\mathcal{O}$ for quantum groups*, 《欧洲数学学会杂志》17（2015），405–431。3、28[BMXX] Z. Bai, J.-J. Ma, W. Xiao, X. Xie, *Associated varieties of minimal highest weight modules*, 《表示论》28（2024），498–513。32[Bas68] H. Bass, *Algebraic K-Theory*, W.A. Benjamin，纽约，1968。22[BL18] R. Bezrukavnikov, I. Losev, *On dimension growth of modular irreducible representations of semisimple Lie algebras*, 《李群、几何与表示论》，59–89。数学进展丛书，326，Birkh¨auser/Springer，施普林格，2018。2、12[BdS49] Borel, A.; De Siebenthal, J. *Les sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos*, 《数学评论》23（1949），200–221。29[Car72] R. W. Carter. *Conjugacy classes in the Weyl group*, 《组合数学》25（1972），1–59。29[CGLW] H. Chen, Y. Gao, X. Liu, L. Wang, *U^0-free quantum group representations*, 《代数杂志》642（2024），330–366。4、33、34[DCK89] C. De Concini, V. G. Kac, *Representations of quantum groups at roots of 1*, 《算子代数、酉表示、包络代数与不变量理论》（巴黎，1989），471–506，数学进展丛书，92，Birkh¨auser Boston，波士顿，马萨诸塞州，1990。5、7、9[DKP92] C. De Concini, V. G. Kac, C. Procesi, *Quantum coadjoint action*, 《美国数学会杂志》5（1992），第 1 期，151–189。2、6[DCP93] C. De Concini, C. Procesi, *Quantum groups*, *D*-模、表示论与量子群（威尼斯，1992），31–140。数学讲义，1565，Springer-Verlag，柏林，1993。7[DL11] M. J. Dyer, G. I. Lehrer, *Reflection subgroups of finite and affine Weyl groups*, 《美国数学会汇刊》363（2011），第 11 期，5971–6005。29[Dyn52] E. B. Dynkin, *Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras*, 《数学文集》新辑，30(72)（1952）：349–462。29[EK08] P. Etingof, D. Kazhdan, *Quantization of Lie bialgebras, Part VI: Quantization of generalizedKac–Moody algebras*, 《变换群》13（2008），527–539。3、28、32[Fer90] S. Fernando, *Lie algebra modules with finite dimensional weight spaces I*, 《美国数学会汇刊》322（1990），第 2 期。33[Fie06] P. Fiebig, *The combinatorics of category $\mathcal{O}$ over symmetrizable Kac-Moody algebras*, 《变换群》11（2006），第 1 期，29–49。20、34、38[FHW15] V. Futorny, J. Hartwig, E. Wilson, *Irreducible completely pointed modules of quantum groups oftype A*, 《代数杂志》432（2015），252–279。33[Hum08] J. E. Humphreys, *Representations of semisimple Lie algebras in the BGG category $\mathcal{O}$*。数学研究生教材，94。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2008。xvi+289页。16、17、22、28、36[Jan95] J. C. Jantzen, *Lectures on quantum groups*，数学研究生教材，6。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1996。viii+266 页。5、23[Jan03] J. C. Jantzen, *Representations of algebraic groups*，数学调查专著，107，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2003，xiv+576 页。36[Jos74] A. Joseph, *Minimal realizations and spectrum generating algebras*, 《物理学中的群论方法》（第三届国际学术讨论会论文集，马赛理论物理中心，1974），第 1 卷，第 296–317 页。32

[Jos76] A. Joseph, *The minimal orbit in a simple Lie algebra and its associated maximal ideal*, 《高等师范学校科学年鉴》 (4) 9（1976），第 1 期，1–29。32[Jos95] A. Joseph, *Quantum groups and their primitive ideals*, 数学及其边界领域成果（3） [《数学及相关领域成果》（3）], 29。Springer-Verlag，柏林，1995。x+383 页。8、11[JL95] A. Joseph, G. Letzter, *Verma module annihilators for quantized enveloping algebras*, 《高等师范学校科学年鉴》，28（1995），第 4 期，493–526。3、8、9、33[Kac90] V. G. Kac, *Infinite-dimensional Lie algebras*，第三版，剑桥大学出版社，剑桥，1990。xxii+400 页。32[Kan01] R. Kane, *Reflection groups and invariant theory*, CMS 数学丛书/加拿大数学会数学著作，5。Springer-Verlag，纽约，2001。x+379 页。29、30[KL79] D. Kazhdan, G. Lusztig, *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*, 《数学发明》53（1979），第 2 期，165–184。27[KL00] G. R. Krause, T. H. Lenagan, *Growth of algebras and Gelfand-Kirillov dimension*，修订版。数学研究生教材，22。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2000。x+212页。11[Lus83] G. Lusztig, *Cells in affine Weyl groups*。载于《代数群及相关论题》（京都/名古屋，1983），R. Hotta 编，255–287。纯数学高级研究，第 6 卷。阿姆斯特丹：北荷兰出版公司；东京：纪伊国屋书店，1985。27[Lus84] G. Lusztig, *The two-sided cells of the affine Weyl group of type $\tilde{A}_n$*, 《无限维群及其应用》（加利福尼亚州伯克利，1984），275–283，数学科学研究所出版物，4，Springer，纽约，1985。26、27[Lus90] G. Lusztig, *Quantum groups at roots of* 1, 《几何奉献》35（1990），第 1–3 期，89–113。2、5[Lus03] G. Lusztig, *Hecke algebras with unequal parameters*，CRM 专著丛书，第 18 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2003。27[Mat87] H. Matsumura, *Commutative ring theory*，M. Reid 从日文译出。第二版，剑桥高等数学研究，8，剑桥大学出版社，剑桥，1989。xiv+320页。21[Osh] T. Oshima, *A classification of subsystems of a root system*，arXiv:math/0611904v4。29[Soe90] W. Soergel, *Kategorie $\mathcal{O}$, perverse Garben und Moduln über den Koinvarianten zur Weylgruppe*, 《美国数学会杂志》3（1990），第 2 期，421–445。3、21、23、26[W99] W. Wang, *Dimension of a minimal nilpotent orbit*, 《美国数学会会刊》127（1999），第 3 期，935–936。32

（V. Futorny） Shenzhen International Center for Mathematics, Southern University of Science and Technology, Shenzhen, Guangdong, P. R. China*Email address*: vfutorny@gmail.com

(X. Liu) Shenzhen International Center for Mathematics, Southern University of Science and Technology, Shenzhen, Guangdong, P. R. China*Email address*: xpliu127@ustc.edu.cn