强 δ相互作用支集于带角曲线上的特征值渐近行为

¨BADREDDINE BENHELLAL、NOAH KORNER 和 KONSTANTIN PANKRASHKIN

Abstract. 设 $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ 为一条带角点的分段光滑闭曲线。我们讨论二维薛定谔算子 $-\Delta-\alpha\delta_\Gamma$ 在 $\alpha \to \infty$ 下各个特征值的渐近行为，其中 δ_Γ 是支集于 Γ上的狄拉克 δ-分布。我们证明，若干个最小特征值的渐近行为仅由角点开口角决定，而其他特征值渐近展开的主项与光滑曲线的情形相同。在对 Γ的角点附加一项假设后（特别是，当 Γ 没有锐角时该假设成立），我们建立了更为精细的特征值渐近行为，并将其表示为边界上的一维有效算子。

arXiv:2512.14393v1 [math.SP] 16 Dec 2025

1. Introduction

1.1. 研究动机。 本文致力于研究带有吸引性 δ-势的薛定谔算子的谱分析。若 $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ 是一个超曲面（具有适当的正则性，例如利普希茨正则性，且要么是紧的，要么在边界附近或无穷远处具有适当的性质），这类算子通常形式上写作 $H_\alpha^\Sigma := -\Delta-\alpha\delta_\Sigma$，其中 $-\Delta$是通常的拉普拉斯算子，$\alpha > 0$ 是一个参数（解释为耦合常数），而 δ_Σ 是支集于 Σ上的狄拉克 δ-分布。更严格地说，可将 H_α^Σ 定义为由厄米半双线性型在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中生成的唯一自伴算子

$$h_\alpha^\Sigma(u,u) := \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \alpha \int_\Sigma |u|^2 \,\mathrm{dS}, \quad D(h_\alpha^\Sigma) := H^1(\mathbb{R}^n),$$

该型是闭且下半有界的 [6] （在对 Σ 施加适当几何假设的条件下）。从物理学角度看，这类算子 H_α^Σ 代表一类重要的可解量子力学模型 [1] ，它们是通常的薛定谔算子 ¨的极限，$-\Delta + V_{\alpha,\,\Sigma}$ 其吸引性正则势$V_{\alpha,\,\Sigma}$ 强烈局域于 Σ附近，严谨表述见例如 [2]。

研究 H_α^Σ 的谱性质与散射性质对相互作用支集 Σ的依赖关系，自然很有意义；这也促成了许多有趣的进展，参见综述 [9, 17]。其中一个尤为相关的情形是 $\alpha \to \infty$ ，对应于强吸引的 Σ。简单的考量表明， H_α^Σ 的特征函数会强烈局域在 Σ附近，因此通常认为，作用于 Σ 上的有效算子可能在谱分析中发挥关键作用。沿这一方向的首个结果见 [15] ，针对的是 $n = 2$ 且 Σ 为光滑闭曲线的情形：对于每个 $j \in \mathbb{N}$， j阶特征值 E_j （按非递减顺序排列并计入重数）满足

$$E_j(H_\alpha^\Gamma) = -\frac{\alpha^2}{4} + E_j(T) + \mathcal{O}\Big(\frac{\log\alpha}{\alpha}\Big) \quad \text{as } \alpha \to \infty,$$

其中 T 是作用于 $L^2(\Gamma)$上的有效薛定谔算子，定义为

$$T := -\partial^2 - \frac{k^2}{4},$$

其中， ∂ 表示关于弧长的导数， k 表示 Γ上的曲率。对 [15]的分析实质上同时利用了 Σ的光滑性和闭合性。后来的论文 [13] 将上述结果推广到了具有（正则）端点的光滑曲线 Σ ；在这种情况下，有

$$E_j(H_\alpha^\Gamma) = -\frac{\alpha^2}{4} + E_j(T^D) + \mathcal{O}\Big(\frac{\log\alpha}{\alpha}\Big) \quad \text{as } \alpha \to \infty,$$

其中， T^D 是 $L^2(\Gamma)$中的一维算子，其表达式与上文相同，但在 Γ的端点处施加狄利克雷边界条件。文献 [16] 研究了带尖峰曲线的情形，其特征值渐近行为和有效算子的性质最终都

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：35J50，次要分类：35P20，47A75。*Key words and phrases.* 薛定谔¨算子，奇异势，特征值渐近行为，带角点的曲线，有效算子。

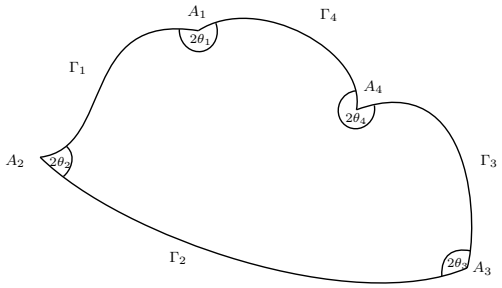


FIGURE 1.1. 一条带角曲线

截然不同。关于高维光滑 Σ 的情形已有一些结果，例如参见 [7, 10], ；另有若干研究分析了与锥形几何 [3, 21, 22, 23], 相关的特定非光滑、非紧致 Σ ，但据我们所知，尚无将单个特征值的渐近行为推广至带角点曲线 Σ 的研究。（不过，我们提及近期的文献 [5]，其中指出，第一特征值的渐近行为通常不同于光滑情形。）事实上，长期以来，这种推广的缺失一直被视为δ势研究中的主要空白之一；例如参见综述 [9]。本研究旨在至少部分填补这一空白，具体而言，我们考虑角开口受到某些限制的带角曲线。从方法论角度看，我们受到论文 [19]的启发，该文研究了带角区域中的罗宾拉普拉斯算子；我们的次要目标是展示这套方法的稳健性。

1.2. 主要结果。 我们研究二维空间（$n = 2$）中如下定义的算子 H^Γ_α，其中曲线 Γ为单射、闭合、分段 C^3-光滑曲线。更确切地说，我们假设可以将其分解为$\Gamma = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_M$，其中 Γ_j是具有正则端点的 C^3-光滑正则曲线，并且 Γ_{j-1}与 Γ_j在角点 A_j处以角度 $2\theta_j$相交，其中 $\theta_j \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$。这意味着每条 Γ_j都具有弧长参数化

$$\gamma_j : [0, l_j] \to \mathbb{R}^2,$$

其中， l_j 是 Γ_j 的长度， γ_j 是 C^3-光滑的，并且对所有 s都有 $|\gamma_j'(s)| = 1$ ，其中

$$\gamma_{j-1}(l_{j-1}) = \gamma_j(0) =: A_j$$

（约定 $\gamma_0 := \gamma_M$），使得 $s \mapsto \gamma_j(s)$对应于沿 Γ 的逆时针方向，并且对于每个 j ，向量 $\gamma_j'(0)$由向量 $-\gamma_{j-1}'(l_{j-1})$沿逆时针方向旋转角度 $2\theta_j$得到；此外，点 A_j 是曲线 Γ_j的唯一交点。图1.1给出了其示意图。 Γ_j 在点$\gamma_j(s)$处的曲率为

$$k_j(s) := \det\big(\gamma_j'(s), \gamma_j''(s)\big),$$

并且由于上述假设， k_j 在 $[0, l_j]$ 上是 C^1-光滑的。由标准考察可知 $\operatorname{spec}_{\mathrm{ess}} H^\Gamma_\alpha = [0, \infty)$，我们关注的是离散特征值。

我们的第一个结果是，前几个特征值的渐近行为仅取决于角度θ_j。为严谨地表述这一结果，考虑算子 $H^\alpha_\theta := H^{\Gamma_\theta}_\alpha$，其中 Γ_θ 是一个角度为 $2\theta \in$ 的无限角（0， 2π），如图 1.2 所示。正如第3节所讨论的，对于任意 $\alpha > 0$， H^α_θ的本质谱为 $[-\frac{\alpha^2}{4}, \infty)$，且其离散谱是有限的，因此我们记为

$$\kappa(\theta) := \text{the number of discrete eigenvalues of } H^\alpha_\theta,$$

由于显然的酉等价关系 $H^\alpha_\theta \simeq \alpha^2 H^1_\theta$，它与 α 无关。这使得我们可以定义与曲线 Γ相关的下列量：

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &:= \kappa(\theta_1) + \cdots + \kappa(\theta_M),\\
\mathcal{E} &:= \text{the disjoint union of the discrete eigenvalues of } H^1_{\theta_j},\ j = 1, \ldots, M,\\
\mathcal{E}_j &:= \text{the } j\text{-th element of } \mathcal{E} \text{ if numbered in non-decreasing order.}
\end{aligned}$$

关于特征值渐近行为的第一个结果如下：

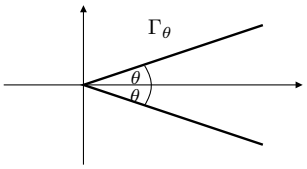


FIGURE 1.2. 无限角 Γ_θ

定理 1.1。 设 $n \in \mathbb{N}$，则存在 $\alpha_0 > 0$，使得对于所有 $\alpha \geq \alpha_0$，算子 H_α^Γ 至少有 $\mathcal{K}+n$ 个离散特征值，并且对于 $\alpha \to \infty$，有：

$$E_j(H_\alpha^\Gamma) = \mathcal{E}_j\alpha^2 + \mathcal{O}(\alpha^{\frac{4}{3}}) \text{ for } j = 1, \dots, \mathcal{K}, \qquad E_j(H_\alpha^\Gamma) = -\frac{\alpha^2}{4} + o(\alpha^2) \text{ for } j \geq \mathcal{K}+1.$$

我们的第二个结果是在对角点附加假设下，对 $j \geq \mathcal{K}+1$ 的 $E_j(H_\alpha^\Gamma)$ 结果的改进。为此，我们分析了图 1.3 所示风筝形区域 K_θ^R上的 H_α^Γ “有限体积”版本。具体而言，记 $N_{\theta,\alpha}^R$ 为由厄米半双线性型 $n_{\theta,\alpha}^R$ 在 $L^2(K_\theta^R)$ 中生成的自伴算子，该型定义为

$$n_{\theta,\alpha}^R(u) = \int_{K_\theta^R} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \alpha \int_{\Gamma_\theta^R} |u|^2 \,\mathrm{dS}, \quad D(n_{\theta,\alpha}^R) = H^1(K_\theta^R), \quad \Gamma_\theta^R := \Gamma_\theta \cap K_\theta^R,$$

也就是说，$_\alpha$ 是 ∂K_θ^R 上带诺伊曼边界条件的拉普拉斯算子，并在 Γ_θ^R 上具有 δ-相互作用，因此容易证明，当 $R \to \infty$ 时，前 κ 个 θ 特征值收敛到H_θ^α的相应特征值。以下条件将在我们的分析中发挥核心作用：若某个半角 θ 对某个 $\alpha > 0$（因而对任意 $\alpha > 0$）存在 $C > 0$，使得则称其为非共振

$$E_{\kappa(\theta)+1}(N_{\theta,\alpha}^R) \geq -\frac{\alpha^2}{4} + \frac{C}{R^2}$$

对 $R \to \infty$成立。

定理 1.2。 假设 Γ 的所有角点均为非共振（即所有半角 θ_j 均为非共振）。那么，对于任意 $n \in \mathbb{N}$，存在 $\alpha_0 > 0$，使得对于所有 $\alpha \geq \alpha_0$，算子 H_α^Γ 至少有 $\mathcal{K}+n$个离散特征值，并且

$$E_{\mathcal{K}+n}(H_\alpha^\Gamma) = -\frac{\alpha^2}{4} + E_n\Big(\bigoplus_{j=1}^M \Big(D_j - \frac{k_j^2}{4}\Big)\Big) + \mathcal{O}\Big(\frac{\log\alpha}{\sqrt{\alpha}}\Big) \quad \text{as } \alpha \to \infty,$$

其中 D_j 是区间 $(0, l_j)$上的狄利克雷拉普拉斯算子。

利用关于非共振条件的一些初等观察（见下文推论4.8），我们得到一个更直接的表述：

推论 1.3. 假设 Γ 仅有直角和钝角角点，即

$$\theta_j \in \Big[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\Big) \cup \Big(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\Big] \text{ for all } j = 1, \dots, M,$$

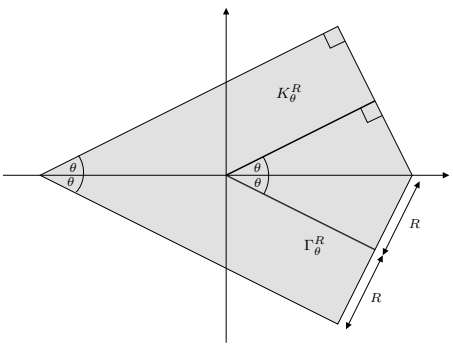


FIGURE 1.3. 风筝形区域 K_θ^R。它的角度为 2θ 和 $\pi - 2\theta$，且与 2θ 角不相邻的边长度为 $2R$。

那么 $\mathcal{K} = M$，并且对任意 $n \in \mathbb{N}$，存在 $\alpha_0 > 0$，使得对所有 $\alpha \geq \alpha_0$，算子 H_α^Γ 至少有 $M+n$ 个离散特征值，并且

$$E_{M+n}(H_\alpha^\Gamma) = -\frac{\alpha^2}{4} + E_n\Big(\bigoplus_{j=1}^{M}\Big(D_j - \frac{k_j^2}{4}\Big)\Big) + \mathcal{O}\Big(\frac{\log\alpha}{\sqrt{\alpha}}\Big) \quad as\ \alpha \to \infty,$$

其中 D_j 是 $L^2(0,\ l_j)$ 中的狄利克雷拉普拉斯算子。

注 1.4. 若能确定是否存在违反非共振条件的半角（即是否存在“共振”半角），将会很有意义；我们的分析并未提供任何这方面的线索。对于一个涉及罗宾拉普拉斯算子的类似问题，[19, 第 6 节1]证明了共振角的存在。本文与 [19] 的另一个（正面的）区别在于，我们的研究不需要对曲率施加额外条件（这归因于 δ-势的某些特定性质），而 [19] 中对罗宾情形的分析则要求曲率为常数。

上述主要结果可直接应用于分析近期引入的、具有斜向传输条件的薛定谔算子 [4, 5]。具体而言，设 $(\nu_1,\ \nu_2)$ 为Γ 上的外单位法向量，并考虑定义在 Γ上的复值函数 $n := \nu_1 + i\nu_2$。对于 $\beta \in \mathbb{R}$，记 Q_β^Γ 为 $L^2(\mathbb{R}^2)$中的算子，其作用方式为

$$Q_\beta^\Gamma f := -\Delta f \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2\setminus\Gamma)$$

在区域上

$$\begin{aligned} D(Q_\beta^\Gamma) := \Big\{ f \simeq (f_+, f_-) \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega_+) \oplus H^{\frac{1}{2}}(\Omega_-) : \\ \Delta f_\pm \in L^2(\Omega_\pm),\ (\partial_{\bar z} f_+, \partial_{\bar z} f_-) \in H^1(\mathbb{R}^2), \\ n(f_+ - f_-) + \beta(\partial_{\bar z} f_+ + \partial_{\bar z} f_-) = 0 \text{ on } \Gamma \Big\}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中 Ω_+ 和 Ω_-分别表示 Γ的内部和外部，$f_\pm$ 表示 f 在 $\Omega_\pm$上的限制，而表达式

$$\partial_{\bar z} := \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2)$$

称为 Wirtinger 导数。正如 [4, 5], 中所讨论的，算子 Q_β^Γ 是自伴的，并作为支集位于 Γ上的 δ 型势的狄拉克算子的非相对论极限。成立 $\mathrm{spec}_{\mathrm{ess}}\, Q_\beta^\Gamma = [0,\infty)$，并且对于 $\beta < 0$，其有无穷多个离散特征值，且仅在 $-\infty$ 处聚集，因此我们可以按非递增顺序枚举所有特征值 $\widetilde{E}_n(Q_\beta^\Gamma) < 0$，并计入重数。当 $\beta \to 0^-$ 时，$\widetilde{E}_n(Q_\beta^\Gamma)$的渐近行为与对具有 $\alpha \to \infty$ 的 H_α^Γ 的分析密切相关；这一点最初在 [4] 中观察到，随后在 [5, 推论 8] 中形式化如下：

命题 1.5. 若对于某些 $b > 0$ 和 $j \in \mathbb{N}$，有 $E_j(H_\alpha^\Gamma) = -b\alpha^2 + o(\alpha^2)$ 对 $\alpha \to \infty$成立，则

$$\widetilde{E}_j(Q_\beta^\Gamma) = -\frac{1}{b\beta^2} + o\Big(\frac{1}{\beta^2}\Big) \ for\ \beta \to 0^-.$$

直接应用定理 1.1 和推论 1.3，可得到以下观察，从而推广了 [5] 中 E_1 的早期分析：~

推论 1.6. 当 $\beta \to 0^-$ 时，有

$$\widetilde{E}_j(Q_\beta^\Gamma) = \frac{1}{\mathcal{E}_j\beta^2} + o\Big(\frac{1}{\beta^2}\Big) \ for\ j \in \{1,\dots,\mathcal{K}\}, \qquad \widetilde{E}_j(Q_\beta^\Gamma) = -\frac{4}{\beta^2} + o\Big(\frac{1}{\beta^2}\Big) \ for\ j \geq \mathcal{K}+1,$$

而当 Γ 的所有角点均为直角或钝角时，$\mathcal{K} = M$

1.3. 论文结构。第2节中，我们介绍一些记号，并回顾全文所用的主要工具，包括极小极大原理（及其若干技术性改写）、子空间之间的距离、用于 δ-相互作用的 IMS 局部化公式，以及若干一维算子（有界区间上的 δ-相互作用）的谱分析。第3节概述关于上述算子 H_θ^α（即支集在折线上的 δ-势）的已知事实。特别地，我们证明了对应于离散特征值的特征函数满足 Agmon 型衰减估计。第4节中，我们考察定义在风筝形区域 K_θ^R 上的 H_θ^α 的截断，其中 ∂K_θ^R上满足狄利克雷/诺伊曼边界条件，并针对特征值和特征函数建立若干估计，这些估计取决于 α、R和 θ。特别地，我们证明，当

Γ_θ 构成直角或钝角角点时，非共振条件成立。分析主要通过采用恰当的截断和分解，并结合极小极大原理以及第2节中的一维算子分析来完成。第5节研究曲线版本的 K_θ^R 及其相关算子。通过采用恰当的变形映射（即将曲线版本映射到直线版本），我们证明，第4节的大多数特征值结果在适当的渐近区域内都可推广到曲边风筝形区域。第6节致力于分析围绕曲线开弧构造的细管中的 δ-相互作用谱。这主要通过引入管状坐标并运用渐近估计，将分析归结为分离变量的算子来实现。第7节中，我们结合前几节的所有结果，证明两个主要结果。首先，我们将 $\mathbb{R}^2$ 特殊地分解为角点 A_j 的小邻域和"边" Γ_j，使得前几节的分析均适用于 H_α^Γ 在各个部分上的限制。随后，运用标准的狄利克雷-诺伊曼夹逼，在命题 7.3 中完成定理 1.1 证明的最后步骤。最后的第7.3小节用于证明定理 1.2，且明确依赖于要求满足非共振条件的谱估计。上界仍通过较为初等的狄利克雷-诺伊曼夹逼型论证得出；下界则是全文最具挑战性的部分，它将极小极大原理与适当的谱子空间距离估计，以及由截断特征函数张成的子空间的距离估计结合起来。

整体证明结构是对 [19] 中提出的方案进行相当直接的改编，该方案用于分析曲线多边形中的罗宾拉普拉斯算子。然而，实现每个证明步骤都需要付出大量技术工作，因为必须识别、严格定义并详细分析罗宾情形中出现的各种中间对象的对应物；这些对象此前均未出现在关于 δ-势的文献中，而且基础理论中很大一部分也必须彻底重建。

2. 预备知识

2.1. 记号。 设 $\mathcal{H}$ 是一个无限维希尔伯特空间。半双线性型 $a\colon D(a)\times D(a)\to\mathbb{C}$ 始终用小写字母表示。为简便起见，对于任意$u\in D(a)\subseteq\mathcal{H}$，我们记 $a(u):=a(u,u)$。由闭对称半双线性型 a 生成的线性算子记作相应的大写字母 A。具体而言，有

$$a(u,v)=\langle u,Av\rangle_{\mathcal{H}}\quad\text{for all } u\in D(a) \text{ and } v\in D(A).$$

利用极小极大原理，我们定义第 n 个瑞利商 $\Lambda_n(A)$ 如下：

$$\Lambda_n(A)=\inf_{\substack{V\subset D(a)\\ \dim V=n}}\sup_{\substack{u\in V\\ u\neq0}}\frac{a(u,u)}{\|u\|^2}.$$

此外，我们设

$$\Sigma(A):=\begin{cases}\inf\operatorname{spec}_{\mathrm{ess}}(A), & \text{if } \operatorname{spec}_{\mathrm{ess}}(A)\neq\emptyset,\\ +\infty, & \text{otherwise,}\end{cases}$$

其中，spec、$\operatorname{spec}_{\mathrm{ess}}$ 和 $\operatorname{spec}_{\mathrm{disc}}$ 分别表示算子 A 的谱、本质谱和离散谱。我们还用 $E_n(A)$ 表示 A 的第 n 个特征值（若存在）。最后，若 A 和 B 彼此酉等价，则记作 $A\cong B$。

2.2. 算子的比较与闭子空间之间的距离。 我们先回顾一些用于比较算子的有用引理。第一个引理十分经典，可由极小极大原理直接推出。

引理 2.1。 设 A_1 和 A_2 分别是无限维希尔伯特空间 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_1$ 上的两个下半有界算子。假设存在一个线性映射 $J\colon D(a_1)\to D(a_2)$，使得对所有 $u\in D(a_1)$，$\|Ju\|_{\mathcal{H}_2}=\|u\|_{\mathcal{H}_1}$ 和 $a_2(Ju)\le a_1(u)$ 均成立。则对任意 $n\in\mathbb{N}$，有 $\Lambda_n(A_2)\le\Lambda_n(A_1)$。

证明。 由于维数 $J(L)=$维 L 对任意有限维子空间 $L\subset D(a_1)$均成立，因此可得

$$\begin{aligned}\Lambda_n(A_2)&=\inf_{\substack{L_2\subset D(a_2)\\ \dim L_2=n}}\sup_{\substack{u\in L_2\\ u\neq0}}\frac{a_2(u)}{\|u\|_{\mathcal{H}_2}^2}\le\inf_{\substack{L_1\subset D(a_1)\\ \dim L_1=n}}\sup_{\substack{u\in J(L_1)\\ u\neq0}}\frac{a_2(u)}{\|u\|_{\mathcal{H}_2}^2}\\ &=\inf_{\substack{L_1\subset D(a_1)\\ \dim L_1=n}}\sup_{\substack{v\in L_1\\ v\neq0}}\frac{a_2(Jv)}{\|Jv\|_{\mathcal{H}_2}^2}\le\inf_{\substack{L_1\subset D(a_1)\\ \dim L_1=n}}\sup_{\substack{v\in L_1\\ v\neq0}}\frac{a_1(v)}{\|v\|_{\mathcal{H}_1}^2}=\Lambda_n(A_1).\end{aligned}$$

□

受 [14, 24] 中估计的启发，我们需要采用一种不太标准的方法，来比较作用于不同空间上的算子的特征值。以下引理是对 [16,命题 6]中所述方法的略微调整版本。

命题 2.2. 设 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}'$ 为无限维希尔伯特空间， B 和 B' 分别为作用于 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}'$上的自伴且下半有界算子。假设存在一个线性映射$J\colon D(B) \to D(B')$ 以及 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ ，使得对于固定的 $n \in \mathbb{N}$ ，以下条件成立：

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &< \frac{1}{\Lambda_n(B) + 1 + c_0}, \\ \|u\|_{\mathcal{H}}^2 - \|Ju\|_{\mathcal{H}'}^2 &\le \varepsilon_1(b(u) + \|u\|_{\mathcal{H}}^2(1 + c_0)), \\ b'(Ju) - b(u) &\le \varepsilon_2(b(u) + \|u\|_{\mathcal{H}}^2(1 + c_0)). \end{aligned}$$

于是，我们有

$$\Lambda_n(B') \le \Lambda_n(B) + \frac{(\Lambda_n(B)\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\Lambda_n(B) + 1 + c_0)}{1 - \varepsilon_1(\Lambda_n(B) + 1 + c_0)}.$$

Fi最后，我们回顾两个闭子空间之间距离的概念，参见 [18].

定义 2.3. 设 L_1 和 L_2 为希尔伯特空间 $\mathcal{H}$的闭子空间， P_1 和 P_2 分别为 $\mathcal{H}$ 中投影到 L_1 和 L_2 上的正交投影算子。 $d(L_1, L_2)$表示 L_1 和 L_2 之间的**距离** ，定义为

$$d(L_1, L_2) := \sup_{0 \neq x \in L_1} \frac{\|x - P_1 x\|}{\|x\|} \equiv \|P_1 - P_2 P_1\| \equiv \|P_1 - P_1 P_2\|.$$

虽然距离不具对称性，但满足三角不等式：对于任意闭子空间L_1、 L_2和 L_3，我们有

$$d(L_1, L_3) \le d(L_1, L_2) + d(L_2, L_3) \tag{2.1}$$

下文将用到以下关于子空间之间距离的估计，参见 [18, 命题 2.5]。

命题 2.4。 设 A 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上的一个自伴算子。给定 $n \in \mathbb{N}$，设 $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$包含在紧区间 I 中，且 $\psi_1, \ldots, \psi_n \in D(A)$ 是线性无关向量。令

$$\begin{aligned} &\varepsilon := \max_{j=1,\ldots,n} \|(A - \mu_j)\psi_j\|, \quad \eta := \frac{1}{2} dist(I, (\operatorname{spec} A) \setminus I), \\ &\lambda := \textit{the smallest eigenvalue of the Gram matrix } (\langle \psi_i, \psi_j \rangle)_{i,j=1,\ldots,n}. \end{aligned}$$

考虑子空间

$$L_1 := span\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \quad \textit{and} \quad L_2 := \textit{the spectral subspace associated with } A \textit{ and } I.$$

若 $\eta > 0$ 成立，则有

$$d(L_1, L_2) \le \frac{\varepsilon}{\eta} \sqrt{\frac{n}{\lambda}}.$$

2.3. δ-相互作用的 IMS 局部化公式与缩放 δ。 在分析定义于 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{R}^2$ 上、由支集位于一点或一条曲线上的 δ-相互作用所产生的拉普拉斯算子的谱性质时，重新缩放相互作用参数，并考虑由此自然得到的、参数固定的酉等价算子，会很方便。我们在以下两个引理中对此进行总结。就本文而言，如果一个利普希茨超曲面 $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ 可以延拓为满足 $\Sigma \subset \Sigma'$ 的利普希茨超曲面 Σ' ，则称其为正则的。

引理 2.5. 设$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个边界为利普希茨边界 $\partial\Omega$的区域。对于超曲面 $\Gamma_D \subseteq \partial\Omega$ 和正则超曲面 $\Gamma \subset \Omega$，我们定义由以下内容生成的算子 $Q^{\Omega,\Gamma}_{,\alpha}$，其中 $\alpha \ge 0$

$$q_\alpha^{\Omega,\Gamma}(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \alpha \int_\Gamma |u|^2 \,\mathrm{dS}, \quad D(q_\alpha^{\Omega,\Gamma}) = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\Gamma_D} = 0\}.$$

那么 $Q^{\Omega,\Gamma}_{,\alpha}$与 $\alpha^2 Q^{\alpha\Omega,\alpha\Gamma}_{,1}$ 酉等价。

证明。 考虑映射

$$\Phi : L^2(\alpha\Omega) \to L^2(\Omega), \quad u(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \alpha^{\frac{n}{2}} \cdot u(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

容易验证， Φ 是酉的，其逆映射为 $\Phi^{-1}(u(x)) = \alpha^{-\frac{n}{2}} u(\alpha^{-1}x)$，并且有

$$\|\Phi u\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \alpha^n |u(\alpha x)|^2 \mathrm{d}x = \int_{\alpha\Omega} \alpha^{n-n} |u(y)|^2 \mathrm{d}y = \|u\|^2_{L^2(\alpha\Omega)}.$$

于是我们可以写成

$$\begin{aligned} q_\alpha^{\Omega,\Gamma}(\Phi u) &= \alpha^{n+2} \int_\Omega |\nabla u(\alpha x)|^2 \mathrm{d}x - \alpha^{n+1} \int_\Gamma |u(\alpha x)|^2 \,\mathrm{dS} \\ &= \alpha^{n+2-n} \int_{\alpha\Omega} |u|^2 \mathrm{d}x - \alpha^{n+1-(n-1)} \int_{\alpha\Gamma} |u|^2 \,\mathrm{dS} = \alpha^2 q_1^{\alpha\Omega,\alpha\Gamma}(u). \end{aligned}$$

由于 $\Phi(H^1(\alpha\Omega)) = H^1(\Omega)$，我们得出 $\Phi(D(q^{\alpha\Omega,\alpha\Gamma}_1)) = D(q^{\Omega,\Gamma}_\alpha)$。因此， $Q^{\Omega,\Gamma}_\alpha \cong \alpha^2 Q^{\alpha\Omega,\alpha\Gamma}_1$ ，引理得证。□

注 2.6。 引理 2.5 中的算子 $Q^{\Omega,\Gamma}_\alpha$通常形式上写作 $Q^{\Omega,\Gamma}_\alpha = -\Delta - \alpha\delta_\Gamma$。若将 Ω_+ 和 Ω_- 分别记为相对于 Ω 中 Γ 的内部区域和外部区域，即 $\partial\Omega_+ = \Gamma$，并令 $u_\pm$ 为函数 $u \in L^2(\Omega)$ 在 $\Omega_\pm$上的限制。那么，对于 $u = (u_+, u_-) \in D(Q^{\Omega,\Gamma}_\alpha)$，狄拉克分布 δ_Γ 会在 Γ上产生透射条件：

$$\alpha u_\pm = \partial_\nu u_+ - \partial_\nu u_- \quad \text{with } u_+ = u_-,$$

其中 $\partial_\nu u_+ - \partial_\nu u_-$是相对于法向量 ν的法向导数跳跃，该法向量指向 Ω_+的外侧。

本文中我们经常使用 IMS 局部化公式。为避免重复，我们仅在此针对具体情形详细说明其应用。

引理 2.7. 设$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个具有利普希茨边界 $\partial\Omega$的区域。设 $\Gamma_D \subseteq \partial\Omega$ 是一个超曲面，$\Gamma \subset\Omega$ 是一个正则超曲面。考虑半双线性型

$$q(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \alpha \int_\Gamma |u|^2 \,\mathrm{dS}, \quad D(q) = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\Gamma_D} = 0\}.$$

设 $0 < a < b$ 和 $R > 0$，并设 $\chi_0, \chi_1 \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ 满足

$$\chi_0(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, a], \\ 0, & t \in [b, \infty), \end{cases} \quad \textit{and} \quad \chi_0^2 + \chi_1^2 \equiv 1,$$

并令 $\chi_j^R(x) := \chi_j(|x|/R)$ 对 $j \in \{0, 1\}$成立。则对任意 $u, v \in D(q)$，有

$$q(u, v) = q(\chi_0^R u, \chi_0^R v) + q(\chi_1^R u, \chi_1^R v) - \int_\Omega \overline{u}v(|\nabla\chi_0^R|^2 + |\nabla\chi_1^R|^2)\mathrm{d}x.$$

证明。 对于 $j \in \{0, 1\}$，简单计算可得

$$\langle\nabla(\chi_j^R u), \nabla(\chi_j^R v)\rangle = (\chi_j^R)^2\langle\nabla u, \nabla v\rangle + \overline{u}v|\nabla\chi_j^R|^2 + \frac{\overline{u}}{2}\langle\nabla((\chi_j^R)^2), \nabla v\rangle + \frac{v}{2}\langle\nabla u, \nabla((\chi_j^R)^2)\rangle.$$

注意，由于 $(\chi_0^R)^2 + (\chi_1^R)^2 \equiv 1$，因此 $\nabla((\chi_0^R)^2 + (\chi_1^R)^2) \equiv 0$。由此可得

$$\begin{aligned} q(\chi_0^R u, \chi_0^R v) + q(\chi_1^R u, \chi_1^R v) &= \int_\Omega \langle\nabla u, \nabla v\rangle \mathrm{d}x - \alpha \int_\Gamma ((\chi_0^R)^2 + (\chi_1^R)^2)\overline{u}v \,\mathrm{dS} \\ &\quad + \int_\Omega \overline{u}v(|\nabla\chi_0^R|^2 + |\nabla\chi_1^R|^2)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(\overline{u}\langle\nabla((\chi_0^R)^2 + (\chi_0^R)^2), \nabla v\rangle \\ &\quad + v\langle\nabla u, \nabla((\chi_0^R)^2 + (\chi_0^R)^2)\rangle\Big)\mathrm{d}x \\ &= q(u, v) + \int_\Omega \overline{u}v(|\nabla\chi_0^R|^2 + |\nabla\chi_1^R|^2)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

□

2.4. 带点相互作用的拉普拉斯算子。 在区间上定义、具有各种边界条件的带点相互作用的拉普拉斯算子模型算子，将频繁出现在第 3–6 节所讨论算子的谱性质分析中。特别是，我们需要其第一和第二特征值的渐近行为。本小节汇集了所需的结果。首先，让我们确定一些贯穿全文的定义和记号。

定义 2.8。给定 $\alpha \geq 0$，我们将长度为$2L$ 的区间上拉普拉斯算子的半双线性型定义为

$$t^X_{L,\alpha}(u) = \int_{-L}^{L} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \alpha|u(0)|^2,$$

其中， $X \in \{D, N, ND\}$ 对应于 $-L$和 L 处的 Neumann/Dirichlet/Neumann-Dirichlet 边界条件，其定义域为

$$D(t^D_{L,\alpha}) = H^1_0(-L, L), \;\; D(t^N_{L,\alpha}) = H^1(-L, L), \;\; D(t^{ND}_{L,\alpha}) = \{u \in H^1(-L, L) : u(L) = 0\}.$$

此外，给定 $\beta \geq 0$，令 $t^{\beta}_{L,\alpha}$ 为半双线性型，它在 $-L$和 L 处满足混合边界条件，定义为

$$t^{\beta}_{L,\alpha}(u) = \int_{-L}^{L} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \alpha|u(0)|^2 - \beta(|u(-L)|^2 + |u(L)|^2), \quad D(t^{\beta}_{L,\alpha}) = H^1(-L, L).$$

我们简记为

$$t^X_L := t^X_{L,\alpha},$$

从现在起，使用表达式 $t^X_{L,\alpha}$ 即意味着假设 $\alpha > 0$。

我们从 $T^N_{L,\alpha}$和 $T^{\beta}_{L,\alpha}$的前两个特征值开始。

命题 2.9。 存在 $c > 0$，使得当 $L\alpha \to \infty$、 $\alpha \to \infty$ 和 $L \to 0^+$ 时，以下结论成立：

(i) $-\frac{1}{4}\alpha^2 < E_1(T^D_{L,\alpha}) < -\frac{\alpha^2}{4} + \mathcal{O}(\alpha^2 e^{-\frac{1}{2}L\alpha})$.
(ii) $-\frac{\alpha^2}{4} + \mathcal{O}(\alpha^2 e^{-\frac{1}{2}L\alpha}) < E_1(T^N_{L,\alpha}) < -\frac{\alpha^2}{4}$.
(iii) $-\frac{\alpha^2}{4} + \mathcal{O}(\alpha^2 e^{-\frac{1}{2}L\alpha}) < E_1(T^{\beta}_{L,\alpha}) < -\frac{\alpha^2}{4}$.
(iv) $E_2(T^{\beta}_{L,\alpha}) > \frac{c}{L^2}$.
(v) $E_2(T^N_{L,\alpha}) > \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2$.
(vi) $E_1(T^{ND}_{L,\alpha}) > -\frac{\alpha^2}{4} + \mathcal{O}(\alpha^2 e^{-\frac{1}{2}L\alpha})$.

证明。 (i) 的断言已在 [15, 命题 2.4] 中证明。(ii) 和 (iii) 的断言已在 [15, 命题 2.5] 中证明。该证明还表明， $E_1(T^X_{L,\alpha})$ 是 $T^X_{L,\alpha}$, $X = N, \beta$ 的唯一负特征值。由此以及注 2.6 可知，第二特征值可写为 $E_2(T^X_{L,\alpha}) := \lambda^2$，其中 $\lambda \geq 0$；其对应的特征函数 $u = (u_+, u_-)$ 满足方程$-u''(x) = \lambda^2 u(x)$，其中 $x \in (-L, L) \setminus \{0\}$，并满足透射条件和边界条件

$$u'_-(0^-) - u'_+(0^+) = \alpha u(0), \quad u_+(L) = \beta u_+(L) \quad u'_-(-L) = -\beta u_-(-L), \tag{2.2}$$

其中，情形 $\beta = 0$ 对应诺伊曼边界条件。由于 $u_+(0^+) = u_-(0^-)$，可知对于某个 $a, b_\pm \in \mathbb{C}$，有 $u_\pm = a\cos(\lambda x) + b_\pm \sin(\lambda x)$。注意， $\lambda \neq 0$，因为根据透射条件， u 不可能在 $(-L, L)$ 上恒等于零。

注意到 $T^X_{L,\alpha}$ 与奇偶算子 $v(x) \mapsto v(-x)$对易。因此，对于$x \in (-L, 0]$， $u_-(x) = u_+(-x)$，从而 $u_-(x) = u_+(-x) = a\cos(\lambda x) - b_+ \sin(\lambda x)$，这意味着 $b_- = -b_+ := b$，因此 $u_\pm = a\cos(\lambda x) \pm b\sin(\lambda x)$。一方面，0 处的透射条件给出 $\alpha a \equiv \alpha u(0) = u'_-(0) - u_+(0)' = -2b\lambda$。另一方面，诺伊曼边界条件给出

$$u'_+(L) = (-a\lambda\sin(\lambda L) + b\lambda\cos(\lambda L)) = \beta(a\cos(\lambda L) + b(\sin(\lambda L))) = \beta u_+(L),$$

而罗宾边界条件给出

$$\begin{aligned} u'_-(-L) &= (-a\lambda\sin(-\lambda L) - b\lambda\cos(-\lambda L)) \\ &= -\beta(a\cos(-\lambda L) - b(\sin(-\lambda L))) = -\beta u_-(-L). \end{aligned}$$

上述条件导出如下方程组

$$A(\lambda)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha & 2\lambda \\ \beta\cos(\lambda L) + \lambda\sin(\lambda L) & \beta\sin(\lambda L) - \lambda\cos(\lambda L) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

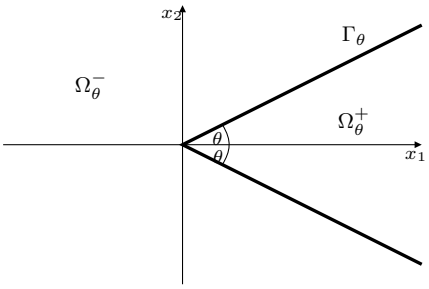


FIGURE 3.1. 折线 Γ_θ，其角度为 2θ，将 $\mathbb{R}^2$ 分成 Ω_θ^+ 和 Ω_θ^-。

并计算得

$$\begin{aligned}\det(A(\lambda)) &= \sin(\lambda L)(\alpha\beta - 2\lambda^2) + \cos(\lambda L)(-\lambda\alpha - 2\lambda\beta)\\ &= (\alpha\beta - 2\lambda^2)(\lambda L + \mathcal{O}((\lambda L)^3)) + (-\lambda\alpha - 2\lambda\beta)(1 + \mathcal{O}((\lambda L)^2))\\ &= \lambda L(\alpha(\beta - \frac{1}{L}) - 2\lambda^2 - \beta) + \mathcal{O}((\lambda L)^2).\end{aligned}$$

我们先假设 $\beta \neq 0$。那么，对于 $L < \beta^{-1}$，存在 $c_0 > 0$，使得对所有 $\lambda L < c_0$，都有 $\det(A(\lambda)) < 0$。由此可知，若 $\lambda \in [0, \frac{c_0}{L})$，则 $\det(A(\lambda)) < 0$，这意味着上面的矩阵方程无解，进而可推出 $u = 0$。因此，我们得到

$$E_2(T^\beta_{L,\alpha}) = \lambda^2 \geq \left(\frac{c_0}{L}\right)^2,$$

这就证明了 (iv)。相反，若 $\beta = 0$，则

$$\det(A(\lambda)) = -2\lambda^2 \sin(\lambda L) - \lambda\alpha\cos(\lambda L) = -\lambda(2\lambda\sin(\lambda L) + \alpha\cos(\lambda L)),$$

并且容易看出，对于 $\lambda \in [0, \frac{\pi}{2L}]$，$\det(A(\lambda)) < 0$。接着，按照前面的相同论证，可得 $E_2(T^N_{L,\alpha})$ 的所需下界，从而完成 (v) 的证明。

最后，利用 (v) 和狄利克雷-诺伊曼夹逼，我们得到

$$E_1(T^{ND}_{L,\alpha}) \geq E_1(T^N_{L,\alpha}) > -\frac{\alpha^2}{4} + \mathcal{O}(\alpha^2 e^{-\frac{1}{2}L\alpha}).$$

由此得到 (vi)，命题得证。 □

下面的断言是显然的：

引理 2.10. $E_1(T^{ND}_L) = \frac{\pi^2}{16L^2}$。

3. SCHRÖDINGER OPERATOR WITH A STRONG δ-INTERACTION SUPPORTED ON A BROKEN LINE

本节研究支集位于无限扇区边界上的强 δ-相互作用薛定谔算子的性质。特别地，我们分析特征值的渐近行为（若其存在），经过局部化论证后，这将导出定理 1.1 中陈述的渐近结果。

首先，我们固定本节中使用的记号。

记号 3.1. 从现在起，对于 $\theta \in (0, \pi)$，我们令

$$\Gamma_\theta := \big\{(r\cos\omega, r\sin\omega) \in \mathbb{R}^2 : r \geq 0,\ |\omega| = \theta\big\}, \tag{3.1}$$

它是两条在原点相交的半直线的并集，两者之间的角度为 2θ。于是，我们有分解 $\mathbb{R}^2 = \Omega_\theta^+ \cup \Gamma_\theta \cup \Omega_\theta^-$，其中约定 Ω_θ^+ 是角度为2θ 且法向量 ν 指向 Ω_+ 外部的楔形区域，如图 3.1 所示。我们还用记号 $\mathbb{R}^2_\pm = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ \pm x_2 > 0\}$ 表示上（分别为下）半平面。

在本节中，对于 $\alpha > 0$，我们定义半双线性型

$$h^\alpha_\theta(u, v) = \langle \nabla u, \nabla v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} - \alpha\int_{\Gamma_\theta} \overline{u}v\,\mathrm{dS}, \quad D(h^\alpha_\theta) = H^1(\mathbb{R}^2). \tag{3.2}$$

众所周知， h_θ^α 是闭的且下半有界（见 [12]），因此生成一个自伴算子 H_θ^α。下文中，我们设

$$\kappa(\theta) := \text{the number of discrete eigenvalues of } H_\theta^\alpha, \tag{3.3}$$

对于特殊情形 $\alpha = 1$，我们采用特殊记号

$$\mathcal{E}_n(\theta) = E_n(H_\theta^1), \quad n \in \{1, \dots, \kappa(\theta)\}, \tag{3.4}$$

这里回顾一下， $E_n(H_\theta^1)$ 表示 H_θ^1 的第 n 个特征值。

如注 2.6 所述，借助表示定理容易验证， H_θ^α 是定义在区域

$$D(H_\theta^\alpha) = \big\{u = (u_+, u_-) \in H^1(\Omega_\theta^+) \oplus H^1(\Omega_\theta^-) : \Delta u_\pm \in L^2(\Omega_\theta^\pm), \\ u_+ = u_- \text{ on } \Gamma_\theta \text{ and } \alpha u = \partial_\nu u_+ - \partial_\nu u_- \text{ on } \Gamma_\theta\big\},$$

上的算子，并且在分布意义下作用为 $H_\theta^\alpha u = (-\Delta u_+, \ -\Delta u_-)$。

接下来，我们引入 Ω_θ^+ 上带有 $\alpha-$ 罗宾边界条件的拉普拉斯算子，该条件施加在 $\partial\Omega_\theta^+ = \Gamma_\theta$ 上。

定义 3.2. 给定 $\alpha > 0$ 和 $\theta \in (0, \pi)$，我们用 s_θ^α 表示所定义的半双线性型 by

$$s_\theta^\alpha(u) = \int_{\Omega_\theta^+} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \int_{\Gamma_\theta} |u|^2 \, \mathrm{dS}, \quad D(s_\theta^\alpha) = H^1(\Omega_\theta^+)$$

并令 S_θ^α 为由 s_θ^α生成的算子。

以下命题汇总了文献 [20]中证明的算子 S_θ^α 的主要性质。

命题 3.3. 对任意 $\theta \in (0, \pi)$ 及 $\alpha > 0$，以下结论成立：

(i) S_θ^α定义良好，且下界为 $-\alpha^2 \sin^2\theta$。(ii) $S_\theta^\alpha \cong \alpha^2 S_\theta^1$。(iii) $\mathrm{spec_{ess}}(S_\theta^\alpha) = [-\alpha^2, \infty)$。(iv) $\mathrm{spec_{disc}}(S_\theta^\alpha) \neq \emptyset$ 当且仅当 $\theta < \frac{\pi}{2}$。(v) S_θ^α 对任意 θ均只有有限个离散特征值。(vi) S_θ^α在 $\theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ 时恰有一个离散特征值。

注 3.4. (i) 中的下界并非最优，但足以满足我们的目的。事实上，已知函数

$$(0, \frac{\pi}{2}) \ni \theta \mapsto E_1(S_\theta^1) \in (-1, -\frac{1}{4})$$

严格递增、连续且满射，并且当 θ 接近 0 以及 $\frac{\pi}{2}$ 时，其渐近行为可以非常精确地描述，参见例如 [8, 11]。

H_θ^α与 S_θ^α之间存在一些关系。事实上，令 $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$，则

$$h_\theta^\alpha(u) := \int_{\Omega_\theta^+} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \frac{\alpha}{2} \int_{\Gamma_\theta} |u|^2 \, \mathrm{dS} + \int_{\Omega_\theta^-} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \frac{\alpha}{2} \int_{\Gamma_\theta} |u|^2 \, \mathrm{dS} = s_\theta^\alpha(u_+) + s_{\pi-\theta}^\alpha(u_-). \tag{3.5}$$

因此， S_θ^α 的若干谱性质可以传递到 H_θ^α。

引理 3.5. 对于任意 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$，都有 $\mathrm{spec_{ess}}\, H_\theta^1 = [-\frac{1}{4}, \infty)$。此外， H_θ^1至少有一个且至多有有限多个离散特征值。

证明.本质谱的等式以及离散谱非空性已在 [12, 命题 5.4 和 5.6] 中证明。为证明离散谱的有限性，我们引入如定义 3.2 中的 $s_{\pi-\theta}^\alpha$，并考虑映射

$$J : H^1(\mathbb{R}^2) \to H^1(\Omega_\theta^+) \times H^1(\Omega_\theta^-), \, u \mapsto (u_+, u_-).$$

这使我们可以写成

$$h_\theta^1(u) = \int_{\Omega_\theta^+} |\nabla u_+|^2 \mathrm{d}x + \int_{\Omega_\theta^-} |\nabla u_-|^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_\theta} |u_+|^2 \, \mathrm{dS} - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_\theta} |u_-|^2 \, \mathrm{dS} = (s_\theta^{\frac{1}{2}} \oplus s_{\pi-\theta}^{\frac{1}{2}})(Ju),$$

因此 $H_\theta^1 \geq S_\theta^2 \oplus S_{\pi-\theta}^2$。根据命题 3.3，右侧的两个算子在 $(-\infty, -\frac{1}{4})$ 中都有有限个离散谱，因此由极小极大原理可得所需结论。□

接下来，我们总结 H_θ^α 的更多性质。

命题 3.6. 设 $\theta \in (0,\pi)$ 以及 $\alpha > 0$，并设 $\kappa(\theta)$ 如 (3.3) 中所述。则有以下结论：

(i) H_θ^α下有下界 $-\frac{\alpha^2}{4}\sin^2\theta$.(ii) H_θ^α与 $H_{\pi-\theta}^\alpha$酉等价。(iii) H_θ^α与 $\alpha^2 H_\theta^1$酉等价。(iv) 谱$\mathrm{ess}(H_\theta^\alpha) = [-\frac{\alpha^2}{4},\infty)$。(v) $\kappa(\theta)$ 与 α 无关，且有 $\kappa(\theta) < \infty$。

Proof. 我们先证明 (i)。令 $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$，则由命题 3.6 以及 (3.5) 得到

$$h_\theta^\alpha(u) \geq -\frac{\alpha^2}{4\sin^2\theta}\|u|_{\Omega_\theta^+}\|^2_{L^2(\Omega_\theta^+)} - \frac{\alpha^2}{4\sin^2(\pi-\theta)}\|u|_{\Omega_\theta^-}\|^2_{L^2(\Omega_\theta^-)} = -\frac{\alpha^2}{4\sin^2\theta}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)},$$

这就给出了所需的下界。

H_θ^α和 $H_{\pi-\theta}^\alpha$ 彼此酉等价，这一点很容易通过旋转角度π得到。注意到对任意 $\alpha > 0$， $\alpha\mathbb{R} = \mathbb{R}$ 和 $\alpha\Gamma_\theta = \Gamma_\theta$ 均成立，断言 (iii) 是引理 2.5 的直接推论。

关于 (iv)，对于 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$，结论由 (ii) 和引理 3.5 得出。在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 情形下，通过变量分离可得 $H_\pi^1 \cong T_1 \otimes I + I \otimes T$，其中 T_1 和 T如定义 2.8 所述。由于 $\inf\mathrm{spec}\ T_1 = -\frac{1}{4}$和 $\mathrm{spec}\ T = [0,\infty)$，我们推得 $\mathrm{spec}_{\mathrm{ess}}(H_{\frac{\pi}{2}}^\alpha) = [-\frac{\alpha^2}{4},\infty)$。

最后，断言 (v) 直接由断言 (iii) 和引理 3.5 得出。 □

以下断言在 [12, 命题 5.12 和定理 5.8] 中得到证明：

引理 3.7。 H_θ^1 的每个特征值都关于 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$严格递增。因此，计数函数 $(0, \frac{\pi}{2}) \ni \theta \mapsto \kappa(\theta)$ 是非增的。此外，当 θ 趋于 0时，还成立 $\kappa(\theta) \to \infty$ 。

另一个 引理 3.7 的一个推论是，对于某些角度， H_θ^α 恰有一个特征值 e.

引理 3.8. 对于任意 $\theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}]$均有 $\kappa(\theta) = 1$。

证明。 由命题3.6(ii)和引理 3.7，只需证明 $\kappa(\frac{\pi}{6}) < 2$。我们用反证法。反设 $\kappa(\frac{\pi}{6}) \geq 2$，这等价于 $\Lambda_2(H_{\frac{\pi}{6}}^1) < -\frac{1}{4}$。由 (3.5) 我们知道 $H_\theta^1 \geq S_\theta^2 \oplus S_{\pi-\theta}^2$，并且由于对于 $\theta = \frac{\pi}{6}$， $S_{\pi-\theta}^\alpha$在 $-\frac{1}{4}$ 以下没有特征值，根据命题 3.3(iii)-(vi)，可得

$$\Lambda_2(H_{\frac{\pi}{6}}^1) \geq \Lambda_2(S_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{1}{2}}) \geq -\frac{1}{4},$$

这与我们的假设矛盾。 □

Agmon 型衰减估计的存在保证了算子H_θ^α 的特征函数在原点附近呈现空间集中的形式。这一性质在第4节的分析中起着至关重要的作用。我们首先在特殊情形 $\alpha = 1$ 下建立这一估计。

引理 3.9。 给定 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$，设 $\mathcal{E}$ 是 H_θ^1 的一个离散特征值， ψ 是与之对应的特征函数。那么，对于任意 $\varepsilon \in (0,1)$ ，有

$$\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla\psi|^2 + |\psi|^2) e^{2(1-\varepsilon)\sqrt{-\frac{1}{4}-\mathcal{E}}|x|}\mathrm{d}x < \infty.$$

证明。 令 $\varepsilon \in (0,1)$ 和 $L > 0$，并设 $f_{L,\varepsilon}(x) = (1-\varepsilon)\sqrt{-\frac{1}{4}-\mathcal{E}}\min(|x|, L)$。注意到

$$\begin{aligned} |\nabla(e^{f_{L,\varepsilon}})|^2 &= |e^{f_{L,\varepsilon}}\nabla\psi|^2 + |e^{f_{L,\varepsilon}}\psi\nabla f_{L,\varepsilon}|^2 + \Re(2e^{2f_{L,\varepsilon}}\psi\langle\nabla f_{L,\varepsilon}, \nabla\psi\rangle) \\ &= |\nabla f_{L,\varepsilon}|^2 e^{2f_{L,\varepsilon}}|\psi|^2 + \Re(\langle\nabla(e^{2f_{L,\varepsilon}}\psi), \nabla\psi\rangle) \end{aligned}. \tag{3.6}$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla(e^{f_{L,\varepsilon}}\psi)|^2\mathrm{d}x &\geq \int_{\mathbb{R}^2}|e^{f_{L,\varepsilon}}\nabla\psi|^2+|\nabla f_{L,\varepsilon}|^2|e^{f_{L,\varepsilon}}\psi|^2-2|e^{f_{L,\varepsilon}}\nabla\psi||\nabla f_{L,\varepsilon}e^{f_{L,\varepsilon}}\psi|\ \mathrm{d}x\\ &\geq \int_{\mathbb{R}^2}\big(|e^{f_{L,\varepsilon}}\nabla\psi|^2+|\nabla f_{L,\varepsilon}|^2|e^{f_{L,\varepsilon}}\psi|^2\\ &-2(\frac{1}{4}|e^{f_{L,\varepsilon}}\nabla\psi|^2+|\nabla f_{L,\varepsilon}|^2|e^{f_{L,\varepsilon}}\psi|^2)\big)\mathrm{d}x\\ &\geq \int\frac{1}{2}|e^{f_{L,\varepsilon}}\nabla\psi|^2-(1-\varepsilon)^2(-\frac{1}{4}-\mathcal{E})|e^{f_{L,\varepsilon}}\psi|^2\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

因此

$$\|\psi e^{f_{L,\varepsilon}}\|^2_{H^1(\mathbb{R}^2)}\geq\int_{\mathbb{R}^2}(1-(1-\varepsilon)^2(-\frac{1}{4}-\mathcal{E}))|\psi|^2e^{2f_{L,\varepsilon}}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla\psi|^2e^{2f_{L,\varepsilon}}\mathrm{d}x.$$

现在，我们断言存在一个常数 $K_\varepsilon>0$，它仅依赖于 ε，使得

$$\|\psi e^{f_{L,\varepsilon}}\|^2_{H^1(\mathbb{R}^2)}\leq K_\varepsilon. \tag{3.7}$$

假设这个界成立，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla\psi|^2+|\psi|^2)e^{2f_{L,\varepsilon}}\mathrm{d}x\leq 2K_\varepsilon\Big(1+(1-\varepsilon)^2(-\frac{1}{4}-\mathcal{E})\Big).$$

由于右端与 L无关，通过取l，可得所需的不等式　　令 $L\longrightarrow\infty$。

界（3.7）的证明采用了与 [20, 定理 5.1] 中类似的论证。我们首先进行 IMS 局部化，以得到 h^α_θ 的一个合适下界。令 $R>0$，并令 χ_0，$\chi_1\in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ 满足

$$\chi_0^2+\chi_1^2=1,\quad \chi_0(t)=1\ \text{if}\ t\leq 1,\quad \chi_0(t)=0\ \text{if}\ t\geq 2,$$

并令 $\chi_{j,\,R}(|x|/R)$，其中 $j=0,\ 1$。于是，由引理 2.7 可得

$$h^\alpha(u)=h^\alpha_\theta(u\chi_{0,R})+h^\alpha_\theta(u\chi_{1,R})-\sum_{j=1,2,}\|u\nabla\chi_{j,R}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

因此，存在 $C_1>0$ 使得

$$h^\alpha(u)\geq h^\alpha_\theta(u\chi_{0,R})+h^\alpha_\theta(u\chi_{1,R})-\frac{C_1}{R^2}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

利用这一点，并结合恒等式 $h^1_\theta(u)=\delta\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}+(1-\delta)h^{\frac{1}{1-\delta}}_\theta(u)$，其中 $\delta\in(0,\ 1)$ 稍后将选取得充分小，我们得到

$$h^1_\theta(u)\geq\delta\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}+(1-\delta)\left(h^{\frac{1}{1-\delta}}_\theta(\chi_{0,R}u)+h^{\frac{1}{1-\delta}}_\theta(\chi_{1,R}u)-\frac{C_1}{R}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\right). \tag{3.8}$$

N　　接下来，对于 $j=0,\ 1$，我们对 $h^{1-\delta}_\theta(\chi_{j,\,R}u)$ 作下界估计。注意，对于 $j=0$，我们有　　e

$$h^{\frac{1}{1-\delta}}_\theta(\chi_{0,R}u)\geq E_1(H^{\frac{1}{1-\delta}}_\theta)\|u\chi_{0,R}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\geq-\frac{1}{4(1-\delta)^2\sin^2\theta}\|u\chi_{0,R}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \tag{3.9}$$

现在，在情形 $j=1$ 下，我们将区域 $\{|x|>R\}$ 划分如下。该区域包含 $\chi_{1,\ R}$ 的支集（见图 3.2）：

$$\begin{aligned}D_+&=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+:\ x_1-R\leq\frac{x_2}{\tan\theta}\leq x_1+R\}\cap\{|x|>R\};\\ D_-&=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}_+\times(-\mathbb{R}_+):\ x_1-R\leq\frac{-x_2}{\tan\theta}\leq x_1+R\}\cap\{|x|>R\};\\ D_{in}&=(R,0)+\Omega^+_\theta,\quad\text{and}\ D_{out}=\mathbb{R}^2\setminus(D^+\cup D^-\cup D_{in}\cup\{|x|\leq R\}).\end{aligned}$$

我们引入半双线性型

$$q^\pm(v)=\int_{D_\pm}|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{1-\delta}\int_{D_\pm\cap\Gamma_\theta}|u|^2\,\mathrm{dS},\ D(q^\pm)=\{v\in H^1(D_\pm):v(x)=0\ \text{if}\ x|=R\},$$

$$q^{in/out}(v)=\int_{D_{in/out}}|\nabla v|^2\mathrm{d}x,\quad D(q^{in/out})=\{v\in H^1(D_{in/out}):v(x)=0\ \text{if}\ |x|=R\}.$$

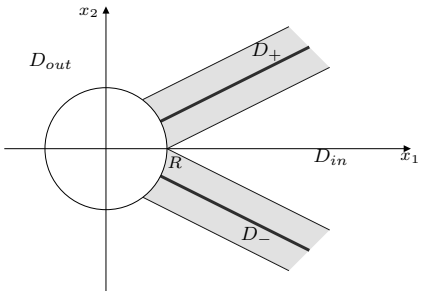


FIGURE 3.2. 区域 $\{|x| > R\}$ 的划分。

注意， Q^+ 和 Q^- 是酉等价的。利用这一点，并将 $u\chi_{1,\ R}$ 限制到 D_+、D_-、 D_{in}和 D_{out}上，我们得到

$$\begin{aligned} h_\theta^{\frac{1}{1-\delta}}(u\chi_{1,R}) &= q^+(u\chi_{1,R}) + q^-(u\chi_{1,R}) + q^{in}(u\chi_{1,R}) + q^{out}(u\chi_{1,R}) \\ &\geq \Lambda_1(Q^+)\left(\|u\chi_{1,R}\|^2_{L^2(D^+)} + \|u\chi_{1,R}\|^2_{L^2(D^+)}\right), \end{aligned}$$

其中我们利用了 $Q^{in/out}$ 的非负性。为估计 $\Lambda_1(Q^+)$，令

$$U_\theta = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - R \leq \frac{x_2}{\tan\theta} \leq x_1 + R\}.$$

注意，对于 $v \in D(q^+)$，若将其在 U_θ 上的零延拓记为 $\tilde{v}$，则 $q^+(v) = q(Jv)$，其中 q 定义为

$$q(v) = \int_{U_\theta} |\nabla v|^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{1-\delta}\int_{\mathbb{R}} |v(\frac{x_2}{\theta}, x_2)|^2 \frac{\mathrm{d}x_2}{\sin\theta}, \quad D(q) = H^1(U_\theta).$$

经过角度为 θ 的顺时针旋转，容易看出 $Q \cong I \otimes (-\Delta)^+ T^N_{R,\frac{1}{1-\delta}} \otimes I$，其中 $T^N_{R,\frac{1}{1-\delta}}$如定义 2.8 所述，且 $-\Delta$是 $\mathbb{R}$中的自由拉普拉斯算子。由此及命题 2.9 可得

$$\Lambda_1(Q^+) \geq \Lambda_1(Q) \geq -\frac{1}{4(1-\delta)^2} - \frac{C_2}{(1-\delta)^2} e^{-\frac{1}{2}\frac{R\sin\theta}{1-\delta}}$$

对某个 $C_2 > 0$ 成立，因此对于 $j = 1$，我们得到如下估计

$$h^{\frac{1}{1-\delta}}(u\chi_{1,R}) \geq \left(-\frac{1}{4(1-\delta)^2} - \frac{C_2}{(1-\delta)^2} e^{-\frac{1}{2}\frac{R\sin\theta}{1-\delta}}\right)\|u\chi_{1,R}\|,$$

结合 (3.9) 和 (3.8)，可得

$$\begin{aligned} h^1_\theta(u) \geq& \delta\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} - \frac{1}{4(1-\delta)\sin^2\theta}\|u\chi_{0,R}\|^2 \\ &- \left(\frac{1}{4(1-\delta)^2} + \frac{C_2}{(1-\delta)^2} e^{-\frac{1}{2}\frac{R\sin\theta}{1-\delta}}\right)\|u\chi_{1,R}\|^2 - \frac{C_1(1-\delta)}{R^2}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

下一步是将此估计应用于$\psi e^{f_{L,\varepsilon}}$。为此，注意到

$$\|\nabla f_{L,\varepsilon}\|^2 \leq (1-\varepsilon)^2(-\frac{1}{4} - \mathcal{E}). \tag{3.11}$$

利用 (3.6) 并进行分部积分，我们将 $h^1_\theta(\psi e^{f_{L,\ \varepsilon}})$ 改写为

$$\begin{aligned} h^1_\theta(\psi e^{f_{L,\varepsilon}}) &= \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla(\psi e^{f_{L,\varepsilon}})|^2 \mathrm{d}x - \int_{\Gamma_\theta} |\psi e^{f_{L,\varepsilon}}|^2 \,\mathrm{dS} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla f_{L,\varepsilon}|^2 e^{2f_{L,\varepsilon}}|\psi|^2 \mathrm{d}x + \int_{\Omega^+_\theta} \Re(\langle\nabla(e^{2f_{L,\varepsilon}}\psi), \nabla\psi\rangle)\mathrm{d}x + \int_{\Omega^-_\theta} \Re(\langle\nabla(e^{2f_{L,\varepsilon}}\psi), \nabla\psi\rangle)\mathrm{d}x \\ &\quad - \int_{\Gamma_\theta} |\psi e^{f_{L,\varepsilon}}|^2 \,\mathrm{dS} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla f_{L,\varepsilon}|^2 e^{2f_{L,\varepsilon}}|\psi|^2 + e^{2f_{L,\varepsilon}}\overline{\psi}(-\Delta\psi)\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_\theta} \Re(e^{2f_{L,\varepsilon}}\overline{\psi}(\partial_\nu\psi - \partial_\nu\psi - \psi))\,\mathrm{dS} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\psi|^2 e^{2f_{L,\varepsilon}}(\mathcal{E} + |\nabla f_{L,\varepsilon}|)\ \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

将此结果与 (3.10) 和 (3.11) 结合，我们得到

$$(\mathcal{E}-\mathcal{E}-\frac{1}{4}+(\varepsilon^2-2\varepsilon)(-\frac{1}{4}-\mathcal{E}))\|\psi e^{f_{L,\varepsilon}}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \geq \int_{\mathbb{R}^2}|\psi|^2 e^{2f_{L,\varepsilon}}(\mathcal{E}+|\nabla f_{L,\varepsilon}|)\mathrm{d}x$$
$$=h^1_\theta(\psi e^{f_{L,\varepsilon}}) \geq \delta\|\nabla\psi e^{f_{L,\varepsilon}}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} - \frac{1}{4(1-\delta)\sin^2\theta}\|\psi e^{f_{L,\varepsilon}}\chi_{0,R}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$
$$-(\frac{1}{4(1-\delta)^2}+\frac{C_2}{(1-\delta)^2}e^{-\frac{1}{2}\frac{R\sin\theta}{1-\delta}})\|\psi e^{f_{L,\varepsilon}}\chi_{1,R}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} - \frac{C_1(1-\delta)}{R^2}\|\psi e^{f_{L,\varepsilon}}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)},$$

且由于 $\chi^2_{0,\ R}+\chi^2_{1,\ R}=1$，可得

$$A\|\psi e^{f_{L,\varepsilon}}\chi_{0,R}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \geq \delta\|\nabla(\psi e^{f_{L,\varepsilon}})\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + B\|\psi e^{f_{L,\varepsilon}}\chi_{1,R}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)},$$

其中 A 和 B 定义如下

$$A=(\varepsilon^2-2\varepsilon)(-\frac{1}{4}-\mathcal{E})+\frac{\cos^2\theta+\delta\sin^2\theta}{4(1-\delta)\sin^2\theta}+\frac{C_1(1-\delta)}{R^2},$$
$$B=(2\varepsilon-\varepsilon^2)(-\frac{1}{4}-\mathcal{E})-\frac{1}{4}\frac{\delta}{1-\delta}-\frac{C_2}{1-\delta}e^{-\frac{1}{2}\frac{R\sin\theta}{1-\delta}}-\frac{C_1(1-\delta)}{R^2}.$$

由命题 3.6(i)，我们有 $-\frac{1}{4}-\mathcal{E}\leq=\frac{1}{4}-E_1(H^1_\theta)\ \leq-\frac{1}{4}$余弦$^2\theta$正弦$^2\theta$。此外，由于对于所有 $\varepsilon\in(0,\ 1)$，$(\varepsilon^2-2\varepsilon)\ <0$，可得我们可以选择充分小的 δ_ε，使得

$$(2\varepsilon-\varepsilon^2)(-\frac{1}{4}-\mathcal{E})-\frac{1}{4}\frac{\delta_\varepsilon}{1-\delta_\varepsilon}>0\ \text{ and }\ (\varepsilon^2-2\varepsilon)(-\frac{1}{4}-\mathcal{E})+\frac{\cos^2\theta+\delta_\varepsilon\sin^2\theta}{4(1-\delta_\varepsilon)\sin^2\theta}>0.$$

由于 A 和 B 中涉及的余项在 $R\to\infty$ 时趋于零，我们可以找到某个 $R_\varepsilon>0$，使得对于所有 $R\geq R_\varepsilon$，都有 $A>0$ 和 $B>0$。因此，存在 $A_\varepsilon>0$ 和 $B_\varepsilon>0$，使得对于所有 $R\geq R_\varepsilon$，都有 $A_\varepsilon\geq A$ 和 $B_\varepsilon\leq B$。这意味着不等式

$$A_\varepsilon\|\psi e^{f_{L,\varepsilon}}\chi_{0,R}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \geq \delta_\varepsilon\|\nabla(\psi e^{f_{L,\varepsilon}})\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + B_\varepsilon\|\psi e^{f_{L,\varepsilon}}\chi_{1,R}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)},\quad \forall R\geq R_\varepsilon.$$

因此，

$$C_\varepsilon\|\psi e^{f_{L,\varepsilon}}\chi_{0,R}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \geq \|\psi e^{f_{L,\varepsilon}}\|^2_{H^1(\mathbb{R}^2)}\quad \text{for } C_\varepsilon:=\frac{(A_\varepsilon+B_\varepsilon)}{B_\varepsilon}.$$

将此与直接的界结合起来

$$\|\psi e^{f_{L,\varepsilon}}\chi_{0,R}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq e^{4(1-\varepsilon)\sqrt{-\frac{1}{4}-\mathcal{E}}R}\|\psi\chi_{0,R}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq e^{4(1-\varepsilon)\sqrt{-\frac{1}{4}-\mathcal{E}}R}\|\psi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)},$$

便得到所需的不等式 (3.7)。证明至此完成。 □

在为 $\alpha=1$ 建立 Agmon 型估计后，通过缩放将其推广到任意 $\alpha>0$ 就简单得多。

推论 3.10。令 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，并设 ψ_α 是 H^α_θ 的一个特征函数。那么，存在 $b,B>0$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}^2}e^{b\alpha|x|}\left(\frac{1}{\alpha^2}|\nabla\psi_\alpha|+|\psi_\alpha|\right)\mathrm{d}x\leq B\|\psi_\alpha\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

证明。由引理 2.5 可知，ψ_α 是 H^α_θ 的特征函数，当且仅当 $\frac{1}{\alpha}\psi_\alpha(\frac{x_1}{\alpha},\frac{x_2}{\alpha})=\psi_1$ 是 H^1_θ 的特征函数。令 E 为与 ψ_1 相关联的特征值，并设

$$b=2(1-\varepsilon)\sqrt{-\tfrac{1}{4}-E}.$$

由引理 3.9，存在 $B>0$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla\psi_1|+|\psi_1|^2)e^{b|x|}\mathrm{d}x\leq B\|\psi_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

应用变量替换 $(y_1,\ y_2)=(\alpha x_1,\ \alpha x_2)$，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^2}e^{b\alpha|x|}(\frac{1}{\alpha^2}|\nabla\psi_\alpha|^2+|\psi_\alpha|^2)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^2}e^{b|y|}(|\nabla\psi_1|^2+|\psi_1|)\mathrm{d}y\leq B\|\psi_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}=B\|\psi_\alpha\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

由此得到所需的不等式。 □

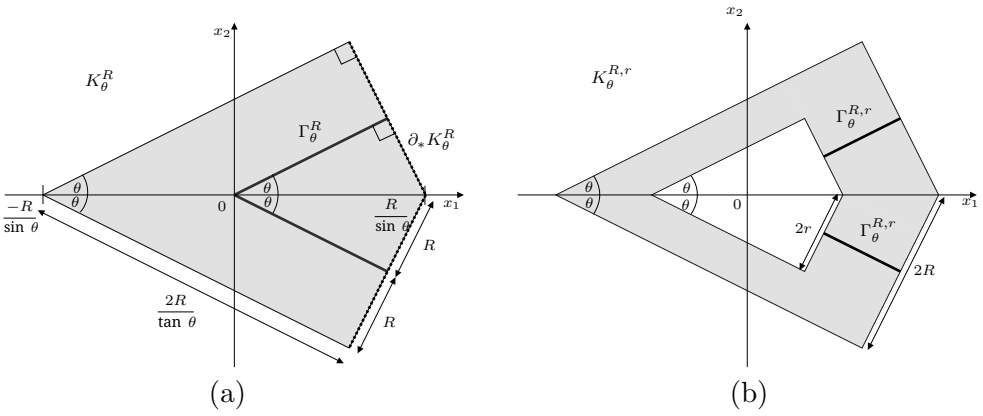


FIGURE 4.1. (a) 风筝形区域 K_θ^R 及其边界部分 $\partial_* K_\theta^R$ 以虚线表示。(b) 两个风筝形区域的补集 $K^{R,r}_\theta$。

4. 直角邻域

而在曲线多边形中的罗宾拉普拉斯算子情形（参见 [19]）下，由角点引起的特征值行为通过截断曲线扇形进行分析； δ-相互作用的情形则更为微妙。特别是，必须谨慎选择每个角点附近的适当邻域，才能准确捕捉谱效应。在详细讨论这一点之前，我们先聚焦于某个适当邻域内的分析：该邻域中的 δ-相互作用，其支集在局部与曲线 Γ_θ 重合，后者定义见 (3.1)。在此背景下，我们给出非共振条件的定义。为此，我们先固定本节中使用的记号，并精确定义几何构型以及所关注的算子。

定义 4.1. 设 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$，并令 Γ_θ 如 (3.1) 所示。对于 $R>0$，我们用 K_θ^R 表示顶点 $A=(-R/\sin\theta, 0)$ 处角度为 2θ 的风筝形区域内部，其中与 A 不相邻的边长度为 $2R$（见图 4.1(a)）。我们进一步用 $\partial_* K_\theta^R$ 表示 ∂K_θ^R 中与 A 不相邻的部分，并令

$$\Gamma_\theta^R := \Gamma_\theta \cap \left\{ |x| < \frac{R}{\tan\theta} \right\}$$

为将 δ-相互作用限制在区域 K_θ^R 上时的支集。此外，对于 $0<r<R$，我们定义两个角度相同的风筝形区域的补集如下（见图 4.1(b)）：

$$K_\theta^{R,r} := K_\theta^R \setminus \overline{K_\theta^r}, \quad \Gamma_\theta^{R,r} := \Gamma_\theta \cap \left\{ \frac{r}{\tan\theta} < |x| < \frac{R}{\tan\theta} \right\}.$$

接下来，我们引入半双线性型

$$\begin{aligned} d^R_{\theta,\alpha}(u) &= \int_{K_\theta^R} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \alpha \int_{\Gamma_\theta^R} |u|^2 \,\mathrm{dS}, \quad D(d_\theta^R) = H_0^1(K_\theta^R), \\ n^R_{\theta,\alpha}(u) &= \int_{K_\theta^R} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \alpha \int_{\Gamma_\theta^R} |u|^2 \,\mathrm{dS}, \quad D(n_\theta^R) = H^1(K_\theta^R), \\ p^{R,r}_{\theta,\alpha}(u) &= \int_{K_\theta^{R,r}} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \alpha \int_{\Gamma_\theta^{R,r}} |u|^2 \,\mathrm{dS}, \quad D(p^{R,r}_{\theta,\alpha}) = H^1(K_\theta^{R,r}). \end{aligned} \tag{4.1}$$

下文中，我们将重点研究算子 $D^R_{\theta,\alpha}$, $N^R_{\theta,\alpha}$ 和 $P^{R,r}_{\theta,\alpha}$.

我们首先为算子 $P^{R,r}_{\theta,\alpha}$ 建立一个下界。

引理 4.2。 存在 $C>0$，使得当 αr 充分大时，有

$$P^{R,r}_{\theta,\alpha} \geq \alpha^2 (-\frac{1}{4} - Ce^{-\frac{1}{2}r\alpha}).$$

证明。 我们首先按照图 4.2 所示将 $K^{R,r}_\theta$ 进行划分。也就是说，我们令

$$D_{in} := \left(\frac{R+r}{2\sin\theta}, 0 \right) + K_\theta^{\frac{R-r}{2}}, \quad D_{out} := K_\theta^{R,r} \setminus (D_+ \cup D_- \cup D_{in}),$$

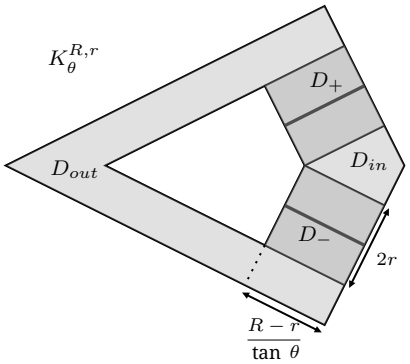


FIGURE 4.2. $K^{R,\theta}{}^{r}$ 分为 D_+、D_-、D_{in}、D_{out}

其中，对于 $M_\pm = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mp\sin\theta \\ \pm\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$，$D_\pm$ 由下式给出

$$D_\pm := \left(\frac{r}{\sin\theta}, 0\right) + \left\{ M_\pm \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : (x_1, x_2) \in \left(0, \frac{R-r}{\tan\theta}\right) \times (\min\{0, \pm 2r\}, \max\{0, \pm 2r\}) \right\},$$

并考虑半双线性型

$$q_{in/out}(v) = \int_{D_{in/out}} |\nabla v|^2 \mathrm{d}x, \quad D(q_{in/out}) = H^1(D_{in/out}),$$

$$q_\pm^\alpha(v) = \int_{D_\pm} |\nabla v|^2 \mathrm{d}x - \alpha \int_{\frac{r}{\tan\theta}}^{\frac{R}{\tan\theta}} |v(x_2, \pm\tan\theta x_2)|^2 \frac{\mathrm{d}x_2}{\cos\theta}, \quad D(q_\pm^\alpha) = H^1(D_\pm).$$

通过将 u 限制到 $D_X, X \in \{+, -, in, out\}$，我们得到 $p^{R,\theta}{}_{\alpha,}^{r}(u) = q_+^\alpha(u) + q_-^\alpha(u) + q_{in}(u) + q_{out}(u)$，一个 d

$$P_{\theta,1}^{R,r} \geq Q_+ \oplus Q_- \oplus Q_{in} \oplus Q_{out}. \tag{4.2}$$

算子 Q_+ 和 Q_- 与 $I \otimes T^N_{\frac{R-r}{2}}{}_{\tan\theta} \oplus T^N_{r,\alpha} \otimes I$ 酉等价。由于诺伊曼拉普拉斯算子非负，命题 2.9 保证存在一个 $C > 0$，使得

$$E_1(Q_\pm^\alpha) = E_1(I \otimes T^N_{\frac{R-r}{2\tan\theta}} \oplus T^N_{r,\alpha} \otimes I) > \alpha^2(-\frac{1}{4} - Ce^{-\frac{1}{2}r\alpha})$$

对 $\alpha r > 8$成立。结合 (4.2) 以及 $Q_{in/out}$ 的非负性，即可得到所需的下界。□

下面的推论可直接由引理 2.5 得出。

推论 4.3. 对于 $X \in \{D, N\}$ 和任意 $\alpha > 0$，有 $X^R_{\theta,\alpha} \cong \alpha^2 X^{\alpha R}_{\theta\,1,}$。

下面的引理讨论 $D^R_{\theta,\alpha}$的特征值渐近行为。回忆一下，$\kappa(\theta)$ 由 (3.3) 定义。

引理 4.4. 存在 $c > 0$，使得当 $\alpha R \to \infty$时，下列结论成立：

(i) $E_n(D^R_{\theta,\alpha}) = \alpha^2(\mathcal{E}_n(\theta) + \mathcal{O}(e^{-c\alpha R}))$ 对任意 $n \in \{1, \ldots, \kappa(\theta)\}$。(ii)$E_{\kappa(\theta)+1}(D^R_{\theta,\alpha}) \geq -\frac{\alpha^2}{4}$。

证明。鉴于推论 4.3，只需考虑情形 $\alpha = 1$ and $R \to \infty$。利用 $D^R_{\theta,1}$ 的单调性可知，对于任意 $n \in \mathbb{N}$，均有 $\Lambda_n(D^R_{\theta,1}) \geq \Lambda_n(H^1_\theta)$，因此以下结论成立：

(a) $E_n(D^R_{\theta,1}) \geq \Lambda_n(H^1_\theta) = \mathcal{E}_n(\theta)$ for $n \in \{1, \ldots, \kappa(\theta)\}$,
(b) $E_{\kappa(\theta)+1}(D^R_{\theta,1}) \geq \Lambda_{\kappa(\theta)+1}(H^1_\theta) = \inf \mathrm{spec}_{ess}(H^1_\theta) = -\frac{1}{4}$.

注意到 (a) 给出了当 $n \in \{1, \ldots, \kappa(\theta)\}$ 时 $E_n(D^R_{\theta,1})$ 的下界，而 (b) 则证明了引理的第二个结论。因此，尚需证明存在 c，$C > 0$，使得对任意 $n \in \{1, \ldots, \kappa(\theta)\}$，都有 $E_n(D^R_{\theta,1}) \leq \mathcal{E}_n(\theta) + Ce^{-cR}$。为此，我们采用 IMS 分割，并使用命题 3.6 中的 Agmon 型估计。令 χ_0，$\chi_1 \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ 满足

$$\chi_0^2 + \chi_1^2 \equiv 1, \quad \chi_0(t) = 1 \text{ if } t \in [0, \frac{1}{2}], \quad \chi_0(t) = 0 \text{ if } t \in [1, \infty).$$

对于固定的 $n \in \{1,\dots,\kappa(\theta)\}$，令 $\psi_1, \dots, \psi_n$ 为对应于 H^1_θ 的前 n 个特征值 $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ 的正交归一特征函数。然后定义

$$\chi^R_j(x) = \chi_j\left(\frac{|x|}{R}\right) \text{ for } j = 0, 1, \quad \psi^R_i = \chi^R_0\psi_i, \text{ and } \tilde{\psi}^R_i = \psi^R_i \restriction_{K^R_\theta} \quad \text{for } i = 1,\dots,n.$$

显然，对于每个 $i \in \{1,\dots,n\}$，都有 $\tilde{\psi}^R_i \in H^1_0(K^R_\theta) = D(d^R_{\theta,1})$，因为 ψ^R_i 的支集包含在 $\{|x| \le R\}$ 中。接下来我们证明，$L_R := span(\tilde{\psi}^R_1, \dots, \tilde{\psi}^R_n)$ 是 $H^1_0(K^R_\theta)$ 的一个 n 维子空间。根据命题 3.6，存在 b, $B > 0$，使得

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{b|x|}(|\nabla\psi_j|^2 + |\psi_j|^2)\mathrm{d}x \le B\|\psi_j\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \quad \text{for all } j \in \{1,\dots,n\}.$$

Set

$$C^R_{j,k} := \int_{\mathbb{R}^2} (\chi^R_1)^2\psi_j\psi_k\mathrm{d}x,$$

于是 $|C^R_{j,k}| \le \frac{1}{2}(C^R_{j,j} + C^R_{k,k})$。结合上述 Agmon 估计，可得

$$C^R_{k,k} = \int_{\mathbb{R}^2} (\chi^R_1)\psi^2_j\mathrm{d}x \le \int_{|x|>\frac{r}{2}} \psi^2_j\mathrm{d}x \le e^{-\frac{bR}{2}} \int_{|x|>\frac{r}{2}} e^{b|x|}\psi^2_j\mathrm{d}x \le Be^{-\frac{bR}{2}}.$$

由此可知，对于 $c = \frac{b}{2}$，有 $C^R_{j,k} = \mathcal{O}(e^{-cr})$，并且

$$\langle\tilde{\psi}^R_j, \tilde{\psi}^R_k\rangle_{L^2(K^R_\theta)} = \langle\psi_j, \psi_k\rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} - C^r_{j,k} = \delta_{j,k} + \mathcal{O}(e^{-cr}).$$

假设 L_R 不是 $H^1_0(K^R_\theta)$ 的 n 维子空间；也就是说，存在 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$，满足 $\lambda_1 \neq 0$，使得 $\lambda_1\tilde{\psi}^R_1 + \dots \lambda_n\tilde{\psi}^R_n = 0$。那么，当 R 足够大时，有

$$0 = \langle\lambda_1\tilde{\psi}^R_1 + \dots \lambda_n\tilde{\psi}^R_n, \lambda_1\tilde{\psi}^R_1 + \dots \lambda_n\tilde{\psi}^R_n\rangle = \sum_{j,k=1}^n \lambda_j\lambda_k\langle\tilde{\psi}^R_j, \tilde{\psi}^R_k\rangle$$

$$= (\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2)(1 + \mathcal{O}(e^{-cR})) + (\sum_{j,k=1, j\neq k}^n \overline{\lambda_j}\lambda_k)\mathcal{O}(e^{-cR}) \neq 0$$

这导致矛盾，并且 p证明了 L_R 必须是一个 n 维子 p空间 $H^1{}_0(K^R_\theta)$.

接下来，我们声称 $d^R_{\theta,1}(\tilde{\psi}^R_j, \tilde{\psi}^R_k) = h^1_\theta(\psi^R_j, \psi^R_k) + \mathcal{O}(e^{-cR})$，这样我们就可以使用极小极大原理。事实上，应用 IMS公式可得

$$d^R_{\theta,1}(\psi^R_j) = h^1_\theta(\psi_j, \psi_k) - \int_{\mathbb{R}^2} \langle\nabla(\chi^R_1\psi_j), \nabla(\chi^R_1\psi_k)\rangle\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_\theta} (\chi^R_1)^2\psi_j\psi_k + \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla\chi^R_0|^2 + |\nabla\chi^R_1|^2)\psi_j\psi_k\mathrm{d}x$$

$$=: h^1_\theta(\psi_j, \psi_k) - A_{j,k} + B_{j,k} + D_{j,k}.$$

我们来证明 $A_{j,k}$, $B_{j,k}$, $D_{j,k} = \mathcal{O}(e^{-cR})$。注意到

$$|D_{j,k}| \le \int_{\mathbb{R}^2} ||\nabla\chi^R_0|^2 + |\nabla\chi^R_1|^2||\psi_j\psi_k|\mathrm{d}x \le \frac{c_2}{R^2}\int_{|x|>\frac{R}{2}} |\psi_j|^2 + |\psi_k|^2\mathrm{d}x \le \frac{2c_2B}{R^2}e^{-cR} = \mathcal{O}(e^{-cR}).$$

对于 $A_{j,k}$，我们有 $|A_{j,k}| \le \frac{1}{2}(A_{j,j} + A_{k,k})$，并且

$$|A_{j,j}| = \|\nabla\chi^R_1\psi_j + \chi^R_1\nabla\psi_j\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \le 2\|\nabla\chi^R_1\psi_j\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + 2\|\chi^R_1\nabla\psi_j\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

$$\le 2(\frac{c_1}{R^2} + 1)\int_{|x|>\frac{R}{2}} |\psi_j|^2 + |\nabla\psi_j|^2\mathrm{d}x \le 2(\frac{c_1}{R^2} + 1)Be^{-cR} = \mathcal{O}(e^{-cR}).$$

类似地，我们有 $|B_{j,k}| \le \frac{1}{2}(B_{j,j} + B_{k,k})$，并且

$$B^R_{j,j} \le \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla(\chi^R_1\psi_j)|^2\mathrm{d}x + \frac{1}{4\sin^2\theta}\int_{\mathbb{R}^2} |\chi^R_1\psi_j|^2\mathrm{d}x = \mathcal{O}(e^{-cR}),$$

由此可得所声称的恒等式 $d^R_{\theta,1}(\tilde{\psi}^R_j, \tilde{\psi}^R_k)$。利用这一点，对于某个 $\lambda_j \in \mathbb{C}$ 的 $\psi = \lambda_1\tilde{\psi}^R_1 + \dots \lambda_n\tilde{\psi}^R_n \in L_R$，我们得到

$$d^R_{\theta,1}(\psi) = \sum_{j,k=1}^n (H^1_\theta(\psi_j, \psi_k) + \mathcal{O}(e^{-cR}))\lambda_j\lambda_k = \sum_{j,k=1}^n (\mathcal{E}_j(\theta)\delta_{j,k} + \mathcal{O}(e^{-cR})\lambda_j\lambda_k) \le (\mathcal{E}_n(\theta) + \mathcal{O}(e^{-cR}))|\lambda|^2,$$

又由于 $\|\psi\| = |\lambda|^2(1+\mathcal{O}(e^{-cR}))$，极小极大原理推出

$$E_n(D^R_{\theta,1}) \le \sup_{0\neq\psi\in L_R} \frac{d^R_{\theta,1}(\psi)}{\|\psi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}} \le \mathcal{E}_n(\theta) + \mathcal{O}(e^{-cR}),$$

由此完成证明 □

接下来，我们给出关于 $N^R_{\theta,\alpha}$ 的类似结果。

引理 4.5。 当 $R\to 0$、 $\alpha\to\infty$ 和 $\alpha R\to\infty$ 时，以下结论成立：

(i) $E_n(N^R_{\theta,\alpha}) = \alpha^2(\mathcal{E}_n(\theta) + \mathcal{O}(\frac{1}{(\alpha R)^2}))$ *for* $n\in\{1,\dots,\kappa(\theta)\}$.

(i) $E_{\kappa(\theta)+1}(N^R_{\theta,\alpha}) \ge -\frac{\alpha^2}{4} + o(\alpha^2)$.

证明。 根据狄利克雷-诺伊曼单调性，可得上界

$$E_n(N^R_{\theta,\alpha}) \le E_n(D^R_{\theta,\alpha}) \le \alpha^2(\mathcal{E}_n(\theta) + Ce^{-cR}).$$

对于 (i) 和 (ii) 中的下界，同样只需考虑情形 $\alpha = 1$。设 χ_0、 χ_1 和 χ^R_j 如引理 4.4 的证明中所述。由引理 2.7，得到

$$n^R_{\theta,\alpha}(u) \ge n^R_{\theta,\alpha}(\chi^R_0 u) + n^R_{\theta,\alpha}(\chi^R_1 u) - \frac{A}{R^2}\|u\|^2_{K^R_\theta} = d^R_{\theta,\alpha}(\chi^R_0 u) + p^{R,\frac{R}{2}}_{\theta,\alpha}(\chi^R_1 u) - \frac{A}{R^2}\|u\|^2_{K^R_\theta}$$

其中 $A = \|\chi_0'\|^2_\infty + \|\chi_1'\|^2_\infty < \infty$。考虑映射

$$J : D(n^R_{\theta,\alpha}) \to D(d^R_{\theta,\alpha}) \oplus D(p^{R,\frac{R}{2}}_\theta), \quad u\mapsto(\chi^R_0 u, \chi^R_1 u).$$

由于

$$\|Ju\|^2_{L^2(K^R_\theta)} = \|\chi^R_0 u\|^2_{L^2(K^R_\theta)} + \|\chi^R_1 u\|^2_{L^2\left(K^{R,\frac{R}{2}}_\theta\right)} = \|u\|^2_{L^2(K^R_\theta)},$$

$$\big(n^R_{\theta,\alpha} + \frac{A}{R^2}\big)(u) \ge (d^R_{\theta,\alpha}\oplus p^{R,\frac{R}{2}}_\theta)(Ju),$$

我们推得，对任意 $n\in\mathbb{N}$， $E_n(N^R_{\theta,\alpha}) \ge E_n(D^R_\theta \oplus P^{R,\frac{R}{2}}_{\theta,\alpha}) - \frac{A}{R^2}$。因此，对于任意固定的 $n\in\{1,\dots,\kappa(\theta)\}$，由引理 4.2 可得 $P^{R,\frac{R}{2}}_{\theta,\alpha}$ 的下界为

$$E_n(D^R_{\theta,\alpha}\oplus P^{R,\frac{R}{2}}_{\theta,\alpha}) = E_n(D^R_{\theta,\alpha}) = \alpha^2(\mathcal{E}_n(\theta) + \mathcal{O}(e^{-c\alpha R})),$$

因此

$$E_n(N^R_{\theta,\alpha}) \ge \alpha^2(\mathcal{E}_n(\theta) + \mathcal{O}(e^{-c\alpha R}) - \frac{A}{(\alpha R)^2}) = \alpha^2(\mathcal{E}_n(\theta) + \mathcal{O}(\frac{1}{(\alpha R)^2})),$$

这就完成了 (i) 的证明。最后，对于 $n = \kappa(\theta)+1$，由引理 4.2 和引理 4.4(ii) 可得

$$E_{\kappa(\theta)+1}(N^R_{\theta,\alpha}) \ge \min\left\{E_{\kappa(\theta)+1}(D^R_{\theta,\alpha}), E_1(P^{R,\frac{R}{2}}_{\theta,\alpha})\right\} - \frac{A}{R^2} = -\frac{\alpha^2}{4} + o(\alpha^2).$$

这证明了 (ii)，并完成了证明。 □

4.1. 非共振条件。 虽然引理 4.5 表明，$N^R_{\theta,\alpha}$的前 $\kappa(\theta)$ 个特征值与 H^α_θ 的特征值接近，但我们将引入一个非共振条件，对后续特征值的渐近行为施加限制。

定义 4.6。 若存在 $C>0$，使得半角 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$ 满足

$$E_{\kappa(\theta)+1}(N^R_{\theta,\alpha}) \ge -\frac{\alpha^2}{4} + \frac{C}{R^2},$$

对于固定的 $\alpha>0$ 和 $R\to\infty$，则称其为非共振的。我们也称 $\theta\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 是非共振的，如果 $\pi-\theta$ 是非共振的。

注意，根据引理 4.3，非共振条件等价于要求

$$E_{\kappa(\theta)+1}(N^R_{\theta,\alpha}) = \alpha^2 E_{\kappa(\theta)+1}(N^{\alpha R}_{\theta,1}) \ge \alpha^2\left(-\frac{1}{4} + \frac{C}{(\alpha R)^2}\right) = -\frac{\alpha^2}{4} + \frac{C}{R^2}$$

当 $\alpha R\to\infty$ 时。

引理 4.7. 所有半角 $\theta\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ 均与 $\kappa(\theta)=1$ 非共振。

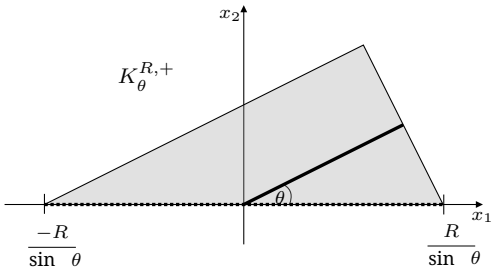


FIGURE 4.3. 三角形 $K^{R,+}_\theta$。

证明。不失一般性，我们可以假设 $\alpha = 1$。由命题 3.6 可知，对所有 $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$，$\kappa(\theta) = 1$ 均成立。因此，只需证明存在常数 $C > 0$和充分大的 R，使得

$$E_2(N^R_{\theta,1}) \geq -\frac{1}{4} + \frac{C}{R^2}.$$

我们首先考虑情形 $\theta = \frac{\pi}{4}$。注意，在这种情形下，有 $K^R_\theta = (-R, R)^2$，且 Γ^R_θ与 x_1 轴和 x_2 轴的正半轴重合。这种几何构型使我们能够估计任意$u \in H^1(K^R_\theta)$

$$n^R_{\frac{\pi}{4},1}(u) \geq \int_{(-R,R)^2} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \int_{-R}^{R} (|u(x_1,0)|^2 + |u(0,x_1)|^2)\mathrm{d}x_1 =: q^R(u),$$

其中 $D(q^R) = D(n^R_{\frac{\pi}{4},1}) = H^1((-R, R)^2)$。显然，$Q^R$与 $I \otimes T^N_{R,1} + T^N_{R,1} \otimes I$酉等价，并且对某个 $C_0 > 0$，有

$$E_2(N^R_{\frac{\pi}{4},1}) \geq E_2(Q^R) = E_1(T^N_{R,1}) + E_2(T^N_{R,1}) > -\frac{1}{4} + \mathcal{O}(e^{-\frac{R}{2}}) + \frac{\pi^2}{4R^2} \geq -\frac{1}{4} + \frac{C_0}{R^2},$$

这就证明了关于 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 的结论。 –

现在我们转向情形 $\theta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$。利用 K^R_θ 的轴对称性，我们引入酉变换

$$\begin{aligned} \Phi : L^2(K^R_\theta) &\to L^2(K^{R,+}_\theta) \oplus L^2(K^{R,+}_\theta) \\ u &\mapsto \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u(x_1,x_2) + u(x_1,-x_2) \\ u(x_1,x_2) - u(x_1,-x_2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中

$$K^{R,+}_\theta = K^R_\theta \cap \{(x_1,x_2) : x_2 > 0\},$$

见图 4.3。因此，有

$$n^R_\theta(u) = n^{R,N}_\theta(g) + n^{R,D}_\theta(h) = (n^{R,N}_\theta \oplus n^{R,D}_\theta)(\Phi(u))$$

其中，对于 $\bullet = D, N$, $n^{R,\bullet}_\theta$，定义为

$$n^{R,N}_\theta(g) = \int_{K^{R,+}_\theta} |\nabla g|^2 \mathrm{d}x - \int_0^{R\cos\theta} |g(\frac{x_2}{\tan\theta}, x_2)|^2 \frac{\mathrm{d}x_2}{\sin\theta},$$

其中 $D(n^{R,N}_\theta) = H^1(K^{R,+}_\theta)$ 且 $D(n^{R,D}_\theta) = \{u \in H^1(K^{R,+}_\theta) \mid u(\cdot, 0) = 0\}$。这证明 N^R_θ 与直和 $N^{R,N}_\theta \oplus N^{R,D}_\theta$ 酉等价，因此我们可以分别分析 $N^{R,N}_\theta$ 和 $N^{R,D}_\theta$ 的谱。

我们首先为狄利克雷情形下的第一特征值建立一个下界。应用狄利克雷夹逼，可得不等式 $N^{R,D}_\theta \geq \widetilde{N}^{R,D}_\theta$，其中 $\widetilde{N}^{R,D}_\theta$表示作用在 Π^R_θ上的拉普拉斯算子。区域 Π^R_θ定义为矩形 $(-R, R) \times (-R\tan\theta, R\tan\theta)$ 绕角度 θ逆时针旋转所得的区域；在 x_1 轴下方的边界部分施加狄利克雷边界条件，在其余边界部分施加诺伊曼边界条件，并且 δ-相互作用的支集位于 x_1 轴上；参见图 4.4(a)。经过旋转和变量分离，容易

看出 $\widetilde{N}^{R,D}$与 $I\otimes T_R^{ND}{}_{,1}+T^{ND}{}_{R\tan\theta}\otimes I$ 酉等价；利用命题 2.9(vi) 和引理 2.10，可知当 R 充分大时，

$$E_1(N^{R,D})\geq E_1(T_{R,1}^{ND})+E_1(T^{ND}_{\frac{2R}{\tan\theta}})>-\frac{1}{4}-Ce^{-\frac{R}{2}}+\frac{\pi^2\tan^2\theta}{16R^2}\geq-\frac{1}{4}+\frac{C_D}{R^2},$$

对于某个 $C_D>0$。因此，仍需为 Neumann情形建立一个下界。为此，我们首先按角度 $\pi-\theta$ 进行逆时针旋转（见图 4.4(b)），从而得到一个与下式相关的酉等价算子

$$q_\theta^R(g)=\int_{\tilde K_\theta^R}|\nabla g|^2\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{R}{\tan\theta}}|g(0,x_2)|^2\mathrm{d}x_2,\quad D(q_\theta^R)=H^1(\tilde K_\theta^R),$$

其中

$$\tilde K_\theta^R=\Big\{(y_1,y_2)\in(-R,R)\times(-\frac{R}{\tan\theta},\frac{R}{\tan\theta})\mid -y_2<\frac{y_1}{\tan\theta}\Big\}.$$

随后，我们施加另一个由按 $\tan\theta$ 进行缩放构成的酉变换：

$$\Psi:L^2(\tilde K_{\frac{\pi}{4}}^{R\tan\theta})\to L^2(\tilde K_\theta^R),\quad g\mapsto\sqrt{\tan\theta}\cdot g(x_1,x_2\tan\theta),$$

从而得到

$$\tilde q_\theta^R(v)=\int_{\tilde K_{\frac{\pi}{4}}^R}|\partial_{x_1}v(x_1,t)|^2+\tan^2\theta|\partial_t v(x_1,t)|^2\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}t-\int_0^R|\tilde g(0,t)|^2\mathrm{d}t,\quad D(\tilde q_\theta^R)=H^1(\tilde K_{\frac{\pi}{4}}^R).$$

由此可知

$$\tilde q_\theta^R(v)=\tilde q_{\frac{\pi}{4}}^R(v)+(\tan^2\theta-1)\int_{\tilde K_{\frac{\pi}{4}}^R}|\partial_t v(x_1,t)|^2\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}t\geq\tilde q_{\frac{\pi}{4}}^R(v),$$

根据极小极大原理，我们得到

$$E_2(N_\theta^{N,R})=E_2(\tilde Q_\theta^R)\geq E_2(\tilde Q_{\frac{\pi}{4}}^R)=E_2(N_{\frac{\pi}{4}}^{N,R})\geq-\frac{1}{4}+\frac{C_0}{R^2},$$

由此完成证明。 □

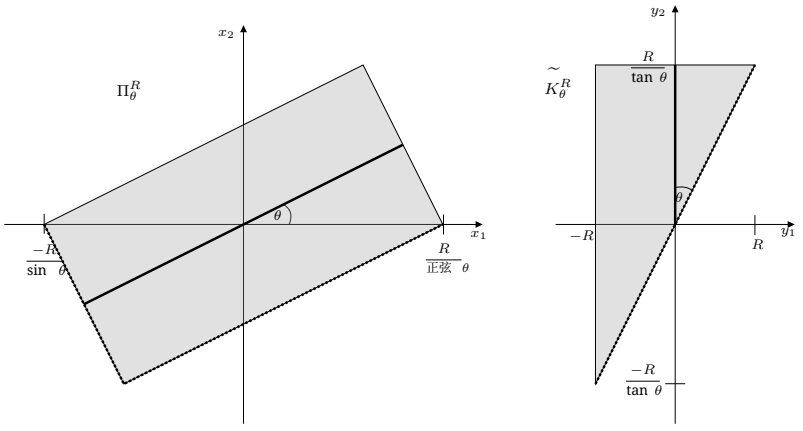
注意到变换 $\theta\mapsto\pi-\theta$ 对应于一个酉变换，我们将关于非共振角度的观察总结如下：

推论4.8。 所有半角 $\theta\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}]$ 均为非共振角度，其对应的 $\kappa(\theta)=1$。

为便于后续进行某些估计，我们引入以下算子。

定义4.9。 对于定义 4.1 中的 K_θ^R 和 $\partial_*K_\theta^R$，我们设

$$r_{\theta,\alpha}^R(u)=\int_{K_\theta^R}|u|^2\mathrm{d}x-\alpha\int_{\Gamma_\theta^R}|u|^2\,\mathrm{dS}-\alpha\int_{\partial_*K_\theta^R}|u|^2\,\mathrm{dS},\quad D(r_{\theta,\alpha}^R)=H^1(K_\theta^R).$$



(a) (b)

FIGURE 4.4. (a) 通过狄利克雷夹逼延续 $K^{R,D}{}_\theta{}^+$。(b) $K^{R,D}{}_\theta{}^+$ 逆时针旋转角度 $\frac{\pi}{2}-\theta$。

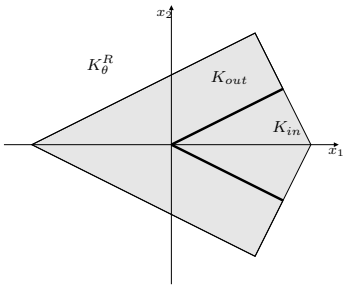


FIGURE 4.5. K_θ^R分为 K_{out} 和 K_{in}。

引理 4.10。 存在 $c>0$，使得 $R^R_{\theta,\alpha} \geq -c\alpha^2$。

证明。 令 $K_{in} := \frac{R}{2\text{正弦}\theta} + K_\theta^{\frac{R}{2}}$，并令 $K_{out} = K_\theta^R \setminus K_{in}$，如图4.5所示。

考虑映射

$$J : H^1(K_\theta^R) \to H^1(K_{in}) \times H^1(K_{out}), \quad u \mapsto (u\restriction_{K_{in}}, u\restriction_{K_{out}}) = (u_{in}, u_{out}).$$

由于 $\partial_* K_\theta^R \subset \partial K_\theta^R$，对于任意 $u \in H^1(K_\theta^R)$，有

$$\begin{aligned} r^R_{\theta,\alpha} &\geq \int_{K_\theta^R} |u|^2 \mathrm{d}x - 2\alpha \int_{\Gamma_\theta^R} |u|^2 \,\mathrm{dS} - \alpha \int_{\partial K_\theta^R} |u|^2 \,\mathrm{dS} \\ &= \int_{K_{in}} |u|^2 \mathrm{d}x - \alpha \int_{\partial K_{in}} |u|^2 \,\mathrm{dS} + \int_{K_{out}} |u|^2 \mathrm{d}x - \alpha \int_{\partial K_{out}} |u|^2 \,\mathrm{dS} \\ &=: r^R_{in,\alpha}(u_{in}) + r^R_{out,\alpha}(u_{out}) = (r^R_{in,\alpha} \oplus r^R_{out,\alpha})(Ju), \end{aligned}$$

其中 $R_{in/out}$ 是 $K_{in/out}$ 上的拉普拉斯算子，具有 α-罗宾边界条件。因此可得 $R^R_{\theta,\alpha} \geq R^R_{in,\alpha} \oplus R^R_{out,\alpha}$。利用引理 2.5 中相同的论证，可以证明

$$R^R_{in,\alpha} \cong \frac{1}{R^2} R^1_{in,\alpha R} \quad R^R_{out,\alpha} \cong \frac{1}{R^2} R^1_{out,\alpha R}.$$

因此， [19, 引理 2.7] 保证存在常数 $c_{in} > 0$ 和 $c_{out} > 0$，使得当 $\alpha R \to \infty$时，有

$$R^1_{in,\alpha R} \geq -c_{in}(\alpha R)^2 \quad \text{and} \quad R^1_{out,\alpha R} \geq -c_{in}(\alpha R)^2,$$

由此可得 $R^R_{in,\alpha} \geq -c_{in}\alpha^2$ 且 $R^R_{out,\alpha} \geq -c_{in}\alpha^2$。因此，存在 $c>0$ 使得 $R^R_{\theta,\alpha} \geq -c\alpha^2$，引理得证。
□

5. NEIGHBORHOODS OF CURVED CORNERS

为了分析角点附近的特征值渐近行为，我们首先将曲线分成两段在角点相交的部分，并将每段光滑地延伸至交点之外，以此在角点周围构造一个邻域。这种延伸使我们能够构造一个邻域，使其谱性质在渐近意义上与延伸方式无关；见图5.1(a)。随后，我们找到一个双 Lipschitz 映射，将该邻域拉直为一个风筝形区域，其谱行为此前已有研究。该构造将 [19] 中的技巧推广到了这一情形。

5.1. **几何构型与变量替换**。如前所述，我们考虑两条曲线以给定角度相交的情形。更确切地说，我们为本节余下部分引入以下记号。

记号 5.1. 设 Γ_+ 和 Γ_- 是两条单射的 C^3-光滑曲线，它们仅在原点相交，夹角为 $2\theta \in (0, \pi)$。对于参数 $\pm s_\pm > 0$，考虑 $\Gamma_\pm$的弧长参数化 $\gamma_\pm : [s_-, s_+] \to \mathbb{R}^2$。不失一般性，我们可以假设

$$\Gamma_+ \cap \Gamma_- = (0,0) = \gamma_\pm(0), \quad \gamma'_\pm(0) = (\cos\theta, \pm\sin\theta),$$

此外，我们将 $\Gamma_\pm$ 的切向量、法向量和曲率定义为

$$T_\pm(s) = \begin{pmatrix} T_1^\pm \\ T_2^\pm \end{pmatrix} = \gamma'_\pm(s), \quad n_\pm(s) = \begin{pmatrix} n_1^\pm \\ n_2^\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mp 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot T_\pm(s), \quad n'_\pm(s) = k_\pm(s)\gamma'_\pm(s).$$

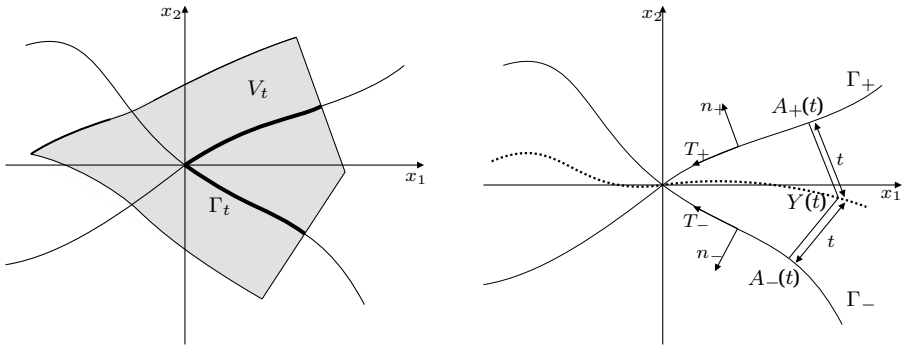


FIGURE 5.1. (a) 具有 δ-相互作用支集的光滑延拓的角点邻域。(b) Γ_+ 和 Γ_- 以角度 2θ 相交，以及 $Y(t)$的虚线点图。

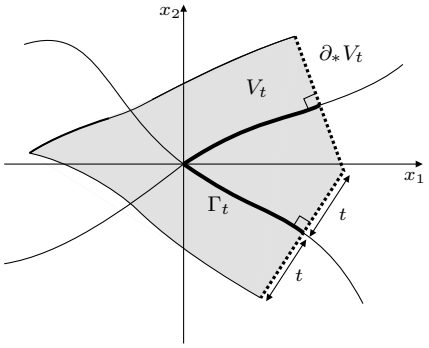


FIGURE 5.2. 围绕 Γ_t构造的邻域 V_t 。

关于邻域的构造，证明引理 A.1]时所用的相同论证可推出以下结论：存在 $t_1 > 0$ 以及一个 C^2-光滑函数 $Y : (-t_1,\ t_1) \to \mathbb{R}^2$ ，使得对于任意$t \in (-t_1,\ t_1)$，点 $Y(t)$到曲线 Γ_+ 和 Γ_-的距离恰好均为 t 。更确切地说，存在函数 $A_\pm : (-t_1,\ t_1) \to \Gamma_\pm$ ，使得对所有 t， $A_\pm(t) - Y(t) = t$ 成立，并且每个 $A_\pm$ 都可写为 $A_\pm(t) = \gamma_\pm(\lambda_\pm(t))$，其中

$$\lambda_\pm \in C^2, \quad \lambda_\pm(0) = 0, \quad \lambda'_\pm(0) = \operatorname{cotan}\theta, \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y'(0) = \frac{1}{\sin\theta}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

关于这一构造的示意图，请参见图5.1(b)。

适当邻域的构造如图5.2所示，可由以下引理概括。

引理 5.2. 存在

(i) </style}一个 -光滑函数 ，定义在 0 的某个邻域内，且满足 $r(0) = 0$ 和 $r'(0) = 1$，(ii) C^2-光滑函数 $\lambda_\pm$ ，满足 $\lambda_\pm(0) = 0$ 和 $\lambda'_\pm(0) =$ 余切θ，(iii) 一个双*Lipschitz*映射 ϕ_V: $K_\theta^{r(t)} \to \phi_V(K_\theta^{r(t)}) =: V_t$，其中 $\phi'_V(x) = I_2 + \mathcal{O}(|x|)$ 对 $|x| \to 0$成立，使得定义

$$A_\pm := \gamma_\pm \circ \lambda_\pm, \quad \Gamma_t := A_+([0,t)) \cup A_-([0,t)),$$
$$\partial_* V_t := \{A_\pm(t) + N_\pm(A_\pm(t)) \cdot \tau : \tau \in (-t,t)\},$$

以下恒等式对所有充分小的 $t > 0$ 均成立

$$\Gamma_t = \phi_V(\Gamma_\theta^{r(t)}), \quad \partial_* V_t = \phi_V(\partial_* K_\theta^{r(t)}).$$

证明。 不失一般性，我们可以假设存在 $t_0 > 0$ ，使得对于所有 $t \in [-t_0, t_0]$都有 $Y'(t) \neq 0$ 。我们的目标是按弧长对曲线 Y进行参数化。为此，考虑由下式定义的函数σ

$$\sigma(0) = 0, \quad \sigma'(0) = |Y'(0)| = \frac{1}{\sin\theta}, \quad \sigma' = |Y'| > 0.$$

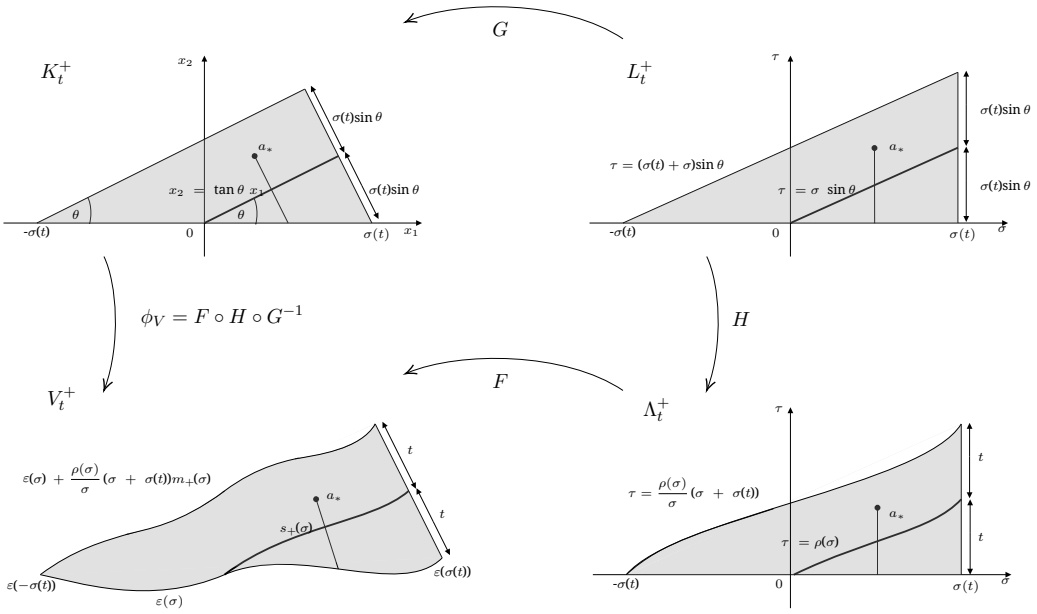


FIGURE 5.3. V_t的构造分解

于是，映射 $\sigma: (-t_0, t_0) \to (-\sigma_-, \sigma_+)$ 是某个 $\sigma_\pm > 0$ 的 C^2-微分同胚，其逆映射$\rho := \sigma^{-1}$: $[-\sigma_-, \sigma_+] \to [-t_0, t_0]$ 满足性质 $\rho(0) = 0$ 以及 $\rho'(0) = {}^{1}_{\sigma'(0)} = \sin\theta$。利用 ρ，我们将曲线 Y 及其相关函数重新参数化为

$$\varepsilon := Y \circ \rho, \quad s_\pm := \lambda_\pm \circ \rho, \quad B_\pm := \gamma_\pm \circ s_\pm, \quad m_\pm := n_\pm \circ s_\pm,$$

$\lambda_\pm$ 的存在性可由方程（5.1）之前的讨论得出。根据这些定义，接下来我们构造 V_t 和 ϕ_V。为此，先沿x_1轴将风筝形区域 $K_\theta^{\sin\theta\sigma(t)}$ 切开，并将其上半部和下半部定义为 $K_t^\pm := K_\theta^{\sin\theta\sigma(t)} \cap \{\pm x_2 > 0\}$，如图 5.3 所示。定义线性映射 $G_\pm: \ L_t^\pm \to K_t^\pm$如下:

$$G_\pm(\sigma, \tau) = \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \pm\cos\theta \end{pmatrix}.$$

由于 $G_\pm$ 是双射线性映射，因此 $G_\pm: \ L_t^\pm \to K_t^\pm$是光滑微分同胚。接下来，我们将三角形 $L^\pm$ 定义为

$$L_t^\pm = \{(\sigma, \tau) : -\sigma(t) < \sigma < \sigma(t),\ 0 < \pm\tau < (\sigma + \sigma(t))\sin\theta\}.$$

利用映射 $H(\sigma, \ \tau) = (\sigma, \ {}^{\tau\rho}_{(\sigma)\sigma\sin\theta})$，我们可以进一步将 $L_t^\pm$变换为曲边三角形

$$\Lambda_t^\pm = \{(\sigma, \tau) : -\sigma(t) < \sigma < \sigma(t),\ 0 < \pm\tau < \frac{\rho(\sigma)}{\sigma}(\sigma + \sigma(t))\}.$$

注意

$$H'(\sigma, \tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tau(\sigma\rho(\sigma) - \rho'(\sigma))}{\sigma^2 \sin\theta} & \frac{\rho(\sigma)}{\sigma\sin\theta} \end{pmatrix}, \quad \det(H'(\sigma, \tau)) = \frac{\rho(\sigma)}{\sigma\sin\theta} = 1 + \mathcal{O}(\sigma) \neq 0 \text{ for } \sigma \text{ near } 0.$$

因此，根据反函数定理可知，当 t充分小时，$H: \ L_t^\pm \to \Lambda_t^\pm$是微分同胚。现在我们可以通过映射将 Γ_t 的邻域参数化

$$F_\pm : \Lambda_t \to F_\pm(\Lambda_t), \quad (\sigma, \tau) \mapsto \varepsilon(\sigma) + \tau m_\pm(\sigma),$$

并定义开集

$$V_t := \left(\overline{F^+(\Lambda_t^+)} \cup \overline{F^-(\Lambda_t^-)}\right)^\circ.$$

再次利用反函数定理可知，$F_\pm$ 是一个微分同胚，因为我们有

$$F'_\pm(0,0) = (\varepsilon'(0) \quad m_\pm(0)) = \begin{pmatrix} 1 & -\sin\theta \\ 0 & \pm\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \det(F'_\pm) = \pm\cos\theta \neq 0.$$

由此，我们现在可以定义双 Lipschitz 微分同胚

$$\phi_V = F_\pm \circ H \circ G_\pm^{-1} : K_\theta^R \to V_t \text{ for } \pm x_2 > 0$$

它可以通过以下方式连续延拓到 $x_2 = 0$

$$F_\pm \circ H \circ G_\pm^{-1}(x_1, 0) = F_\pm \circ H(x_1, 0) = F_\pm(x_1, 0) = \varepsilon(x_1).$$

根据构造， ϕ_V 在 $K_\pm^t$ 上是 C^2-光滑的，并且在边界 $x_2 = 0$上连续。因此， ϕ_V 是利普希茨的，并将 $\Gamma_\theta^{r(t)} = \{x \cdot (\cos\theta, \pm\sin\theta) : x \in (0, \sigma(t)/\cos\theta)\}$ 映射到 Γ_t，并将 $\partial_* K_\theta^R$映射到 $\partial_* V_t$，即，

$$F \circ H \circ G(\Gamma_\theta^{r(t)}) = F(\{(\pm\rho(\sigma), \sigma) \mid \sigma \in (0, \sigma(t))\}) = \Gamma_t,$$
$$F \circ H \circ G(\partial_* K_\theta^{r(t)}) = F(\{(\sigma(t), \sigma) : \sigma \in (0, 2t)\}) = \partial_* V_t.$$

现在我们计算

$$\phi_V'(0,0) = F'(0,0)H'(0,0)G(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -\sin\theta \\ 0 & \pm\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \pm\tan\theta \\ 0 & \pm\frac{1}{\cos\theta} \end{pmatrix} = I_2,$$

由于 $F_\pm \circ H \circ G_\pm^{-1}$是 C^1-光滑的，因此当 $|x| \to 0$时，$\phi_V' = I_2 + \mathcal{O}(|x|)$。反函数定理表明，$\phi_V^{-1}$ 在 $V_t^\pm$上也是 C^1-光滑的。此外，ϕ_V^{-1} 沿曲线$\varepsilon(\sigma)$的连续性保证了它是利普希茨连续的。因此， ϕ_V 是双 Lipschitz 的，(iii) 得证。

最后，定义 $r(t) := \sin\theta\sigma(t)$ 即可得到 (i)，并且我们看到 $r'(0) = \sin\theta\sin\theta = 1$，证明至此完成。□

下面的引理给出了关于 V_t的进一步性质。

引理 5.3。 存在 $0 < a < b$，使得对于所有充分小的 $t > 0$，都有 $B_{at}(0) \subset V_t \subset B_{bt}(0)$。特别地，对于任意 $c \in (0,1)$，存在 $0 < \tilde{a} < b$，使得 $V_{\tilde{a}t} \subset B_{ct}(0) \subset B_t(0) \subset V_{\tilde{b}t}$在充分小的 t 下成立。

证明。 令 ϕ_V 和 r 如引理 5.2 中所述。则，对于某个满足 $\phi_V'(x) = I_2 + \mathcal{O}(|x|)$ 的 $x \in K_\theta^{r(t)}$，有 $y \in V_t \Leftrightarrow y = \phi_V(x)$。因此，当 $|x|$ 充分小时，对 ϕ_V 作泰勒展开可得 $\frac{1}{2}|y| \le |x| \le 2|y|$。注意到 $B_{r(t)}(0) \subset K_\theta^{r(t)} \subset B_{r(t)\sin\theta}(0)$，并且由于当 $t \to 0$ 时 $r(t) = t + \mathcal{O}(t^2)$，由另一次泰勒展开可知存在 $0 < a \le 1$ 使得

$$at < |x| \le 2|y| \quad \text{and} \quad \frac{1}{2}|y| \le |x| < \frac{2t}{\sin\theta} =: \frac{b}{2},$$

对充分小的 t 成立。现在，取 $c \in (0,1)$，并注意到当 t 充分小时， r 可逆，且 $r^{-1}(t) = t + \mathcal{O}(t^2)$。这意味着 $K_\theta^t = K_\theta^{r(r^{-1}(t))}$，因此当 $t > 0$ 充分小时， $\phi_V(K_\theta^t) = V_{r^{-1}(t)} \subset V_{2t}$。因此，类似于前面的论证可知，$V_{\tilde{a}t} \subset B_{ct} \subset B_t \subset V_{\tilde{b}}$ 在 $\tilde{a} = {}^{c}_{\text{正弦}}{}_{2}{}^{\theta}$ 和 $\tilde{b} = \frac{2}{a}$ 的情况下仍成立。证明至此完成。□

接下来，我们在 V_t 中构造一族光滑截断函数，使其满足 Γ_t 上的透射条件。

引理 5.4。 存在常数 $\eta > 0$ 和 $0 < a < b < 1$，使得对于某个 $\delta_0 > 0$、 $C > 0$，以及每个 $\delta \in (0, \delta_0)$，都存在 C^2-光滑函数 $\chi_\delta : V_\eta \to \mathbb{R}$，满足以下性质：

(1) $0 \le \chi_\delta \le 1$。(2) 对所有 $\beta \in \mathbb{N}^2$，一致估计 $\|\partial^\beta \chi_\delta\|_\infty \le C\delta^{-|\beta|}$ 成立。(3) $\chi_\delta \equiv 1$ 属于 $V_{a\delta}$。(4) $\operatorname{supp} \chi_\delta \subset V_{b\delta}$。(5) χ_δ 的法向导数在 $\Gamma_\pm$上为零。

证明。 回顾记号 5.1 中 $\gamma_\pm$、 $T_\pm$ 和 $n_\pm$ 的定义。令 $t_0 > 0$ 和 $s_0 > 0$，并考虑坐标映射

$$\phi_\pm : (-s_0, s_0) \times (-t_0, t_0) \to \mathbb{R}^2, \quad \phi_\pm(s,t) = \gamma_\pm(s) - tN_\pm(s).$$

容易验证， ϕ' 关于 $\phi_\pm$ 的雅可比矩阵及其行列式为

$$\phi_\pm'(s,t) = \begin{pmatrix} (1 - tk_\pm(s))T_1^\pm(s) & -n_1^\pm(s) \\ (1 - tk_\pm(s))T_2^\pm(s) & -n_2^\pm(s) \end{pmatrix}, \quad \det(\phi_\pm'(s,t)) = (1 - tk_\pm(s))^2.$$

取 s_0 和 t_0 充分小，可知 ϕ可逆。因此，存在常数$\eta>0$，使得映射$(s,t)\mapsto\phi_\pm(s,t)$可逆，从而得到 C^2-光滑函数 $s_\pm$ 和 $t_\pm$，其满足以下性质；这是由反函数定理保证的:

$$\nabla s_\pm(x)=\pm\frac{1}{1-t_\pm(x)K_\pm(x)}(N_2^\pm(x),-N_1^\pm(x)),\quad K_\pm:=k_\pm\circ s_\pm,\quad N_j^\pm:=n_j^\pm\circ s_\pm.$$

因此，$s_\pm(0,0)=(0,0)$，且 $\nabla s_\pm(0,0)=(\cos\theta,\pm\sin\theta)$，由此可得

$$s_\pm(x_1,x_2)=\langle(\cos\theta,\pm\sin\theta),(x_1,x_2)\rangle+\mathcal{O}(x_1^2+x_2^2)\quad\text{as }(x_1,x_2)\to(0,0).$$

此外，我们有 $s_\pm(\gamma_\pm(s))=s$，且当 $s\to0$ 时，有

$$s_\pm(\gamma_\mp(s))=(\cos\theta,\pm\sin\theta)\cdot\gamma_\pm'(0)s+\mathcal{O}(s^2)=\cos(2\theta)s+\mathcal{O}(s^2).$$

记住这一记号后，我们进一步令 $c:=\min(\sin\theta,\cos\theta)\cdot\max(\frac12,|\cos2\theta|)\in(0,1)$。根据引理 5.3，存在 $0<\tilde a<b$ 使得

$$V_{\tilde a\tilde\delta}\subset B_{c\tilde\delta}(0)\subset B_{\tilde\delta}(0)\subset V_{\tilde b\tilde\delta}$$

对所有充分小的 $\delta>0$ 都成立。现在，令 $d_0>0$ 满足 $b:=b\cdot d_0<1$，并设 $a:=\tilde a\cdot d_0,\delta:=\delta/d_0$。于是有

$$V_{a\delta}\subset B_{cd_0\delta}(0)\subset B_{d_0\delta}(0)\subset V_{b\delta}.$$

现在我们将构造一个截断函数 χ_δ，使其满足断言 (1)、(2)、(5)，并且满足

$$\chi_\delta\equiv1\quad\text{in }B_{cd_0\delta}(0)\quad\text{and}\quad\operatorname{supp}\chi_\delta\subset B_{d_0\delta}(0),$$

由此得到所需结果。为此，我们定义常数

$$c_0:=c\cdot d_0=\min(\sin\theta,\cos\theta)\cdot\max(\frac12,|\cos2\theta|)\cdot d_0,\quad c_1:=\min(\sin\theta,\cos\theta)\cdot d_0>c_0,$$

and 对于充分小的固定 $\varepsilon>0$，考虑一个光滑函数 $\chi:\mathbb{R}\to[0,1]$，满足

$$\chi\equiv1\text{ in }[-c_0-\varepsilon,c_0+\varepsilon]\quad\text{and}\quad\operatorname{supp}\chi\subseteq[-c_1+\varepsilon,c_1-\varepsilon],$$

并将截断函数 χ_δ 定义为

$$\chi_\delta(x):=\chi\left(\frac{s_+(x)}{\delta}\right)\cdot\chi\left(\frac{s_-(x)}{\delta}\right).$$

根据构造，χ_δ 满足断言 (1) 和 (2)。为验证断言 (3)，注意对于 $x\in B_{c_0\delta}(0)$ 以及充分小的 $\delta>0$，有

$$\frac{|s_\pm(x)|}{\delta}=\frac{\left|\langle(\cos\theta,\pm\sin\theta),(x_1,x_2)\rangle+\mathcal{O}(x_1^2+x_2^2)\right|}{\delta}\le\frac{|x|+\mathcal{O}(|x|^2)}{\delta}\le\frac{c_0\delta+\mathcal{O}(\delta^2)}{\delta}\le c_0+\varepsilon,$$

由此得到 $\chi(s_\pm(x)/\delta)=1$ 属于 $B_{c_0\delta}(0)$，进而推出 (3)。为证明断言 (4)，只需证明在球 $B_{d_0\delta}(0)$ 之外，要么 $\chi(s_+(x)/\delta)\equiv0$，要么 $\chi(s_-(x)/\delta)\equiv0$。令 $|x|\ge d_0\delta$。对于 $x_1\ge0$、$x_2<0$以及充分小的 $\delta>0$，有

$$\begin{aligned}\frac{|s_-(x)|}{\delta}&=\frac{\left|\cos\theta x_1-\sin\theta x_2+\mathcal{O}(x_1^2+x_2^2)\right|}{\delta}=\frac{|\cos\theta|x_1|+\sin\theta|x_2||}{\delta}+\mathcal{O}(\delta)\\&\ge\min(\sin\theta,\cos\theta)\frac{|x_1|+|x_2|}{\delta}+\mathcal{O}(\delta)\ge\frac{c|x|}{\delta}+\mathcal{O}(\delta)\ge c_1-\varepsilon.\end{aligned}$$

对 $x_1<0$ 和 $x_2\ge0$ 可作类似论证。若 x_1 和 x_2 同号，则可类似地对 $|s_+(x)/\delta|$建立相同的估计，由此完成 (4) 的证明。

现在我们证明 Γ_+ with $s>0$ 时的 (5)，而 Γ_- with $s<0$ 的情形可类似地推出。对于 $s>0$ and$x=\gamma_+(s)\in\Gamma_+$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial\chi_\delta}{\partial n_+}(x)=&\langle n_+(s),(\nabla\chi_\delta)(\gamma_+(s))\rangle=\frac1\delta\chi'\left(s_+(\gamma_+(s))/\delta\right)\chi(s_-(\gamma_+(s))/\delta)\cdot\langle n_+(s),(\nabla s_+)(\gamma_+(s))\rangle\\&+\frac1\delta\chi'(s_-(\gamma_+(s))/\delta)\chi(s_+(\gamma_+(s))/\delta)\cdot\langle n_+(s),(\nabla s_-)(\gamma_+(s))\rangle.\end{aligned}$$

由于 $(\nabla s_+)(\gamma_+(s))=(n_2^+(s)-n_1^+(s))$，可知 $\langle n_+(s),(\nabla s_+)(\gamma_+(s))\rangle=0$，因此

$$\frac{\partial\chi_\delta}{\partial n_+}(x)=\frac1\delta\chi'(s_-(\gamma_+(s))/\delta)\chi(s/\delta)\cdot\langle n_+(s),(\nabla s_-)(\gamma_+(s))\rangle.$$

由于 $\chi(s/\delta) = 0$ 对 $|s/\delta| \geq c_1 - \varepsilon$成立，只需证明 $\chi'(s_-(\gamma_+(s))/\delta)$ 对所有 $|s| < \delta(c_1 - \varepsilon)$均为零。展开 $s_-(\gamma_+(s))$，得到

$$s_-(\gamma_+(s)) = \langle(\cos\theta, -\sin\theta), \gamma_+'(0)\rangle + \mathcal{O}(s^2) = \cos(2\theta)s + \mathcal{O}(s^2).$$

对于充分小的 δ，这意味着

$$\frac{|s_-(\gamma_+(s))|}{\delta} = \frac{\left|\cos(2\theta)s + \mathcal{O}(s^2)\right|}{\delta} \leq |\cos(2\theta)|\,(c_1 - \varepsilon) + \mathcal{O}(\delta) \leq c_0 + \varepsilon.$$

由于 χ 在 $[-c_0 - \varepsilon, c_0 + \varepsilon]$ 中为常数，其导数在那里为零。因此， χ_δ 的法向导数在 Γ_+ 上恒为零，这证明了 (5)，并完成了该引理的证明。□

5.2. 谱性质。 在定义曲线上支撑 δ-相互作用的各角点附近的适当邻域后，我们继续分析这一背景下第 4.1 节中引入的算子的类似对象。特别地，我们推导出它们的首个 $\kappa(\theta)$ 特征值的渐近行为（见下文推论 5.7），这是证明定理 1.1（关于拐角诱导的特征值的渐近行为）的关键步骤。

定义 5.5。 设 V_δ 如引理 5.2 所述。对于 $x \in \{d, n\}$，我们定义具有强 δ-相互作用、支集位于 Γ_δ 上的狄利克雷/诺伊曼拉普拉斯算子的半双线性型如下：

$$x^\delta_{\Gamma,\alpha}(u) = \int_{V_\delta} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \alpha \int_{\Gamma_\delta} |u|^2 \,\mathrm{dS}, \quad D(d^\delta_{\Gamma,\alpha}) = H^1_0(V_\delta), \quad D(n^\delta_{\Gamma,\alpha}) = H^1(V_\delta).$$

我们进一步设定 $V_{\delta,\,\rho} := V_\delta \setminus \overline{V_\rho}$以及 $\Gamma_{\delta,\,\rho} := \Gamma_\delta \cap V_{\delta,\,\rho}$，其中 $0 < \rho < \delta$，并定义

$$p^{\delta,\rho}_{\Gamma,\alpha}(u) = \int_{V_{\delta,\rho}} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \alpha \int_{\Gamma_{\delta,\rho}} |u|^2 \,\mathrm{dS}, \quad D(p^{\delta,\rho}_{\Gamma,\alpha}) = H^1(V_{\delta,\rho}).$$

V_δ 与 $K^{r(t)}_\theta$ 之间存在微分同胚，这使我们能够进行变量替换，从而直接比较相应区域上产生的算子。

引理 5.6. 存在 $a_0, a_1, \delta_0 > 0$，使得对所有 $\delta \in (0, \delta_0)$、 $\rho \in (0, \delta)$以及 $n \in \mathbb{N}$，以下不等式均成立：

$$\begin{aligned}
(1 - a_0\delta)E_n(N^{r(\delta)}_{\theta,\alpha(1+a_1\delta)}) &\leq E_n(N^\delta_{\Gamma,\alpha}) \leq (1 + a_0\delta)E_n(N^{r(\delta)}_{\theta,\alpha(1-a_1\delta)}),\\
(1 - a_0\delta)E_n(D^{r(\delta)}_{\theta,\alpha(1+a_1\delta)}) &\leq E_n(D^\delta_{\Gamma,\alpha}) \leq (1 + a_0\delta)E_n(D^{r(\delta)}_{\theta,\alpha(1-a_1\delta)}),\\
(1 - a_0\delta)E_n(P^{r(\delta),r(\rho)}_{\theta,\alpha(1+a_1\delta)}) &\leq E_n(P^{\delta,\rho}_{\Gamma,\alpha}) \leq (1 + a_0\delta)E_n(P^{r(\delta),r(\rho)}_{\theta,\alpha(1-a_1\delta)}),
\end{aligned}$$

当 $\alpha \to \infty$, $\delta \to 0^+$ 和 $\alpha\delta \to \infty$ 时。

证明。我们仅详细给出$D^\delta_{\Gamma,\alpha}$的估计，因为同样的论证也适用于$N^\delta_{\Gamma,\alpha}$和 $P^{\delta,\rho}_{\Gamma,\alpha}$。根据引理 5.2，存在 $\delta_0 > 0$及函数 $r \in C^2$，满足 $r(0) = 0$和 $r'(0) = 1$，使得对每个 $\delta \in (0, \delta_0)$，映射 $\phi_V\colon K^{r(\delta)}_\theta \to V_\delta$均为双 Lipschitz 映射，且 $\phi_V'(x) = I_2 + \mathcal{O}(x)$。考虑映射 $\Phi\colon L^2(V_\delta) \to L^2(K^{r(\delta)}_\theta)$，其定义为 $\Phi(v) = v \circ \phi_V =: u$。于是， $\Phi\colon H^1(V_\delta) \mapsto H^1(K^{r(\delta)}_\theta)$是双射，并且边界条件 $u = 0$ 在 $\partial K^{r(\delta)}_\theta$ 上成立，当且仅当 $v = 0$ 在 ∂V_δ中成立。为了应用极小极大原理得到所需的估计，我们首先需要为范数 $\|v\|_{V_\delta}$、$\|\nabla v\|_{V_\delta}$和$\|v\|_{L^2(\Gamma_\delta)}$找到合适的近似。

我们从 $\|v\|^2_{V_\delta}$开始。使用变量替换 $u = v \circ \phi_V$，可得

$$\int_{V_\delta} |v|^2 \mathrm{d}x = \int_{K^{r(\delta)}_\theta} |u|^2 |\det(\phi_V')| \mathrm{d}x = \int_{K^{r(\delta)}_\theta} |u|^2 (1 + \mathcal{O}(|x|)) \mathrm{d}x.$$

因此，存在 $b_1 > 0$ 使得 $1 - b_1\delta \leq |\det(\phi_V')| \leq 1 + b_1\delta$，从而

$$(1 - b_1\delta) \int_{K^{r(\delta)}_\theta} |u|^2 \mathrm{d}x \leq \int_{V_\delta} |v|^2 \mathrm{d}x \leq (1 + b_1\delta) \int_{K^{r(\delta)}_\theta} |u|^2 \mathrm{d}x,$$

这等价于 $(1 - b_1\delta)\,\|u\|^2_{K^{r(\delta)}_\theta} \leq \|v\|^2_{V_\delta} \leq (1 + b_1\delta)\,\|u\|^2_{K^{r(\delta)}_\theta}$。同理，

$$\int_{V_\delta} |\nabla v|^2 \mathrm{d}x = \int_{K^{r(\delta)}_\theta} \sum_{j,k=1}^{2} G^{j,k} \partial_j u\, \partial_k u |\det(\phi_V')| \mathrm{d}x,$$

其中矩阵 $G^{j,k}$ 是 $G_{j,k}=\langle\partial_j\phi_V,\partial_k\phi_V\rangle=\delta_{j,k}+\mathcal{O}(\delta)$ 的逆映射，因此满足

$$G^{j,k}=(1+\mathcal{O}(\delta))^{-1}(\delta_{j,k}+\mathcal{O}(\delta))=(1+\mathcal{O}(\delta))(\delta_{j,k}+\mathcal{O}(\delta))=\delta_{j,k}+\mathcal{O}(\delta).$$

因此，存在 $b_2>0$，使得对于任意 $u\in H^1(K_\theta^{r(\delta)})$，都有

$$(1-b_2\delta)|\nabla u|^2\le\sum_{j,k=1}^{2}G^{j,k}\partial_j u\,\partial_k u\le(1+b_2\delta)|\nabla u|^2,$$

由此可得

$$(1-b_2\delta)\int_{K_\theta^{r(\delta)}}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\le\|\nabla v\|_{V_\delta}^2\le(1+b_2\delta)\int_{K_\theta^{r(\delta)}}|\nabla u|^2\mathrm{d}x.$$

为估计 $\|v\|_{L^2(\Gamma_\delta)}$，考虑弧长参数化 $\gamma:I_\delta\to\Gamma_{\theta\circ}^{\delta}$ 于是，$\phi(\gamma(t))$ 是 Γ_δ 的一个参数化，并且有

$$\int_{\Gamma_\delta}|v|^2\,\mathrm{dS}=\int_{I_\delta}|u(t)|^2|\phi'(\gamma(t))\gamma'(t)|\mathrm{d}t.$$

利用 $\phi'(x)=I_2+\mathcal{O}(|x|)$ 这一事实，可知存在 $b_3>$，使得

$$1-b_3\delta\le|\phi'(\gamma(t))\gamma'(t)|\le1+b_3\delta,$$

因此，

$$(1-b_3\delta)\int_{\Gamma_\theta^{r(\delta)}}|u|^2\,\mathrm{dS}\le\int_{\Gamma_\delta}|v|^2\,\mathrm{dS}\le(1+b_3\delta)\int_{\Gamma_\theta^{r(\delta)}}|u|^2\,\mathrm{dS},$$

从而得到关于$\|v\|_{L^2\,(\Gamma_\delta)}$ 的所需估计。结合之前的估计，我们得到

$$\frac{d_{\Gamma,\alpha}^{\delta}(v)}{\|v\|_{L^2(V_\delta)}^2}\ge\frac{1-b_2\delta}{1+b_1\delta}\frac{\int_{K_\theta^{r(\delta)}}|\nabla u|^2\mathrm{d}x}{\|u\|^2_{L^2(K_\theta^{r(\delta)})}}-\alpha\frac{1+b_3\delta}{1-b_1\delta}\frac{\int_{\Gamma_\theta^{r(\delta)}}|u|^2\,\mathrm{dS}}{\|u\|^2_{L^2(K_\theta^{r(\delta)})}},\quad\forall v\neq0.$$

此外，存在 $a_0,\ a_1>0$，使得对所有充分小的 $\delta>0$,

$$\frac{1-b_2\delta}{1+b_1\delta}=1+\mathcal{O}(\delta)\ge1-a_0\delta\quad\text{and}\quad\frac{1}{1-a_0\delta}\cdot\frac{1+b_3\delta}{1-b_1\delta}\le1+a_1\delta,$$

由此我们可以写出进一步的界

$$\frac{d_{\Gamma,\alpha}^{\delta}(v)}{\|v\|^2_{L^2(V_\delta)}}\ge(1-a_0\delta)\frac{\|\nabla u\|^2_{K_\theta^{r(\delta)}}-\alpha(1+a_1\delta)\int_{\Gamma_\theta^{r(\delta)}}|u|^2\,\mathrm{dS}}{\|u\|^2_{K_\theta^{r(\delta)}}}=(1-a_0\delta)\frac{d^{r(\delta)}_{\theta,\alpha(1+a_1\delta)}(\Phi v)}{\|\Phi v\|^2_{K_\theta^{r(\delta)}}}.$$

由于 Φ_δ 是双射，极小极大原理意味着

$$E_n(D_{\Gamma,\alpha}^{\delta})\ge(1-a_0\delta)\cdot E_n(D^{r(\delta)}_{\theta,\alpha(1+a_1\delta)}).$$

□

以下特征值渐近行为可直接由上述引理得到。

推论 5.7。当 $\alpha\to\infty$、$\delta\to0^+$ 和 $\alpha\delta\to\infty$ 时，以下渐近行为成立：

$$\begin{aligned}E_n(D_{\Gamma,\alpha}^{\delta})&=\alpha^2(\mathcal{E}(\theta)+\mathcal{O}(\delta+e^{-c\alpha\delta})),\quad\forall n\in\{1,\dots,\kappa(\theta)\},\\E_n(N_{\Gamma,\alpha}^{\delta})&=\alpha^2(\mathcal{E}(\theta)+\mathcal{O}(\delta+1/(\alpha\delta)^2)),\quad\forall n\in\{1,\dots,\kappa(\theta)\},\\E_{k(\theta)+1}(D_{\Gamma,\alpha}^{\delta})&\ge E_{\kappa(\theta)+1}(N_{\Gamma,\alpha}^{\delta})\ge-\frac{\alpha^2}{4}+o(\alpha^2).\end{aligned}$$

证明。根据引理 5.6，对于 $X\in\{N,D\}$ 和任意 $n\in\mathbb{N}$，我们有

$$(1+\mathcal{O}(\delta))E_n(X^{r(\delta)}_{\theta,\alpha(1+a\delta)})\le E_n(X_{\Gamma,\alpha}^{\delta})\le(1+\mathcal{O}(\delta))E_n(X^{r(\delta)}_{\theta,\alpha(1-a\delta)}).$$

由于当 $\delta\to0$ 时 $r(\delta)=\mathcal{O}(\delta)$，因此可得当 $\alpha\delta\to\infty$ 时 $r(\delta)\alpha\to\infty$。这使我们能够应用引理 4.4 和引理 4.5；特别地，存在 $c>0$ 使得

$$\begin{aligned}E_n(D_{\Gamma,\alpha}^{\delta})&=(1+\mathcal{O}(\delta))^3(\mathcal{E}(\theta)+\mathcal{O}(e^{-c\alpha r(\delta)}))\alpha^2=(\mathcal{E}(\theta)+\mathcal{O}(\delta+e^{-c\alpha\delta}))\alpha^2,\\E_n(N_{\Gamma,\alpha}^{\delta})&=(1+\mathcal{O}(\delta))^3\left(\mathcal{E}(\theta)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{(\alpha r(\delta))^2}\right)\right)\alpha^2=\left(\mathcal{E}(\theta)+\mathcal{O}\left(\alpha^2\delta+\frac{1}{\delta^2}\right)\right)\alpha^2,\end{aligned}$$

此外，

$$E_{k(\theta)+1}(D^{\delta}_{\Gamma,\alpha}) \geq E_{\kappa(\theta)+1}(N^{\delta}_{\Gamma,\alpha}) \geq (1+a_0\delta)E_{\kappa(\theta)+1}(N^{r(\delta)}_{\theta,\alpha(1+a_0\delta)})$$
$$\geq (1+a_0\delta)(-1/4+o(1))\alpha^2(1+a_1\delta)^2 = -\frac{\alpha^2}{4}+o(\alpha^2).$$

其中第一个不等式由单调性得出。 □

注意，特征值渐近地仅取决于角度 θ ，与曲线在交点之外的具体几何形状无关。该结果也适用于以下情形。

推论 5.8。成立的是 $E_1(P^{\delta,\Gamma,\rho}_{\alpha,})\geq -\alpha^2/4+o(\alpha^2)$。

证明。结合引理 5.6 和引理 4.10，证明方法与推论 5.7 相同。□

与算子 H^{α}_{θ} （见推论 3.10）类似，可以证明 $N^{\delta,\Gamma,}_{\alpha}$ 的特征函数满足 Agmon 型估计。

引理 5.9. 设 $\psi^{\delta,\Gamma,n}_{\alpha}$,为对应于 $N^{\delta}_{\Gamma,\alpha}$的第 n 个特征值的特征函数。那么存在 $c,C>0$ ，使得对于 $\delta\to 0^+$ 和 $\alpha\delta\to\infty$，有

$$\int_{V_\delta} e^{c\alpha|x|}\left(\frac{1}{\alpha^2}|\nabla\psi^{\delta,n}_{\Gamma,\alpha}|^2+|\psi^{\delta,n}_{\Gamma,\alpha}|\right)\mathrm{d}x \leq C\|\psi^{\delta,n}_{\Gamma,\alpha}\|_{L^2(V_\delta)}.$$

证明. 考虑函数 $f\colon V_\delta\to\mathbb{R}$ ，定义为 $f(x)=b|x|$ ，其中 $b>0$ 待定。仿照引理 3.9 的证明，我们可以写出:

$$n^{\delta}_{\Gamma,\alpha}(e^{\alpha f}\psi) = \int_{V_\delta}|\nabla(e^{\alpha f}\psi)|\mathrm{d}x-\alpha\int_{\Gamma_\delta}e^{2\alpha f}|\psi|^2\,\mathrm{dS}$$
$$= \int_{V_\delta}e^{2\alpha f}((-\Delta\psi)\psi+\alpha^2|\nabla f|^2\psi^2)\mathrm{d}x = \int_{V_\delta}e^{2\alpha f}(E_n(N^{\delta}_{\Gamma,\alpha})+b^2\alpha^2)|\psi|^2\mathrm{d}x.$$

根据推论 5.7，我们有 $E_n(N^{\delta}_{\Gamma,\alpha})=(\mathcal{E}_n(\theta)+o(1))\alpha^2$，并且对于任意 $\varepsilon>0$，都有 $\alpha\to\infty$ 阶 at

$$n^{\delta}_{\Gamma,\alpha}(e^{\alpha f})\leq(\mathcal{E}_n(\theta)+b^2+\varepsilon)\alpha^2\int_{V_\delta}e^{2\alpha f}|\psi|^2\mathrm{d}x. \tag{5.2}$$

设 $\eta\in(0,1)$，并令 $\rho=\frac{L}{\alpha}$，其中 η和 $L>0$均待定。于是我们有

$$n^{\delta}_{\Gamma,\alpha}(e^{\alpha f}\psi) = \int_{V_\delta}|\nabla(e^{\alpha f})|^2\mathrm{d}x-\alpha\int_{\Gamma_\delta}e^{2\alpha f}|\psi|^2\,\mathrm{dS}$$
$$= \eta\int_{V_\delta}|\nabla(e^{\alpha f}\psi)|^2\mathrm{d}x+(1-\eta)(n^{\rho}_{\Gamma,\frac{\alpha}{1-\eta}}(e^{\alpha f}\psi)+p^{\rho,\delta}_{\Gamma,\frac{\alpha}{1-\eta}}(e^{\alpha f}\psi))$$
$$\geq \eta\int_{V_\delta}|\nabla(e^{\alpha f}\psi)|^2\mathrm{d}x+(1-\eta)\left(E_1(N^{\rho}_{\Gamma,\frac{\alpha}{1-\eta}})\|e^{\alpha f}\psi\|^2_{L^2(V_\rho)}+E_1(P^{\rho,\delta}_{\Gamma,\frac{\alpha}{1-\eta}})\|e^{\alpha f}\psi\|^2_{L^2(V_{\delta,\rho})}\right).$$

由推论 5.7 和推论 5.8 可知

$$E_1(N^{\rho}_{\Gamma,\frac{\alpha}{1-\eta}})\geq(\mathcal{E}_n(\theta)-\varepsilon)\frac{\alpha^2}{(1-\eta)^2},\quad E_1(P^{\rho,\delta}_{\Gamma,\frac{\alpha}{1-\eta}})\geq-\frac{(\frac14+\varepsilon)\alpha^2}{(1-\eta)^2},$$

将其代入前一个不等式，可得

$$n^{\delta}_{\Gamma,\alpha}(e^{\alpha f}\psi)\geq\eta\int_{V_\delta}|\nabla(e^{\alpha f}\psi)|^2\mathrm{d}x+\alpha^2\frac{\mathcal{E}_n(\theta)-\varepsilon}{(1-\eta)}\|e^{\alpha f}\psi\|^2_{L^2(V_\rho)}-\alpha^2\frac{\frac14-\varepsilon}{1-\eta}\|e^{\alpha f}\psi\|^2_{L^2(V_{\delta,\rho})}.$$

将此界代入不等式（5.2）并重新排列各项，可得

$$\eta\int_{V_\delta}|\nabla(e^{\alpha f})|^2\mathrm{d}x+\left(-\mathcal{E}_n(\theta)-b^2-\varepsilon-\frac{\frac14+\varepsilon}{1-\eta}\right)\alpha^2\|e^{\alpha f}\psi\|^2_{L^2(V_{\delta,\rho})}$$
$$\leq\left(\mathcal{E}_n(\theta)+b^2+\varepsilon-\frac{\mathcal{E}_1(\theta)-\varepsilon}{1-\eta}\right)\alpha^2\|e^{\alpha f}\psi\|^2_{L^2(V_\rho)},$$

这也可以等价地表示为

$$\eta\int_{V_\delta}|\nabla(e^{\alpha f})|^2\mathrm{d}x+a_0\alpha^2\|e^{\alpha f}\psi\|^2_{L^2(V_{\delta,\rho})}\le b_0\alpha^2\|e^{\alpha f}\psi\|^2_{L^2(V_\rho)},$$

其中常数定义为

$$a_0:=-\mathcal{E}_n(\theta)-b^2-\varepsilon-\frac{\frac14+\varepsilon}{1-\eta}=\frac{-\mathcal{E}_n(\theta)-\frac14+(\eta b^2-b^2+\eta\mathcal{E}_n(\theta)-2\varepsilon+\varepsilon\eta)}{1-\eta},$$
$$b_0:=\mathcal{E}_n(\theta)+b^2+\varepsilon-\frac{\mathcal{E}_1(\theta)-\varepsilon}{1-\eta}=b^2+\frac{\mathcal{E}_n(\theta)-\mathcal{E}_1(\theta)-\eta\mathcal{E}_n(\theta)+2\varepsilon-\varepsilon\eta}{1-\eta}.$$

回顾 $-\mathcal{E}_n(\theta)-1/4>0$ 以及 $\mathcal{E}_n(\theta)(1-\eta)-\mathcal{E}_1(\theta)>0$。因此，通过选取 $\varepsilon>0$、$\eta\in(0,1)$ 以及$b>0$ 充分小，可确保 $a_0>0$ 和 $b_0>b^2>0$。consequently，根据引理 5.3，存在 $a>0$ 使得 $V_\rho\subset B_{a\rho}(0)$，因此，对于任意$x\in V_\rho$，我们得到 $\alpha f(x)=\alpha b|x|\le\alpha ba(L/\alpha)=abL$。将其代入前一个不等式，对于 $b_1=b_0e^{2baL}$，可得估计

$$\eta\int_{V_\delta}|\nabla(e^{\alpha f}\psi)|^2\mathrm{d}x+a_0\alpha^2\int_{V_{\delta,\rho}}e^{2\alpha f}|\psi|^2\mathrm{d}x\le b_1\alpha^2\int_{V_\rho}|\psi|^2\mathrm{d}x.$$

由此可得

$$\begin{aligned}&\int_{V_\delta}|\nabla(e^{\alpha f}\psi)|^2+2b^2\alpha^2e^{2\alpha f}|\psi|^2\mathrm{d}x\\&\quad=\frac{\eta}{\eta}\int_{V_\delta}|\nabla(e^{\alpha f}\psi)|^2\mathrm{d}x+\frac{2b^2}{a_0}a_0\alpha^2\int_{V_{\delta,\rho}}e^{2\alpha f}|\psi|^2\mathrm{d}x+2b^2\alpha^2\int_{V_\rho}|\psi|^2\mathrm{d}x\\&\quad\le\left(\frac{1}{\eta}b_1+\frac{2b^2}{a_0}+2b^2\right)\alpha^2\int_{V_\rho}|\psi|^2\mathrm{d}x=:b_2\alpha^2\int_{V_\rho}|\psi|^2\mathrm{d}x\le b_2\alpha^2\|\psi\|^2_{L^2(V_\delta)}.\end{aligned}\tag{5.3}$$

接下来，我们估计梯度项:

$$\begin{aligned}|\nabla(e^{\alpha f}\psi)|^2&\ge|e^{\alpha f}\nabla\psi|+b^2\alpha^2|e^{\alpha f}\psi|-2|e^{\alpha f}\nabla\psi||b\alpha e^{\alpha f}\psi|\\&\ge|e^{\alpha f}\nabla\psi|+b^2\alpha^2|e^{\alpha f}\psi|-2(\frac14|e^{\alpha f}\nabla\psi|^2+|b\alpha e^{\alpha f}\psi|^2)\\&\ge\frac12|e^{\alpha f}\nabla\psi|^2-b^2\alpha^2|e^{\alpha f}\psi|^2.\end{aligned}$$

将此估计代入 (5.3)，得到

$$\int_{V_\delta}e^{2b\alpha|x|}(\frac12|\nabla\psi|^2+b^2\alpha^2|\psi|^2)\mathrm{d}x\le b_2\alpha^2\|\psi\|^2_{L^2(V_\delta)},$$

并且所需的估计可由常数 $c=2b$ 和 $C=b_2(2+1/b^2)$ 得出。 □

5.3. 曲线情形下的非共振条件。回顾一下，非共振条件在定义 4.6 中给出。本节将证明推论 5.13 中一个关键估计，该估计对于证明关于边缘诱导特征值的定理 1.2 至关重要。定理 1.2 要求所有角度均满足非共振条件，这也表明推论 5.13 的证明根本上依赖于这一假设。因此，在本节中，我们始终假设角度 θ 是非共振的。

首先，考虑以下半双线性型及其对应的下界:

定义 5.10。设 ∂_*V_δ 如引理 5.2 中所述。定义半双线性型

$$r^\delta_{\Gamma,\alpha}(u)=\int_{V_\delta}|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\alpha\int_{\Gamma_\delta}|u|^2\,\mathrm{dS}-\alpha\int_{\partial_*V_\delta}|u|^2\,\mathrm{dS},\quad D(r^\delta_{\Gamma,\alpha})=H^1(V_\delta).$$

引理 5.11。存在一个常数 $c>0$，使得 $R^\delta_{\Gamma,\ \alpha}\ge-c\alpha^2$。

证明。Argui 与推论 5.7 的证明中一样，可以证明存在 $a_0,a_1>0$ 满足 t

$$E_1(R^\delta_{\Gamma,\alpha})\ge(1-a_0)E_1(R^{r(\delta)}_{\theta,\alpha(1+a_1\delta)}).$$

由于 $r(\delta)=\delta+\mathcal{O}(\delta^2)$，因此有 $r(\delta)\alpha\to\infty$，当 $\delta\to0$ 时成立。因此，根据引理 4.10，存在 $c>0$ 使得

$$(1-a_0)E_1(R^{r(\delta)}_{\theta,\alpha(1+a_1\delta)})\ge(1-a_0\delta)(-c\alpha^2)(1+a_1\delta)=-c\alpha^2(1+(a_1-a_0)\delta-\delta^2).$$

由于当 δ 充分小时， $|(a_1-a_0)\delta-\delta^2|<1$，我们得到

$$E_1(R^\delta_{\Gamma,\alpha})\geq(1-a_0)E_1(R^{r(\delta)}_{\theta,\alpha(1+a_1\delta)})\geq-\tilde{c}\alpha^2,$$

对于某个 $\tilde{c}>0$，当 α 充分大时。 □

得益于引理 5.2，我们也可以将非共振条件推广到曲线情形。

推论 5.12. 存在 $c>0$，使得对于 $\alpha\delta\to\infty$、 $\delta\to0$、 $\alpha\to\infty$ 和 $\alpha^2\delta^3\to0$，有

$$E_{\kappa(\theta)+1}(D^\delta_{\Gamma,\alpha})\geq E_{\kappa(\theta)+1}(N^\delta_{\Gamma,\alpha})\geq-\frac{\alpha^2}{4}+\frac{c}{\delta^2}.$$

证明。由引理 5.2，存在 $a_0,a_1>0$ 以及一个 C^2-光滑函数 r，满足 $r(0)=0$、 $r'(0)=1$，使得对于所有 $n\in\mathbb{N}$， $E_n(N^\delta_{\Gamma,\alpha})\geq(1-a_0\delta)E_n(N^{r(\delta)}_{\theta\,\alpha\,,(1+a_1\delta)})$。由于 θ 是非共振的，并且对于充分小的 δ， $|r(\delta)|=|\delta+\mathcal{O}(\delta)|\geq\delta/2$，因此可得

$$\begin{aligned}E_{\kappa(\theta+1)}(N^{r(\delta)}_{\theta,\alpha(1+a_1\delta)})&\geq-\frac{\alpha^2}{4}(1+a_1\delta)^2+\frac{c}{r(\delta)^2}\\&\geq-\frac{\alpha^2}{4}+\frac{1}{\delta^2}(\frac{c}{2}-\alpha^2\delta^3\frac{a_1}{2}-\alpha^2\delta^4\frac{a_1^2}{4})\geq-\frac{\alpha^2}{4}+\frac{c_1}{\delta^2}\end{aligned}$$

对于某个 $c_1>0$，利用渐近行为 $\alpha^2\delta^3\to0$。将上述结果与初始界结合，我们得到

$$\begin{aligned}E_{\kappa(\theta)+1}(N^\delta_{\Gamma,\alpha})&\geq(1-a_0\delta)E_{\kappa(\theta)+1}(N^{r(\delta)}_{\theta,\alpha(1+a_1\delta)})\geq(1-a_0\delta)(-\frac{\alpha^2}{4}+\frac{c_0}{\delta^2})\\&=-\frac{\alpha^2}{4}+\frac{c_1}{\delta^2}(1-a_0\delta+a_0\delta\frac{\alpha^2}{4}\geq-\frac{\alpha^2}{4}+\frac{c_2}{\delta^2}.\end{aligned}$$

因为对于某个 $c_2>0$ 且当 δ 充分小时，这就完成了证明。 □

现在我们可以证明定理 1.2 的证明所需的估计。

推论 5.13。 令 $\mathcal{L}$ 为由对应于 $N^\delta_{\Gamma,\,\alpha}$ 的前 $\kappa(\theta)$ 个特征值的特征函数张成的子空间。那么存在 $b>0$，使得当 $\alpha\delta\to\infty$、 $\delta\to0$、 $\alpha\to\infty$ 和 $\alpha^2\delta^3\to0$ 时，有

$$\begin{aligned}\|v\|^2_{L^2(V_\delta)}&\leq b\delta^2\left(n^\delta_{\Gamma,\alpha}(v)+\frac{\alpha^2}{4}\|v\|^2_{L^2(V_\delta)}\right),\quad\forall v\in H^1(V_\delta)\cap\mathcal{L}^\perp,\\\int_{\partial_*V_\delta}|v|^2\,\mathrm{dS}&\leq b\alpha\delta^2\left(n^\delta_{\Gamma,\alpha}(v)+\frac{\alpha^2}{4}\|v\|^2_{L^2(V_\delta)}\right),\quad\forall v\in H^1(V_\delta)\cap\mathcal{L}^\perp.\end{aligned}$$

证明。令 $v\in H^1(V_\delta)\cap\mathcal{L}^\perp$。则推论 5.12 与谱定理共同给出

$$n^\delta_{\Gamma,\alpha}(v)\geq E_{\kappa(\theta)+1}(N^\delta_{\Gamma,\alpha})\geq-\frac{\alpha^2}{4}\|v\|^2_{L^2(V_\delta)}+\frac{c}{\delta^2}\|v\|^2_{L^2(V_\delta)},$$

这给出了第一个不等式。为证明第二个不等式，注意对于任意 $u\in D(N^\delta_{\Gamma,\,\alpha})=D(R^\delta_{\Gamma,\,\alpha})=H^1(V_\delta)$，引理 5.11 蕴含

$$n^\delta_{\Gamma,\alpha}(u)-\alpha\int_{\partial_*V_\delta}|u|^2\,\mathrm{dS}=r^\delta_{\Gamma,\alpha}(u)\geq-c_0\alpha^2\|u\|^2_{L^2(V_\delta)},$$

这等价于

$$\int_{\partial_*V_\delta}|u|^2\,\mathrm{dS}\leq\frac{1}{\alpha}n^\delta_{\Gamma,\alpha}(u)+c_0\alpha\|u\|^2_{V_\delta}.$$

对 $u\in H^1(V_\delta)\cap\mathcal{L}^\perp$ 应用第一个不等式，得到

$$\begin{aligned}\int_{\partial_*V_\delta}|u|^2\,\mathrm{dS}&\leq\frac{1}{\alpha}n^\delta_{\Gamma,\alpha}(u)+c_0\alpha b\delta^2\left(n^\delta_{\Gamma,\alpha}(u)+\frac{\alpha^2}{4}\|u\|^2_{L^2(V_\delta)}\right)\\&\leq\left(\frac{1}{\alpha}+c_0b\alpha\delta^2\right)\left(n^\delta_{\Gamma,\alpha}(u)+\frac{\alpha^2}{4}\|u\|^2_{L^2(V_\delta)}\right),\end{aligned}$$

注意到当 $\alpha\delta\to\infty$ 和 $\alpha\to\infty$ 时， $\frac{1}{\alpha}=\alpha\delta^2\cdot(\frac{1}{\delta\alpha})^2=o(\alpha\delta^2)$，由此得到第二个不等式。 □

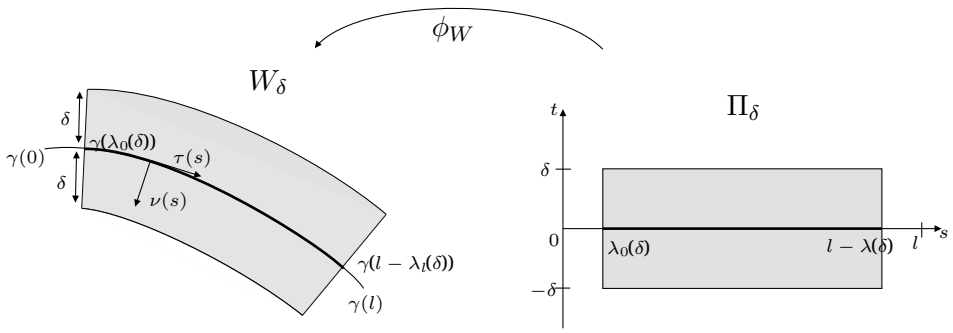


FIGURE 6.1. 在 Π_δ 与 W_δ之间的微分同胚

6. NEIGHBORHOODS OF CURVED EDGES

本节的主要目标是围绕分段光滑曲线的一条边上所含的光滑开弧，构造一个适当的邻域；该曲线是 δ-相互作用的支集。在这些邻域内，我们分析受局限于特定开弧上的 δ-相互作用影响的狄利克雷拉普拉斯算子和诺伊曼拉普拉斯算子的谱性质。

6.1. 几何构型与变量替换。 我们从构造给定曲线弧周围的管状邻域开始。具体而言，在本节中，对于某个 $l>0$，我们考虑由弧长参数化 $\gamma:\ [0,l]\to\mathbb{R}^2$定义的开弧 Γ，其中 γ 是具有 $|\gamma'|=1$ 的 C^3-光滑单射函数。在每一点 $\gamma(s)\in\Gamma$，我们将切向量记为 $\tau(s):=\gamma'(s)$，将法向量记为 $\nu(s)$，并约定 $\tau(s)\wedge\nu(s)=-1$。我们进一步将 Γ 的曲率记为 $k(s)$，其在每一点 $\gamma(s)$ 由 $\nu'(s)=k(s)\tau(s)$ 定义，并令 $k_{max}:=\|k\|_\infty$ 表示 Γ 的最大曲率。注意，将 k 限制在任意严格包含于 $(0,\ l)$ 的子区间上时，仍记为 k，其含义可由上下文清楚看出。

为了构造一个管状邻域 W_δ，使其围绕曲线 Γ 的部分随参数$\delta>0$ 趋于零而收缩，我们按如下方式进行。固定 $\delta_0>0$，并定义 C^1光滑的调整函数

$$\lambda_0,\,\lambda_l:[0,\delta_0)\to[0,\infty),\quad \lambda_0(0)=\lambda_l(0)=0,\quad \lambda_0'(0),\lambda_l'(0)\geq 0,$$

以及映射

$$\phi_W:(0,l)\times(-\delta_0,\delta_0)\to\mathbb{R}^2,\quad (s,t)\mapsto\gamma(s)-t\nu(s).$$

最后，定义

$$I_\delta:=(\lambda_0(\delta),l-\lambda_l(\delta)),\quad \Pi_\delta:=I_\delta\times(-\delta,\delta),\quad W_\delta:=\phi(\Pi_\delta),\quad \Gamma_\delta:=\phi(I_\delta\times\{0\}).$$

Π_δ 和 W_δ 的示意图见图6.1。

注意，对于 $G=(G_{ij})$，其中 $G_{ij}=\langle\partial_i\phi_W,\ \partial_j\phi_W\rangle$，可得

$$G=\begin{pmatrix}(1-k(s))^2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

特别地，只要 $\delta_0\cdot k_{max}<1,\ G$ 就是可逆的。由隐函数定理，对于任意$\delta_0<1/k_{max}$，映射 $\phi_W:\Pi_\delta\to W_\delta$ 对所有 $\delta\in(0,\ \delta_0)$都是微分同胚。

现在定义带有 δ-相互作用、支集于 Γ上的拉普拉斯算子，其谱性质将是我们分析的重点。

定义 6.1. 对于 $x\in\{d,n\}$ 和 $\alpha>0$，我们定义半双线性型

$$x^\delta_{W,\alpha}(u)=\int_{W_\delta}|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\alpha\int_{\Gamma_\delta}|u|^2\,\mathrm{dS},\quad D(d^\delta_{W,\alpha})=H^1_0(W_\delta),\quad D(n^\delta_{W,\alpha})=H^1(W_\delta).$$

通过构造 W_δ 与 Π_δ之间的微分同胚，我们可以进行变量替换，并为在此背景下得到的酉等价算子推导出合适的估计。

引理 6.2。 定义酉算子

$$\Phi:L^2(W_\delta)\to L^2(\Pi_\delta),\quad u(s,t)\mapsto(1-tk(s))^{\frac{1}{2}}u(\phi_W(s,t))=:g(s,t).$$

对于给定的常数 a_D、a_N、$\beta\in\mathbb{R}$，考虑半双线性型 $b^D_{\delta,\alpha}$和 $b^N_{\delta,\alpha}$，其中 $D(b^D_{\delta,\alpha})=H^1_0(\Pi_\delta)$以及 $D(b^N_{\delta,\alpha})=H^1(\Pi_\delta)$，定义如下

$$\begin{aligned}
b^D_{\delta,\alpha}(g) &:= \int_{I_\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\left((1+a_D\delta)|\partial_s g|^2+|\partial_t g|^2-\left(\frac{k^2}{4}-a_D\delta\right)|g|^2\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}s-\alpha\int_{I_\delta}|g(s,0)|^2\mathrm{d}s,\\
b^N_{\delta,\alpha}(g) &:= \int_{I_\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\left((1-a_N\delta)|\partial_s g|^2+|\partial_t g|^2-\left(\frac{k^2}{4}+a_N\delta\right)|g|^2\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\
&\quad-\alpha\int_{I_\delta}|g(s,0)|^2\mathrm{d}s-\beta\int_{I_\delta}|g(s,\delta)|^2+|g(s,-\delta)|^2\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

于是，当 $\delta>0$ 充分小时，存在 a_D、a_N、$\beta>0$，使得

$$d^\delta_{W,\alpha}(u)\le b^D_{\delta,\alpha}(g),\quad \forall u\in D(d^\delta_{W,\alpha}),\quad and\quad n^\delta_{W,\alpha}(u)\ge d^N_{\delta,\alpha}(g),\quad \forall u\in D(n^\delta_{W,\alpha}).$$

证明。由于 ϕ_W 和 $(1-tk(s))^{\frac12}$ 光滑，显然 $\Phi(H^1(W_\delta))=H^1(\Pi_\delta)$。我们将通过 Φ 为 $D^\delta_{W,\alpha}$ 和 $N^\delta_{W,\alpha}$ 构造酉等价算子。令 $v:=u\circ\phi_W$，然后进行变量替换可得

$$\int_{W_\delta}|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\alpha\int_{\Gamma_\delta}|u|^2\,\mathrm{dS}=\int_{I_\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1}{1-tk}|\partial_s v|^2+(1-tk)|\partial_t v|^2\mathrm{d}x-\alpha\int_{I_\delta}|v(s,0)|^2\,\mathrm{dS}\,.$$

代入 $v=(1-tk)^{-\frac12}g$，计算得

$$\begin{aligned}
&\int_{I_\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1}{(1-tk)^2}\left|\partial_s g+\frac{tk'}{2(1-tk)}g\right|^2+\left|\partial_t g+\frac{k}{2(1-tk)}g\right|^2\mathrm{d}t\;\mathrm{d}s-\alpha\int_{I_\delta}|g(s,0)|^2\,\mathrm{dS}\\
&\quad=\int_{I_\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1}{(1-tk)^2}|\partial_s g|^2+\frac{tk'}{(1-tk)^3}\Re(g\partial_s g)+\frac{(tk')^2}{4(1-tk)^4}|g|^2\\
&\qquad+|\partial_t g|^2+\frac{k}{1-tk}\Re(g\partial_t g)+\frac{k^2}{4(1-tk)^2}|g|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}s-\alpha\int_{I_\delta}|g(s,0)|^2\,\mathrm{dS}\,.
\end{aligned}$$

根据分部积分，得

$$\begin{aligned}
\int_{-\delta}^{\delta}\frac{k}{1-tk}\Re(g\partial_t g)\;\mathrm{d}t&=\frac12\int_{-\delta}^{\delta}\frac{k}{1-tk}\partial_t|g|^2\mathrm{d}t\\
&=\frac{k}{2(1-\delta k)}|g(s,\delta)|^2-\frac{k}{2(1+\delta k)}|g(s,-\delta)|^2+\int_{-\delta}^{\delta}\frac{k^2}{2(1-tk)^2}|g|^2\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

因此，与 $N^\delta_{W,\alpha}$ 相关联的半双线性形式酉等价于

$$\begin{aligned}
\tilde{n}^\delta_{W,\alpha}(g)=\int_{I_\delta}\int_{-\delta}^{\delta}&\left[\frac{1}{(1-tk)^2}|\partial_s g|^2+\frac{tk'}{(1-tk)^3}\Re(g\partial_s g)+|\partial_t g|^2\right.\\
&\left.+\left(\frac{(tk')^2}{4(1-tk)^4}-\frac{k^2}{4(1-tk)^2}\right)|g|^2\right]\mathrm{d}t\mathrm{d}s-\alpha\int_{I_\delta}|g(s,0)|^2\mathrm{d}s\\
&+\int_{I_\delta}\left(\frac{k}{1-\delta k}|g(s,\delta)|^2+\frac{k}{1+\delta k}|g(s,-\delta)|^2\right)\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

其中区域为 $D(\tilde{n}^\delta_{W,\alpha})=H^1(\Pi_\delta)$。对于充分小的 $\delta<\delta_0$ 和 $t\in(0,\delta)$，我们通过应用估计从下方估计 $\tilde{n}^\delta_{W,\alpha}$

$$|g\partial_s g|\le\frac12(|g|^2+|\partial_s g|^2),\quad |tk'(s)|\le\delta\max_{s\in[0,l]}|k'(s)|,$$

以及展开估计

$$\left|\frac{1}{(1-tk)^j}-1\right|=\left|\frac{\sum_{i=1}^{j}\binom{i}{j}(tk)^i}{(1-tk)^j}\right|\le\frac{\delta\sum_{i=1}^{j}\binom{i}{j}\delta_0^{i-1}k_{max}^i}{(1-\delta_0k_{max})^j}\le c\delta,\quad j\in\{1,2,3,4\},$$

对于某个 $c>0$。因此，对于 $\beta=k_{max}/(1-\delta_0 k_{max})$ 以及某个 $a_N>0$，我们得到

$$\tilde{n}^{\delta}_{W,\alpha}(g)\geq\int_{I_\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\left[(1-a_N\delta)|\partial_s g|^2+|\partial_t g|^2-\left(\frac{k^2}{4}+\delta a_N\right)|g|^2\right]\mathrm{d}t\mathrm{d}s$$
$$-\alpha\int_{I_\delta}|g(s,0)|^2\mathrm{d}s-\beta\int_{I_\delta}|g(s,\delta)|^2+|g(s,-\delta)|^2\mathrm{d}s=:b^N_{\delta,\alpha}(g).$$

采用类似的论证处理 $d^{\delta}_{W,\alpha}$ 及其酉等价形式 $\tilde{d}^{\delta}_{W,\alpha}$，后者与 $\tilde{n}^{\delta}_{W,\alpha}(g)$ 相同，但定义域为 $D(\tilde{d}^{\delta}_{W,\alpha})=H^1_0(\Pi_\delta)$，我们发现，对某个 $a_D>0$，有

$$\tilde{d}^{\delta}_{W,\alpha}(g)\leq\int_{I_\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\left[(1+a_D\delta)|\partial_s g|^2+|\partial_t g|^2-\left(\frac{k^2}{4}-a_D\delta\right)|g|^2\right]\mathrm{d}t\mathrm{d}s-\alpha\int_{I_\delta}|g(s,0)|^2\mathrm{d}s=b^D_{\delta,\alpha}(g).$$

□

6.2. 谱性质。在本小节中，我们应用引理 6.2 来估计 $N^{\delta}_{W,\alpha}$ 和 $D^{\delta}_{W,\alpha}$的特征值。记

- D_δ :=定义在 I_δ上的狄利克雷拉普拉斯算子,
- D_l := 定义在 $(0,l)$ 上的狄利克雷拉普拉斯算子。

我们首先证明一个有用的引理，用于比较这两个算子:

引理 6.3。 设 $b\geq 0$。对于任意固定的 $n\in\mathbb{N}$，有

$$E_n((1+b\delta)D_\delta-k^2/4)=E_n(D_l-k^2/4)+\mathcal{O}(\delta)\quad as\ \delta\to 0.$$

证明。 固定 $n\in\mathbb{N}$，并令 $J:\ L^2(I_\delta)\to L^2(0,l)$ 为零延拓算子。直接验证可得

$$\|Ju\|_{L^2(0,l)}=\|u\|_{L^2(I_\delta)}\quad\text{and}\quad((1+b\delta)D_\delta-\frac{k^2}{4})(u)=((1+b\delta)D_l-\frac{k^2}{4})(Ju).$$

因此，根据极小极大原理，我们得到

$$E_n\left((1+b\delta)D_\delta-\frac{k^2}{4}\right)\geq E_n\left((1+b\delta)D_l-\frac{k^2}{4}\right)\geq E_n\left(D_l-\frac{k^2}{4}\right).$$

另一方面，考虑双射线性映射 $\phi:\ [\lambda_0,l-\lambda_l]\to[0,l]$，及其逆映射 by

$$\phi(y)=\frac{l}{l-\lambda_l(\delta)-\lambda_0(\delta)}(y-\lambda_0(\delta)),\quad\phi^{-1}(x)=\left(1-\frac{\lambda_l(\delta)+\lambda_0(\delta)}{l}\right)x+\lambda_0(\delta),$$

并定义相应的算子

$$\Phi:L^2(0,l)\to L^2(I_\delta),\quad f(x)\mapsto f(\phi(y))\cdot(\phi'(y))^{\frac{1}{2}}=f(\phi(y))(1+\frac{\lambda_l(\delta)+\lambda_0(\delta)}{l-\lambda_l(\delta)-\lambda_0(\delta)})^{\frac{1}{2}}.$$

由于 ϕ 是光滑且可逆的， Φ也可逆。此外，直接计算可得

$$\|\Phi(f)\|^2_{L^2}=\int_0^l|f(\Phi(x))|^2\cdot\phi'(x)\mathrm{d}x=\int_{\lambda_0(\delta)}^{l-\lambda_l(\delta)}|f|^2\mathrm{d}y=\|f\|^2_{L^2(I_\delta)},$$

这意味着 Φ 是酉的。结合变量替换，我们得到

$$((1+b\delta)D_\delta-\frac{k^2}{4})(\Phi f)=\int_{I_\delta}(1+b\delta)|f'(\phi(x))|^2\cdot(\phi'(x))^3-\frac{k^2(x)}{4}|f(\phi(x))|^2\phi'(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^l(1+b\delta)|f'|^2\cdot(\phi')^2-\frac{k^2(y(1-\frac{\lambda_l(\delta)-\lambda_0(\delta)}{l})+\lambda_0)}{4}|f'|\mathrm{d}y=:q(f).$$

因此，只需 为 $q(f)$找到一个合适的上界。为此，注意到 $\phi'=1+\mathcal{O}(\delta)$，因此对于某个 $c_0>0$,

$$\int_0^l(1+b\delta)|f'|^2\cdot(\phi')^2\mathrm{d}y\leq(1+c_0\delta)\int_0^l|f'|^2\mathrm{d}y.\tag{6.1}$$

由于 k^2 是利普希茨连续的，记其利普希茨常数为 L，我们有

$$\left|k^2\left(y+\lambda_0(\delta)-y\frac{\lambda_l(\delta)+\lambda_0(\delta)}{l}\right)-k^2(y)\right|\leq L\left|\lambda_0(\delta)-y\frac{\lambda_l(\delta)+\lambda_0(\delta)}{l}\right|$$
$$\leq L(2\lambda_0(\delta)+\lambda_l(\delta)).$$

因此，

$$\int_0^l \frac{k^2(y(1-\frac{\lambda_l(\delta)-\lambda_0(\delta)}{l})+\lambda_0)}{4}|f(y)|\mathrm{d}y \geq (1+c_0\delta)\int_0^l k^2|f|^2\mathrm{d}y - (c_1\delta + c_0\|k^2\|_\infty\delta)\|f\|_{L^2}^2$$

对于某个 c_0， $c_1>0$。将此估计与 (6.1) 结合可得

$$q(f) \leq (1+c_0\delta)(D_l - \frac{k^2}{4})(f) + c_2\delta\|f\|_{L^2(0,l)}^2$$

对于一个合适的 ble $c_2>0$ 且充分小的 δ。应用极小极大原理，我们得出 at

$$E_n((1+b\delta)D_\delta - \frac{k^2}{4}) = E_n(Q) \leq E_n(D_l - \frac{k^2}{4}) + \mathcal{O}(\delta)$$

当 $\delta\to 0$ 时，这就完成了证明。 □

借助引理 6.3，我们可以为 $E_n(D_{W,\ \alpha}^\delta)$导出一个上界。

引理 6.4. 对于 任意固定的 $n\in\mathbb{N}$，存在 $c_D>0$，使得当 $\delta\to 0^+$ 和 $\alpha\delta\to\infty$ 时，有

$$E_n(D_{W,\alpha}^\delta) \leq -\frac{\alpha^2}{4} + E_n(D_l - \frac{k^2}{4}) + c_D(\delta + \alpha^2 e^{-\frac{1}{2}\delta\alpha}).$$

证明. 设 $n\in\mathbb{N}$。由引理 6.2 可知，对于某个 $a_D>0$，有 $E_n(D_{W,\alpha}^\delta) \leq E_n(B_{\delta,\alpha}^D)$，此外 ，

$$B_{\delta,\alpha}^D \cong ((1+a_D\delta)D_\delta - \frac{k^2}{4})\otimes I + I\otimes T_{\delta,\alpha}^D + a_D\delta,$$

其中 $T_{\delta,\alpha}^D$ 如定义 2.8 所述。应用引理 6.3 得到

$$E_n((1+a_D\delta)D_\delta - \frac{k^2}{4}) = E_n(D_l - \frac{k^2}{4}) + \mathcal{O}(\delta) = \mathcal{O}(1) \quad \text{as } \delta\to 0.$$

此外，命题 2.9 的断言 (i) 和 (iv) 确保存在一个 $c>0$，使得对于充分大的 $\alpha\delta$,

$$E_1(T_{\delta,\alpha}^D) < -\frac{\alpha^2}{4} + c\alpha^2 e^{-\frac{1}{2}\delta\alpha}, \quad \text{and} \quad E_2(T_{\delta,\alpha}^D) \geq 0.$$

结合 这些估计可知，当 α 充分大时，存在 $c_D>0$ 使得 at

$$E_n(D_{W,\alpha}^\delta) \leq -\frac{\alpha^2}{4} + E_n(D_l - \frac{k^2}{4}) + c_D(\delta + \alpha^2 e^{-\frac{1}{2}\delta\alpha}).$$

□

我们通过推导诺伊曼算子 $N_{W,\alpha}^\delta$ 的一个下界来结束本部分。

引理 6.5. 设 $T_{\delta,\alpha}^\beta$ 如定义 *2.8* 所示，且 $\psi\in H^1(-\delta,\delta)$ 是与其第一特征值对应的归一化特征函数。定义投影

$$P: L^2(W_\delta)\to L^2(I_\delta), \quad (Pu)(s) = \int_{-\delta}^\delta \overline{\psi}(t)(\phi_W u)(s,t)\mathrm{d}t,$$

则存在 $a_N,\beta>0$，使得不等式

$$n_{W,\alpha}^\delta(u) \geq (1-a_N\delta)\|Pu'\|_{L^2(I_\delta)}^2 + \int_{I_\delta}(-\frac{\alpha^2}{4} - \frac{k^2}{4})|Pu|^2\mathrm{d}s - a_N(\alpha^2 e^{-\frac{1}{2}\delta\alpha} + \delta)\|Pu\|_{L^2(I_\delta)}^2$$

成立，特别是，

$$N_{W,\alpha}^\delta \geq -\frac{\alpha^2}{4} - \frac{\|k\|_\infty^2}{4} + \mathcal{O}(\delta + \alpha^2 e^{-\frac{1}{2}\alpha\delta})$$

当 $\alpha\to\infty$、 $\delta\to 0^+$ 和 $\alpha\delta\to\infty$ 时。

证明。 根据引理 6.2，存在 $a_N,\beta>0$，使得 $n_{W,\alpha}^\delta(u) \geq b_{\delta,\alpha}^N(g)$。令

$$f := Pu, \quad z(s,t) := g(s,t) - f(s)\psi(t) \in L^2(\Pi_\delta).$$

注意到 $z(\cdot,t)$ 与 ψ 在 $L^2(-\delta,\delta)$ 中正交:

$$\int_{-\delta}^\delta \overline{\psi}(t)z(\cdot,t)\mathrm{d}t = \int_{-\delta}^\delta \overline{\psi}(t)g(s,t)\mathrm{d}t - \underbrace{\int_{-\delta}^\delta |\psi(t)|^2\mathrm{d}t}_{=1}\cdot\int_{-\delta}^\delta \overline{\psi}(\tau)g(s,\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t = 0.$$

利用分解 $g(s,t) = z(s,t) + f(s)\psi(t)$ 并应用极小极大原理，可得

$$\begin{aligned}\int_{I_\delta}\int_{-\delta}^{\delta} |\partial_t g|^2 \mathrm{d}t - \alpha|g(s,0)|^2 - \beta(|g(s,\delta)|^2 + |g(s,-\delta)|^2)\mathrm{d}s \\ \geq \int_{I_\delta}\int_{-\delta}^{\delta} E_1(T^\beta_{\delta,\alpha})|f(s)\psi(t)|^2 + E_2(T^\beta_{\delta,\alpha})|z(s,t)|^2 \mathrm{d}t\ \mathrm{d}s \\ = E_1(T^\beta_{\delta,\alpha})\|f\|^2_{L^2(I_\delta)} + E_2(T^\beta_{\delta,\alpha})\|z\|^2_{L^2(\pi_\delta)}.\end{aligned}$$

由于 ψ 和 $\partial_s z(\cdot,t)$ 正交，我们有

$$\int_{I_\delta}\int_{-\delta}^{\delta} |\partial_s g|^2 \mathrm{d}t\ \mathrm{d}s = \|f'\|^2_{L^2(I_\delta)} + \|\partial_s z\|^2_{L^2(\Pi_\delta)} \geq \|f'\|^2_{L^2(I_\delta)}.$$

此外，利用 $z(\cdot,t)$ 与 $\psi(t)$ 的正交性，以及 k 在 t上的独立性，可得

$$\int_{I_\delta}\int_{-\delta}^{\delta} |g|^2(-\frac{k^2}{4} - \delta a_N)\mathrm{d}t\ \mathrm{d}s = \int_{I_\delta} |f|^2(-\frac{k^2}{4} - \delta a_N)\mathrm{d}s + \int_{I_\delta}\int_{-\delta}^{\delta} |z|^2(-\frac{k^2}{4} - \delta a_N).$$

结合这些估计，我们得到

$$\begin{aligned}b^N_{\delta,\alpha}(g) &\geq (1 - a_N\delta)\|f'\|^2_{L^2(I_\delta)} + \int_{I_\delta}(E_1(T^\beta_{\delta,\alpha}) - \frac{k^2}{4} - \delta a_N)|f|^2\mathrm{d}s + \int_{\Pi_\delta}(E_2(T^\beta_{\delta,\alpha}) - \frac{k^2}{4} - \delta a_N)|z|^2\mathrm{d}t\ \mathrm{d}s \\ &\geq (1 - a_N\delta)\|f'\|^2_{L^2(I_\delta)} + \int_{I_\delta}(-\frac{\alpha^2}{4} - \frac{k^2}{4})|f|^2\mathrm{d}s - (c\alpha^2 e^{-\frac{1}{2}\delta\alpha} + \delta a_N)\|f\|^2_{L^2(I_\delta)},\end{aligned}$$

其中我们用到了以下事实：根据命题 2.9，存在 $c > 0$ 使得

$$(E_2(T^\beta_{\delta,\alpha}) - \frac{k^2}{4} - \delta a_N) \geq \frac{c}{\delta^2} - \frac{k^2}{4} - \delta a_N \geq 0 \quad \text{for sufficiently small}\, \delta.$$

$N^\delta_{W,\alpha}$ 的第二个所述不等式可直接由第一个断言推出。 □

7. Schrödinger operator with a strong δ-interaction supported on a curve withcorners

在本节中 ，我们将运用前面的构造和结果来证明定理（1.1）和（1. 2).

7.1. 将 $\mathbb{R}^2$ 分解为角点和边的邻域。 我们首先定义此处所用的带角点曲线 $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ 的概念。下文中，令 Ω_+ 为由 Γ 围成的 $\mathbb{R}^2$ 有界部分，并设 $\Omega_- = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_+}$。此外，以 ν 表示 Ω_+的外指单位法向量。

定义 7.1。 设 $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ 为一条单射连续闭曲线。若满足以下条件，则称 Γ 为一条带$M \geq 1$ 角点的曲线:

(1) 存在顶点 $A_1, \ldots, A_M \in \mathbb{R}^2$ 以及正长度 $l_1, \ldots, l_M > 0$(2) 存在 C^3-光滑弧长参数化 γ_j : $[0, l_j] \to \mathbb{R}^2$ ，满足 $|\gamma_j'| = 1$, j =1, $\ldots, M$，且：(a) $\gamma_j((0, l_j))$, $j = 1, \ldots, M$的内部两两不相交。(b) 对于 $j = 1, \ldots, M$，有 $\gamma_j(0) = A_j$ 且 $\gamma_j(l_j) = A_{j+1}$，约定 $A_1 \equiv A_{M+1}$。(c) $\Gamma = \bigcup_{j=1}^M \Gamma_j$，其中 $\Gamma_j := \gamma_j([0, l_j])$, $j = 1, \ldots, M$。

此外，我们假设每个γ_j 的定向方式满足：对于由 Γ 围成的有界围域，在点 $s \in (O,\ l_j)$处的外法向量ν_j (s)，有$\nu_j(s) \wedge \gamma'(s) = 1$。此外， $k_j(s)$表示$\gamma_j(s)$在 $s \in (0,\ l_j)$处的曲率，并令 $\theta_j \in [0, \pi]$ 为γ_{j-1} 和γ_j 在顶点 A_j处的切向量之间的半角，其定义关系如下

$$\cos(2\theta_j) = -\langle \nabla\gamma_j(0), \nabla\gamma_{j-1}(l_{j-1})\rangle, \quad \sin(2\theta_j) = -\det(\nabla\gamma_j(0) \quad \nabla\gamma_{j-1}(l_{j-1})).$$

我们进一步假设 对于所有 $j = 1$, ..., M，假设 $\theta_j \notin \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$。图 7.1 给出了示意图 .

现在我们介绍如何将 $\mathbb{R}^2$ 分解为带角曲线的角点和边附近的适当邻域。首先，我们按如下方式构造一条具有 M个角点的曲线 Γ 的邻域分解:

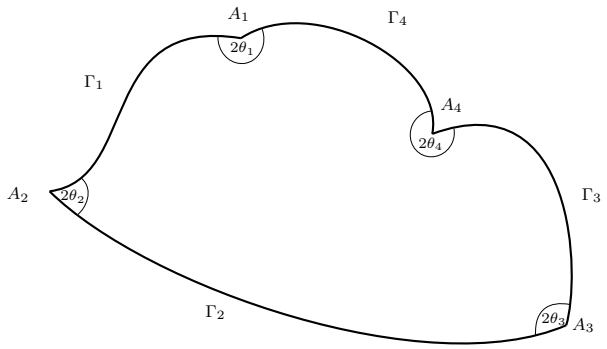


FIGURE 7.1. 一条带角曲线

(i) 角点： 考虑一个内角为 $2\theta_j$的角点。角点附近的曲线段γ_{j-1} 和γ_j 满足的正则性假设 A_j 确保存在 C^3-光滑延拓 $\widetilde{\gamma_{j-1}}$， $\widetilde{\gamma_j}$，并延伸至 A_j之外。根据角度 θ_j，定义重新参数化曲线 γ_j^*， γ_{j-1}^* 如下：

(1) 若 $\theta_j \in (0, \frac{\pi}{2})$，设 $\gamma_j^*(s) := \widetilde{\gamma_j}(s)$，且 $\gamma_{j-1}^*(s) := \widetilde{\gamma_{j-1}}(l_{j-1} - s)$。
(2) 若 $\theta_j \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$，设 $\gamma_j^*(s) := \widetilde{\gamma_{j-1}}(l_{j-1} - s)$，且 $\gamma_{j-1}^*(s) := \widetilde{\gamma_j}(s)$。
对γ_j^*和γ_{j-1}^*作适当的平移和旋转后，我们便完全处于第5节的情形。因此，存在角点的邻域$V_{j,\delta}$ 以及函数

$$\lambda_j^{0/l}(\delta) = \delta + \mathcal{O}(\delta^2) \quad \text{as } \delta \to 0,$$

使得对每个 $j \in 1, \dots M$,

$$\partial V_{j,\delta} \cap \gamma_{j-1} = \{\gamma_{j-1}(l_{j-1} - \lambda_{j-1}^l(\delta))\}, \quad \partial V_{j,\delta} \cap \gamma_j = \{\gamma_j(\lambda_j^0(\delta))\}.$$

此外，记$\partial_* V_{j,\delta} \subsetneq \partial V_{j,\delta}$ 为与角度 $2\theta_j$相对的直边界段。这些线段与$\gamma_{j-1}(l_{j-1} - \lambda_{j-1}^l(\delta))$和$\gamma_j(\lambda_j^0(\delta))$处的切向量正交，如引理 5.2 中所述。

注意，$V_{j,\delta}$ 上的拉普拉斯算子的特征值渐近行为与延拓 $\widetilde{\gamma_{j-1}}$， $\widetilde{\gamma_j}$的选择无关。

（ii）**边：** 边γ_j 周围的邻域 δ 是按照第 6 节中的构造定义的管状邻域。定义

$$I_{j,\delta} := (\lambda_j^0(\delta), l_j - \lambda_j^l(\delta)), \quad \Pi_{j,\delta} := I_{j,\delta} \times (-\delta, \delta),$$
$$W_{j,\delta} := \phi_{W,j}(\Pi_{j,\delta}), \quad \phi_{W,j}(s,t) = \gamma_j(s) - t\nu_j(s).$$

我们进一步定义

$$\Omega_\delta^* = \mathbb{R}^2 \setminus (\bigcup_{j=1}^M W_{j,\delta} \cup \bigcup_{j=1}^M V_{j,\delta}),$$

并令

$$\partial_* W_{j,\delta} := \phi_{W,j}(\{\lambda_j^0(\delta), l_j - \lambda_j^l(\delta)\} \times (-\delta, \delta)).$$

根据构造，这些满足

$$\bigcup_{j=1}^M \partial_* W_{j,\delta} = \bigcup_{j=1}^M \partial_* V_{j,\delta},$$

并且集合$W_{j,\delta}$、 $V_{j,\delta}$和 Ω_δ^* 构成 $\mathbb{R}^2$的两两不交分解。图 7.2 展示了这一分解的示意图。

使用第3节中的记号，定义

$$\mathcal{K} := \kappa(\theta_1) + \dots \kappa(\theta_M),$$
$$\mathcal{E} := \text{ the disjoint union of } \{\mathcal{E}_n(\theta_j) \mid n = 1, \dots, \kappa(\theta_j)\},\ j = 1, \dots, M,$$
$\mathcal{E}_n$:=按非递减顺序排列的 $\mathcal{E}$ 中第 n 个元素。

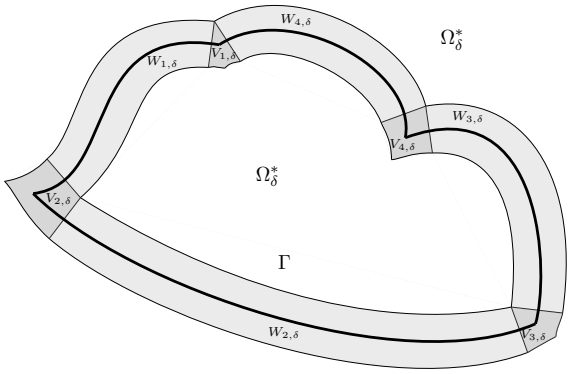


FIGURE 7.2. 带角曲线邻域的分解

最后，回顾一下，本节旨在推导其特征值渐近行为的薛定谔算子，是一个由半双线性型定义的自伴算子 H_α^Γ；该算子具有强度为 $\alpha>0$ 的强 δ-相互作用，其支集是一条带有 $M\geq 1$ 个角点的曲线 Γ。

$$h_\alpha^\Gamma(u)=\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\alpha\int_\Gamma|u|^2\,\mathrm{dS},\quad D(h_\alpha^\Gamma)=H^1(\mathbb{R}^2).$$

此外，对于 $X\in\{d,n\}$ 和 $U_{j,\ \delta}\in\{V_{j,\delta},W_{j,\delta}\}$, $j=1,\ \ldots\ldots,\ M$，我们定义如下形式

$$X_j^U(u)=\int_{U_{j,\delta}}|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\alpha\int_{U_{j,\delta}\cap\Gamma}|u|^2\,\mathrm{dS},\quad D(n_j^U)=H^1(U_{j,\delta}),\ D(d_j^U)=H_0^1(U_{j,\delta})$$

即，在 $V_{j,\ \delta}$ / $W_{j,\ \delta}$ 上具有 δ-相互作用（其支集位于各自的 Γ 部分）的狄利克雷/诺伊曼拉普拉斯算子。

还需要用到以下算子：

- N_0 :=Ω_δ^* 上的诺伊曼拉普拉斯算子，
- $D_{j,\ \delta}$:= 定义在 $I_{j,\ \delta}$ 上的狄利克雷拉普拉斯算子，
- D_j := 定义在 $(0,\ l_j)$ 上的狄利克雷拉普拉斯算子，
- R_j^V:= 算子 N_j^V，在 $\partial_* V_{j,\ \delta}$ 上附加了 α-罗宾边界条件。

7.2. 拐角诱导的特征值的渐近行为。在本小节中，我们证明主要结果定理 1.1。以下引理总结了第5节中的关键结果。

Lem引理 7.2。当 $\alpha\to\infty$、 $\delta\to 0$ 和 $\alpha\delta\to\infty$ 时，以下渐近关系成立：

$$E_n\big(\bigoplus_{j=1}^M N_j^V\big)=\alpha^2\mathcal{E}_n+\mathcal{O}(\alpha^2\delta+\frac{1}{\delta^2}),\quad n=1,\ldots,\mathcal{K},$$

$$E_n\big(\bigoplus_{j=1}^M D_j^V\big)=\alpha^2\mathcal{E}_n+\mathcal{O}(\alpha^2\delta+\alpha^2e^{-c\alpha\delta}),\quad n=1,\ldots,\mathcal{K},$$

$$E_{\mathcal{K}+1}\big(\bigoplus_{j=1}^M N_j^V\big)\geq-\frac{\alpha^2}{4}+o(\alpha^2).$$

证明。对于 $\theta_j\in(0,\ \frac{\pi}{2})$，推论 5.7 给出 $E_{\mathcal{K}+1}(N_j^V)\ \geq-\alpha^2/4+o(\alpha^2)$，并且

$$E_n(N_j^V)=\alpha^2\mathcal{E}_n(\theta_j)+\mathcal{O}\big(\alpha^2\delta+\frac{1}{\delta^2}\big)\quad\text{for } n=1,\ldots,\kappa(\theta_j).$$

对于 $\theta_j\in(\frac{\pi}{2},\ \pi)$ 和 $n=1$、.....、 $\kappa(\pi-\theta_j)\ =\kappa(\theta_j)$，命题3.6(ii)给出

$$E_n(N_j^V)=\alpha^2\mathcal{E}_n(\pi-\theta_j)+\mathcal{O}\big(\alpha^2\delta+\frac{1}{\delta^2}\big)=\alpha^2\mathcal{E}_n(\theta_j)+\mathcal{O}(\alpha^2\delta+\frac{1}{\delta^2}).$$

引理中的第一个和第三个恒等式可直接由这些结果得出。第二个恒等式可类似地通过应用推论 5.7 得到。□

利用这一点 引理，由此我们通过证明以下命题来完成定理 1.1 的证明 .

命题 7.3. 当 $\alpha \to \infty$ 时，有

$$E_n(H_\alpha^\Gamma) = \mathcal{E}_n\alpha^2 + \mathcal{O}(\alpha^{\frac{4}{3}}) \text{ for each } n \in \{1, \dots, \mathcal{K}\}, \tag{7.1}$$

$$E_n(H_\alpha^\Gamma) = -\frac{\alpha^2}{4} + o(\alpha^2) \text{ for each } n \geq \mathcal{K}+1. \tag{7.2}$$

证明。 应用狄利克雷-诺伊曼夹逼，对任意 $n \in \mathbb{N}$，有

$$E_n\big(N_0 \oplus \big(\bigoplus_{j=1}^M N_j^V\big) \oplus \big(\bigoplus_{j=1}^M N_j^W\big)\big) \leq \Lambda_n\big(H_\alpha^\Gamma\big) \leq E_n\big(\bigoplus_{j=1}^M D_j^V\big). \tag{7.3}$$

由引理 6.5，对所有 $j = 1, \dots M$，有下界 $N_j^W \geq -\alpha^2/4 + o(\alpha^2)$，而且显然 $N_0 \geq 0$。结合引理 7.2，可得

$$E_n(N_0 \oplus (\bigoplus_{j=1}^M N_j^V) \oplus (\bigoplus_{j=1}^M N_j^W)) = E_n(\bigoplus_{j=1}^M N_j^V), \quad n = 1, \dots \mathcal{K}.$$

将其代入 (7.3)，并结合引理 7.2，可得

$$\Lambda_n(H_\alpha^\Gamma) = \alpha^2\mathcal{E}_n + \mathcal{O}(\frac{1}{\delta^2} + \alpha^2\delta + \alpha^2 e^{-c\alpha\delta}).$$

由于 $\mathcal{E}_n < -\frac{1}{4}$，存在 $\alpha_0 > 0$，使得对所有 $\alpha \geq \alpha_0$，都有 $\Lambda_n(H_\alpha^\Gamma) < \Sigma(H_\alpha^\Gamma) = 0$，这意味着$\Lambda_n(H_\alpha^\Gamma)$ 实际上是 H_α^Γ 的第 n 个特征值。因此，取 $\delta := \alpha^{-\frac{2}{3}}$，便得到 (7.1)。

对于第二个估计，由 (7.3) 以及引理 7.2，我们得到

$$\Lambda_{\mathcal{K}+1}(H_\alpha^\Gamma) \geq \min\big\{\Lambda_1(N_0), E_{\mathcal{K}+1}\big(\bigoplus_{j=1}^M N_j^V\big), E_1\big(\bigoplus_{j=1}^M N_j^W\big)\big\} \geq -\frac{\alpha^2}{4} + o(\alpha^2).$$

另一方面，利用 $W_{1,\delta}$ 附近的狄利克雷夹逼，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们得到 $\Lambda_n(H_\alpha^\Gamma) \leq E_n(D_1^W)$；而由引理 6.4（例如取 $\delta := 1/\sqrt{\alpha}$），有 $E_n(D_1^W) = -\frac{\alpha^2}{4} + \mathcal{O}(1)$。结合这些估计，对于每个 $n \geq \mathcal{K}+1$，我们得到

$$-\frac{\alpha^2}{4} + o(\alpha^2) \leq \Lambda_n(H_\alpha^\Gamma) \leq -\frac{\alpha^2}{4} + \mathcal{O}(1).$$

由于左端在 α 足够大时为负（因此位于本质谱底端以下），也有 $\Lambda_n(H_\alpha^\Gamma) = E_n(H_\alpha^\Gamma)$，由此完成了 (7.2) 的证明。□

7.3. 边缘诱导特征值的渐近行为。 在本小节中，我们证明主要结果定理 1.2。为此，我们运用 [19]中发展的技巧，为 $E_{\mathcal{K}+n}(H_\alpha^\Gamma)$ 建立适当的上界和下界。

从现在起，我们作如下假设：

$$\text{all angles } \theta_j \text{ are non-resonant.}$$

此外，对于某个固定且充分大的 $C > 0$，我们考虑以下渐近区域，具体取值将在后文说明：

$$\alpha \to \infty, \quad \delta = \frac{C\log\alpha}{\alpha} \to 0, \tag{7.4}$$

在此区域内，可得 $\alpha\delta \to \infty$ 和 $\alpha^2\delta^3 \to 0$。我们首先推导 $E_{\mathcal{K}+n}(H_\alpha^\Gamma)$的一个上界：

命题 7.4. 对于任意 $n \in \mathbb{N}$，存在 $\alpha_0 > 0$，使得对所有 $\alpha \geq \alpha_0$，算子 H_α^Γ 至少有 $\mathcal{K}+n$ 个离散特征值，其上界如下

$$E_{\mathcal{K}+n}(H_\alpha^\Gamma) \leq -\frac{\alpha^2}{4} + E_n\Big(\bigoplus_{j=1}^M \big(D_j - \frac{k_j^2}{4}\big)\Big) + \mathcal{O}(\frac{\log\alpha}{\alpha}).$$

证明。 设 $n \in \mathbb{N}$。根据狄利克雷夹逼，我们有

$$\Lambda_{\mathcal{K}+n}(H_\alpha^\Gamma) \leq E_{\mathcal{K}+n}\big(\big(\bigoplus_{j=1}^M D_j^V\big) \oplus \big(\bigoplus_{j=1}^M D_j^W\big)\big). \tag{7.5}$$

由于非共振假设，推论 5.12 保证存在一个常数 $c_0 > 0$，使得 $E_{\kappa(\theta_j)+1}(D_j^V) \geq -\alpha^2/4 + \frac{c_0}{\delta^2}$ 对每个 $j = 1, \dots M$ 都成立。因此，

$$E_{\mathcal{K}+1}(\bigoplus_{j=1}^{M} D_j^V) \geq -\frac{\alpha^2}{4} + \frac{c_0}{\delta^2}.$$

在渐近区域 (7.4) 中选取 $C \geq 6$，由引理 6.4 可知，存在 $c_D > 0$ 使得

$$E_n(D_j^W) \leq -\frac{\alpha^2}{4} + E_n(D_j - \frac{k_j^2}{4}) + c_D(\delta + \alpha^2 e^{-\frac{1}{2}\delta\alpha}) \leq -\frac{\alpha^2}{4} + E_n(D_j - \frac{k_j^2}{4}) + c_D(\frac{1 + C\log\alpha}{\alpha}).$$

结合上述结果可得

$$E_n(\bigoplus_{j=1}^{M} D_j^W) \leq -\frac{\alpha^2}{4} + E_n\left(\bigoplus_{j=1}^{M}(D_j - \frac{k_j^2}{4})\right) + \mathcal{O}(\frac{\log\alpha}{\alpha}) \leq -\frac{\alpha^2}{4} + \frac{c_0}{\delta^2} \leq E_{\mathcal{K}+1}(\bigoplus_{j=1}^{M} D_j^V) \tag{7.6}$$

此外，由引理 7.2 可知，对于充分大的 α,

$$E_{\mathcal{K}}(\bigoplus_{j=1}^{M} D_j^V) \leq -(\frac{1}{4} + \varepsilon)\alpha^2 = -\frac{\alpha^2}{4} - \alpha^2\varepsilon \leq E_n(\bigoplus_{j=1}^{M} D_j^W) \leq E_{\mathcal{K}+1}(\bigoplus_{j=1}^{M} D_j^V)$$

对于某个 $\varepsilon > 0$。结合不等式 (7.5)，可得

$$\Lambda_{\mathcal{K}+n}(H_\alpha^\Gamma) \leq E_{\mathcal{K}+n}((\bigoplus_{j=1}^{M} D_j^V) \oplus (\bigoplus_{j=1}^{M} D_j^W)) = E_n(D_j^W) \leq -\frac{\alpha^2}{4} + E_n\left(\bigoplus_{j=1}^{M}(D_j - \frac{k_j^2}{4})\right) + \mathcal{O}(\frac{\log\alpha}{\alpha})$$

注意到存在 $\alpha_0 > 0$，使得对于 $\alpha \geq \alpha_0$，有 $\Lambda_{\mathcal{K}+n}(H_\alpha^\Gamma) < \Sigma(H_\alpha^\Gamma) = 0$，因此 $E_{\mathcal{K}+n}(H_\alpha^\Gamma) = \Lambda_{\mathcal{K}+n}(H_\alpha^\Gamma)$。□

本小节余下部分将用于建立边缘诱导特征值的下界。我们先引入一些记号。从现在起，令

- $L :=$ 由 H_α^Γ的前 $\mathcal{K}$ 个特征函数张成的 $L^2(\mathbb{R}^2)$子空间,
- $L_j :=$ 由 N_j^V的前 $\kappa(\theta_j)$个特征函数张成的 $L^2(V_{j,\ \delta})$子空间,
- $\sigma_j :\ L^2(\mathbb{R}^2) \to L^2(V_{j,\ \delta})$ 到$V_{j,\ \delta}$上的限制算子。

在继续进行最终证明之前，我们需要两个预备引理。第一个涉及子空间 $\sigma_j^* L_j$ 与 L之间的距离。

引理 7.5。 对于任意 $j \in \{1, \dots, M\}$，且在渐近行为条件(7.4)下，存在 $c > 0$，使得 $d(\sigma_j^* L_j, L) = \mathcal{O}(e^{-c\alpha\delta})$。

证明。 固定 $j \in \{1, \dots, M\}$。令 $\Upsilon_j := \sigma_j^* L_j$ 且 $v^* := \sigma_j^* v$，其中 $v \in L^2(V_{j,\delta})$。我们的目标是利用三角不等式 (2.1) 估计 $d(\Upsilon, L)$:

$$d(\Upsilon_j, L) \leq d(\Upsilon_j, \Upsilon_j^\chi) + d(\Upsilon_j^\chi, L), \tag{7.7}$$

其中， Υ_j^χ 是通过适当的截断函数定义的中间子空间。

回顾引理 5.4，存在常数 $0 < a < A < 1$ 和截断函数 $\chi_\delta \in C^2(\mathbb{R}^2)$，使得对所有 $j \in \{1, \dots, M\}$:

- $0 \leq \chi_\delta \leq 1$, 其中 $\chi_\delta \equiv 1$ 属于 $V_{j,a\delta}$ 并且 $\chi_\delta \equiv 0$ 属于 $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{V_{j,A\delta}}$,
  对于所有满足 $1 \leq |\beta| \leq 2$的$\bullet$ 和 $\beta \in \mathbb{N}^2$，存在 $C_0 > 0$ 使得 $\|\partial^\beta \chi_\delta\| \leq C_0\delta^{-|\beta|}$，且 χ_δ 的法向导数在 Γ上消失。

此外，存在 $a_0 > 0$，使得对于所有$x \in V_j$，$|x - A_j| > a_0\delta$，$\delta \setminus V_{j,\ a\delta}$。然后我们定义子空间 Υ_j^χ 为

$$\Upsilon_j^\chi := \{\chi_\delta v^* :\ v^* \in \Upsilon_j\} \subseteq L^2(\mathbb{R}^2).$$

我们首先估计 $d(\Upsilon_j, \Upsilon_j^\chi)$。根据定义，有

$$d(\Upsilon_j, \Upsilon_j^\chi) = \sup_{0 \neq v^* \in \Upsilon_j} \frac{\|v^* - P_j v^*\|}{\|v^*\|},$$

其中 $P_j\colon L^2(\mathbb{R}^2) \to \Upsilon_j^\chi$ 表示正交投影算子。根据 χ 的构造，对于任意 $v^* \in \Upsilon_j$,

$$\|v^* - \chi_\delta v^*\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|(1-\chi_\delta)v^*\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \le \|v^*\|_{L^2(V_{j,\delta}\setminus\overline{V_{j,a\delta}})}.$$

现在，我们对 N_j^V 的前 $\kappa(\theta_j)$ 个特征函数使用引理 5.9 中的 Agmon 估计，从而得到常数 $b,\ B>0$，使得对所有 $v \in L_j$,

$$\int_{V_{j,\delta}} e^{b\alpha|x-A_j|}\Big(\frac{1}{\alpha^2}|\nabla v|^2 + |v|^2\Big)\mathrm{d}x \le B\|v\|^2_{L^2(V_{j,\delta})}.$$

因此,

$$\begin{aligned}\int_{V_{j,\delta}\setminus\overline{V_{j,a\delta}}}\Big(\frac{1}{\alpha^2}|\nabla v|^2 + |v|^2\Big)\mathrm{d}x &= \int_{V_{j,\delta}\setminus\overline{V_{j,a\delta}}} e^{-b\alpha|x-A_j|}\cdot e^{b\alpha|x-A_j|}\Big(\frac{1}{\alpha^2}|\nabla v|^2 + |v^*|^2\Big)\mathrm{d}x\\ &\le e^{-b\alpha a_0\delta}\int_{V_{j,\delta}\setminus\overline{V_{j,a\delta}}} e^{b\alpha|x-A_j|}\Big(\frac{1}{\alpha^2}|\nabla v|^2 + |v^*|^2\Big)\mathrm{d}x\\ &\le e^{-b\alpha a_0\delta}\int_{V_{j,\delta}} e^{b\alpha|x-A_j|}\Big(\frac{1}{\alpha^2}|\nabla v|^2 + |v^*|^2\Big)\mathrm{d}x \le Be^{-b\alpha a_0\delta}\|v\|^2_{L^2(V_{j,\delta})}.\end{aligned}$$

令 $c := (ba_0)/2$，则可得

$$\int_{V_{j,\delta}\setminus\overline{V_{j,a\delta}}}\Big(\frac{1}{\alpha^2}|\nabla v|^2 + |v|^2\Big)\mathrm{d}x \le Be^{-2c\alpha\delta}\|v\|^2_{L^2(V_{j,\delta})}.$$

特别地,

$$\|v^* - \chi_\delta v^*\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \le \|v^*\|_{L^2(V_{j,\delta}\setminus\overline{V_{j,a\delta}})} = \|v\|_{L^2(V_{j,\delta}\setminus\overline{V_{j,a\delta}})} \le Be^{-2c\alpha\delta}\|v\|^2_{L^2(V_{j,\delta})} = Be^{-2c\alpha\delta}\|v^*\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Hence,

$$\frac{\|v^* - P_j v^*\|}{\|v^*\|} = \frac{\inf_{u\in\Upsilon_j^\chi}\|v^* - u\|}{\|v*\|} \le \frac{\|v^* - \chi_\delta v^*\|}{\|v^*\|} = \frac{\|(1-\chi_\delta)v^*\|}{\|v^*\|} \le \sqrt{B}e^{-c\alpha\delta},$$

因此

$$d(\Upsilon_j, \Upsilon_j^\chi) = \sup_{0\neq v^*\in\Lambda_j}\frac{\|v^* - P_j v^*\|}{\|v^*\|} \le \sqrt{B}e^{-c\alpha\delta}. \tag{7.8}$$

现在我们转而估计 $d(\Upsilon_j^\chi, L)$。令 $\psi_1, \cdots \psi_{\kappa(\theta_j)}$ 表示与 $E_1, \ldots, E_{\kappa(\theta_j)}$相关的 $N_j^{V\tilde{}}$ 的前 $\kappa(\theta_j)$ 个特征函数。对 $n = 1, \ldots, \kappa(\theta_j)$，定义 $\psi_n := \chi_\delta\psi_n$。由于 ψ_n是N_j^V的一个特征函数，我们有

$$-\Delta\psi_n = E_n\psi_n \ \text{ in } V_{j,\delta}, \quad \alpha(\partial_\nu\psi_n^+ - \partial_\nu\psi_n^-) = \frac{1}{2}\big(\psi_n^+ + \psi_n^-\big) \ \text{ on } \Gamma\cap V_{j,\delta},$$

其中 ∂_ν 是法向导数，并且回忆一下，$\psi_n^\pm$ 表示 ψ_n 在 $\Omega_\pm$上的限制。由于 χ_δ是光滑的，且其支集包含于 $V_{j,\delta}$，我们有 $\tilde{\psi_n} \in H^1(\mathbb{R}^2)$。此外，我们有

$$\Delta\tilde{\psi_n} = \Delta\chi_\delta\cdot\psi_n + 2\nabla\chi_\delta\cdot\nabla\psi_n + E_n\chi_\delta\psi_n \in L^2(\mathbb{R}^2),$$

并且由于 $\partial_\nu\chi_\delta$ 在 Γ上消失,

$$\alpha\big(\partial_\nu(\tilde{\psi_n})^+ - \partial_\nu(\tilde{\psi_n})^-\big) = \alpha\left(\partial_\nu\chi_\delta\psi_n^+ + \partial_\nu\psi_n^+\chi_\delta - \chi_\delta\partial_\nu\psi_n^- - \chi_\delta\partial_\nu\psi_n^-\right) = \frac{1}{2}(\tilde{\psi_n^+} + \tilde{\psi_n^-})$$

在 $\Gamma\cap V_{j,\delta}$上成立。因此，$\tilde{\psi_n} \in D(H_\alpha^\Gamma)$，且容易证明 $\tilde{\psi}_1, \ldots, \tilde{\psi}_{\kappa(\theta_j)}$ 线性无关。于是，由命题 2.4 可得

$$d(\Upsilon_j^\chi, L) \le \frac{\varepsilon}{\eta}\sqrt{\frac{\kappa(\theta_j)}{\lambda}} \text{ with } \varepsilon = \max_n\|(H_\alpha^\Gamma - E_n)\tilde{\psi}_n\|,\ \eta = \frac{1}{2}\mathrm{dist}(I, \mathrm{spec}(H_\alpha^\Gamma)\setminus I),$$

其中 I为包含 $E_1, \ldots, E_{\kappa(\theta_j)}$ 的一个区间，且

$$\lambda = \text{the smallest eigenvalue of the Gram matrix } (\langle\tilde{\psi}_k, \tilde{\psi}_l\rangle)_{k,l}.$$

现在我们将构造一个合适的 I 并估计 ε、λ 和 η。我们首先估计 ε。为此，我们计算 $(H_\alpha^\Gamma - E_n)\,\tilde{\psi}_n = -(\Delta\chi_\delta)\psi_n - 2\langle\nabla\chi_\delta, \nabla\psi_n\rangle$ 的范数。由于 $\nabla\chi_\delta$ 和 $\Delta\chi_\delta$ 的支集位于 $V_{j,A\delta}\setminus V_{j,a\delta}$ 中，根据 Agmon 估计，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^2} |(\Delta\chi_\delta)\psi_n|^2 \mathrm{d}x \le \frac{C_0^2}{\delta^4}\int_{V_{j,b\delta}\setminus\overline{V_{j,a\delta}}} |\psi_n|^2 \mathrm{d}x \le \frac{BC_0^2}{\delta^4} e^{-2c\alpha\delta}\|\psi_n\|^2_{L^2(V_{j,\delta})} = \frac{BC_0^2}{\delta^4}e^{-2c\alpha\delta};$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\chi_\delta\cdot\nabla\psi_n|^2 \mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\chi_\delta|^2|\nabla\psi_n|^2 \mathrm{d}x \le \frac{C_0^2}{\delta^2}\int_{V_{j,A\delta}\setminus\overline{V_{j,a\delta}}} |\nabla\psi_n|^2 \mathrm{d}x \le \frac{BC_0^2\alpha^2}{\delta^2}e^{-2c\alpha\delta}.$$

由于当 $\alpha\to\infty$ 时 $1/\delta^2 = o(\alpha/\delta)$，可推出 $\varepsilon = \|(H_\alpha^\Gamma - E_n)\,\tilde{\psi}_n\|_{L^2} = \mathcal{O}(\frac{\alpha}{\delta}e^{-c\alpha\delta})$。

现在让我们估计 Gram 矩阵的最小特征值：

$$\begin{aligned}|\langle\tilde{\psi}_k,\tilde{\psi}_n\rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} - \langle\psi_k,\psi_n\rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)}| &= \left|\int_{\mathbb{R}^2}(\chi_\delta^2 - 1)\psi_k\psi_n \mathrm{d}x\right| \le \int_{V_{j,A\delta}\setminus\overline{V_{j,a\delta}}} |\psi_k\psi_n|\mathrm{d}x \\ &\le \frac{1}{2}\left(\int_{V_{j,A\delta}\setminus\overline{V_{j,a\delta}}} |\psi_k|^2\mathrm{d}x + \int_{V_{j,A\delta}\setminus\overline{V_{j,a\delta}}} |\psi_n|^2\mathrm{d}x\right) \le Be^{-2c\alpha\delta}.\end{aligned}$$

这意味着 $\langle\tilde{\psi}_k,\ \tilde{\psi}_n\rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \delta_{k,\ n} + \mathcal{O}(e^{-2c\alpha\delta})$。根据标准的扰动论证，最低特征值满足 $\lambda = 1 + \mathcal{O}(e^{-2c\alpha\delta})$，从而保证 $\tilde{\psi}_1$，……，$\tilde{\psi}_{\kappa(\theta)}$ 线性无关。

最后，选取区间 $I := (\alpha^2(\mathcal{E}_1 - h),\ \alpha^2(\mathcal{E}_\mathcal{K} + h))$，其中 $h := (-1/4 - \mathcal{E}_\mathcal{K})/2$ 以及 $\mathcal{E}_1$，……，$\mathcal{E}_\mathcal{K}$ 如引理 7.3 中所示。于是，$\{E_1,\dots,E_{\kappa(\theta)}\}\subset I$，且引理 7.3 保证 $\eta \ge (h\alpha^2)/8$。综合这些估计，我们得到

$$d(\Upsilon_j^\chi, L) \le \frac{\varepsilon}{\eta}\sqrt{\frac{\kappa(\theta_j)}{\lambda}} \le \frac{8\mathcal{O}(\frac{\alpha}{\delta}e^{-2c\alpha\delta})}{\alpha^2 h}\cdot\sqrt{\frac{\kappa(\theta_j)}{1+\mathcal{O}(e^{-2c\alpha\delta})}} = \mathcal{O}(\frac{e^{-2c\alpha\delta}}{\alpha\delta}).$$

结合 (7.8) 和 (7.7)，即可得到所需结果，并完成证明。 □

借助引理 7.5，我们现在可以推导出与推论 5.13 中所述类似的范数估计和迹估计。

引理 7.6。设 $u\in H^1(\mathbb{R}^2)$ 满足 $u\perp L$。则存在 $b, c>0$，使得在渐近区域 (7.4) 下，对任意 $j\in\{1,\dots,M\}$，以下估计成立：

$$\|\sigma_j u\|^2_{L^2(V_{j,\delta})} \le b\delta^2(n_j^V(\sigma_j u) + \frac{\alpha^2}{4}\|\sigma_j u\|^2_{L^2(V_{j,\delta})}) + b\alpha^2\delta^2 e^{-c\alpha\delta}\|u\|^2_{L^2};$$

$$\int_{\partial_* V_{j,\delta}} |\sigma_j u|^2\,\mathrm{dS} \le b\alpha\delta^2(n_j^V(\sigma_j u) + \frac{\alpha^2}{4}\|\sigma_j u\|^2_{L^2(V_{j,\delta})}) + b\alpha^3\delta^2 e^{-c\alpha\delta}\|u\|^2_{L^2}.$$

证明。考虑正交投影算子 $P\colon L^2(\mathbb{R}^2)\to L$, $P_j\colon L^2(V_{j,\delta})\to L_j$，并对 $u\perp L$ 令

$$v = \sigma_j u\in L^2(V_{j,\delta}),\quad v_P = P_j v\in L^2(V_{j,\delta}),\quad v_0 = v - v_P = (1-P_j)v\in L^2(V_{j,\delta}).$$

我们的目标是通过拆分 $\|v\|^2 = \|v_P\|^2 + \|v_0\|^2$ 来估计 v 的范数。由于 v_0 与 L_j 正交，利用推论 5.13 可以得到 $\|v_0\|$ 的一个上界。为了估计 $\|v_P\|$，我们利用 $u = (1-P)u$，于是

$$\|v_P\|_{L^2(V_{j,\delta})} = \|\sigma_j^* P_j v\|_{L^2(R^2)} = \|\sigma_j^* P_j\sigma_j(1-P)u\|_{L^2(V_{0j,\delta})} \le \|\sigma_j^* P_j\sigma_j(1-P)\|\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \tag{7.9}$$

注意，$\sigma_j^* P_j\sigma_j\colon\ L^2(\mathbb{R}^2)\to\sigma_j^* L_j$ 是到 $\sigma_j^* L_j$ 的正交投影算子。利用引理 7.5，存在 $c>0$ 使得

$$\|\sigma_j^* P_j\sigma_j(1-P)\| = \|\sigma_j^* P_j\sigma_j - \sigma_j^* P_j\sigma_j P)\| = d(\sigma_j^* L_j, L_j) = \mathcal{O}(e^{-\frac{c}{2}\alpha\delta}).$$

将此结果与 (7.9) 结合，对于某个 $b_0>0$，有 $\|v_P\|^2_{L^2(V_{j,\ \delta})} \le b_0 e^{-c\alpha\delta}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}$。因此，由推论 5.13，也存在 $b_1>0$ 使得

$$\|v\|^2 = \|v_0\|^2 + \|v_P\|^2 \le b_1\delta^2(n_j^V(v_0) + \frac{\alpha^2}{4}\|v_0\|) + b_0^2 e^{-2c\alpha\delta}\|u\|^2. \tag{7.10}$$

为估计 $n_j^V(v_0)$，回想一下，由于 P_j 是 N_j^V 的谱投影算子，我们有 $n_j^V(v) = n_j^V(v_0) + n_j^V(v_p)$。此外，由于 $v_P\in L_j$，我们有

$$E_1(N_j^V)\|v_P\|^2_{L^2()V_{j,\delta}} \le n_j^V(v_P) \le E_{\kappa(\theta_j)}(N_j^V)\|v_P\|^2_{L^2(V_{j,\delta})}.$$

根据引理 7.2，特征值满足 $E_n(N_j^V) = \mathcal{O}(\alpha^2)$。因此，对于某个 $b_2 > 0$,

$$|n_j^V(v_P)| \le b_2\alpha^2 e^{-2c\alpha\delta}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)},$$

这意味着

$$n_j^V(v_0) \le n_j^V(v) + b_2\alpha^2 e^{-2c\alpha\delta}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \tag{7.11}$$

将 (7.11) 代入 (7.10)，得:

$$\begin{aligned}\|v\|^2_{L^2(V_{j,\delta})} &\le b_1\delta^2(n_j^V(v) + \frac{\alpha^2}{4}\|v_0\|^2_{L^2(V_{j,\delta})}) + (b_2b_1\alpha^2\delta^2 e^{-2c\alpha\delta} + b_0^2 e^{-2c\alpha\delta})\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\\ &\le b_1\delta^2(n_j^V(v) + \frac{\alpha^2}{4}\|v\|^2_{L^2(V_{j,\delta})}) + b_0\alpha^2\delta^2 e^{-2c\alpha\delta}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\end{aligned}$$

由此得到所声称的第一个估计

对于第二个估计，注意到

$$\int_{\partial_* V_{j,\delta}} |v|^2\,\mathrm{dS} = \int_{\partial_* V_{j,\delta}} |v_p + v_0|^2 \le 2\int_{\partial_* V_{j,\delta}} |v_P|^2\,\mathrm{dS} + 2\int_{\partial_* V_{j,\delta}} |v_0|^2\,\mathrm{dS}.$$

利用推论 5.13 和估计 (7.11)，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\partial_* V_{j,\delta}} |v_0|^2\,\mathrm{dS} &\le b_1\alpha\delta^2(n_j^V(v_0) + \frac{\alpha^2}{4}\|v_0\|^2_{L^2(V_{j,\delta})})\\ &\le b_1\alpha\delta^2(n_j^V(v) + \frac{\alpha^2}{4}\|v\|^2_{L^2(V_{j,\delta})}) + b_1b_2\alpha^3\delta^2 e^{-2c\alpha\delta}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\end{aligned}$$

对于涉及 v_P 的积分，根据引理 5.11，存在 $b_3 > 0$ 使得

$$n_j^V(v_P) - \alpha\int_{\partial_* V_{j,\delta}} |v_P|^2\,\mathrm{dS} = \int_{V_{j,\delta}} |\nabla v_P|^2\mathrm{d}x - \alpha\int_{\Gamma\cap V_{j,\delta}} |v_P|^2\,\mathrm{dS} = r_j^V(v_P) \ge -b_3\alpha^2\|v_P\|^2_{L^2(V_{j,\delta})}.$$

应用 推论 5.13 以及关于 $\|v_P\|^2$ 和 n_j^V（v_P）的先前估计可得，对于某个 $b_4 > 0$ ，

$$\int_{\partial_* V_{j,\delta}} |v_P|^2\,\mathrm{dS} \le \frac{1}{\alpha}(n_j^V(v_P) + b_3\alpha^2\|v_P\|^2_{L^2(V_{j,\delta})}) \le b_4\alpha e^{-2c\alpha\delta}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

综合以上估计，即完成了该引理的证明。 □

由命题 7.4，我们只需证明以下命题，即可完成定理 1.2 的证明 n.

命题 7.7。 对于任意固定的 $n \in \mathbb{N}$，在渐近区域 *7.4* 下，有

$$\Lambda_{\mathcal{K}+n}(H_\alpha^\Gamma) \ge -\frac{\alpha^2}{4} + E_n\big(\bigoplus_{j=1}^M (D_j - \frac{k_j^2}{4})\big) + \mathcal{O}\left(\frac{\log\alpha}{\sqrt{\alpha}}\right).$$

*P*屋顶。令 $n \in \mathbb{N}$。主要思路是对作如下选择的 $n \in \mathbb{N}$ 应用命题 2.2 s:

$$\begin{aligned}&\mathcal{H} := L^\perp \text{ in } L^2(\mathbb{R}^2), \quad \mathcal{H}' := \bigoplus_{j=1}^M L^2(I_{j,\delta}),\\ &B := H_\alpha^\Gamma + \frac{\alpha^2}{4} + A_0\frac{\log\alpha}{\alpha} \quad \text{with} \quad D(b) = H^1(\mathbb{R}^2)\cap\mathcal{H},\\ &B' = \bigoplus_{j=1}^M (D_{j,\delta} - \frac{k_j^2}{4}) \quad \text{with} \quad D(b') = \bigoplus_{j=1}^M H_0^1(I_{j,\delta}),\end{aligned}$$

其中 $A_0 > 0$ 是一个稍后确定的常数。我们还构造了一个合适的线性映射 $J : D(B) \mapsto D(B')$ 和 ε_1, $\varepsilon_2 > 0$ 使其满足以下条件:

(A) $B \ge -\frac{k_{max}^2}{4}$和 $\Lambda_n(B) = \mathcal{O}(1)$，当 $\alpha \to \infty$ 时，其中 $k_{max} = \max(\|k_1\|_\infty, \ldots,$ $\|k_M\|_\infty)$; (B) $\varepsilon_1 < 1/(1 + \Lambda_n(B) + \frac{k_{max}^2}{4})$; (C) 对所有 $u \in D(B)$, $\|u\|^2 - \|Ju\|^2 \le \varepsilon_1$ $(b(u) + \|u\|^2(1 + \frac{k_{max}^2}{4}))$; (D) 对所有 $u \in D(B)$, $b'(Ju) - b(u) \le \varepsilon_2(b(u) + \|u\|^2($ $1 + \frac{k_{max}^2}{4}))$。

——

由此可得

$$E_n(B') \le \Lambda_n(B) + \frac{(\varepsilon_1\Lambda_n(B)+\varepsilon_2)(\Lambda_n(B)+1+\frac{k_{max}^2}{4})}{1-\varepsilon_1(\Lambda_n(B)+1+\frac{k_{max}^2}{4})}.$$

确保 ε_1, $\varepsilon_2 = \mathcal{O}\big(\frac{\log\alpha}{\sqrt{\alpha}}\big)$ 结合引理 6.3 可得

$$\Lambda_{\mathcal{K}+n}(H_\alpha^\Gamma) = \Lambda_n(B) - \frac{\alpha^2}{4} + \mathcal{O}\left(\frac{\log\alpha}{\alpha}\right) \ge -\frac{\alpha^2}{4} + E_n(\bigoplus_{j=1}^M (D_j - \frac{k_j^2}{4})) + \mathcal{O}\left(\frac{\log\alpha}{\sqrt{\alpha}}\right).$$

为构造 J 并找到合适的 ε_1 和 ε_2，对于任意 $u \in \mathcal{H}$，记该限制为:

$$\begin{aligned} v_j &:= \text{restriction of } u \text{ onto } V_{j,\delta}, \quad \|v_j\| := \|v_j\|_{L^2(V_{j,\delta})}, \\ w_j &:= \text{restriction of } u \text{ onto } W_{j,\delta}, \quad \|w_j\| := \|w_j\|_{L^2(W_{j,\delta})} \\ u_* &:= \text{restriction of } u \text{ onto } \Omega_\delta^*, \quad \|u_*\| := \|u_*\|_{L^2(\Omega_\delta^*)}. \end{aligned}$$

我们首先验证（A）。利用 B的二次型,

$$b(u) = \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \alpha\int_\Gamma |u|^2\,\mathrm{dS} + \frac{\alpha^2}{4}\int_{\mathbb{R}^2}|u|^2\mathrm{d}x + A_0\frac{\log\alpha}{\alpha}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2,$$

我们将其拆分为

$$b(u) \ge \sum_{j=1}^M (n_j^V(v_j) + \frac{\alpha^2}{4}\|v_j\|^2) + \sum_{j=1}^M (n_j^W(w_j) + \frac{\alpha^2}{4}\|w_j\|^2) + \frac{\alpha^2}{4}\|u_*\|^2 + A_0\frac{\log\alpha}{\alpha}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2, \tag{7.12}$$

其中， n_j^V和 n_j^W分别是定义在 $V_{j,\ \delta}$ 和 $W_{j,\ \delta}$ 上的 Neumann 型。我们首先估计含有 v_j的项。利用引理 7.6，存在 a_0, $c>0$，使得关于v_j 的适当范数估计和迹估计成立。在带有常数 $C \ge 3/c$的渐近区域（7.4）下，这些估计可简化为

$$\begin{aligned} \|v_j\|^2 &\le a_0\frac{\log^2\alpha}{\alpha^2}(n_j^V(v_j) + \frac{\alpha^2}{4}\|v_j\|^2) + a_0\frac{\log^3\alpha}{\alpha^3}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2, \\ \int_{\partial_* V_{j,\delta}} |v_j|^2\,\mathrm{dS} &\le a_0\frac{\log^2\alpha}{\alpha}(n_j^V(v_j) + \frac{\alpha^2}{4}\|v_j\|^2) + a_0\frac{\log^3}{\alpha^2}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2. \end{aligned}$$

由此可得，对每个 $j \in \{1,\dots M\}$,

$$n_j^V(v_j) + \frac{\alpha^2}{4}\|v_j\|^2 \ge \frac{1}{2a_0}\left(\frac{\alpha^2}{\log^2\alpha}\|v_j\|^2 + \frac{\alpha}{\log^2\alpha}\int_{\partial_* V_{j,\delta}}|v_j|^2\,\mathrm{dS}\right) - \frac{\log\alpha}{\alpha}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2. \tag{7.13}$$

接下来，利用引理 6.5 估计 w_j 项。存在 $a_N, \beta > 0$，使得

$$n_j^W(w_j) \ge (1 - a_N\frac{\log\alpha}{\alpha})\|P_j u'\|^2 + \int_{I_{j,\delta}}(-\frac{\alpha^2}{4} - \frac{k_j^2}{4})|P_j u|^2\,\mathrm{dS} - a_N\frac{1+C\log\alpha}{\alpha}\|P_j u\|^2,$$

其中 P_j： $\mathcal{H} \to L^2(I_{j,\delta})$ 定义为

$$(P_j u)(s) = \int_{-\delta}^{\delta} \overline{\psi(t)} w_j(\phi_j(s,t))\sqrt{1-tk_j(s)}\mathrm{d}t,$$

其中 $\psi \in H^1(-\delta,\delta)$ 是与 $T_\delta^{\beta,\alpha}$ 的第一特征值对应的归一化特征函数， $T_\delta^{\beta,\alpha}$在定义 2.8 中定义。应用柯西-施瓦茨不等式并利用 ψ 的归一化条件，可得

$$\|P_j u\|^2 = \int_{I_{j,\delta}}\left|\int_{-\delta}^{\delta}\overline{\psi(t)}w_j(\phi_j(s,t))\sqrt{1-tk_j(s)}\ \mathrm{d}t\right|^2\mathrm{d}s \le \int_{W_{j,\delta}}|w_j|^2\mathrm{d}x = \|w_j\|^2.$$

因此,

$$\begin{aligned} n_j^W(w_j) + \frac{\alpha^2}{4} \ge& (1 - a_N\frac{\log\alpha}{\alpha})\|P_j u'\|^2 + \frac{\alpha^2}{4}(\|w_j\|^2 - \|P_j\|^2) \\ &- \int_{I_{j,\delta}}\frac{k_j^2}{4}|P_j u|^2\,\mathrm{dS} - a_N\frac{(C+1)\log\alpha}{\alpha}\|w_j\|^2. \end{aligned} \tag{7.14}$$

将（7.14）和（7.13）代入（7.12），并取 $A_0 := M + (C+1)a_N$，可得

$$\begin{aligned} b(u) \geq \frac{\alpha^2}{2a_0 \log^2 \alpha} \sum_{j=1}^{M} \|v_j\|^2 + \frac{\alpha}{2a_0 \log^2 \alpha} \sum_{j=1}^{M} \int_{\partial_* V_{j,\delta}} |v_j|^2 \,\mathrm{dS} + (1 - a_N \frac{\log \alpha}{\alpha}) \sum_{j=1}^{M} \|P_j u'\|^2 \\ + \frac{\alpha^2}{4} \sum_{j=1}^{M} (\|w_j\|^2 - \|P_j u\|^2) - \sum_{j=1}^{M} \int_{I_{j,\delta}} \frac{k_j^2}{4} |P_j u|^2 \,\mathrm{dS} + \frac{\alpha^2}{4} \|u_*\|^2. \end{aligned} \tag{7.15}$$

由于

$$-\sum_{j=1}^{M} \int_{I_{j,\delta}} \frac{k_j^2}{4} |P_j u|^2 \,\mathrm{dS} \geq -\sum_{j=1}^{M} \frac{\|k_j\|_\infty^2}{4} \|P_j\|^2 \geq -\frac{k_{max}^2}{4} \sum_{j=1}^{M} \|w_j\|^2 \geq -\frac{k_{max}^2}{4} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2, \tag{7.16}$$

我们得出 $B \geq -\frac{k_{max}^2}{4}$，从而证明了 (A) 的第一部分。结合命题 7.4，可得当 $\alpha \to \infty$ 时，$\Lambda_n(B) = \mathcal{O}(1)$。也就是说，我们可以选取一个与 α 无关的 $\lambda_n \in \mathbb{R}$，使得

$$-\frac{k_{max}^2}{4} \leq \Lambda_n(B) \leq \lambda_n, \quad \frac{1}{1 + \Lambda_n(B) + \frac{k_{max}^2}{4}} \geq \frac{1}{1 + \lambda_n + \frac{k_{max}^2}{4}},$$

由此完成了 (A) 的证明。注意，一旦我们证明 $\varepsilon_1 = \mathcal{O}(\frac{1}{\alpha \log \alpha})$，这也意味着 (B) 成立。

现在我们来构造线性映射 J。设 $\chi_j^0, \chi_j^l \in C^1([0, l_j])$ 满足

$$\chi_j^l(s) = \begin{cases} 1, & s \text{ near } 0, \\ 0, & s \text{ near } l_j. \end{cases}, \quad \chi_j^0 = 1 - \chi_j^l,$$

并固定 $\chi_0 > 0$ 使得

$$\|\chi_j^{l/0}\|_\infty + \|(\chi_j^{l/0})'\|_\infty \leq \chi_0, \quad \text{for all } j = 1, \ldots, M.$$

回顾 $I_{j,\delta} = (\lambda_j^0(\delta), l_j - \lambda_j^l(\delta)) =: (\tau_j^0, \tau_j^l)$，以及 $\tau_j^0 = \mathcal{O}(\delta)$、$\tau_j^l = l_j - \mathcal{O}(\delta)$，并相应地在端点处求值：

$$\chi_j^l(\tau_j^0) = 1, \quad \chi_j^l(\tau_j^0) = 0, \quad \chi_j^0(\tau_j^1) = 0, \quad \chi_j^0(\tau_j^l) = 1,$$

当 α 足够大时。定义线性映射 $J: D(B) \to D(B')$，$Ju = (J_j u)$，其中

$$(J_j u)(s) := (P_j u)(s) - (P_j u)(\tau_j^0)\chi_j^0(s) - (P_j u)(\tau_j^l)\chi_j^l(s).$$

在证明 (B)-(D) 之前，我们先给出一些有用的估计。利用柯西-施瓦茨不等式和 ψ_j 的性质，我们得到

$$\begin{aligned} |P_j u(\tau_j^0)|^2 + |P_j u(\tau_j^l)|^2 &= \left(\int_{-\delta}^{\delta} \overline{\psi_j} \sqrt{1 - t k_j(s)} w_j(\phi_j(\tau_j^0, t)) \mathrm{d}t \right)^2 \\ &\quad + \left(\int_{-\delta}^{\delta} \overline{\psi_j} \sqrt{1 - t k_j(s)} w_j(\phi_j(\tau_j^l, t)) \mathrm{d}t \right)^2 \\ &\leq \int_{-\delta}^{\delta} |w_j(\phi_j(\tau_j^0, t))|^2 (1 - t k_j(s)) \mathrm{d}t + \int_{-\delta}^{\delta} |w_j(\phi_j(\tau_j^l, t))|^2 (1 - t k_j(s)) \mathrm{d}t \\ &\leq 2 \left(\int_{-\delta}^{\delta} |w_j(\phi_j(\tau_j^0, t))|^2 + \int_{-\delta}^{\delta} |w_j(\phi(\tau_j^l, t))|^2 \right) = 2 \int_{\partial_* W_{j,\delta}} |w_j|^2 \,\mathrm{dS}. \end{aligned} \tag{7.17}$$

利用不等式 $(x+y)^2 \geq (1-\varepsilon)x^2 + y^2/\varepsilon$（其中某个 $\varepsilon > 0$），可得

$$\begin{aligned} \|J_j u\|^2 &= \int_{I_{j,\delta}} |P_j u(s) - (P_j u)(\tau_j^0)\chi_j^0(s) - (P_j u)(\tau_j^l)\chi_j^l(s)|^2 \mathrm{d}s \\ &\geq (1 - \varepsilon) \int_{I_{j,\delta}} |P_j u|^2 \mathrm{d}s - \frac{1}{\varepsilon} \int_{I_{j,\delta}} |(P_j u)(\tau_j^0)\chi_j^0(s) + (P_j u)(\tau_j^l)\chi_j^l(s)|^2 \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

利用 7.17 可得

$$\int_{I_{j,\delta}} |(P_j u)(\tau_j^0)\chi_j^0(s) + (P_j u)(\tau_j^l)\chi_j^l(s)|^2 \mathrm{d}s \le 2\int_{I_{j,\delta}} |(P_j u)(\tau_j^0)\chi_j^0(s)|^2 + |(P_j u)(\tau_j^l)\chi_j^l(s)|^2$$
$$\le 2l_j\chi_0^2(|P_j u(\tau_j^0)|^2 + |P_j u(\tau_k^l)|^2) \le 4l_j\chi_0^2 \int_{\partial_* W_{j,\delta}} |w_j|^2 \mathrm{d}s.$$

因此，取 $l = \max_j l_j$ 可得

$$\|J_j u\|^2 \ge (1-\varepsilon)\|P_j u\|^2 - \frac{4l\chi_0^2}{\varepsilon}\int_{\partial_* W_{j,\delta}} |w_j|^2 \mathrm{d}s.$$

现在我们可以验证 (C)，并完成 (B) 的证明。注意,

$$\begin{aligned}\|u\|^2 - \|Ju\|^2 &= \sum_{j=1}^M \|v_j\|^2 + \sum_{j=1}^M \|w_j\|^2 + \|u_*\|^2 - \sum_{j=1}^M \|J_j u\|^2 \\ &\le \sum_{j=1}^M \|v_j\|^2 + \sum_{j=1}^M \|w_j\|^2 + \|u_*\|^2 - (1-\varepsilon)\sum_{j=1}^M \|P_j u\|^2 + \frac{4l\chi_0}{\varepsilon}\sum_{j=1}^M \int_{\partial_* W_{j,\delta}} |w_j|^2 \mathrm{d}s \\ &\le \sum_{j=1}^M \|v_j\|^2 + \sum_{j=1}^M (\|w_j\|^2 - \|P_j u\|^2) + \|u_*\|^2 + \frac{4l\chi_0}{\varepsilon}\sum_{j=1}^M \int_{\partial_* V_{j,\delta}} |v_j|^2 \mathrm{d}s + \varepsilon\|u\|^2.\end{aligned}$$

将此结果与 (7.15) 和 (7.16) 结合，可得

$$\|u\|^2 - \|Ju\|^2 \le \left(\frac{2a_0\log^2\alpha}{\alpha^2} + \frac{4}{\alpha^2} + \frac{8l\chi_0^2 a_0\log^2\alpha}{\alpha\varepsilon}\right)\left(b(u) + \frac{k_{max}^2}{4}\right) + \varepsilon\|u\|^2.$$

取 $\varepsilon = \log_{\sqrt{\alpha}}^{\alpha}$, 可得一个常数 $c_1 > 0$，使得

$$\|u\|^2 - \|Ju\|^2 \le \frac{c_1\log\alpha}{\sqrt{\alpha}}\left(b(u) + (1 + \frac{k_{max}^2}{4})\|u\|^2,\right)$$

这就证明了 (B) 和 (C)，其中 $\varepsilon_1 := c_1\varepsilon = \mathcal{O}(\frac{\log\alpha}{\sqrt{\alpha}})$。

现在我们来验证 (D)。我们来估计 $b'(Ju)$。利用不等式 $(x+y)^2 \le (1+\varepsilon)x^2 + 2\frac{y^2}{\varepsilon}$，对于任意 x， $y \in \mathbb{R}$ 和 $\varepsilon \in (0,\ 1)$:

$$\begin{aligned}\|(J_j u)'\|^2 &= \int_{I_{j,\delta}} |(P_j u)'(s) - P_j u(\tau_j^0)(\chi_j^0)'(s) - P_j u(\tau_k^l)(\chi_j^l)'(s)|^2 \mathrm{d}s \\ &\le (1+\varepsilon)\int_{I_{j,\delta}} |(P_j u)'(s)|^2 \mathrm{d}s + \frac{2}{\varepsilon}\int_{I_{j,\delta}} |P_j u(\tau_j^0)(\chi_j^0)'(s) + P_j u(\tau_k^l)(\chi_j^l)'(s)|^2 \mathrm{d}s\end{aligned}$$

通过与之前相同的论证，我们有

$$\int_{I_{j,\delta}} |P_j u(\tau_j^0)(\chi_j^0)'(s) + P_j u(\tau_k^l)(\chi_j^l)'(s)|^2 \mathrm{d}s \le 2\int_{I_{j,\delta}} |P_j u(\tau_j^0)(\chi_j^0)'(s)|^2 + |P_j u(\tau_k^l)(\chi_j^l)'(s)|^2 \mathrm{d}s$$
$$\le 2l_j\chi_0 2\left(|P_j u(\tau_j^0)|^2 + |P_j u(\tau_j^l)|^2\right) \le 4l\chi_0^2 \int_{\partial_* W_{j,\delta}} |w_j|^2 \mathrm{d}s.$$

为了估计 $b'(Ju)$ 的剩余部分，我们对 x， $y \in \mathbb{R}$和 $\varepsilon > 0$ 使用恒等式 $(x+y)^2 \ge (1-\varepsilon)x^2 - \frac{1}{\varepsilon}y^2$,

$$\begin{aligned}\int_{I_{j,\delta}} \frac{k_j^2(s)}{4}|J_j u|^2 \mathrm{d}s &\ge (1-\varepsilon)\int_{I_{j,\delta}} \frac{k_j^2(s)}{4}|P_j u|^2 \mathrm{d}s - \frac{1}{\varepsilon}\int_{I_{j,\delta}} \frac{k_j^2(s)}{4}|P_j u(\tau_j^0)(\chi_j^0)'(s) + P_j u(\tau_k^l)(\chi_j^l)'(s)|^2 \mathrm{d}s \\ &\ge (1-\varepsilon)\int_{I_{j,\delta}} \frac{k_j^2(s)}{4}|P_j u|^2 \mathrm{d}s - \frac{\|k_j\|_\infty^2}{4\varepsilon}\int_{I_{j,\delta}} |P_j u(\tau_j^0)(\chi_j^0)'(s) + P_j u(\tau_k^l)(\chi_j^l)'(s)|^2 \mathrm{d}s \\ &\ge (1-\varepsilon)\int_{I_{j,\delta}} \frac{k_j^2(s)}{4}|P_j u|^2 \mathrm{d}s - \frac{l\chi_0^2 k_{max}^2}{\varepsilon}\int_{\partial_* W_{j,\delta}} |w_j|^2 \,\mathrm{dS}\,.\end{aligned}$$

总之，我们得到关于 B 和 B'的以下不等式:

$$b'(Ju) \le (1+\varepsilon)\sum_{j=1}^{M}\|(P_ju)'\|^2 + \frac{(8+k_{max}^2)l\chi_0^2}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{M}\int_{\partial_* W_{j,\delta}}|w_j|^2\,\mathrm{dS} - (1-\varepsilon)\sum_{j=1}^{M}\int_{I_{j,\delta}}\frac{k_j(s)}{4}|P_ju|^2\mathrm{d}s;$$

$$b(u) + \frac{k_{max}^2}{4}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \ge \big(1 - a_N\frac{\log\alpha}{\alpha}\big)\sum_{j=1}^{M}\|P_ju'\|^2 + \frac{\alpha}{2a_0\log^2\alpha}\sum_{j=1}^{M}\int_{W_{j,\delta}}|w_j|^2\,\mathrm{dS};$$

$$b(u) \ge \big(1 - a_N\frac{\log\alpha}{\alpha}\big)\sum_{j=1}^{M}\|P_ju'\|^2 + \frac{\alpha}{2a_0\log^2\alpha}\sum_{j=1}^{M}\int_{W_{j,\delta}}|w_j|^2\,\mathrm{dS} - \sum_{j=1}^{M}\int_{I_{j,\delta}}\frac{k_j^2(s)}{4}|P_ju|^2\mathrm{d}s.$$

因此,

$$\begin{aligned}
b'(Ju) - b(u) &\le (1+\varepsilon)\sum_{j=1}^{M}\|(P_ju)'\|^2 + \frac{(8+k_{max}^2)l\chi_0^2}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{M}\int_{\partial_* W_{j,\delta}}|w_j|^2\,\mathrm{dS} + \sum_{j=1}^{M}\int_{I_{j,\delta}}\frac{k_j^2(s)}{4}|P_ju|^2\mathrm{d}s \\
&\quad - (1-\varepsilon)\sum_{j=1}^{M}\int_{I_{j,\delta}}\frac{k_j^2(s)}{4}|P_ju|^2\mathrm{d}s - \Big(1 - a_N\frac{\log\alpha}{\alpha}\Big)\sum_{j=1}^{M}\|P_ju'\|^2 \\
&\le \Big(\varepsilon + a_N\frac{\log\alpha}{\alpha}\Big)\sum_{j=1}^{M}\|P_ju'\|^2 + \frac{(8+k_{max}^2)l\chi_0^2}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{M}\int_{\partial_* W_{j,\delta}}|w_j|^2\,\mathrm{dS} + \varepsilon\frac{k_{max}^2}{4}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\
&\le \left(\frac{\varepsilon + a_N\frac{\log\alpha}{\alpha}}{1 - a_N\frac{\log\alpha}{\alpha}} + \frac{(8+k_{max}^2)l\chi_0^2}{\varepsilon}\cdot\frac{2a_0\log^2\alpha}{\alpha}\right)\left(b(u) + \frac{k_{max}^2}{4}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2\right) + \varepsilon\frac{k_{max}^2}{4}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2.
\end{aligned}$$

取 $\varepsilon = \log_{\sqrt{\alpha}}\alpha$, 则存在 $c_2 > 0$ 使得

$$b'(Ju) - b(u) \le \frac{c_2\log\alpha}{\sqrt{\alpha}}\left(b(u) + (1 + \frac{k_{max}^2}{4})\|u\|_{L2(\mathbb{R}^2)}^2\right),$$

这就证明了 (D)，其中 $\varepsilon_2 := c_2\log_{\sqrt{\alpha}}\alpha = \mathcal{O}\big(\frac{\log\alpha}{\sqrt{\alpha}}\big)$。 □

Funding

作者声明，在本文的研究、撰写和/或发表过程中获得了以下经费支持：所有作者均获得了德国研究基金会（Deutsche Forschungsgemeinschaft，DFG）项目 491606144 的部分资助。

Conflicting Interests

作者声明，就本文的研究、撰写和/或发表而言，不存在潜在利益冲突。

References

[1] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, H. Holden, 量子力学中的可解模型。附录作者: P. Exner。AMS Chelsea Publishing，美国罗得岛州普罗维登斯，第2版，2005年。[2] J. Behrndt, P. Exner, M. Holzmann, V. Lotoreichik, 支集于超曲面上的薛定谔算子的 ¨近似δ相互作用。《数学新闻》**290** (2017) 1215–1248[3] J. Behrndt, P. Exner, V. Lotoreichik, 支集于圆 ¨锥曲面上的薛定谔算子与 δ相互作用。《物理学杂志A：数学与理论》**47** (2014) 355202。[4] J. Behrndt, M. Holzmann, G. Stenzel, 具有斜向传输条件的薛 ¨定谔算子 $\mathbb{R}^2$。《数学物理通讯》**401** (2023) 3149–3167。[5] B. Benhellal, M. Camarasa, K. Pankrashkin, 关于具有斜向传输条件的 ¨非光滑曲线上的薛定谔算子。《积分方程与算子理论》**97** (2025) 22。[6] J. F. Brasche, P. Exner, Yu. A. Kuperin, P. ˇSeba, 具有奇异相互作用的薛 ¨定谔算子。《数学分析与应用杂志》**184** (1994) 112–139。[7]J. Dittrich, P. Exner, C. K¨uhn, K. Pankrashkin, 关于支集于带边界曲面上的强 δ相互作用的特征值渐近行为。《渐近分析》**97**(2016) 1–25

[8] *V. Duchˆene, N. Raymond*，折断的 δ相互作用的谱渐近行为。《物理学杂志*A*》*47 (2014) 155203*。[9]*P. Exner*，泄漏量子图：综述。见 *P. Exner* 等（编）：图上的分析及其应用（纯数学研讨会论文集，第*77*卷，美国数学学会，美国罗得岛州普罗维登斯，*2008*），第*523–564*页。[10] *P. Exner, S. Kondej*，支集于曲面上的强 δ 相互作用所产生的束缚态。《物理学杂志*A*》*36 (2003) 443–457*。[11] *P. Exner, S. Kondej*，微弯泄漏量子线的能隙渐近。《物理学杂志*A*》*48 (2015) 495301*。[12] *P. Exner, K. N˘emcov´a*，泄漏量子图：用点相互作用哈密顿算符作近似。《物理学杂志*A*》*36 (2003) 10173–10193*。[13] *P. Exner, K. Pankrashkin*，支集于开弧上的奇异薛 ¨定谔算子的强耦合渐近。《偏微分方程通讯》*39 (2014) 193–212*。[14] *P. Exner, O. Post*，类图薄流形的谱收敛。《几何物理学杂志》*54 (2005) 77–115*。[15]*P. Exner, K. Yoshitomi*，环上强 ¨相互作用薛定谔算子的特征值渐近行为。《几何物理学杂志》*41 (2002) 344–358*。[16]*B. Flamencourt, K. Pankrashkin*，支集于带尖点曲线上的 δ相互作用的强耦合渐近。《数学分析与应用杂志》*491 (2020) 124287*。[17] *J. Galkowski*，薄势垒散射中的共振分布。《美国数学会回忆录》，第*259*卷，*2019*年。[18] *B. Helffer, J. Sj¨ ostrand*，半经典极限中的多势阱 *I*。《偏微分方程通讯》*9 (1984) 337–408*。[19] *M. Khalile, T. Ourmi`eres-Bonafos, K. Pankrashkin*，带角点区域中罗宾特征值的有效算子。《傅里叶研究所年刊》*70 (2020) 2215–2301*。[20] *M. Khalile, K. Pankrashkin*，无界扇形区域中的罗宾拉普拉斯算子的特征值。《数学新闻》*291 (2018) 928–965*。[21]*V. Lotoreichik, T. Ourmi`eres-Bonafos*：关于圆 ¨锥曲面上具有 δ相互作用的薛定谔算子的束缚态。《偏微分方程通讯》*41 (2016) 999–1028*。[22] *T. Ourmi`eres-Bonafos, K. Pankrashkin*，集中于圆锥曲面附近的相互作用的离散谱。《应用分析》*97 (2018) 1628–1649*。[23] *T. Ourmi`eres-Bonafos, K. Pankrashkin, F. Pizzichillo*，尖锐圆锥上 δ相互作用的谱渐近行为。《数学分析与应用杂志》*458 (2018) 566–589*。[24] *O. Post*，具有狄利克雷边界条件的分支量子波导：解耦情形。《物理学杂志 *A*：数学与理论》*38 (2005) 4917–4932*。

Technische Universität Hamburg, Institut für Mathematik, Am Schwarzenberg-Campus 3, 21073 Hamburg Germany & National Higher School of Mathematics Scientific and Technology Hub of Sidi Abdellah P.O. Box 75 Algiers 16093 Algeria

,,,,,*Email address*: *badreddine.benhellal@tuhh.de* 和 *badreddine.benhellal@nhsm.edu.dz*

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, Fakultät V – Mathematik und Naturwissenschaften, Institut für Mathematik, 26111 Oldenburg, Germany*Email address*: *noah.koerner@uol.de*

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, Fakultät V – Mathematik und Naturwissenschaften, Institut fr̈ Mathematik, 26111 Oldenburg, Germany*Email address*: *konstantin.pankrashkin@uol.de*