arXiv:2512.14498v1 [math.AT] 16 Dec 2025

与交叉单纯群相关的拟运算子

A. SEMIDETNOV

Abstract. 我们引入并研究交叉单纯群这一概念的结构化增强形式，称之为作子交叉单纯群。我们证明，每个作子交叉单纯群都可以关联到某个群胚中的歌剧。我们还展示了，对称交叉单纯群和辫交叉单纯群可以自然地构造成作子交叉单纯群。对于这两个示例，我们证明，所构造的关联歌剧分别恢复了E_∞-歌剧和 E_2-歌剧。我们通过两项主要应用展示这一框架的实用性：一种广义巴构造，它可特化为 Fiedorowicz 的对称巴构造和辫式巴构造；以及将关联的群完备化单子识别为 Baratt-Priddy-Quillen 型空间。

引言

交叉单纯群由 Fiedorowicz 和 Loday 于 [9] 引入，Krasauskas 也于 [13]独立引入。我们采用 [9]中确立的记号。

交叉单纯群是单纯群的一种推广。简而言之，它是一个单纯集合G_*，其中每个 G_n 都是一个群，它作用于 n-单形的顶点集合 $[n]$，而面映射和退化映射则是相对于指定作用的交叉同态。后者意味着，对于任意元素 g_1， $g_2 \in G_n$，都有如下恒等式

$$d_i(g_1g_2) = d_i(g_1)d_{g_1^{-1}i}(g_2), \quad s_i(g_1g_2) = s_i(g_1)s_{g_1^{-1}i}(g_2).$$

等价地，交叉单纯群可以表示为单纯范畴Δ的扩张 ΔG，其中 ΔG 中的每个态射 $[m] \to [n]$ 都能唯一分解为：先是由 G_m中的一个元素的作用给出的 $[m]$ 的自同构，随后是一个来自 Δ的态射。交叉单纯群的结构分解定理由 [9] 和 [13] 分别独立证明：对于一个交叉单纯群 G_*，存在典范满同态 π: $G \twoheadrightarrow N_*$ 到七个特定交叉单纯群之一，其核是一个真正的单纯群。我们大量依赖这一结果，并将态射 π称为 G_*的结构投影。

这一理论的一个重要应用，由 Fiedorowicz 在一篇预印本中探讨 [8], 是对巴构造的推广。对于交叉单纯群 S_*（由对称群构造）， B_*（由 Artin 辫群构造），他引入了对称bar构造和辫式巴构造:

$$\mathsf{B}^S\colon \mathsf{TopMon} \to \mathsf{Top}^{\Delta S}, \qquad \mathsf{B}^B\colon \mathsf{TopMon} \to \mathsf{Top}^{\Delta B}.$$

出于同调学方面的考虑，他证明对于一个拓扑幺半群 M 存在弱等价

$$\mathsf{hocolim}_{\Delta S}(\mathsf{B}^S M) \simeq \mathsf{B}(T_\infty, T_1, M), \qquad \mathsf{hocolim}_{\Delta B}(\mathsf{B}^B M) \simeq \mathsf{B}(T_2, T_1, M),$$

其中， T_k 表示与小 k-立方体幺半群相关联的单子，而 B(–, –, –) 表示单子bar构造。

结果概述。 我们给出一种构造交叉单纯群的分类空间的方法，该方法与结构分解相容。设 G_* 为一个交叉单纯群，π 为其结构投影。我们构造单纯群$P_* = \ker(\pi)$的一个分类空间模型，并赋予其一个由交叉单纯群 $N_* = \mathrm{cod}(\pi)$作用的结构。具体而言，我们证明以下定理。

定理 (定理 1.5)。 设 G_* 为一个交叉单纯群，具有结构分解

$$P_* \hookrightarrow G_* \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} N_*.$$

于是存在一个函子 $\Gamma_* : (\Delta N)^{op} \to \mathit{Gpd}$，使得 N_n 在 Γ_n 上自由作用，并且对每个 n，都有一个同伦等价 $B\Gamma_n \simeq K(P_n, 1)$ 。

接下来，我们关注对称交叉单纯群这一类，即结构商 N_* 为对称交叉单纯群 S_*的那些群。对于这类交叉单纯群，我们引入两种结构性增强：幺半交叉单纯群 和歌剧交叉单纯群 （见定义 2.1 和定义 2.4）。这些结构使我们能够在上述定理中的群胚 Γ_* 上构造一个幺半群。具体而言，我们证明以下定理。

定理 (定理 3.4，定理 3.6)。 设 G_* 是一个幺半交叉单纯群。则集合序列 $\{G_n\}_{n\geq 0}$ 具有运算子结构。此外，若 G_* 是一个歌剧交叉单纯群，则群胚序列 $\{\Gamma_n\}_{n\geq 0}$上存在对称运算子结构。

对于 $G_* = B_*$ （Artin 辫群），所得幺半群与 E_2-幺半群等价；而对于$G_* = S_*$ （对称群），它与 E_∞-幺半群等价；参见第 2.1 节和注 3.7。

为了凸显这些定理背后的动机，我们现在列出其中若干个直接推论。设 G_* 为一个拟运算的交叉单纯群，并令 T_G 表示与 Top 中的拟运算 $\mathrm{B}\Gamma_*$ 相关联的单子。回顾一下，对于一个拓扑幺半群，有一个分类空间构造，它由函子的复合给出：

$$\mathsf{B} \colon \mathsf{TopMon} \xrightarrow{N} \mathsf{sTop} \xrightarrow{|-|} \mathsf{Top}.$$

推论。 群完备化 $T_G(*)^{\mathrm{grp}}$ 满足一个弱等价

$$T_G(*)^{\mathrm{grp}} \xrightarrow{\simeq} \Omega B \left(\coprod_{n\geq 0} BG_n \right),$$

其中右侧的符号 B 表示拓扑幺半群的分类空间构造。

这一推论可视为 Cohen–Segal–May 定理和 Barratt–Priddy–Quillen 定理的体现。在 $G = B_*$ 的情形下，它断言 $\Omega\mathrm{B}\left(\coprod_{n\geq 0} \mathrm{B}B_n\right)$ 是由一个点生成的自由类群状 E_2-代数，因此它与 $\Omega^2 S^2$弱等价。同样地，当 $G = S_*$时，该推论表明 $\Omega\mathrm{B}\left(\coprod_{n\geq 0} \mathrm{B}S_n\right)$ 是由一个点生成的自由类群状 E_∞-代数，因此它与 $\Omega^\infty\Sigma^\infty S^0$弱等价。

对于任意拓扑幺半群 M，都可以定义其 G_*-bar 构造

$$\mathsf{B}^{G_*} M \colon \Delta G \to \mathsf{Top},$$

它推广了对称和辫式巴构造。我们得到以下对[8,命题 1.4]的推广。

推论。 存在一个弱等价

$$\mathit{hocolim}_{\Delta G} B^{G_*} M \simeq B(T_G, C_1, M),$$

其中，右侧的符号 B 表示单子*bar*构造。

论文结构。第1节中，我们针对交叉单纯群阐述了定理 1.5 背后的构造与证明。第2节介绍了前文所述对交叉单纯群结构的扩展，并给出了相关示例。第3节回顾拟 operad 理论的基本概念，并在 Set 和 Gpd 范畴中构造幺半群，证明定理 3.4 和定理 3.6。附录 A 收录了一些略显繁琐的计算验证，以免打断正文的行文脉络。最后，附录 B 与论文的主要论述稍有关联；其中给出了结构映射成为 Kan 纤维化的一个充分条件，即定理 B.1。

致谢。作者谨向 Boris Shoikhet、Viktor Lavrukhin 和 Vasily Ionin 致谢，感谢他们提供的宝贵讨论。此外，作者衷心感谢 Matthew Magin 仔细阅读本文草稿，并感谢 Andrey Ryabichev 为本文绘制了精美的插图。

1. 函子性分类空间

1.1. 预备知识。 对于每个交叉单纯群 G_*，我们按照 [9] 中的定义，将其关联范畴记为 ΔG。

定义 1.1。 对于交叉单纯群 G_* 和范畴 $\mathcal{C}$， $\mathcal{C}$ 中的一个 G_*-对象 是一个函子 $(\Delta G)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$。

以下对这一概念的解释对我们很有用。

引理 1.2 （ 的引理 4.2 [9]）。 $\mathcal{C}$ 中的一个 G_*-对象的数据，等价于范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个单纯对象 X，并且对每个 n 给定左作用 $G_n \curvearrowright X_n$，满足以下恒等式：

(1) 面恒等式： $d_i(gx) = d_i(g)d_{g^{-1}(i)}(x)$；(2) 退化恒等式： $s_i(gx) = s_i(g)s_{g^{-1}(i)}(x)$。

我们提醒读者注意交叉单纯群的结构定理。

定理 1.3 (（ [9]）。对于任意交叉单纯群 G_*，存在一个交叉单纯群的短正合序列

$$1 \to P_* \to G_* \xrightarrow{\pi} N_* \to 1,$$

wh其中 P_* 是一个单纯群， N_* 是以下7 个交叉单纯群之一：

$$\{1\},\ C_*,\ \{\mathbb{Z}/2\},\ S_*,\ D_*,\ \mathbb{Z}/2 \times S_*,\ H_*.$$

定义 1.4。对于群 G 及其正规子群 $H \subseteq G$，作用群胚 $G /\!\!/ H$ 是一个群胚，其中

（1）对象是群 G/H的元素；（2）同态集 $\mathrm{Hom}_{G/\!/H}(a,b)$由满足 $af^{-1} = b$的元素 $f \in G$组成，其中等式左边的 f与其在 G/H中的像相对应。

1.2. 本节的主要结果。 固定一个交叉单纯群 G_*，其结构分解如定理 1.3 所述。令

$$\Gamma_n = \Gamma_n(G) = G_n /\!\!/ P_n \tag{1.1}$$

为作用群胚。我们提出第一个定理。

定理 1.5。 设 G_* 是一个交叉单纯群，其分解如定理 *1.3* 所述。则，群胚序列 (1.1) 构成一个函子 $\Gamma_* : (\Delta N)^{\mathrm{op}} \to \mathit{Gpd}$。此外，对于每个 n，作用$N_n \curvearrowright \Gamma_n$ 是自由的，且轨道空间 $N_n \backslash B\Gamma_n$ 具有 $K(G_n,\ 1)$的同伦型。

上述定理将推出如下结论。

推论 1.6。 空间序列 $\{B\Gamma_n\}_{n\geq 0}$ 构成一个 N_*-空间，使得

(1) 对于每个 n，轨道空间 $N_n \backslash B\Gamma_n$ 具有 $K(G_n,\ 1)$ 的同伦型；(2) 万有覆盖空间序列 $\{B\Gamma_n\langle 1\rangle\}_{n\geq 0}$ 构成一个 ΔG_*-空间，使得对于每个 n，作用$G_n \curvearrowright B\Gamma_n\langle 1\rangle$ 是自由的。也就是说，$B\Gamma_n\langle 1\rangle$ 是一个 EG_n 空间。

我们将在下文证明这两个结果。

1.3. 定理 1.5 的证明。在作用群胚 Γ_n 中，我们用符号表示由$f \in G_n$ 给出的态射 $\sigma \to \tau$

$$[\sigma, f] \in \Gamma_n(\sigma, \sigma f^{-1}).$$

于是，复合可以用以下公式描述

$$[\sigma f^{-1}, g] \cdot [\sigma, f] = [\sigma, gf].$$

接下来，我们验证这些群胚构成一个单纯群胚。

构造 1. 对于每个 $i = 0, \dots, n$，定义 $s_i \colon \Gamma_n \to \Gamma_{n+1}$，公式如下

$$s_i[\sigma, f] = [s_i(\sigma), s_{\sigma^{-1}(i)}(f^{-1})^{-1}]. \tag{1.2}$$

这定义了一个 正确的映射 $\mathrm{Hom}_{\Gamma_n}(\sigma, \tau) \to \mathrm{Hom}_{\Gamma_{n+1}}(s_i(\sigma)\ s_i(\tau))$，因为对于每个 $[\sigma, f] \colon \sigma \to \tau$，都有 s

$$\mathrm{dom}_{\Gamma_{n+1}}(s_i([\sigma, f])) = \mathrm{dom}_{\Gamma_{n+1}}([s_i(\sigma), s_{\sigma^{-1}(i)}(f^{-1})^{-1}]) = s_i(\sigma),$$
$$\mathrm{cod}_{\Gamma_{n+1}}(s_i([\sigma, f])) = \mathrm{cod}_{\Gamma_{n+1}}([s_i(\sigma), s_{\sigma^{-1}(i)}(f^{-1})^{-1}]) = s_i(\sigma) \cdot s_{\sigma^{-1}(i)}(f^{-1}) = s_i(\sigma f^{-1}) = s_i(\tau).$$

（这个双重反 转在 (1.2) 中是必要的，因为退化映射 $s_* \colon G_n \to G_{n-1}$ 不是 t
群同态 。（

类似地，按以下公式定义面映射 $d_i \colon \Gamma_n \to \Gamma_{n-1}$

$$d_i[\sigma, f] = [d_i(\sigma), d_{\sigma^{-1}(i)}(f^{-1})^{-1}]. \tag{1.3}$$

引理 1.7. 在(*1.2*)和(*1.3*) 中定义的映射赋予 $\{\Gamma_n\}_{n\geq 0}$ 一个单纯群胚的结构。

证明。 首先，我们声称 d_i 和 s_i 是群胚函子。我们只证明退化映射的情形，面映射的情形完全类似。注意，

$$s_i([\sigma f^{-1}, g] \cdot [\sigma, f]) = s_i([\sigma, gf]) = [s_i(\sigma), s_{\sigma^{-1}(i)}((gf)^{-1})^{-1}],$$

而

$$s_i([\sigma f^{-1}, g]) \cdot s_i([\sigma, f]) = [s_i(\sigma f^{-1}), s_{(\sigma f^{-1})^{-1}(i)}(g^{-1})^{-1}] \cdot [s_i(\sigma), s_{\sigma^{-1}(i)}(f^{-1})^{-1}].$$

因此，函子性要求满足恒等式

$$s_{\sigma^{-1}(i)}((gf)^{-1})^{-1} = s_{(\sigma f^{-1})^{-1}(i)}(g^{-1})^{-1} \cdot s_{\sigma^{-1}(i)}(f^{-1})^{-1},$$

这等价于

$$s_{\sigma^{-1}(i)}(f^{-1}g^{-1}) = s_{\sigma^{-1}(i)}(f^{-1}) \cdot s_{f\cdot\sigma^{-1}(i)}(g^{-1}).$$

后者可由交叉群公理推出。命题得证。我们将在附录 A 中验证单纯恒等式。□

因此，序列 $\{\Gamma_n\}_{n\geq 0}$ 构成一个单纯群胚 $\Gamma_* \colon \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Gpd}$。此外，群 N_n通过公式在 Γ_n 上左作用

$$\tau \cdot [\sigma, f] = [\tau\sigma, f].$$

我们断言，这些作用定义了一个函子 $\Gamma \colon (\Delta N)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Gpd}$。我们将验证引理 1.2 中所需的恒等式。

(1) 面恒等式：对于 $\sigma \in N_n$ 和 $x \in \Gamma_n$，有

$$d_i(\sigma x) = d_i(\sigma) d_{\sigma^{-1}(i)}(x).$$

确实，

$$\begin{aligned} d_i([\tau\sigma, f]) &= [d_i(\tau) \cdot d_{\tau^{-1}(i)}(\sigma), d_{\sigma^{-1}\tau^{-1}(i)}(f^{-1})^{-1}] \\ &= d_i(\tau) \cdot [d_{\tau^{-1}(i)}(\sigma), d_{\sigma^{-1}\tau^{-1}(i)}(f^{-1})^{-1}] \\ &= d_i(\tau) \cdot d_{\tau^{-1}(i)}([\sigma, f]). \end{aligned}$$

（2）退化恒等式：对于 $\sigma \in N_n$ 和 $x \in \Gamma_n$，有

$$s_i(\sigma x) = s_i(\sigma) \cdot s_{\sigma^{-1}(i)}(x),$$

这可以用类似的方法验证。

Γ_n 的同伦型与 $K(P_n, 1)$相同，因为 Γ_n 是一个连通群胚，其基本群为 P_n，而群胚是1-截断的。

引理 1.8. 商空间 $N_n\backslash B\Gamma_n$ 具有 $K(G_n, 1)$的同伦型。

证明。我们在单纯集合范畴中讨论。我们证明，单纯集合 $N_n\backslash N\Gamma_n$ 同构于神经$N(G_n^{\mathrm{op}})$。这将推出引理中的结论，因为

$$|NG_n^{\mathrm{op}}| \cong |NG_n| \simeq K(G_n, 1).$$

神经 $N\Gamma_n$ 中的一个 m-单纯形由一个起始对象 $\sigma \in N$ 和一个序列f_1、.....、$f_m \in G_n$确定，该序列对应于复合态射

$$[\sigma f_1^{-1} f_2^{-1} \cdot \ldots \cdot f_{m-1}^{-1}, f_m] \cdot \ldots \cdot [\sigma f_1^{-1}, f_2] \cdot [\sigma, f_1]$$

N_n作用将对象 $\sigma \in N_n$商掉，恰好留下单纯集合 NG_n。更明确地说，映射

$$\{[\sigma f_1^{-1} f_2^{-1} \cdot \ldots \cdot f_{m-1}^{-1}, f_m] \cdot \ldots \cdot [\sigma f_1^{-1}, f_2] \cdot [\sigma, f_1]\}_{\sigma \in N_n} \mapsto (f_m, \ldots, f_1)$$

给出一个双射 $(N_n\backslash N\Gamma_n)_m \to N(G_n^{\mathrm{op}})_m$。容易验证，这是一个单纯映射。 □

定理得证。

1.4. 证明　推论 1.6 的推论 1.6 的第一个断言显然由定理 1 得出。 5.

为了处理第二个断言，我们首先澄清一下我们对术语覆盖空间的用法。有两种可能的方法。第一种沿用 Fiedorowicz 构造构型空间的万有覆盖的方法，其中需要选取万有覆盖的一个适当子空间，使其作为“广义基点”发挥作用。我们采用的第二种方法则是在群胚范畴中进行。

对于连通群胚 Γ，其覆盖的一种标准函子性构造是：对固定对象 x_0，取切片群胚 x_0/Γ。在带基点群胚范畴中，这一构造是幺半函子性的。然而，我们的函子 $\Delta N \to \mathsf{Gpd}$ 不能视为取值于带基点群胚，因为 N_*–作用会传递地置换对象。

为绕过这一问题，我们考虑复合

$$\Gamma\langle 1\rangle \colon \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Gpd}_* \xrightarrow{\mathrm{slice}} \mathsf{Gpd}_*.$$

我们声称，$\Gamma\langle 1\rangle$自然延拓为一个函子

$$(\Delta G)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Gpd}.$$

这一延拓很容易验证，细节从略。

2. 拟运算的交叉单纯群

.....的目标是 本节旨在介绍交叉单纯群这一概念的若干扩展 1

群，并且到　展示一些示例。

令 S_* 为交叉单纯对称群。回顾一下，$S_n = \Sigma_{n+1}$ 定义= $\mathsf{Bij}(\{0, \ldots, n\})$ 是集合 $[n]$ 上的双射所构成的群。首先，我们想讨论交叉单纯群 S_* 上存在的一些附加结构。

(1) 存在左收缩单纯同伦 s_L，它通过在左侧添加一个固定点来实现：

$$s_L \colon \sigma \mapsto (1, \sigma(0) + 1, \sigma(1) + 1, \ldots, \sigma(n) + 1).$$

(2) 存在　是右侧收缩单纯同伦 s_R，它在右侧添加一个固定点 :

$$s_R \colon \sigma \mapsto (\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(n), n + 1).$$

(3) 这两个收缩同伦定义了置换的块和：对于 $\sigma \in S_n$， $\tau \in S_m$置换的块和是由以下序列给出的置换 $\sigma \boxplus \tau \in S_{n+m+1}$

$$\sigma(0), \dots, \sigma(n), \tau(0) + n + 1, \dots, \tau(m) + n + 1.$$

这是一个群同态 $S_n \times S_m \to S_{n+m+1}$.

(4) 最后，序列$\{S_n\}$上有标准的（参见 [5, 命题 1.1.9.]）集合上运算子结构。其定义与我们将在定理 3.4 中给出的定义完全类似。

现在我们介绍第一个增强结构。

定义 2.1. (1) 左可缩对称单纯群是一个二元组 (G, s_L)，其中 G 是一个对称单纯群，而 $s_L = \{s_{-1}\}_{n\geq 0}$ 是一个左收缩同伦[1]，，且它是一个群同态，使下图可交换

$$\begin{array}{ccc} G_n & \xrightarrow{s_L} & G_{n+1} \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ S_n & \xrightarrow[s_L]{} & S_{n+1}. \end{array}$$

(2) 右可缩对称单纯群是一个二元组 (G, s_R)，其中 G 是一个对称单-纯群，而 $s_R = \{s_{n+1}\}_{n\geq 0}$ 是一个右收缩同伦，且它是一个群同态，使相应的图可交换。

(3) 双侧可缩对称单纯群是一个三元组 (G, s_L, s_R)，其中 (G, s_L) 是左可缩对称单纯群，而 (G, s_R) 是右可缩对称单纯群。

下文中，稍微滥用一下记号，我们称对称群 G_* 为双侧可缩，并默认固定映射 s_L 和 s_R，不将它们写入记号。

交叉单纯群概念的第二种扩展，源于这样一个观察：置换的块和可以用算子 s_L 和 s_R 表示。具体而言，对于 $\sigma \in S_n$ 和 $\tau \in S_m$，有 $\sigma \boxplus \tau = (s_R)^{\circ m+1}(\sigma) \cdot (s_L)^{\circ n+1}(\tau)$。

定义 2.2。 若对称双侧可缩交叉单纯群 G_* 的映射满足以下条件，则称其为幺半的

$$\boxplus \colon G_n \times G_m \longrightarrow G_{n+m+1}, \qquad (\alpha, \beta) \longmapsto (s_R)^{\circ(m+1)}(\alpha) \cdot (s_L)^{\circ(n+1)}(\beta),$$

是一个群同态。等价地， G_* 是幺半的，当且仅当元素 $(s_R)^{\circ(m+1)}(\alpha)$ 和 $(s_L)^{\circ(n+1)}(\beta)$ 对所有 $\alpha \in G_n$ 和 $\beta \in G_m$ 都交换。

我们进一步引入记号 1_n，表示 G_n 的单位元；因此

$$\alpha \boxplus 1_m = (s_R)^{\circ m}(\alpha) \qquad \text{and} \qquad 1_n \boxplus \beta = (s_L)^{\circ n}(\beta).$$

下面的引理只是对定义的展开。

引理 2.3. 设 G_n 是一个幺半交叉单纯群。则

(1) 不连通群胚 $\bigsqcup_{n\geq 0} G_n$ 在 $\boxplus$ 下是一个幺半范畴；(2) 空间 $\bigsqcup_{n\geq 0} B G_n$ 在 $B\boxplus$ 下是一个严格拓扑幺半群。

在继续讨论示例之前，我们先介绍本文对交叉单纯群这一概念的最后一项扩展。

定义 2.4. 如果以下恒等式对所有 $\alpha \in G_n, \beta \in G_m$ 以及所有 $0 \leq i \leq n$均成立，则称幺半交叉单纯群 G_* 是拟运算的：

$$(1_i \boxplus \beta \boxplus 1_{n-i}) \cdot s_i^m(\alpha) = s_i^m(\alpha) \cdot (1_{\alpha^{-1}(i)} \boxplus \beta \boxplus 1_{n-\alpha^{-1}(i)}).$$

[1]有关单纯收缩的更多信息，请参阅 [2]

2.1. 示例。 本文所考察的主要示例类别，是广义意义上的类辫群。最重要且最具启发性的示例是 Artin 辫群 B_n；关于辫理论的入门介绍，请参阅 [10]。本文采用以下约定：群 Br_n 表示具有 n 股线的 Artin 辫群，并令 $B_n := Br_{n+1}$。

我们回顾相关约定，并说明前文引入的结构映射如何在辫群中实现。在本小节中，我们将一条 n 辫股的辫子视为由 $[n-1]$ 编号，因此辫子的上、下端点由同一个有序集合标记。B_n 中的乘法由垂直拼接给出（见图 1）。自然的左作用

$$B_n \curvearrowright [n]$$

由以下置换作用给出：$\beta \in B_n$ 将标号 $i \in [n]$ 映射到终止于下方第 i 个位置的辫股的编号。这定义了典范投影（即结构投影）

$$\pi_n \colon B_n \twoheadrightarrow S_n,$$

该投影遗忘交叉数据，只记录辫子所诱导的端点置换。

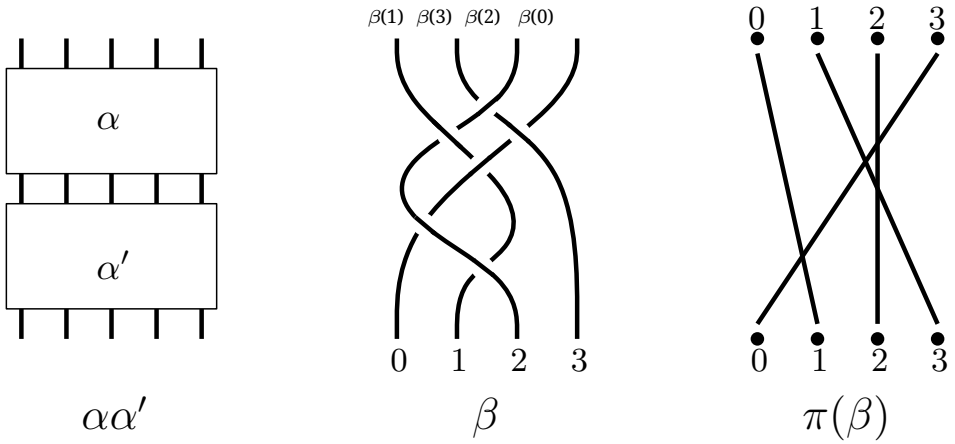


FIGURE 1. 通过垂直拼接实现的乘法，以及在 $[n]$ 上的作用。

单纯映射 $s_i \colon B_n \to B_{n+1}$ 和 $d_i \colon B_{n+1} \to B_n$ 分别通过复制和删除第 i 条辫股给出（见图 2）。按照这些约定，族 $\{B_n\}_{n\geq 0}$ 构成交叉单纯群（见 [9]）。

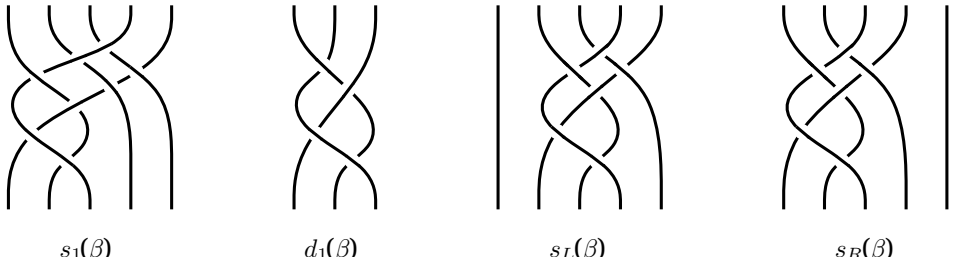


FIGURE 2. 退化映射 s_i（对第 i股进行缆线操作）、面映射 d_i（删除第 i股）以及两个收缩同伦 s_L，s_R 应用于图 1 中的辫子 β。

这个交叉单纯群是双侧可缩的：存在两个特殊的退化型映射

$$s_L, s_R \colon B_n \longrightarrow B_{n+1}$$

它们分别在最左端（或最右端）添加一条新的平凡辫股（见图 2）。

容易看出，“幺半”公理（定义 2.2）成立，且两个辫子的乘积由并置运算给出（见图 3）。

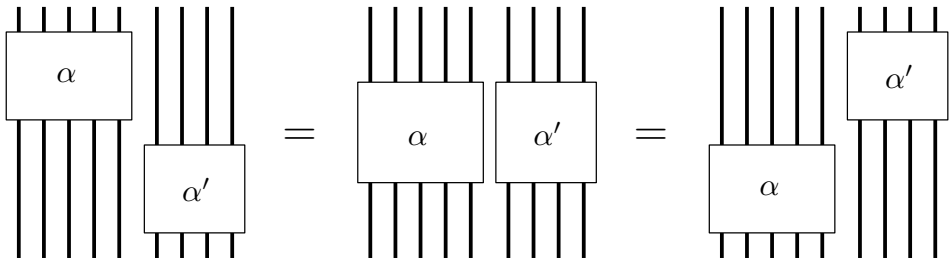


FIGURE 3. 两个辫子的水平并置 $\alpha \boxplus \alpha'$。

在这些结构映射下，交叉单纯辫群具有拟运算结构，这一事实可由辫群中的一个直接恒等式推出。从图示表示（图 4）可以直接看出这一点，其中结构映射的相容性一目了然。严谨的验证可借助辫群中的标准事实：$\sigma_i^b = \sigma_j$ 当且仅当$b^{-1}(i) = j$，并且可以在 b的第 i股与第（$i+1$）股之间插入一条带状物；例如，参见 [6]。

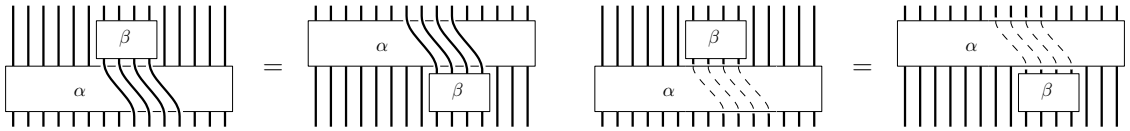


FIGURE 4. B_n 中的关系，展示了拟运算律公理。

2.1.1. 其他类辫群。另一类示例是同伦辫群hBr_n（形式化处理参见例如 [1]）。其结构分解为

$$1 \longrightarrow hP_{n+1} \longrightarrow hBr_{n+1} \longrightarrow S_n \longrightarrow 1,$$

其中 hP_n 表示纯同伦辫群。通常的辫股加倍与删除操作赋予hB_n 交叉单纯群结构。由于 $\{hBr_{n+1}\}_{n\geq 0}$ 是标准辫交叉单纯群的一个商，所有结构公理（双侧可缩、幺半性、拟运算性）都由此继承。

另一个例子是焊接辫群 WBr_n（例如参见 [4]），其结构分解为

$$1 \longrightarrow WP_{n+1} \longrightarrow WBr_{n+1} \longrightarrow S_n \longrightarrow 1,$$

其中 WP_n 是纯焊接辫群。双侧可缩性和幺半性是显然的，而拟运算性则可通过类似于 Artin 辫群情形的论证得出，所用的是关于生成元共轭的类似判据（参见 [3]）。

3. 构造幺半群

我们的主要目标是利用交叉单纯群来定义幺半群。最简单的情形是集合中的拟运算。为了使后续构造能够自成一体，我们简要回顾幺半群的定义，并引入一个移位变体，这将更便于实现我们的目的。

3.0.1. 幺半群。

定义 3.1（见 [11]）。设 $\mathcal{M}$是一个幺半范畴。一个（非对称）幺半群 于 $\mathcal{M}$ 中，是一个对象序列 $\mathcal{O}(0)$ $\mathcal{O}(1)$ $\mathcal{O}(2)\ldots$，并附有以下额外数据：对每个 $n \geq 1, m \geq 0$，都有 n运算 $\circ_1, \ldots, \circ_n$

$$\mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(m) \to \mathcal{O}(n+m-1).$$

它们还满足以下关系和约束：

(1) 只有一个元素 $* \in \mathcal{O}(0)$；(2) 存在一个元素 $\mathsf{id} \in \mathcal{O}(1)$，使得

$$\mathsf{id} \circ_1 \nu = \nu, \mu \circ_i \mathsf{id} = \mu;$$

(3) 对于 $\lambda \in \mathcal{O}(l)$ $\mu \in \mathcal{O}(m)$ $\nu \in \mathcal{O}(n)$，有

$$(\lambda \circ_i \mu) \circ_{i+j-1} \nu = \lambda \circ_i (\mu \circ_j \nu)$$

对于 $1 \leq i \leq l, \quad 1 \leq j \leq m$;

(4) 对于 $\lambda \in \mathcal{O}(l)$ $\mu \in \mathcal{O}(m)$ $\nu \in \mathcal{O}(n)$，有

$$(\lambda \circ_i \mu) \circ_{k-1+m} \nu = (\lambda \circ_k \nu) \circ_i \mu$$

对于 $1 \leq i < k \leq l$。

接下来，我们将利用交叉单纯群 G_* 构造一个带有 $\mathcal{O}(n) = G_{n-1}$ 的幺半群（或一个利用 G_{n-1} 构造的群胚）。为使记号简洁，我们提出移位幺半群的一个（等价）概念。

定义 3.2。设 $\mathcal{M}$ 是一个幺半范畴。$\mathcal{M}$ 中的一个（非对称）移位幺半群 是一个半单纯对象 $\mathcal{U}(*) \in \mathcal{M}^{\Delta^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{inj}}}$，并配有 $n+1$ 态射 $\circ_0, \ldots, \circ_n$，它们作用于

$$\circ_i \colon \mathcal{U}(n) \times \mathcal{U}(m) \to \mathcal{U}(n+m) \text{ for } i = 0, \ldots, n.$$

满足以下关系和约束：

(1) 存在一个元素 $\mathsf{id} \in \mathcal{U}(0)$，使得

$$\mathsf{id} \circ_0 \nu = \nu, \quad \mu \circ_i \mathsf{id} = \mu;$$

（2）对于 $\lambda \in \mathcal{U}(l)$ $\mu \in \mathcal{U}(m)$ $\nu \in \mathcal{U}(n)$，有

$$(\lambda \circ_i \mu) \circ_{i+j} \nu = \lambda \circ_i (\mu \circ_j \nu)$$

对于 $0 \leq i \leq l, \quad 0 \leq j \leq m$;

（3）对于 $\lambda \in \mathcal{U}(l)$ $\mu \in \mathcal{U}(m)$ $\nu \in \mathcal{U}(n)$，有

$$(\lambda \circ_i \mu) \circ_{k+m} \nu = (\lambda \circ_k \nu) \circ_i \mu$$

对于 $0 \leq i < k \leq l$;

（4）对于 $\lambda \in \mathcal{U}(l)$ $\mu \in \mathcal{U}(m)$，有

$$d_{i+j}(\lambda \circ_i \mu) = \lambda \circ_i d_j(\mu)$$

对于 $0 \leq i \leq l, \quad 0 \leq j \leq m$;

(5) 对于 $\lambda \in \mathcal{U}(l)$ $\mu \in \mathcal{U}(m)$ $\nu \in \mathcal{U}(n)$ 和 $0 \leq i < k \leq l$，有

$$d_i(\lambda \circ_k \nu) = d_i(\lambda) \circ_k \nu,$$
$$d_{k+m}(\lambda \circ_i \mu) = d_k(\lambda) \circ_i \mu.$$

下一个引理是显然的，因此我们省略其证明。

引理 3.3。该变换

$$\mathcal{U}(n) \mapsto \mathcal{O}(n+1), \quad \circ_i \mapsto \circ_{i+1}, \quad d_i \mapsto (-) \circ_{i+1} *$$

在幺半群范畴与移位幺半群范畴之间给出了一个同构。

固定一个幺半（双侧可缩、对称）交叉单纯群 G_*。

定理 3.4。 按照以下公式定义 $n+1$ ***Set*** 函数 $G_n \times G_m \to G_{n+m}$

$$\circ_i \colon (\alpha, \beta) \mapsto (1_i \boxplus \beta \boxplus 1_{n-i}) \cdot s_i^m(\alpha).$$

在这些运算以及来自单纯结构的 d_i***'th*** 下，集合 G_* 构成 ***Set*** 中的（非对称）幺半群。

该定理的证明完全是计算性的，详见附录。

沿用 [8], ，我们在幺半范畴 $\mathcal{M}$中定义 G_*-类幺半群。虽然下文的定义针对移位幺半群表述，但可以直接转换为普通歌剧的语言。特别地，对于交叉单纯群 S_*，我们的定义还原为对称歌剧的经典概念；而对于 B_* ，则与 Fiedorowicz 对辫状歌剧的定义一致。

定义 3.5. </style} G_*-类移位幺半群在 $\mathcal{M}$ 中是一个非对称移位幺半群 $\mathcal{U}(n)$，其中每个对象 $\mathcal{U}(n)$ 都配备了 G_n 的右作用，并满足以下等变条件。对于每个 $\mu \in \mathcal{U}(m)$ $\nu \in \mathcal{U}(n)$、 $\beta \in G_n$ 和 $i \leq m$:

(1) $\mu \circ_i \nu^\beta = (\mu \circ_i \nu)^{\beta'}$，其中 $\beta' = 1_i \boxplus \beta \boxplus 1_{m-i}$;
(2) $\mu^\beta \circ_i \nu = (\mu \circ_{\sigma(i)} \nu)^{\beta''}$，其中 $\beta'' = d_i^n \beta$。

与辫状情形（见 [8]）一样，我们将 G_∞-幺半群定义为一种类似 G_* 的幺半群，其中空间 $\mathcal{O}(n)$ 可缩，且 G_n 的作用是自由的。

为了继续 Fiedorowicz 的论证，有必要给出一个具体例子：一个类似 G_* 的幺半群，且满足 $\mathcal{O}(n) = EG_n$。值得注意的是，本文第一段引入的群胚正好可以作为这个例子。

在着手构造群胚中的歌剧之前，我们注意到，对一个对称的双侧可缩交叉单纯群 G_* 所施加的拟运算律公理（定义 2.4），意味着 Set-幺半群对所有可容许输入都满足以下关系。

$$(\alpha \circ_i \beta) \cdot (\alpha' \circ_{\alpha^{-1}(i)} \beta') = \alpha\alpha' \circ_i \beta\beta'. \tag{3.1}$$

恒等式 ***3.1*** 的证明。 考虑 α， $\alpha' \in G_n$, β， $\beta' \in G_m$。展开左侧，并对第二个和第三个因子使用拟运算律公理:

$$(1_i \boxplus \beta \boxplus 1_{n-i}) \cdot s_i^m(\alpha) \cdot (1_{\alpha^{-1}(i)} \boxplus \beta' \boxplus 1_{n-\alpha^{-1}(i)}) \cdot s^m_{\alpha^{-1}(i)}(\alpha') =$$

$$= (1_i \boxplus \beta \boxplus 1_{n-i}) \cdot (1_i \boxplus \beta' \boxplus 1_{n-i}) \cdot s_i^m(\alpha) s^m_{\alpha^{-1}(i)}(\alpha').$$

□

定理 3.6。 设 G_* 是一个歌剧交叉单纯群，并设 Γ_* 是其作用群胚序列。定义 $n+1$ 函数 $\circ_i$: $\Gamma_n \times \Gamma_m \to \Gamma_{n+m}$ 如下:

$$[\sigma, f] \circ_i [\tau, g] = [\sigma \circ_i \tau, (f^{-1} \circ_{\sigma^{-1}(i)} g^{-1})^{-1}],$$

其中$\circ_{\sigma^{-1}(i)}$ 是由定理 ***3.4*** 给出的 G_* 上的运算。则 $\circ_i$ 是群胚函子。此外，群胚序列 $\{\Gamma_n\}$ ，连同 $\circ_i$ 和单纯 d_j，构成 ***Gpd*** 中的一个移位幺半群。

证明。 首先，需要确保 $\circ_i$ 都是定义正确的群胚函子。这直接由恒等式 3.1 得出。移位幺半群的公理由定理 3.4 得出。□

注 3.7。 值得注意的是，对于 $G_* = B_*$ 和 $G_* = S_*$，上述定理中出现的构造早已在文献中得到研究。在 $G = S_*$的情形下，空间 $B\Gamma(S_*) = ES_*$ 为 E_∞ 幺半群的对象提供了标准模型。对于 $G = B_*$，所得幺半群专门化为 E_2 幺半群的模型，该模型见 [5, 第 5]章。

3.1. 应用这些结果。 设 G_* 为一个幺半交叉单纯群。记 $\mathcal{O}(n)$为上述构造的G_∞ 幺半群，令 T_G 为其单子 T_G: 拓扑空间范畴 $\to$ 拓扑空间范畴。第一个结果是一个同语反复。

Theo注 3.8. 考虑群完备化 $T_G(*)^{grp}$。于是存在一个弱等价

$$T_G(*)^{grp} \xrightarrow{\simeq} \Omega B\left(\bigsqcup_{n\geq 0} BG_n\right).$$

P证明. 检查必要的结构彼此吻合后，我们只需进行简单的改写 ng

$$T_G(*)^{grp} = \Omega \mathsf{B}(T_G(*)) = \Omega \mathsf{B}\left(\bigsqcup_{n\geq 0} EG_n \times_{G_n} *\right) = \Omega \mathsf{B}\left(\bigsqcup_{n\geq 0} \mathsf{B}G_n\right). \quad \square$$

以下结论可通过类似于 [8] 中的论证来证明。将拓扑幺半群 M 的 G-bar 构造定义为复合函子

$$\mathsf{B}^{G_*}M \colon \Delta G \to \Delta S \to \mathsf{Top}, \quad [n] \mapsto M^{n+1}.$$

因此，在这一更一般的情形下，我们得到了 Fiedorowicz 定理的一个类似结论。

定理 3.9 (参见 [8])。 存在一个弱等价

$$hocolim_{\Delta G} B^{G_*}M \simeq B(T_G, C_1, M).$$

以及相应的推论。

推论 3.10。 对于任意基点空间 X，存在弱等价

$$hocolim_{\Delta G} B^{G_*}(JX) \simeq T_G X,$$

其中 JX 表示 *James* 构造。

附录 A. 常规验证

引理 A.1。 关于 S_*[2] 上的标准单纯集和幺半群结构，有以下恒等式:

(1) 对于 $i < j$，有

$$d_i(\sigma)^{-1}(j-1) = \begin{cases} \sigma^{-1}(j) - 1, \text{ if } \sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j), \\ \sigma^{-1}(j), \text{ if } \sigma^{-1}(j) < \sigma^{-1}(i). \end{cases}$$

(2) 对于 $i < j$，有

$$d_j(\sigma)^{-1}(i) = \begin{cases} \sigma^{-1}(i) - 1, \text{ if } \sigma^{-1}(j) < \sigma^{-1}(i), \\ \sigma^{-1}(i), \text{ if } \sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j). \end{cases}$$

(3) 对于 $i < j$，有

$$s_j(\sigma)^{-1}(i) = \begin{cases} \sigma^{-1}(i) + 1, \text{ if } \sigma^{-1}(j) < \sigma^{-1}(i), \\ \sigma^{-1}(i), \text{ if } \sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j). \end{cases}$$

(4) 对于 $\sigma \in S_n$、$\tau \in S_m$，以及对于 $i \in [n]$、$j \in [m]$，有

$$(\sigma \circ_i \tau)^{-1}(i+j) = \sigma^{-1}(i) + \tau^{-1}(j).$$

(5) 对于 $i < j$，有

$$s_i(\sigma)^{-1}(j+1) = \begin{cases} \sigma^{-1}(j), \text{ if } \sigma^{-1}(j) < \sigma^{-1}(i) \\ \sigma^{-1}(j) + 1, \text{ if } \sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j) \end{cases}$$

证明。 直接验证。 $\square$

[2]回想一下， S_n 是秩为 $n+1$ 的对称群 Bij($[n]$)

A.1. 引理 1.7 中单纯恒等式的验证。我们证明单纯恒等式在 Γ_*.

(1) $d_id_j = d_{j-1}d_i$ 的情形，其中 $i < j$. 固定为 $[\sigma, f] \in \Gamma_{n\circ}$ 于是,

$$d_id_j[\sigma, f] = d_i[d_j(\sigma), d_{\sigma^{-1}(j)}(f^{-1})^{-1}] = [d_id_j(\sigma), d_{d_j(\sigma)^{-1}(i)}(d_{\sigma^{-1}(j)}(f^{-1}))^{-1}].$$

第一分量显然满足单纯恒等式。对于第二分量，我们必须证明等式

$$d_{d_j(\sigma)^{-1}(i)}(d_{\sigma^{-1}(j)}(f)) = d_{d_i(\sigma)^{-1}(j-1)}(d_{\sigma^{-1}(i)}(f)) \tag{A.1}$$

对任意 f均成立。只需考察两种情况： $\sigma^{-1}(j) < \sigma^{-1}(i)$以及$\sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j)$。在第一种情况 $\sigma^{-1}(j) < \sigma^{-1}(i)$下，所需的恒等式 (A.1) 化为方程

$$d_{\sigma^{-1}(i)-1}(d_{\sigma^{-1}(j)}(f)) = d_{\sigma^{-1}(j)}(d_{\sigma^{-1}(i)}(f))$$

根据引理 A.1 中的公式，这个方程成立。而这个方程是交叉单纯群 G_* 中指标 $\sigma^{-1}(j) < \sigma^{-1}(i)$对应的标准单纯形恒等式的一个特例。在第二种情况 $\sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j)$下，所需的恒等式 (A.1) 化为方程

$$d_{\sigma^{-1}(i)}d_{\sigma^{-1}(j)} = d_{\sigma^{-1}(j)-1}d_{\sigma^{-1}(i)},$$

这又是一个标准结果。其余的单纯恒等式在附录 A.1 中验证。

(2) 当 $d_is_j = s_{j-1}d_i$ 时， $i < j$。固定 $[\sigma, f] \in \Gamma_{n\circ}$ 于是,

$$d_is_j[\sigma, f] = [d_is_j(\sigma), d_{s_j(\sigma)^{-1}(i)}s_{\sigma^{-1}(j)}(f^{-1})^{-1}],$$

而

$$s_{j-1}d_i[\sigma, f] = [s_{j-1}d_i(\sigma), s_{d_i(\sigma)^{-1}(j-1)}d_{\sigma^{-1}(i)}(f^{-1})^{-1}].$$

第一分量显然满足单纯形恒等式。对于第二分量，我们必须证明等式

$$d_{s_j(\sigma)^{-1}(i)}s_{\sigma^{-1}(j)}(f) = s_{d_i(\sigma)^{-1}(j-1)}d_{\sigma^{-1}(i)}(f) \tag{A.2}$$

对任意 f 都成立。这可以通过考察两种情形 $\sigma^{-1}(j) < \sigma^{-1}(i)$ 和$\sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j)$ 来验证。

在第一种情形 $\sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j)$ 中，所讨论的恒等式 (A.2) 转化为方程

$$d_{\sigma^{-1}(i)}s_{\sigma^{-1}(i)} = s_{\sigma^{-1}(j)-1}d_{\sigma^{-1}(i)},$$

它是标准单纯形恒等式的一个实例。在第二种情况中， $\sigma^{-1}(j) < \sigma^{-1}(i)$，恒等式转化为

$$d_{\sigma^{-1}(i)+1}s_{\sigma^{-1}(j)} = s_{\sigma^{-1}(j)}d_{\sigma^{-1}(i)},$$

这又是标准单纯形恒等式的一个实例。

(3) $s_is_j = s_{j+1}s_i$ 情形， $i \le j$。固定 $[\sigma, f] \in \Gamma_{n\circ}$ 那么,

$$s_is_j[\sigma, f] = s_i[s_j(\sigma), s_{\sigma^{-1}(j)}(f^{-1})^{-1}] = [s_is_j(\sigma), s_{s_j(\sigma)^{-1}(i)}s_{\sigma^{-1}(j)}(f^{-1})^{-1}],$$

而

$$s_{j+1}s_i[\sigma, f] = s_{j+1}[s_i(\sigma), s_{\sigma^{-1}(i)}(f^{-1})^{-1}] = [s_{j+1}s_i(\sigma), s_{s_i(\sigma)^{-1}(j+1)}s_{\sigma^{-1}(i)}(f^{-1})^{-1}].$$

第一分量显然满足单纯形恒等式。对于第二分量，我们必须证明等式

$$s_{s_j(\sigma)^{-1}(i)}s_{\sigma^{-1}(j)}(f) = s_{s_i(\sigma)^{-1}(j+1)}s_{\sigma^{-1}(i)}(f) \tag{A.3}$$

对任意 f，可通过考虑三种情况 $i = j$, $\sigma^{-1}(j) < \sigma^{-1}(i)$ 和 $\sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j)$ 来验证。

在第一种情况下 $i = j$，所讨论的恒等式 (A.3) 转化为方程

$$s_{(s_i\sigma)^{-1}(i)}s_{\sigma^{-1}(i)} = s_{(s_i\sigma)^{-1}(i+1)}s_{\sigma^{-1}(i)},$$

这是标准单纯形恒等式的一个特例。在第二种情况下 $\sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j)$，所讨论的恒等式 (A.3) 转化为方程

$$s_{\sigma^{-1}(i)}s_{\sigma^{-1}(j)} = s_{\sigma^{-1}(j)+1}s_{\sigma^{-1}(i)},$$

这是一个标准单纯形恒等式。在第三种情形 $\sigma^{-1}(j) < \sigma^{-1}(i)$ 中，所讨论的恒等式 (A.3) 化为等式

$$s_{\sigma^{-1}(i)+1}s_{\sigma^{-1}(j)} = s_{\sigma^{-1}(j)}s_{\sigma^{-1}(i)},$$

这是标准单纯形恒等式的一个特例。

(4) 对 $i \in \{j, j+1\}$ 而言的情形 $d_i s_j = \mathsf{id}$。固定 $[\sigma, f] \in \Gamma_{n\circ}$ 于是,

$$d_i s_j[\sigma, f] = [d_i s_j(\sigma), d_{s_j(\sigma)^{-1}(i)}s_{\sigma^{-1}(j)}(f^{-1})^{-1}].$$

第一分量显然满足单纯形恒等式。对于第二分量，我们必须证明等式

$$d_{s_j(\sigma)^{-1}(i)}s_{\sigma^{-1}(j)}(f) = \mathsf{id}. \tag{A.4}$$

通过考虑 $i = j$ 和 $i = j+1$ 两种情形即可验证这一点。在第一种情形 $i = j$ 中，所讨论的恒等式 (A.4) 化为等式

$$d_{\sigma^{-1}(i)}s_{\sigma^{-1}(i)} = \mathsf{id},$$

这是同一标准单纯形恒等式的一个实例。在第二种情况 $i = j+1$ 下，它转化为方程

$$d_{\sigma^{-1}(j)+1}s_{\sigma^{-1}(j)} = \mathsf{id},$$

这是同一标准单纯形恒等式的一个实例。

(5) $d_i s_j = s_j d_{i-1}$ 对于 $i > j+1$ 的情形。固定 $[\sigma, f] \in \Gamma_{n\circ}$ 于是,

$$d_i s_j[\sigma, f] = [d_i s_j(\sigma), d_{s_j(\sigma)^{-1}(i)}s_{\sigma^{-1}(j)}(f^{-1})^{-1}],$$

而

$$s_j d_{i-1}[\sigma, f] = [s_j d_{i-1}(\sigma), s_{d_{i-1}(\sigma)^{-1}(j)}d_{\sigma^{-1}(i-1)}(f^{-1})^{-1}].$$

第一分量显然满足单纯形恒等式。对于第二个，我们必须证明等式

$$s_{d_{i-1}(\sigma)^{-1}(j)}d_{\sigma^{-1}(i-1)}(f) = s_{d_{i-1}(\sigma)^{-1}(j)}d_{\sigma^{-1}(i-1)}(f) \tag{A.5}$$

对任意 f 成立。这可以通过考虑两种情形 $\sigma^{-1}(j) < \sigma^{-1}(i-1)$ 以及

$$\sigma^{-1}(j) > \sigma^{-1}(i-1)$$

在第一种情况下 $\sigma^{-1}(j) < \sigma^{-1}(i-1)$，所讨论的恒等式 (A.5) 化为

$$d_{\sigma^{-1}(i-1)+1}s_{\sigma^{-1}(j)} = s_{\sigma^{-1}(j)}d_{\sigma^{-1}(i-1)},$$

这是标准单纯形恒等式的一个实例。在第二种情况下 $\sigma^{-1}(i-1) < \sigma^{-1}(j)$，所讨论的恒等式 (A.5) 化为

$$d_{\sigma^{-1}(i-1)}s_{\sigma^{-1}(j)} = s_{\sigma^{-1}(j)-1}d_{\sigma^{-1}(i-1)},$$

这是标准单纯形恒等式的一个实例。

定理 3.4 的证明。 我们通过直接验证移位幺半群的公理来进行证明。半单纯模的结构由 G_* 上的交叉单纯群结构诱导而来。

(1) 我们取 $\in G_0$ 为元素 id $1 \in G_{0}$。于是，id $\circ_0 \nu = \nu \cdot s_0^*(1) = \nu$

$$\mathsf{id} \circ_0 \nu = \nu \cdot s_0^*(1) = \nu \text{ and } \mu \circ_i \mathsf{id} = (1_* \boxplus 1 \boxplus 1_*) \cdot s_i^0(\mu) = \mu,$$

因为 s_L， s_R 保持恒等式。因此，id 的公理得到满足。

(2) 对适当的指标，情形为 $(\lambda \circ_i \mu) \circ_{i+j} \nu = \lambda \circ_i (\mu \circ_j \nu)$。固定元素 $\lambda \in G_l$， $\mu \in G_m$， $\nu \in G_n$ 以及数 $0 \le i \le l, 0 \le j \le m$。于是，

$$(\lambda \circ_i \mu) \circ_{i+j} \nu = (1_{i+j} \boxplus \nu \boxplus 1_{l+m-(i+j)}) \cdot s^n_{i+j}(\underbrace{(1_i \boxplus \mu \boxplus 1_{l-i})}_{X} \cdot \underbrace{s_i^m(\lambda)}_{Y}).$$

将上文 s_{i+j} 下的左因子记为 $X = 1_i \boxplus \mu \boxplus 1_{l-i}$，第二个因子记为 $Y = s_i^m(\lambda)$。展开 $s_{i+j}(XY) = s_{i+j}(X) s_{X^{-1}(i+j)}(Y)$。于是，

$$s^n_{i+j}(X) = s^n_{i+j}(s^i_L(s_R^{l-i}(\mu))) = s^i_L s_R^{l-i} s^n_j \mu = 1_i \boxplus s^n_j \mu \boxplus 1_{l-i}$$

根据单纯恒等式。由于对于某个 $0 \le k \le m$， $X^{-1}(i+j) = i + k$，单纯恒等式给出以下等式

$$s^n_{X^{-1}(i+j)} = s^n_{i+k} s^m_i(\lambda) = s_i^{m+n}(\lambda).$$

与此同时，

$$\begin{aligned} \lambda \circ_i (\mu \circ_j \nu) &= 1_i \boxplus ((1_j \boxplus \nu \boxplus 1_{m-j}) \cdot s^n_j(\mu)) \boxplus 1_{l-i}) \cdot s_i^{m+n}(\lambda) \\ &= (1_{i+j} \boxplus \nu \boxplus 1_{l+m-(i+j)}) \cdot (1_i \boxplus s^n_j \mu \boxplus 1_{l-i}) \cdot s_i^{m+n}(\lambda) \end{aligned}$$

因此，所需的恒等式等价于

$$\begin{aligned} &(1_{i+j} \boxplus \nu \boxplus 1_{l+m-(i+j)}) \cdot (1_i \boxplus s^n_j \mu \boxplus 1_{l-i}) \cdot s_i^{m+n}(\lambda) \\ &= (1_{i+j} \boxplus \nu \boxplus 1_{l+m-(i+j)}) \cdot (1_i \boxplus s^n_j \mu \boxplus 1_{l-i}) \cdot s_i^{m+n}(\lambda), \end{aligned}$$

这是显然成立的。

(3) 对于适当指标的情形 $\lambda \circ_i \mu \circ_{k+m} \nu = (\lambda \circ_k \nu) \circ_i \mu$。取元素 $\lambda \in G_l, \mu \in G_m, \nu \in G_n$ 和数 $0 \le i < k \le l$。于是，

$$(\lambda \circ_i \mu) \circ_{k+m} \nu = (1_{k+m} \boxplus \nu \boxplus 1_{l-k}) \cdot s^n_{k+m}(\underbrace{(1_i \boxplus \mu \boxplus 1_{l-i})}_{X} \cdot \underbrace{s_i^m(\lambda)}_{Y}).$$

将上文 s_{i+j} 下的左因子记为 $X = (1_i \boxplus \mu \boxplus 1_{l-i})$，第二个因子记为 $Y = s_i^m(\lambda)$。展开 $s_{i+j}(XY) = s_{i+j}(X) s_{X^{-1}(i+j)}(Y)$。于是，

$$s^n_{k+m}(X) = s^n_{k+m} s^i_L s_R^{l-i} \mu = s^i_L s^n_{k+m-i} s_R^{l-i} \mu = s^i_L s_R^{l-i+n} \mu = (1_i \boxplus \mu \boxplus 1_{l+n-i}).$$

由于 $X(k+m) = k+m$，下列等式成立：

$$(\lambda \circ_i \mu) \circ_{k+m} \nu = (1_{k+m} \boxplus \nu \boxplus 1_{m+l-(k+m)}) \cdot (1_i \boxplus \mu \boxplus 1_{l+n-i}) \cdot s^n_{k+m} s_i^m \lambda.$$

注意 ，根据幺半交叉群公理，前两个因子可交换。同时，

$$(\lambda \circ_k \nu) \circ_i \mu = (1_i \boxplus \mu \boxplus 1_{l+n-i}) \cdot s_i^m(\underbrace{(1_k \boxplus \nu \boxplus 1_{l-k})}_{X} \cdot \underbrace{s^n_k(\lambda)}_{Y}).$$

将上方的左因子记为 $s_i^m(1_k \boxplus \nu \boxplus 1_{l-k})$，第二个因子记为 $Y = s^n_k(\lambda)$。注意，由于 $i < k$，有 $X(i) = i$。因此，满足以下展开式： $s_i(XY) = s_i(X) s_i(Y)$。应用单纯恒等式，可以推出：

$$s_i(X) = s_i(s^k_L(s_R^{l-k}(\nu))) = s_L^{k+1} s_R^{l-k} \nu.$$

这里，最后一个等式利用了 $k > i$ 这一事实。因此，所需的恒等式等价于

$$(1_{k+m} \boxplus \nu \boxplus 1_{l-k}) \cdot (1_i \boxplus \mu \boxplus 1_{l+n-i}) \cdot s^n_{k+m} s^m_i(\lambda)$$
$$= (1_i \boxplus \mu \boxplus 1_{l+n-i}) \cdot (1_{k+m} \boxplus \nu \boxplus 1_{l-k}) \cdot s^m_i s^n_k(\lambda).$$

这是因为前两个倍数由于上述原因以及单纯形恒等式而彼此可交换。

(4) 对于 $0 \le i \le l, 0 \le j \le m$，考虑 $d_{i+j}(\lambda \circ_i \mu) = \lambda \circ_i d_j(\mu)$ 的情形。取元素 $\lambda \in G_l, \mu \in G_m, \nu \in G_n$以及数 $0 \le i \le l, 0 \le j \le m$。于是，

$$d_{i+j}((1_i \boxplus \mu \boxplus 1_{l-i}) \cdot s^m_i(\lambda)) = d_{i+j}(1_i \boxplus \mu \boxplus 1_{l-i}) \cdot d_{(1_i \boxplus \mu \boxplus 1_{l-i})^{-1}(i+j)} s^m_i(\lambda)$$
$$= (1_i \boxplus d_j(\mu) \boxplus 1_{l-i}) \cdot d_{\mu^{-1}(j)+i} s^m_i(\lambda).$$

与此同时，

$$\lambda \circ_i d_j(\mu) = (1_i \boxplus d_j(\mu) \boxplus 1_{l-i}) \cdot s^{m-1}_i(\lambda).$$

由单纯恒等式可得，

$$s^{m-1}_i(\lambda) = d_{\mu^{-1}(j)+i} s^m_i(\lambda),$$

因此，所需的恒等式成立。

(5) 对于 $0 \le i < k \le l$，考虑 $d_i(\lambda \circ_k \nu) = d_i(\lambda) \circ_k \nu$ 和 $d_{k+m}(\lambda \circ_i \mu) = d_k(\lambda) \circ_i \mu$ 的情形。这些恒等式可由直接的单纯计算得到

$$d_i((1_k \boxplus \nu \boxplus 1_{l-k}) \cdot s^n_k(\lambda)) = (1_{k-1} \boxplus \nu \boxplus 1_{l-k}) \cdot d_i s^n_k(\lambda) = (1_{k-1} \boxplus \nu \boxplus 1_{l-k}) \cdot s^n_k(d_i \lambda)$$

and

$$d_{k+m}((1_i \boxplus \mu \boxplus 1_{l-i}) \cdot s^m_i(\lambda)) = (1_i \boxplus \mu \boxplus 1_{l-i-1}) \cdot d_{k+m} s^m_i(\lambda).$$

附录 B. 结构映射是 Kan 纤维化

设 G_* 是一个（不一定是对称的）交叉单纯群，其结构投影为π: $G_* \to N_*$。在本附录中，我们给出 π 是 Kan 纤维化的一个充分条件。

定理 B.1. 设 G_* 是一个（不一定是对称的）交叉单纯群，并且结构投影映射 π: $G_* \to N_*$ 存在一个 *sSet*-截面。那么， $G_* \xrightarrow{\pi} N_*$ 是 *Kan* 纤维化。

证明. 考虑下图所示的提升问题。记 e 为 Δ^n 的非退化n-单纯形。我们的目标是定义 $\Phi(e) \in G_n$。令 y_0，……， y_{k-1}， y_{k+1}，……， y_n 表示 $(\Lambda^n_k)_{n-1}$ 的非退化 $(n-1)$-单纯形。

注意到， G_* 中的每个元素都存在唯一的分解，形式为 $p \cdot s$，其中 p 属于单纯子群 $\ker\{G \xrightarrow{\pi} N\}$，且 $s \in \eta(N)$。我们寻求方程的解

$$d_r \Phi(e) = y_r$$

其形式为 $\Phi(e) = p \cdot ((\eta \circ i)(e))$。

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^n_k & \xrightarrow{\quad j \quad} & G_* \\ {\scriptstyle \iota}\downarrow & \overset{\Phi}{\nearrow} & \eta\downarrow\ \ \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \Delta^n & \xrightarrow[\quad i \quad]{} & N_*. \end{array}$$

现考察　　分解 $y_r = p_r s_r$，其中 $r = 0$，……， n。由于 p属于 π的核，我们有

$$d_r \Phi(e) = d_r(p) \cdot d_r((\eta \circ i)(e)).$$

此外，由于对每个 $r \ne k$，都有 $\pi(d_r(\eta \circ i)(e)) = \pi(y_r) = s_r$，我们寻求满足以下条件的 p

$$d_0(p) = p_0, \ \dots, \ d_{k-1}(p) = p_{k-1}, \ d_{k+1}(p) = p_{k+1}, \ \dots, \ d_n(p) = p_n. \tag{B.1}$$

对于指标 $i < j$，考虑

$$d_i y_j = d_i(p_j \cdot s_j) = d_i(p_j) \cdot d_i(s_j), \quad \text{and} \quad d_{j-1} y_i = d_{j-1}(p_i) \cdot d_{j-1}(s_i).$$

由分解的唯一性可知

$$d_i p_j = d_{j-1} p_i \quad \text{and} \quad d_i s_j = d_{j-1} s_i.$$

由于 $\ker\{G_* \xrightarrow{\pi} N\}$ 是一个单纯群，因此它是一个 Kan复形。所以，方程 (B.1) 有解。□

这一结果的主要应用实例是交叉单纯辫群 B_*。置换辫是一个广为人知的概念；详细介绍请参见 [7]。

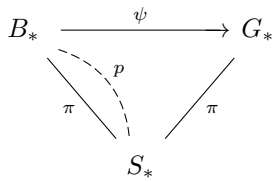
定义 B.2. 若辫子 $\beta \in B_n$ 存在一个正代表元，使得任意两股线之间至多有一次交叉，则称其为置换辫 。

置换辫与它们所诱导的置换一一对应。我们用 p_n 表示将一个置换映射到其对应置换辫的双射。

由上述几何刻画可直接得出，将置换映射到其置换辫的对应关系定义了一个单纯集合的态射

$$p_* \colon S_* \longrightarrow B_*,$$

它是结构投影 $\pi\colon B_* \to S_*$ 的一个截面。因此，若 G_* 是一个对称单纯群，并配备一个满足 $\pi_G \circ \psi = \pi_B$ 的态射 $\psi\colon B_* \to G_*$，则投影π_G 在单纯集合范畴中也有一个截面。



上述观察给出了许多示例。特别地，我们列出以下结构投影为 Kan纤维化的交叉单纯群：

(1) 同伦辫群 $\{hBr_{n+1}\}_{n\geq 0}$；(2) 焊接辫群 $\{WBr_{n+1}\}_{n\geq 0}$；(3) 曲面的框架辫群 $\{Br^{\mathrm{fr}}_{n+1}(M)\}_{n\geq 0}$，如 [12] 中所引入；(4) 图表 $B_n \to S_n \leftarrow \mathbb{Z}/(n+1)$ 的拉回。

参考文献

[1] V. G. Bardakov、V. V. Vershinin 和 Jie Wu。关于同伦辫。2021年。arXiv：2008.07806[math.GR]. URL：https://arxiv.org/abs/2008.07806.[2] Barr 等人。“可缩单纯对象”。英文。载于：*Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae* 60.4 (2019)，第473–495页。 URL：http://eudml.org/doc/295068。[3] Paolo Bellingeri。“曲面辫群中的中心化子”。载于：*Communications in Algebra* 32.10 (2004)，第4099–4115页。 DOI：10.1081/AGB-200029703。电子印本：https://doi.org/10.1081/AGB-200029703。 URL：https://doi.org/10.1081/AGB-200029703。[4] Paolo Bellingeri 和 Arthur Soulie。焊接辫群表示札记。2020年。arXiv：2001.04272 [math.GR]。 URL：https://arxiv.org/abs/2001.04272。[5] Fresse Benoist。幺半群的同伦与 *Grothendieck–Teichm¨uller* 群，第*1*部分：代数理论及其拓扑背景。美国数学学会，2017年。[6] Patrick Dehornoy 等人。*Garside* 理论基础。2013年。arXiv：1309.0796 [math.GR].URL：https://arxiv.org/abs/1309.0796。[7] DavidB. A.Epstein。“群中的文字处理”。载于：1992年。 URL：https://api.semanticscholar.org/语料库编号:1504155.[8] Z. Fiedorowicz. “对称 Bar 构造”。载于：预印本（1996）。

[9] Zbigniew Fiedorowicz 和 Jean-Louis Loday。“交叉单纯群及其相关同调”。载于：美国数学会会刊326.1（1991），第 57–87 页。ISSN：00029947。URL：http://www.jstor.org/stable/2001855（访问于 01/11/2025）。[10] Juan Gonzalez-Meneses。《辫群基础结果》。2010。arXiv：1010.0321 [math.GT]。URL：https://arxiv.org/abs/1010.0321。[11] Loday Jean-Louis 和 Bruno Vallette。《代数歌剧》。数学科学基础丛书。施普林格出版社柏林—海德堡，2012。ISBN：9783642303623。[12] R. Krasauskas。“框架辫的交叉单纯群与曲面的映射类群”。载于：立陶宛数学杂志36.3（1996年7月），第 263–281 页。ISSN：1573-8825。DOI：10.1007/BF02986853。URL：https://doi.org/10.1007/BF02986853。[13] R. Krasauskas。“斜单纯群”。载于：立陶宛数学杂志27.1（1987年1月1日），第 47–54 页。ISSN：1573-8825。DOI：10.1007/BF00972021。URL：https://doi.org/10.1007/BF00972021（访问于 09/18/2025）。

Email address：artemsemidetnov@gmail.com，Artem.Semidetnov@etu.unige.ch

Université de Genève，Section de Mathématiques，Route de Drize 7，Villa Battelle，1227 Carouge，Switzerland