时空间隔的不变性

M. Moriconi*

物理研究所，弗卢米嫩塞联邦大学，普拉亚韦尔梅利亚校区，尼泰罗伊，*24210-340*，*RJ*，巴西。

arXiv:2512.14446v1 [physics.class-ph] 16 Dec 2025

摘要

我们仅依据光速恒定以及时空的均匀性和各向同性，给出相对论时空间隔不变性的几何证明。推导基于一个简单的构造，其中涉及光矩形；这些矩形的面积在不同惯性系中保持不变。基于这一构造，我们还推导出洛伦兹变换。

I. 引言

爱因斯坦的狭义相对论建立在这样一条原理之上：物理定律在所有惯性参考系中都具有相同的形式。这是狭义相对论的第一公设（例如，参见 Taylor and Wheeler 的《时空物理学》[1]，），而对于力学现象，这一原理自伽利略时代起便已为人所知。爱因斯坦提案中具有革命性的，是将这一原理扩展到所有物理定律。探索这一扩展的后果，促成了狭义相对论的诞生。起初看似无关紧要的一句话，彻底改变了我们对时空因果结构的理解，并挑战了诸如绝对时空或绝对同时性等长期以来根深蒂固的观念。爱因斯坦最初提出的第二条公设是光速恒定，c。值得注意的是，正如爱因斯坦后来在一篇探讨惯性与能量关系的论文脚注中所说[2]，这一点其实是第一公设的推论：若将电磁学定律视为自然界的基本定律，就会得出真空中的光速在所有惯性参考系中都相同这一结论。

1908年，赫尔曼·闵可夫斯基[3] 提出了狭义相对论的几何图像，引入了四维时空连续体。起初，爱因斯坦并不太喜欢这种对狭义相对论[4], 的几何描述，但后来他认识到了它的价值，并全盘接受，将其变成发展广义相对论的主要概念和数学工具之一。

这种相对论几何图像的一项主要创新，是引入时空间隔，作为事件之间的四维距离。物理事件的时空坐标表示为（ct，x，y，z），即事件发生的时间及其在空间中的位置，具体取决于任意选定的坐标系。我们用 ct 表示“时间”坐标，使其与空间坐标具有相同的量纲。由于光速 c对所有惯性观察者都相同，因此这种对时间坐标的“标定”可以得到普遍认可。

假设在给定的惯性参考系中测得的两个物理事件的时空坐标分别为（ct_1，x_1，y_1，z_1）和（ct_2，x_2，y_2，z_2）。相对论时空间隔定义为

$$(\Delta S)^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \tag{1}$$

其中 $\Delta t = t_2 - t_1$，依此类推。如果（ΔS）$^2 < 0$，我们称之为类时区间；如果（ΔS）$^2 = 0$，则称之为类光（或零）区间；如果（ΔS）$^2 > 0$，则称之为类空区间。

相对论中的一个基本结论是，时空间隔在惯性参考系变换下保持不变。证明其不变性主要有两种方法：一种是先求出不同惯性系之间时空坐标的变换，然后发现按公式（1）定义的$(\Delta S)^2$ 在这些变换下保持不变；另一种则是依据一般原理证明$(\Delta S)^2$ 是不变量，并由此进一步找出使其保持不变的空间和时间变换。

本文采用第二种方法，许多作者也曾采用过这种方法。相对论的相关论述从基础入门著作（例如 Taylor and Wheeler 的书[1], ）到较为进阶的著作（例如 Schutz[5]）都有涉及。Wald[6] 的一封极有价值的资料信中指出：“狭义相对论中时空结构的所有特征都可以从时空间隔推导出来”。

我们首先假设时空是均匀且各向同性的；也就是说，空间和时间中的所有点彼此等价（均匀性），空间和时间中的所有方向也彼此等价（各向同性）。这些假设意味着，同一物理事件在两个不同惯性系中记录的时空坐标之间的变换必定是时空坐标的线性变换。更多详情请参阅 Levy-Leblond[7] 。

基于这些假设，证明类光区间的不变性显而易见，我们将在第二节开篇加以证明。另两种情况下的不变性则较为困难，需要付出更多努力。例如，Taylor and Wheeler 借助一个涉及火车上的镜子的思想实验，证明了类时区间的不变性，但这一论证无法推广到类空区间。在第二节中，我们将通过一种利用光线的几何构造，证明类时区间和类空间区间的不变性。第三节中，我们将利用这一不变性推导洛伦兹变换；第四节中，我们将陈述结论。

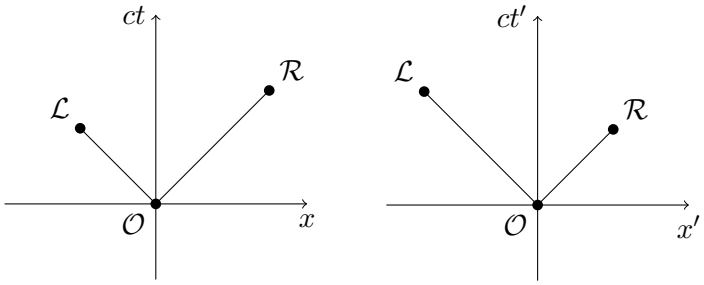
II. 时空间隔的不变性

考虑两个处于标准构型的惯性参考系 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}'$；也就是说，它们各自的空间坐标轴相互平行，原点在 $t = t' = 0$重合，且原点

$\mathcal{S}'$ 相对于 $\mathcal{S}$沿 $+x$ 方向以速度 v 运动。在本文中，带撇号的符号表示在 $\mathcal{S}'$中测得的量，不带撇号的符号则表示在 $\mathcal{S}$中测得的对应量。

由于空间各向同性，垂直于速度的长度在 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}'$中测量所得的结果相同。可以这样理解：设想一根在自身静止系中半径为 R 、具有圆形横截面的圆柱形管，其速度平行于对称轴，正朝着墙上的一个圆孔运动；该圆孔在墙的静止系中的半径为 R 。如果垂直方向的长度缩短，那么在墙的参考系中的观察者会认为这根“运动着的”管子的横截面比圆孔小，因此可以宽裕地穿过圆孔。另一方面，在管子的参考系中，圆孔的半径会更小，这意味着管子会与墙发生碰撞。如果垂直方向的长度增大，也会出现类似的矛盾。唯一没有悖论的情况是垂直方向的长度保持不变。

现在来考虑几个由光速不变性推导出的事实。首先，在 $\mathcal{S}$ 的 $t = 0$ ，沿着 $\pm x$ 轴从原点发出的光束，其时空图与在 $\mathcal{S}'$ 中的描述相似：在每个参考系中，它们都是与 ± 45 度角的直线，而不是教科书中常见的“倾斜”画法（例如参见 Schutz[5]），后者会在一个参考系（$\mathcal{S}'$）中绘制另一个参考系（$\mathcal{S}$）的时空轴。图1表示从 $x = 0$ 的 $t = 0$ 发出的两条光线，即事件 $\mathcal{O}$；两条光线从原点向相反方向发出于 $t = 0$ ，并在事件 $\mathcal{L}$ （左侧）和 $\mathcal{R}$ （右侧）被探测到。同一组光线在 $\mathcal{S}'$ 中的传播仍会用与 $\pm 45°$角的直线表示，不过每条线的长度可能与其在 $\mathcal{S}$ 中的长度不同。



(a) (b)

图1：在 (a) $\mathcal{S}$ 参考系和 (b) $\mathcal{S}'$参考系中观测到的向左和向右传播的光线。此图表明，在两个参考系中，光线长度可能不同，但其路径仍将与坐标轴成 45° 角。

光速不变性还可得出结论：类光间隔在参考系之间的变换下保持不变；两个事件若能通过从其中一个事件发出、并在另一个事件被吸收的闪光相连，那么在任何惯性参考系中都具有 $\Delta x = c\Delta t$ ，这意味着 $\Delta S^2 = 0$。

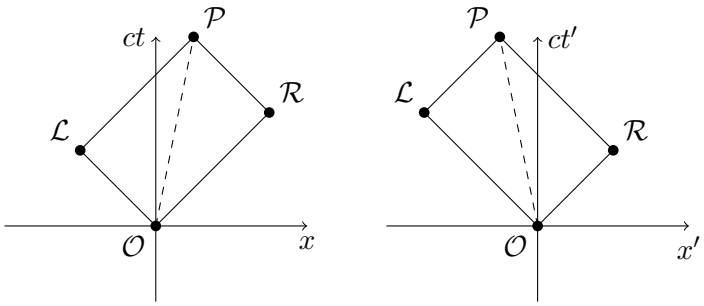
接下来，我们证明类时区间的不变性。由于空间和时间的均匀性，我们可以选取原点，使其中一个事件的坐标为 (0，0)，另一个事件的坐标为 $(ct,\ x)$，且 $ct > x$，因此该事件位于光锥内，且 t 为正。

假设我们在 $\mathcal{S}$ 的原点处于 $t = 0$ 时点亮一个灯泡，并且原点左右两侧分别在 $x = r$ 和 $x = -l$ 处有镜子，其中 r 和 l 均为正。如图2（a）所示，“点亮灯泡”这一事件标记为事件 $\mathcal{O}$ （时空坐标为 (0，0)）；“被左侧/右侧镜子反射”这两个事件分别标记为事件 $\mathcal{L}$/$\mathcal{R}$（时空坐标为 $(r,\ r)$/$(l,\ -l)$）；“反射光线相遇”这一事件标记为事件 $\mathcal{P}$（时空坐标为 $(ct,\ x)$）。由于作为向量，$\mathcal{OR} + \mathcal{OL} = \mathcal{OP}$，我们有 $(ct,\ x) = (r + l,\ r - l)$。为了确定光锥内任意位置上的事件 $\mathcal{P}$ ，我们可以将镜子放置在 r 和$-l$ 处：

$$r = (ct + x)/2, \tag{2}$$

$$-l = (-ct + x)/2. \tag{3}$$

我们将这种构造称为“光矩形”。



(a) (b)

图2：与（a） $\mathcal{S}$和（b） $\mathcal{S}'$中的事件 $\mathcal{P}$ 相关的光矩形。各边都与坐标轴成 45°，因为它们表示光束路径。

现在，让我们分析在 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}'$中描述的事件 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{R}$的时空坐标之间的关系。在 $\mathcal{S}'$中测得的 $\mathcal{L}$和 $\mathcal{R}$ 事件的时空坐标分别为（$l', -l'$）和（r', r'）。

由于空间均匀性， $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}'$中的时空坐标之间必定存在线性关系。为了理解原因，考虑事件 $\mathcal{R}$，它发生在位置 r 和时间 $t = r/c$。相应的 $\mathcal{S}'$ 坐标为位置 r' 和时间 $t' = r'/c$。设想我们将距离 r加倍。由于我们可以把这看作由两个事件组成的序列：首先光从原点传播到 r，然后从 r 传播到 $2r$；又由于空间均匀性，我们可以把任意点作为坐标系的原点，因此 $\mathcal{S}'$ 中相应的空间坐标必定是 $r' + r' = 2r'$，也就是说，如果我们将 r加倍，就会将 r' [a]加倍。因此，我们可以写作 $r' = K_+ r$。由于事件 $\mathcal{R}$ 是对从原点发出的光脉冲的探测， $\mathcal{S}'$ 中的时间坐标为 $r' = K_+ r$ 。显然，这对事件 $\mathcal{L}$也成立；但由于它位于负 x轴上，我们必须允许比例常数有所不同，记为 $l' = K_- l$。请注意， $K_\pm$ 可能取决于速度。有关更正式的讨论，请参阅 Taylor and Wheeler[1] 或 Schutz[5] 的著作，或 Levy-Leblond[7] 的论文。

假设 $\mathcal{S}'$ 以速度 $v < c$ [b]移动，事件 $\mathcal{R}$ ($\mathcal{L}$)具有 $r' > 0$ ($l' < 0$)，原点前方的事件仍在前方，原点后方的事件仍在后方，这意味着

[a] 由于我们总可以把一个给定的位置看作由许多无穷小空间步长组成，因此不难看出，如果 $r \to \alpha r$ 比 $r' \to \alpha r'$。[b] 不可能从静止状态出发并达到超过 c的速度，因为这将与光速不变相矛盾。能够超过 c的观察者可以追上自己向前发出的光脉冲，并在某一时刻看到它向后传播，这违反了相对论公设。

$K_\pm > 0$。

此外，我们必须有 $r = K_- r'$。系数是 K_-，而不是 K_+，因为对于处于 $\mathcal{S}'$的观察者而言，光束的传播方向与参考系的速度 $\mathcal{S}$相反。这反过来意味着 $r' = K_+ r = K_+ K_- r'$，也就是说， $K_+ K_- = 1$。我们可以对此作几何解释：光矩形的面积[c] 与参考系无关，因为 $r'l' = K_+ r K_- l = rl$。利用公式（2）和（3），我们得到$rl = (c^2t^2 - x^2)/4 = -\Delta\mathcal{S}^2/4$, 从而确立了类时区间的不变性。

注意，让光脉冲从 (0，0) 开始只是为了方便；如果它从任意位置和时刻开始，我们得到的结果就是公式（1）中给出的 ΔS^2 的不变性。

我们通过考察光矩形的一条对角线，证明了类时区间是不变的。现在我们将通过考察另一条对角线，证明类空间区间是不变的。回顾一下：从原点出发的区间，如果落在光锥内，就是类时的；如果落在光锥外，就是类空的。首先注意，任何由类空区间分隔的两个事件，都可以通过将 x 和 t的原点进行平移，重新标记为向量 $\mathcal{LR}$ for $0 < l < \infty$ and $0 < r < \infty$[d]。这里利用了时空的均匀性：时空中的任意点都可以作为我们坐标系的原点。在图3中，我们展示了如何进行这一操作的一个例子：类空向量 $\mathcal{OP}$ 可以平移为向量 $\mathcal{LR}$。在这个例子中，时空的均匀性意味着，事件 $\mathcal{O}$ ad $\mathcal{P}$ 之间的相对论间隔，与事件 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{R}$ 之间的相对论间隔相同。

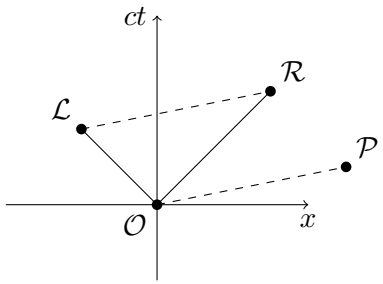


图 3：如何将任意类空矢量 $\mathcal{OP}$ 变换为矢量 $\mathcal{LR}$。

[c] 面积实际上是 $\sqrt{2r}\sqrt{2l} = 2\sqrt{rl}$，但因子 2 与我们的论证无关[d] 我们总可以调整坐标系，使事件 $\mathcal{P}$ 的空间坐标为正。

事件 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{R}$ 之间的时空间隔为 $\Delta S^2 = -(r-l)^2 + (r+l)^2 = 4rl$，它与光矩形的面积成正比，这表明类空区间具有不变性。结合前面的结果，我们已经证明了任意类型的区间都是不变的，无论是类光、类时还是类空区间。

III. 洛伦兹变换

洛伦兹变换精确地描述了同一物理事件在两个不同惯性参考系中的时空坐标之间的数学关系。鉴于其几何方法，我们应提及 Macdonald[8] , 推导洛伦兹变换的方法，该方法将光速不变作为推导的主要依据之一。

首先，由于 $K_+K_- = 1$，且 $K_\pm$ 为正，我们可以写成 $K_\pm = e^{\pm\phi}$，其中 $-\infty < \phi < \infty$。先来讨论类时事件的洛伦兹变换。

我们有 $(ct,\ x) = (r+l,\ r-l)$ 和 $(ct',\ x') = (r'+l',\ r'-l')$，经过一些简单的代数运算并利用方程（2）和（3），得到

$$\begin{aligned} ct' = r' + l' &= K_+ r + K_- l = ct\cosh\phi + x\sinh\phi \\ x' = r' - l' &= K_+ r - K_- l = ct\sinh\phi + x\cosh\phi. \end{aligned} \tag{4}$$

为确定参数 ϕ ，请注意，根据 $\mathcal{S}'$中的惯性观察者所见， $\mathcal{S}$ 的空间原点以速度 $-v$运动，这意味着 $x' = -vt' = -\beta ct'$，其中 $\beta = v/c$。由于在这种情况下，变换（4）给出 $x' = ct\sinh\phi$和 $ct' = ct\cosh\phi$，我们必须有 $\tanh\phi = -\beta$和 $\cosh\phi = 1/\sqrt{1-\beta^2} \equiv \gamma$，最终得到，

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct). \end{aligned} \tag{5}$$

我们可以用同样的方法处理类空事件。根据图3中的向量，我们有$\mathcal{OL} + \mathcal{OP} = \mathcal{OR}$，这意味着 $\mathcal{P}$ 的坐标为（$r-l,\ r+l$）。同理，在 $\mathcal{S}'$ 中，它的坐标为（$r'-l',\ r'+l'$）。按照处理类时事件的方法，我们得到类空事件坐标的相同变换，即方程（5）。对类光事件也可以进行类似的分析。

这就是一维运动的洛伦兹变换。再结合垂直于速度方向的长度在两个参考系中相同这一点，我们就能相当完整且实用地描述如何在不同惯性系中求得物理事件的时空坐标。

IV. 结论

虽然时空间隔的不变性通常通过代数方法引入，作为洛伦兹变换的推论，但在这里我们采取了相反的思路：先推导出时空间隔的不变性，再得到洛伦兹变换。确立这种不变性，尤其是对类时间隔和类空间间隔而言，可能颇为微妙。例如，朗道和栗弗席兹[9] 的论述从类光间隔出发，提出了一个直观上颇具吸引力的论证，但正如 Elton[10], 所指出的，该论证缺乏充分的数学严谨性。

还值得将我们的方法与由 L´evy- Leblond[7], 开创、并由 Lee 和 Kalotas[11], Ignatowsky[12], 及 Torretti[13]进一步发展的公理化处理作一对比。他们的框架探讨了惯性系之间满足均匀性、各向同性、因果性和群结构等基本时空对称性条件的最一般变换类别，而不预先假定光速不变性。另一种值得一提的数学方法来自 Zeeman[14], ，其论证表明，仅凭因果性就能推出洛伦兹群是闵可夫斯基空间的对称群。

我们基于光速恒定以及时空的均匀性和各向同性，推导了时空间隔的不变性和洛伦兹变换。我们的论证本质上是几何性的，依赖于光矩形面积的不变性。

致谢

作者谨此感谢匿名审稿人，他们的意见大大改进了本文。作者声明不存在需要披露的利益冲突。

---

* 电子邮箱：mmoriconi@id.uff.br[1] E. F. Taylor 和 J. A. Wheeler，《时空物理学》，W. H. Freeman，（1992年）。[2] 阿尔伯特·爱因斯坦，《物体的惯性是否取决于其能量含量？》，可见 https: //www.fourmilab.ch/etexts/einstein/E_mc2/e_mc2.pdf。[3] P. Galison 的《闵可夫斯基时空：从视觉思维到绝对世界》对此有一段有趣的论述，载于《物理科学史研究》第10卷（1979年）：85–119，网址为 https://projects.iq.harvard.edu/files/andrewhsmith/files/galison_-_minkowski.pdf。[4] 爱因斯坦得知闵可夫斯基时空后，称其为“¨uberfl¨ussige Gelehrsamkeit”，意为“多余的学问”。参见 A. Pais，《上帝是微妙的》，牛津大学出版社（2005年）。[5] B. F. Schutz，《广义相对论入门》，剑桥大学出版社，第3版（2022年）。[6] R. Wald，《广义相对论数学的教学》，《美国物理学杂志》74，471–477（2006年）。[7] J. M. Levy-Leblond，《洛伦兹变换的另一种推导》，《美国物理学杂志》44，271–277（1976年）。[8] A. Macdonald，《洛伦兹变换的推导》，《美国物理学杂志》49，493（1981年）。[9] L. Landau 和 E. Lifschitz，《经典场论》，Butterworth-Heinemann；第4版（1980年）。[10] J. H. Elton，《不定二次型与狭义相对论中的间隔不变性》，《美国数学月刊》第117卷，540–547（2010年）。[11] A. R. Lee 和 T. M. Kalotas，《从第一公设推导洛伦兹变换》，《美国物理学杂志》43，434–437（1975年）。[12] W. von Ignatowsky，《相对性原理》，Arch. f. Math. u. Phys. 3，1–24（1911年）。[13] R. Torretti，《相对论与几何学》，Dover Publications Inc.（1996年）。第3.7节清晰地讨论了伊格纳托夫斯基方法。

[14] E. K. Zeeman, 《因果性蕴含洛伦兹群》, 《数学物理杂志》5，490–493（1964).