arXiv:2512.14505v1 [cs.CG] 16 Dec 2025

使用全局优化方法求解海尔布隆三角形问题

Amirali Modir[1†], Amirhossein Monji[2†], BurakKocuk[3]

[1,2]谢里夫理工大学工业工程系，1458889694，伊朗德黑兰。[3]萨班哲大学工业工程项目，34956，土耳其伊斯坦布尔。

作者贡献：amirali.mgh@sharif.edu；amirhossein.monji@sharif.edu；burakkocuk@sabanciuniv.edu；

†这些作者对本研究的贡献相同。

摘要

我们研究海尔布隆三角形问题：在单位正方形内放置 $\boldsymbol{n}$ 个点，使由这些点构成的任意三角形的最小面积最大化。该问题直接采用最大最小建模会高度非线性且非凸，因为其中存在双线性项和绝对值方程。我们提出两种混合整数二次约束规划（MIQCP）建模和一种二次约束规划（QCP）建模，均可由任意全局优化求解器直接求解。我们借鉴全局优化文献中常见的界收紧和对称性破缺不等式，提出多项公式增强措施，并进一步利用问题结构进行改进。借助这些增强措施，我们的模型能够在数秒内，对多达 $\boldsymbol{n = 8}$ 个点的实例复现已证明的最优值，并经认证达到最优。对于 $\boldsymbol{n = 9}$ 个点的情形，目前尚无解析证明，我们通过一天的计算工作量确定了经认证的最优值。这显著优于 Chen 等人（2017年）通过31天计算所确立的此前基准。

关键词： 海尔布隆三角形问题；全局优化；混合整数二次约束规划；混合整数线性规划；离散化

1 引言

海尔布隆三角形问题涉及在单位正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 中放置 n 个点（$n>2$），使得由这些点形成的任意三角形的最小面积最大化。更准确地说，设点 i 的坐标为（x_i， y_i）$\in[0,1]\times[0,1]$，其中 $i=1$，……，n，我们的目标是求解以下优化问题：

$$H_n^* := \max_{(x,y)\in[0,1]^n\times[0,1]^n} \min_{1\le i<j<k\le n} \left\{ \frac{1}{2}|x_i(y_j-y_k)-x_j(y_i-y_k)+x_k(y_i-y_j)| \right\}. \tag{1}$$

注意，表达式 $\frac{1}{2}|x_i\ (y_j-y_k)\ -x_j\ (y_i-y_k)\ +x_k\ (y_i-y_j)\ |$ 给出了由点 i、 j 和 k形成的三角形的面积。我们指出，由于双线性项和绝对值函数的存在，问题（1）具有高度非凸性。对于较小的 值，例如 3、4 或 5，最优构型很容易获得（示例见图 1 ）。然而，当 n略大时，海尔布隆三角形问题便变得极难求解。在本文中，我们的目标是使用全局优化方法求解最多包含 $n=9$ 个点的问题。

海尔布隆三角形问题的研究沿着几条截然不同的路线不断发展，从渐近界到精确的计算证明。早期工作主要聚焦于最坏情况下的解析界。这一领域由 Roth 于 1951 年开创，他发展出了一套用于证明 H_n^* 上界的工具，并确立了 $H_n^* \ll \frac{1}{n\sqrt{\log\log n}}$ [1]（这里， $A\ll B$意味着，对于某个绝对常数 c， $A\le cB$）。随后，他进一步改进了这一

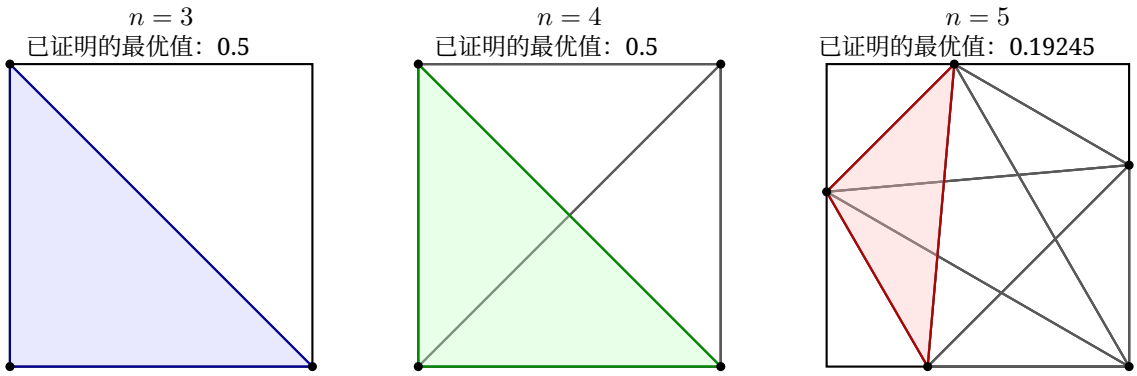

图 1：海尔布隆三角形问题中从 $n = 3$ 到 $n = 5$ 的最优点位布置。

结果，得到了形如 $H_n^* \ll n^{-\mu+\varepsilon}$ 对任意 $\varepsilon > 0$ 的界，其中指数 μ 从约 1.1056 [2, 3] 改进为 1.117 [4]。在此框架的基础上，[5] 的作者改进了这一界，通过证明 $\mu = 8/7$，将指数有效提高到 $H_n^* \ll n^{-8/7+\varepsilon}$。随后，同一批作者建立了互补的下界 $H_n^* \gtrsim (\log n)/n^2$，从而 [6], 否定了海尔布隆的原始猜想，即 $H_n^* = \Theta(1/n^2)$。

除了渐近理论之外，研究人员还采用启发式和构造性方法，寻找能够得到较大下界的特定点位布置 [7–9]。与这些启发式方法不同，针对特定较小 n 值的精确结果，已通过解析方法和计算机代数方法得到证明。具体而言，$n = 5$ 和 $n = 6$ 的精确值已在 [10], 中确定；而最近针对 $n = 7$ 和 $n = 8$，研究者运用符号计算和自动演绎来证明最优构型 [11, 12]。请注意，确定性最坏情况值 H_n 与随机点的平均情况形成鲜明对比：在平均情况下，最小三角形面积的预期值要小得多，量级为 $\Theta(1/n^3)$ [13, 14]。

对于 $n = 9$ 这类实例，精确的解析证明一直难以获得，而高通量离散化与并行枚举则得出了极为紧致的数值界。例如，[15] 的作者采用经通用图形处理器计算加速的专用网格搜索方法，得到了以下界：$0.054875999 < H_9^* < 0.054878314$。他们通过在单位正方形上对越来越精细的网格离散化递归应用分支定界算法，建立了这一对偶界；在此过程中，针对每种矩形构型计算局部上界，以严格剪除搜索空间 [15]。相比之下，本研究采用的方法将问题表述为极大极小数学规划，并运用确定性全局优化技术——具体而言，即混合整数非线性规划（MINLP）——来获得经认证的结果。我们的方法论并不依赖穷举，而是将紧致的连续松弛与自适应离散化策略相结合，构造最优性证书。这一区别至关重要，因为尽管 $n \geq 9$ 的解析证明仍难以获得，现有计算方法往往只关注启发式下界，却未提供认证所必需的相应上界。因此，专为认证海尔布隆数而设计的严格全局优化框架，在文献中仍未得到充分发展。

本文将全局优化方法应用于海尔布隆三角形问题。具体而言，我们开发了三种新颖的数学规划模型，并使用全局优化求解器 Gurobi [16] 和 BARON [17]来求解该问题。这些模型的区别在于它们处理问题（1）中非凸关系的方式，详见第2.2节。其中两个模型属于混合整数二次约束规划（混合整数二次约束规划）类别，另一个则属于二次约束规划类别。我们利用问题结构，并采用全局优化文献中的界收紧和对称性破缺等知名技术，提出了多项增强措施以强化这些公式。我们进行了大量计算，以确定性能最佳的模型和求解器，以及最有效的增强措施组合。通过严格的分析，我们首次在文献中认证了精确值 $H_9^* = 0.0548767$（在求解器容差范围内），从而弥合了先前计算研究中尚未消除的最优性间隙。

下面列出本文的主要贡献：

- 新颖公式。我们为海尔布隆三角形问题开发了三种新颖公式，可用于求解规模为 n 的任意实例。这些公式属于混合整数二次约束规划或二次约束规划类别，因此，任何支持这些问题类别的全局优化求解器都可直接用于求解海尔布隆三角形问题。

• 公式增强。 我们提出了若干增强措施，以强化所提出的公式。其中一些增强措施具有 普适性，也就是说，它们适用于点数任意的实例 n。此类增强措施包括界收紧和对称性破除不等式，这些方法在全局优化文献中十分常见。我们还提出了适用于特定 n取值的实例特定增强措施。例如，我们证明，对于九点问题，其中八个点必须位于单位盒边界附近（精确表述见命题 5）。

• 按实例规模划分的经认证的解。借助我们新颖的公式并采用增强措施，我们能够在数秒内，在求解器容差范围内，高效地求得 $n = 3, \ldots, 8$ 的已证明全局最优值。随后，我们通过建立一个与可行构型的最小面积相匹配的对偶界，认证了 $n = 9$ 的全局最优值为 $H_9^* = 0.0548767$ 。这相较于此前的先进方法 [15]，有了显著改进；该方法采用专门的基于 GPGPU 的网格搜索，历时 31 天才将界区间缩小至较窄范围（$0.054875999 < H_9^* < 0.054878314$），而我们的方法仅用一天的计算工作量便得到了经认证的值。最后，对于 $n = 10$，我们还给出一个与已知最佳结果相匹配的构型，但未提供最优性证书。我们的模型在约 800 秒内找到了一个布局，其下界为 $H_{10}^* \geq 0.0465369$，这与此前报告的最佳经验值 0.046537 一致 [8]。

本文其余部分安排如下。第2节正式介绍我们为海尔布隆三角形问题提出的三种新公式。第3 节提出三组增强措施，大幅强化这些公式。第 4 节报告了我们广泛计算研究的结果，其中包括比较各类公式和求解器，并评估每个增强组的影响。最后，第 5 节总结主要发现，并探讨未来的研究方向。

2 问题表述与求解方法

本节将正式定义海尔布隆三角形问题，并介绍三种新颖的数学规划公式，这些公式可由全局优化求解器求解。

2.1 问题表述

我们首先将问题（1）重新表述为

$$\max_{x,y,H,S} \quad H_n \tag{2}$$

$$\text{使得} \quad |S_{ijk}| \geq H_n \qquad 1 \leq i < j < k \leq n \tag{3}$$

$$S_{ijk} = \frac{1}{2}[x_i(y_j - y_k) - x_j(y_i - y_k) + x_k(y_i - y_j)] \qquad 1 \leq i < j < k \leq n \tag{4}$$

$$-\frac{1}{2} \leq S_{ijk} \leq \frac{1}{2} \qquad 1 \leq i < j < k \leq n \tag{5}$$

$$0 \leq x_i, y_i \leq 1 \qquad 1 \leq i \leq n \tag{6}$$

$$\underline{H}_n \leq H_n \leq \overline{H}_n, \tag{7}$$

其中，变量 S_{ijk} 表示顶点为 i、j 和 k 的三角形的有向面积，而 H_n 是目标函数变量，表示含有 n 个点的海尔布隆三角形问题中的最小三角形面积。请注意，约束 (5) 中给出的变量 S_{ijk} 的界，是由约束 (4) 中对该变量的定义以及约束 (5) 中给出的 $0 \leq x_i$、$y_i \leq 1$ 推出的。变量 H_n 的界的求取过程将在第 3.1.1 节中说明。尽管约束 (7) 对问题的定义而言可能看似多余，但这些先验界在计算中至关重要。具体而言，上界 H_n 对构造绝对值约束 (3) 的紧线性化至关重要（详见第 2.2.1 节），而下界 H_n 则使求解器能够有效地剪枝分支定界搜索树。

请注意，由于反凸约束（3）和双线性约束（4），上述公式具有高度非线性和非凸的特点。接下来，我们提出三种新方法，以构建混合整数二次约束规划或二次约束规划建模，从而能够直接使用现有的全局优化求解器。

2.2 求解方法

将海尔布隆三角形问题建模为适用于全局优化求解器的问题，主要挑战在于处理标准面积计算所需的非凸绝对值函数。本节将介绍三种新颖的数学规划方法，分别以不同方式解决这一核心难题。

2.2.1 方法 1

此方法的核心思想是借助额外的二元变量，将非凸约束 $H_n \le |S_{ijk}|$ 改写为一对线性不等式。为此，我们为每个三角形引入一个二元变量 b_{ijk}，以析取方式对面积 S_{ijk}的符号进行建模。具体而言，使用以下一组不等式建立所需关系：

$$(1-b_{ijk})\left(\overline{H}_n+\frac{1}{2}\right)+S_{ijk}\ge H_n \qquad 1\le i<j<k\le n \tag{8a}$$

$$b_{ijk}\left(\overline{H}_n+\frac{1}{2}\right)-S_{ijk}\ge H_n \qquad 1\le i<j<k\le n \tag{8b}$$

$$-\frac{1}{2}\le S_{ijk}-\left(\frac{1}{2}+\underline{H}_n\right)b_{ijk}\le -\underline{H}_n \qquad 1\le i<j<k\le n \tag{8c}$$

$$b_{ijk}\in\{0,1\} \qquad 1\le i<j<k\le n. \tag{8d}$$

不等式（8）中的第一对通过二元变量对非凸约束 $H_n \le |S_{ijk}|$ 进行编码，而第二对不等式同样有效，并纳入实现中以强化该公式。

于是，我们得到以下等价的混合整数二次约束规划（MIQCP）：

$$\max_{x,y,H,S,b}\{H_n : (4)-(8)\}.$$

为了进一步构建模型，我们通过定义新变量 w_{ij}，将面积公式中的双线性项分离出来：

$$w_{ij}=x_iy_j \quad 1\le i,j\le n, \tag{9}$$

该结果 用这些新变量表示有向面积的线性表达式；并重写（4）a s

$$S_{ijk}=\frac{1}{2}[(w_{ij}-w_{ik})-(w_{ji}-w_{jk})+(w_{ki}-w_{kj})] \quad 1\le i<j<k\le n. \tag{10}$$

The 所得的混合整数二次约束规划形式（即我们在实现中采用的形式）如下 :

$$\max_{x,y,w,H,S,b}\{H : (5)-(10)\}.$$

该模型是 一个混合整数二次约束规划，因为它同时包含二元变量 b_{ijk} 和非凸二次 c
等式约束 式中的约束 (9)。

2.2.2 方法2

此方法的核心思想是采用非凸二次规划形式，避免使用第 2.2.1 节中的二元变量。我们不对绝对值进行线性化，而是引入一个新的连续非负变量 $U_{ijk}\ge 0$，表示由点 i、j和 k构成的三角形的（无符号）面积。随后，将 ($H_n \le |S_{ijk}|$ 3) 中的非凸约束替换为以下一组约束：

$$U_{ijk}\ge H_n \qquad 1\le i<j<k\le n \tag{11}$$

$$S_{ijk}^2=U_{ijk}^2 \qquad 1\le i<j<k\le n. \tag{12}$$

由于 $U_{ijk}\ge 0$ 可由 $H_n\ge 0$这一事实推出，因此二次等式 (12) 等价于 $U_{ijk}=|S_{ijk}|$。这一替换将模型转化为一个不含二元变量的二次约束规划。

与方法 1 中一样，我们使用在（ w_{ij} 9）中定义的中间变量，以及（ S_{ijk}10）中的线性表达式。所得的二次约束规划建模与我们的实现一致，如下所示：

$$\max_{x,y,w,H,S,U}\{H_n : (5)-(7),(9),(10),(11),(12)\}.$$

请注意，由于（9）和（12）中的二次等式约束，该建模是非凸二次约束规划。

2.2.3 方法 3

该方法的核心思想是将连续变量 $x_i \in [0,1]$ 离散化，以获得具有强松弛的公式。具体而言，对于正整数 P，我们将变量 x_i 离散化为

$$x_i = \sum_{p=1}^{P} 2^{-p}\xi_{ip} + \epsilon_i, \quad \text{where } \xi_{ip} \in \{0,1\} \text{ and } \epsilon_i \in [0, 2^{-P}].$$

于是，我们有

$$w_{ij} = x_i y_j = \sum_{p=1}^{P} 2^{-p}\xi_{ip} y_j + \epsilon_i y_j, \quad 1 \le i,j \le n.$$

注意，我们将“连续变量与连续变量相乘”项 $w_{ij} = x_i y_j$重写为“二进制变量与连续变量相乘”乘积 $\xi_{ip} y_j$ 与另一个“连续变量与连续变量相乘”项 $\epsilon_i y_j$之和，后者涉及一个上界较小的非负变量 ϵ_i 。这种新的结构具有很大优势，因为可以使用事实 1 中定义的标准 McCormick 包络对“二进制变量与连续变量相乘”乘积进行精确线性化；而只要至少一个变量的取值范围较小，“连续变量与连续变量相乘”乘积就更容易处理。

事实 1. 集合的凸包 由 *McCormick* 包络给出： $\{(x,\overline{y}) \in [\underline{x},\overline{x}]\times[\underline{y},\overline{y}] : w = xy\}$ *[18]*:

$$\mathcal{M}(\underline{x},\overline{x};\underline{y},\overline{y}) = \{(x,y,w) : \; w \ge \underline{x}y + x\underline{y} - \underline{x}\underline{y},\; w \ge \overline{x}y + x\overline{y} - \overline{x}\overline{y},\; w \le \overline{x}y + x\underline{y} - \overline{x}\underline{y},\; w \le \underline{x}y + x\overline{y} - \underline{x}\overline{y}\}.$$

这种重新表述通过以下约束组表示，其中引入新变量 ϕ_{ipj} 和 ω_{ij} 来表示乘积项：

$$w_{ij} = \sum_{p=1}^{P} 2^{-p}\phi_{ipj} + \omega_{ij} \qquad 1 \le i,j \le n \tag{13a}$$

$$(\xi_{ip}, y_j, \phi_{ipj}) \in \mathcal{M}(0,1;0,1) \qquad 1 \le i,j \le n,\; p = 1,\dots,P \tag{13b}$$

$$\xi_{ip} \in \{0,1\} \qquad 1 \le i \le n,\; p = 1,\dots,P \tag{13c}$$

$$\omega_{ij} = \epsilon_i y_j \qquad 1 \le i,j \le n \tag{13d}$$

$$0 \le \epsilon_i \le 2^{-P} \qquad 1 \le i \le n. \tag{13e}$$

得到的混合整数二次约束规划形式如下：

$$\max_{x,y,w,H,S,b,\xi,\phi,\omega} \{H : (5) - (8), (10), (13)\}.$$

虽然这种建模是精确的，但仍包含非凸二次约束（13d）。为了得到一个可用混合整数线性规划技术求解的模型，我们对这一最后的非凸项进行松弛。这便得到混合整数线性规划（MILP）松弛，我们在第 4.2.1 节的计算研究中使用该松弛。此 MILP 松弛的建模如下：

$$\max_{x,y,w,H,S,b,\xi,\phi,\omega} \left\{H : (5) - (8), (10), (13a) - (13c), (\epsilon_i, y_j, \omega_{ij}) \in \mathcal{M}(0, 2^{-P}; 0, 1)\; 1 \le i,j \le n\right\}.$$

这种方法沿袭了一系列论文的思路，这些论文已在相关问题上成功应用了类似想法，包括混合池问题 [19–21] 和圆堆积问题 [22, 23]，等。

请注意，本节介绍的所有公式在实践中都很难求解。为了加快求解过程，我们将在下一节介绍若干增强措施。

3 增强措施

我们提出了若干增强措施，以强化先前提出的公式并缩短整体计算时间。我们将这些增强措施归为若干主题类别，以下称为增强措施组，并评估每组整体的影响，而非下文详述的每项单独增强措施的影响。

3.1 第一组：界收紧与对称性破缺

3.1.1 目标值的界 H_n

请注意，任何可行解都能为最大化问题提供有效下界；在我们的情形中，生成可行的 n点配置十分简单。为此，我们从单位正方形 $[0,1]^2$, 中抽取 10^6 个独立同分布的 n点配置，并将 H_n 的下界设为

$$\underline{H}_n \;=\; \max\{\text{minimum-triangle-area of the sample}\}.$$

为获得 H_n 的上界，我们依据 H^*_{n-1} 的值，如下所述：**命题1.** 对于 $n>3$，最优最小三角形面积随 n 单调不增；特别是 地 r,

$$H^*_n \;\le\; H^*_{n-1}.$$

证明. 考虑 n 点问题的一个最优解，表示为 (x_i^*, y_i^*), $i=1,\dots,n$，其最小面积为 H^*_n。从这些点中选取一点 (x_j^*, y_j^*)，使得剩余 $n-1$ 个点构成的最小三角形面积仍为 H^*_n（注意，这样的点必然存在：若由 n 个点构成的所有三角形面积均为 H^*_n，则可任意选择一点；否则，存在一个不属于最小三角形顶点的点，可以选取该点）。显然，点 (x_i^*, y_i^*), $i=1,\dots,n, i\neq j$ 是 $(n-1)$ 点问题的一个可行解，其目标函数值为 H^*_n。因此，我们得出结论： $H^*_n \le H^*_{n-1}$。 □

根据命题 1，我们设 $H_n = H^{*\frown}_{n-1}$。

3.1.2 对称性破缺

与其他几何优化问题类似，海尔布隆三角形问题有许多对称解，也就是说，对某个解对应的点重新标记后，可以得到本质上相同的解。为了避免这个导致优化求解器停滞的问题，我们在下一个命题中提出若干对称性破缺约束。

命题 2。 海尔布*рон*问题存在一个最优解 $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n$ ，满足以下不等式：

(i) $y_1 \le y_2 \le \cdots \le y_n$。
(ii) $w_{i1} \le w_{i2} \le \cdots \le w_{in}$。
(iii) $x_2 \ge x_1$ 和 $x_1 \le \frac{1}{2}$。

证明。 在证明中，我们将用到这样一个事实：可行集和目标函数在点的重新标记以及垂直反射 $x \mapsto 1-x$ 下保持不变。(i) 对集合 $\{y_k\}_{k=1}^n$ 排序并相应地重新标记，从而得到 $y_1 \le \cdots \le y_n$，即可推出该结论。(ii) 该结论由条目（i）和 $w_{ij} = x_i y_j$ 的定义可得。(iii) 证明如下：若 $x_2 < x_1$，则交换标签 1 和 2。若 $x_1 > \frac{1}{2}$，则将整个构型沿直线 $x=\frac{1}{2}$ 反射，即 $(x,y) \mapsto (1-x,y)$（如有必要，再次交换标签 1 和 2 以保持 $x_2 \ge x_1$）。重新标记和反射均保持所有三角形面积及正方形约束不变，因此可行性和目标值也保持不变。

□

3.2 第二组：边界上的点

由于海尔布隆三角形问题旨在通过布置点来最大化最小三角形的面积，因此直观上可以预期，单位正方形 $[0,1]^2$ 的边上会有一些点。第二组增强措施将这一直觉形式化。

3.2.1 每条边上至少有一个点（$n \ge 4$）

命题 3. 对于点数至少为四的海尔布隆三角形问题的任意最优解，单位正方形 $[0,1]^2$ 的每条边上都至少有一个点。

证明。 令 $a=\min_i x_i$, $b=\max_i x_i$, $c=\min_i y_i$, 且 $d=\max_i y_i$。如果 $[a,b]\times[c,d]$ 是 $[0,1]^2$, 的一个真 子矩形，那么 $(b-a)(d-c) < 1$。考虑仿射映射 T: $[a,b]\times[c,d] \to [0,1]^2$,

$$T(x,y) = \left(\tfrac{x-a}{b-a}, \tfrac{y-c}{d-c}\right).$$

对于由任意三个点确定的三角形 Δ，面积$(T(\Delta))$ $=$ 面积$(\Delta)/((b-a)(d-c))$。由于 $(b-a)(d-c) < 1$，每个三角形的面积在 T 下都严格增加，因此最小三角形面积也严格

增加——这与最优性矛盾。因此，我们得到 $(b-a)(d-c) = 1$，这意味着 $a = 0$、$b = 1$、$c = 0$ 和 $d = 1$。□

以下推论是命题3的直接结果。

推论 1. 对于至少有四个点的海尔布隆三角形问题，存在一个满足以下约束的最优解：

(i) $y_1 = 0$ 和 $y_n = 1$。*(ii)* $w_{i1} = 0$ 和 $w_{in} = x_i$ 对于 $i = 1$、...、n。*(iii)* 对于某些二元变量 c_{1i}、$c_{2i} \in \{0, 1\}$、...、n，

$$1 \leq \sum_{i=1}^{n} c_{1i} \leq 2, \quad x_i \leq 1 - c_{1i}, \ i = 1, \ldots, n \tag{14a}$$

$$1 \leq \sum_{i=1}^{n} c_{2i} \leq 2, \quad x_i \geq c_{2i}, \ i = 1, \ldots, n. \tag{14b}$$

证明。 回想一下，根据命题 $[0,1]^2$ 3，单位正方形的每条边都必须至少包含一个点。注意，条目（i）中的等式由命题 2（i）得出，并保证正方形区域 $y = 0$ 和 $y = 1$ 的边 $[0,1]^2$ 各至少包含一个点。类似地，条目（ii）中的等式由命题 2（ii）得出。

现在来看条目（iii）中的等式。事实上，不等式（14a）（分别为不等式（14b））保证正方形区域 $x = 0$（分别为 $x = 1$）的边 $[0,1]^2$上至少有一个点。此外，上界为 2 可确保这些边上至多有两个点，否则就会出现三个共线点。□

3.2.2 某条边上的两个点（$n \in \{7, 8\}$）

对于某些 n 值，最优构型会将多个点置于单位正方形的边界上。特别是，对于七点问题和八点问题，以下结果分别在文献 [11] 和 [12],中得到了证明。

命题 4。 对于具有七个或八个点的海尔布隆三角形问题的任意最优解，单位正方形 $[0,1]^2$ 存在一条边恰好包含两个点。

注 1。 尽管文献中已经证明了 $n = 7$ *[11]* 和 $n = 8$ *[12]*具有这一性质，但对于 $n = 9$，尚无相应的数学证明。如第 *3.2.3*节所述，我们能够通过计算认证 $n = 9$的相关近边界性质。

以下推论是命题2 和命题 4的结果。

推论 2。 对于具有七个或八个点的海尔布隆三角形问题，存在一个满足以下约束的最优解：

(i) $y_1 = y_2 = 0$。*(ii)* 对于 $i = 1$，$w_{i1} = w_{i2} = 0$，.....，n。

3.2.3 近似八个边界点（$n = 9$）

在所有与至少有九个点的海尔布隆三角形问题相关的实验中，我们观察到，在所有最佳配置中，八个点都位于单位正方形 $[0,1]^2$ 的边界上。文献中报道的 $n \geq 9$ 所有已知最佳配置也呈现出相同的模式。因此，我们提出如下猜想：

猜想 1. 对于至少有九个点的海尔布隆三角形问题的任意最优解，单位正方形 $[0,1]^2$ 的每条边上恰有两个点。

遗憾的是，我们无法对这一猜想给出数学证明。相反，我们使用 Gurobi 在命题 5中证明了一个稍弱的结果：在最优解中，有八个点大致位于边附近。请注意，这一结果强化了命题 3。

命题 5. 设 $\varepsilon = 10^{-2}$。对于九个点的海尔布隆三角形问题，存在一个满足以下约束的最优解：

(i) $y_1 = 0$ 和 $y_2 \leq \varepsilon$。*(ii)* $y_8 \geq 1 - \varepsilon$ 和 $y_9 = 1$。*(iii)* 对于某些二元变量 $c_{1i}, c_{2i} \in \{0, 1\}$, $i = 1, \ldots, n$,

$$\sum_{i=1}^{n} c_{1i} = 2, \ x_i \leq 1 + \varepsilon - c_{1i}, \ i = 1, \ldots, n \tag{15a}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_{2i} = 2,\ x_i \geq c_{2i} - \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n. \tag{15b}$$

证明。 我们比较以下两类解：

解 A：恰有八个点靠近边。让我们求解海尔布隆三角形问题的一个受限版本：其中有九个点，并假设猜想 1 成立。具体而言，我们施加以下限制：

$$y_1 = y_2 = 0,\ y_8 = y_9 = 1,\ \sum_{i=1}^{9} c_{1i} = \sum_{i=1}^{9} c_{2i} = 2, c_{2i} \leq x_i \leq 1 - c_{1i},\ i = 1, \ldots, 9.$$

采用方法 1，并结合其他增强措施，Gurobi 找到一个目标 e
值为 $L_A = H_9 = 0.0548765299$，耗时 317.611 秒。

方案 B：至多七个点靠近边。让我们求解海尔布隆三角形问题的另一个受限版本：其中有九个点，并假设靠近边的点至多有七个；这保证存在一个点，其到所有边的距离至少为 ε。具体而言，为此我们施加以下限制，$i = 1, \ldots, n$，其中 $n = 9$：

$$\begin{aligned}
& y_1 = 0 && \text{(at least one point on } y = 0) \\
& y_9 = 1 && \text{(at least one point on } y = 1) \\
& x_i \ \leq\ 1 - c_{1i} && \text{(forces } x_i = 0 \text{ if } c_{1i} = 1) \\
& x_i \ \geq\ c_{2i} && \text{(forces } x_i = 1 \text{ if } c_{2i} = 1) \\
& x_i \ \geq\ \varepsilon\,(1 - c_{1i}) && \text{(otherwise } x_i \geq \varepsilon \text{ away from } x = 0) \\
& x_i \ \leq\ 1 - \varepsilon\,(1 - c_{2i}) && \text{(otherwise } x_i \leq 1 - \varepsilon \text{ away from } x = 1) \\
& 1 \ \leq\ \sum_{i=1}^{n} c_{1i} \ \leq\ 2 && \text{(one or two points within } \varepsilon \text{ of } x = 0) \\
& \sum_{i=1}^{n} c_{2i} \ =\ 1. && \text{(exactly one point within } \varepsilon \text{ of } x = 1)
\end{aligned}$$

因此，边 $y = 0$、$y = 1$ 和 $x = 0$附近各自最多可有两个点位于 ε 范围内，而边 $x = 1$附近最多可有一个点位于 ε 范围内，因此近边界点总数最多为 $2 + 2 + 2 + 1 = 7$。

采用方法 1，并结合 SolutionB 约束及所有其他已证明的增强措施，Gurobi 能够在 82 359.163 秒内给出经认证的上界 $U_B = H_9 = 0.0546346906$。

注意，两个上界 L_A 和 U_B 之间的差距按如下方式计算：

$$|L_A - U_B| = 0.0548765299 - 0.0546346906 = 0.0002418393 \ >\ 0.$$

因此，我们推断，含有九个点的海尔布隆三角形问题的全局最优解不可能属于类型 B。因此，它必定属于类型 A。

注意，没有任何一条边上能有三个点彼此距离均在 ε以内：这样的三点组会构成一个面积至多为 $\varepsilon/2 = 5 \times 10^{-3}$的三角形，远低于经认证的下界，因此该模型仍然有效，同时将近边界点的总数限制为七个。 □

注意，条目（i）中的方程（分别为条目（ii）中的方程）表明，必须有两个点靠近边 $y = 0$（分别为 $y = 1$），而条目（iii）中的方程表明，必须有两个点分别靠近边 $x = 0$（方程（15a）和 $x = 1$（方程（15b））。

注释 2。 在命题 5 的证明中，我们还尝试了方案 B 的一种更简化替代方案：用单个不等式 $y_2 \geq \varepsilon$替代水平近边逻辑。该不等式恰好强制 $y = 0$ 上有一个点（因为 $y_1 = 0$），同时保留上述相同的垂直近边控制，并允许每条垂直边附近最多有两个点，且 $y = 1$ 上有一个点。尽管这一变体在语法上更简单，但在我们的实验中，其时间效率不如上文所述的情景 B 表述。

3.3 第三组：局部装箱与分离

3.3.1 至多包含两个点的矩形

以下改进基于对 Heilbronn 三角形问题的可行构型的一个简单几何观察：在任何最优解中，面积小于 $2H_n$ 的矩形都不能包含三个点，其中 $H_n \leq H_n^*$。我们首先在命题 6 中将这一观察形式化，然后在推论 3 中展示如何通过一族特定的矩形，在我们的表述中利用这一观察。

命题 6. 考虑 $H_n \leq H_n^*$，设 $R \subset [0,1]^2$ 是一个面积小于 $2H_n$的矩形。那么，对于包含 n 个点的海尔布隆三角形问题的任意最优解，R 至多包含两个点。

证明。 设 $(x^*, y^*) \in [0,1]^n \times [0,1]^n$ 是包含 n 个点的海尔布隆三角形问题的一个最优解。反设 R 包含点 i、j 和 k。那么，由这些点构成的三角形面积至多为 $\frac{1}{2}\,\text{area}(R) < H_n$。然而，这与 (x^*, y^*) 的最优性矛盾，因为该三角形的面积必须至少为 H_n。 □

现在，我们说明如何利用命题 6 来改进海尔布隆三角形问题的公式。具体而言，我们将单位正方形划分为高度小于 $2H_n$的水平条带。然后，通过引入一组新的二元变量 r_{ij}，我们强制满足：i）每个条带至多包含两个点；ii）每个点必须恰好包含在一个条带中。图 2 展示了这一划分策略，而推论3则对这一论证作了形式化说明。

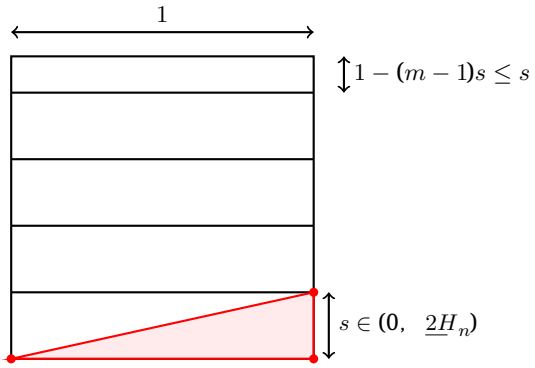

图 2：将单位正方形划分为四个高度为 s 的条带，以及一个高度为 $1-(m-1)s < s$的末尾条带。每个条带的面积都小于 $2H_n$，因此最多只能包含两个点。

推论 3。 考虑 $H_n \leq H_n^*$ 和 $s \in (0, 2H_n)$。令 m 为满足 $(m-1)s < 1 \leq ms$ 的最小整数，并将单位区间 $[0,1]$ 划分为 m 个子区间 $[L_p, U_p]$，使得 $L_p = (p-1)s$ 且 $U_p = \min\{1, ps\}$，其中 $p = 1, \ldots, m$。那么，对于某些二元变量 $r_{pi} \in \{0,1\}$, $p = 1, \ldots, m, i = 1, \ldots, n$，海尔布隆三角形问题存在一个满足以下约束的最优解：

$$\textit{(i)} \sum_{i=1}^{n} r_{pi} \leq 2, \quad p = 1, \ldots, m. \quad \textit{(ii)} \sum_{i=1}^{m} r_{pi} = 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$
$$\textit{(iii)} \quad L_p - (1 - r_{pi}) \leq y_i \leq U_p + (1 - r_{pi}) \quad p = 1, \ldots, m, i = 1, \ldots, n.$$

在我们的计算实验中，我们采用特定的 3 来实例化推论 $s = 2H_n - 10^{-6}$。此选择可确保容差足够小，相较于 H_n 可以忽略不计，但又足够大，以防止舍入误差使条带面积等于或略大于 $2H_n$。

注 3。 命题6 表明，原则上可以通过引入额外的矩形族来覆盖 $[0,1]^2$ 中面积低于阈值 $2H_n$的更多（甚至全部）矩形，从而加强推论 3。例如，一种自然的扩展方式是采用竖直条带复制推论 3中的构造，或者加入更多旋转矩形或非均匀矩形，并为每种矩形分别设置二元分配变量和容量约束。然而，当我们也为竖直矩形实现相同的基于条带的编码时，很快发现，新增的二元变量显著增加了模型规模和求解时间，而在实践中带来的收紧效果却十分有限。基于这些初步实验，我们因此选择将这一增强限制在推论 3所使用的水平条带上。

3.3.2 至多包含一个点的小正方形

第二项增强基于另一种几何直觉：在任何最优解中，边长小于 H_n 的正方形不可能包含两个点，其中 $H_n \le H_n^*$ （否则，这两个点与 $[0,1]^2$ 中的任意第三个点将构成一个面积必然低于给定下界 H_n的三角形）。我们首先在命题 7中将这一观察形式化，然后在推论 4中说明如何通过一类特定的正方形在我们的模型中利用这一点。

命题 7。 设 $H_n \le H_n^*$，令 $R \subset [0,1]^2$ 为边长小于 H_n的正方形。那么，在具有 n 个点的海尔布隆三角形问题的任何最优解中， R 至多包含一个点。

证明。 设 $(x^*, y^*) \in [0,1]^n \times [0,1]^n$ 是具有 n 个点的海尔布隆三角形问题的一个最优解。反设 R 包含点 i 和 j。注意，这两点之间的距离小于 $H_n\sqrt{2}$。现在，考虑点 $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in [0,1]^2$。注意，以 (x_i^*, y_i^*)、(x_j^*, y_j^*) 和 $(\tilde{x}, \tilde{y})$ 为顶点的三角形的面积小于 $\frac{1}{2}(H_n\sqrt{2})\sqrt{2} = H_n$ （因为点 $(\tilde{x}, \tilde{y})$ 到由点 (x_i^*, y_i^*) 和 (x_j^*, y_j^*) 所确定的线段的垂直距离至多为 $\sqrt{2}$）。然而，这与 (x^*, y^*) 的最优性相矛盾，因为该三角形的面积必须至少为 H_n。 □

我们再次说明如何利用命题 6 来强化海尔布隆三角形问题的公式。具体而言，我们将单位正方形划分为规则的 $m \times m$ 个轴对齐子正方形组成的网格，每个子正方形的边长为 $1/m < H_n$。然后，通过引入一组新的二元变量 u_{pqi}，我们确保：i）每个子正方形至多包含一个点；ii）每个点必须恰好包含在一个子正方形中。图3 展示了这一划分策略，推论4 则将这一论证形式化。

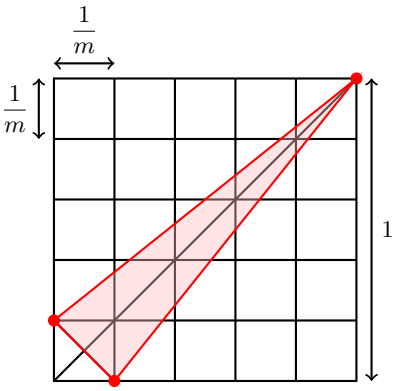

图 3：将单位正方形划分为一个 $m \times m$ 网格。如果 $1/m < H$，则每个子正方形至多包含一个点。

推论 4. 考虑 $H_n \le H_n^*$，并设 $m \ge 1$ 为满足$1/m < H_n$的整数。将单位区间 $[0,1]$ 等分为 m 个子区间 $[L_p, U_p]$，使得 $L_p = \frac{p-1}{m}$ 且 $U_p = \frac{p}{m}$，其中 $p = 1, \ldots\ldots, m$。那么，对于某些二元变量 $u_{pqi} \in \{0,1\}$、 $p = 1、\ldots\ldots、 m$、$q = 1、\ldots\ldots、 m$、 $i = 1、\ldots\ldots、 n$，海尔布隆三角形问题存在一个满足以下约束的最优解：

$$\textit{(i)} \sum_{i=1}^{n} u_{pqi} \le 1, \quad p = 1, \ldots, m, q = 1, \ldots, m. \ \textit{(ii)} \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{m} u_{pqi} = 1, \quad i = 1, \ldots, n. \ \textit{(iii)} \ L_p - (1 - u_{pqi}) \le x_i \le U_p + (1 - u_{pqi}) \quad L_q - (1 - u_{pqi}) \le x_i \le U_q + (1 - u_{pqi}) \quad p, q = 1, \ldots, m, i = 1, \ldots, n.$$

在我们的计算实验中，我们采用推论 4 并作如下具体选择： $m = \left\lfloor \frac{1}{H_n - 10^{-6}} \right\rfloor$.

注4。 命题7表明，原则上可以通过在 $[0,1]^2$，中加入更多小正方形族，并配以相应的二元分配变量和容量约束，从而强化推论4，以近似刻画所有允许的正方形所满足的完整几何条件。然而，在我们的计算实验中（见注3），我们观察到，每增加一类这样的扩展，都会显著增加二元变量的数量和整体模型规模，进而延长求解时间，却没有带来相称的实际收益。因此，我们将这一增强限制为仅使用推论 $m \times m$4 中采用的单个规则轴对齐子正方形网格；该网格已能以数值上有效的方式利用命题7 。

3.3.3 在较小矩形中应用海尔布隆三角形问题

在第 3.3.1节中，我们通过将正方形划分为足够小、至多容纳两个点的条带，得出了界。现在，我们将这一方法推广到能够容纳三个或更多点的较大矩形（高度更大的条带）。

核心思路是确定给定高度的水平条带的容量。如果无法将 m 个点放入条带而不使最小三角形面积低于下界 H_n，那么该条带最多只能容纳 $m-1$ 个点。

由于 $y_1 \le \cdots \le y_n$ 根据命题2(i)，确定底部条带$[0,1]\times[0,1/\kappa]$ 的容量会对部分 y_i 变量（此处，κ 是将单位正方形的垂直边等分的条带数）施加显式界。具体而言，若高度为 $1/\kappa$ 的条带最多容纳 m个点，则第（$m+1$）个点必须严格位于 $1/\kappa$ 之上（即 $y_{m+1} \ge 1/\kappa$）。通过将这一逻辑系统地应用于单位正方形的划分，我们推导出严格的变量界，从而先验地显著缩小搜索空间。图4 展示了如何在这样的受限区域内求解海尔布隆问题。

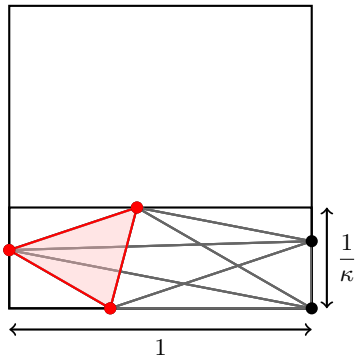

图 4：应用 海尔布隆三角形问题于较小矩形中，以推导基数约束。受限条带的高度为 $1/\kappa$，其中 κ是条带数。

命题 8。固定 $\kappa \ge 2$，并将单位正方形划分为 κ 个高度为 $1/\kappa$ 的等水平条带。设m_κ 为在高度为 $1/\kappa$、宽度为 *1* 的条带中所能放置的点的最大数量，并且由这些点构成的任意三角形的最小面积至少为 H_n。那么，海尔布隆三角形问题存在一个满足以下约束的最优解：

$$y_{\ell\, m_\kappa+1} \ge \frac{\ell}{\kappa} \quad \text{and} \quad y_{n-\ell\, m_\kappa} \le 1-\frac{\ell}{\kappa},\ \text{for } \ell = 1,\dots,\kappa-1.$$

证明。我们首先考虑下界。前 ℓ 个条带合起来构成一个高度为 ℓ/κ 的矩形。如果 $y_{\ell\, m_\kappa+1} < \ell/\kappa$，则前 $\ell\, m_\kappa+1$ 个点严格位于这前 ℓ 个条带的内部。根据广义鸽巢原理，这些 ℓ 个条带中至少有一个必须包含 $\lceil (\ell\, m_\kappa+1)/\ell \rceil = m_\kappa+1$ 个点。然而，根据 m_κ 的定义，在高度为 $1/\kappa$ 的条带中放置 $m_\kappa+1$ 个点，会迫使最小三角形面积严格小于 H_n，这与可行性相矛盾。因此，必须有 $y_{\ell\, m_\kappa+1} \ge \ell/\kappa$。

对于上界，考虑顶部的 ℓ 条带，它们覆盖的垂直范围为 $[1-\ell/\kappa, 1]$。为引出矛盾，假设 $y_{n-\ell\, m_\kappa} > 1-\ell/\kappa$。由于 y 坐标按非递减方式排序（$y_1 \le \cdots \le y_n$），这一不等式意味着所有具有索引 $i \ge n-\ell\, m_\kappa$ 的点 y_i 也必须严格位于这一顶部区域内。此类点的数量为 $n-(n-\ell\, m_\kappa)+1 = \ell\, m_\kappa+1$。因此，我们试图将 $\ell\, m_\kappa+1$ 个点放入由 ℓ 条带组成的区域中。根据广义鸽巢原理，至少有一个顶部条带包含 $\lceil (\ell\, m_\kappa+1)/\ell \rceil = m_\kappa+1$ 个点。正如在下界情形中所证明的那样，高度为 $1/\kappa$ 的单个条带不能容纳 $m_\kappa+1$ 个点。由于这导致矛盾，我们推得 $y_{n-\ell\, m_\kappa} \le 1-\ell/\kappa$。 □

有序 y坐标的所有界，包括命题3 和命题 8所蕴含的界，均汇总于表1中。

注 5. 表*1*中列出的具体界是通过迭代过程实验得出的。我们通过使用第 m_κ 节所述的方法 *1*（混合整数二次约束规划）公式，求解一系列受限海尔布伦问题，确定了高度为 $1/\kappa$ *(*κ = 2、3、.....的条带容量。为加速这些子问题的求解，我们施加了第*2.2.1*节定义的对称性破缺约束，以及第*3.1.2*节详述的每条边至少一个点约束。对于每种条带高度，我们逐步增加点的数量 m，直到求解器证明问题不可行（即最优值降至 H_n以下）；并将最大的可行 m 记录为 m_κ。

通过对称地应用这一容量逻辑——考虑从 $y=0$ 向上和从 $y=1$ 向下延伸的矩形——我们确立了上下界。我们考察的索引范围 i 取决于实例规模。

对于 $n = 6$、7、8，我们针对 $i = 2$、……、$n - 1$。对于$n = 9$、10，利用命题 *5* （已证明适用于 $n = 9$）和猜想 *1* （适用于 $n = 10$，但尚属猜想）的边界占用性质，我们将搜索范围限制在中间的点 $i = 3$、……、$n - 2$。对于搜索范围之外的点，表 *1* 中的上下界反映了由推论 *1* 和命题 *5*推导出的界。

这一步预计算效率很高。生成完整界集所需的总实际运行时间分别约为： $n = 6$为 *0.346* 秒， $n = 7$为 *3.247* 秒，$n = 8$为 *29.337* 秒， $n = 9$为 *35.382* 秒。对于 $n = 10$，耗时增加至 *1293.015* 秒；然而，与这些变量界使全局求解器运行时间大幅缩短相比，这一开销仍微不足道。

	$n=6$		$n=7$		$n=8$		$n=9$		$n=10$	
i	$\underline{y}_i$	$\overline{y}_i$	$\underline{y}_i$	$\overline{y}_i$	$\underline{y}_i$	$\overline{y}_i$	$\underline{y}_i$	$\overline{y}_i$	$\underline{y}_i$	$\overline{y}_i$
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{100}$	0	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{2}$
5	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$
6	1	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{5}$
7	–	–	1	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{10}{11}$
8	–	–	–	–	1	1	$\frac{99}{100}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{10}{11}$
9	–	–	–	–	–	–	1	1	$\frac{1}{2}$	1
10	–	–	–	–	–	–	–	–	1	1

表1</style>】： y_i y_1 ≤的变量界汇总
$\cdots \leq y_n$ 对于 $n = 6$，……，10。表中各索引 i对应的下界为 $\underline{y}_i$，上界为 y_i 。符号 – 表示该 n不存在索引 i 。

4 计算实验

4.1 计算设置

所有实验均在一台戴尔工作站上运行，该工作站配备两颗 48 核英特尔至强金牌 6248R 处理器（基准频率 3.0 GHz，共 96 核）和 256 GB 内存。系统运行 64 位 Microsoft Windows 11。模型开发和执行主要通过 Visual Studio Code 完成，优化则使用 Gurobi Optimizer 11.0.1 和 BARON 22.4.20。

4.2 初步实验设置

我们分三个阶段评估第2.2 节提出的方法：(i) 首先，从第4.2.1节的三个公式中确定最佳基线；(ii) 然后，在第4.2.2节中，从 Gurobi 和 BARON 中选出运行更快的求解器；(iii) 最后，根据第3节的报告，在第4.2.3节中量化所提出增强措施在计算工作量方面的贡献。除非另有说明，所有实验均对每个实例统一设置一天的墙钟时间限制。

4.2.1 公式比较

我们使用默认设置下的 Gurobi，对 $n \in \{3, 4, 5, 6\}$ 个实例上的三种公式进行比较，但将时间限制设为一天（即 86 400 秒）。对于方法 3，我们采用其 MILP 松弛，离散化参数为 $p = 10$。表2汇总了已证明的下界（LB）、上界（UB）以及运行时间（秒）。

与已知最优值的准确性。
对于 $n = 3$ 和 $n = 4$，三种方法均恢复了已知的全局最优值 0.5，且每种情况下上下界都相等。

n	方法 1（混合整数二次约束规划） 下界–上界 （时间（秒））	方法2（二次约束规划） 下界–上界 （时间（秒））	方法 3（混合整数线性规划松弛） LB′–UB （时间（秒））
3	0.5–0.5 （0.019）	0.5–0.5 (0.016)	0.5–0.5 (0.092)
4	0.5–0.5 (0.005)	0.5–0.5 (0.031)	0.5–0.5 (0.047)
5	0.1924508–0.1924508 (4.538)	0.1924507–0.1924611 (9.632)	0.1926462–0.1926462 (27.557)
6	0.1250012–0.1250137 (468.535)	0.1250019–0.1250144 (59 920.142)	0.1252447–0.1266927 (86 400)

表2：三种方法的综合界限和运行时间（秒）。请注意，方法 3 是一种松弛；其目标值表示真实最优值的上界。列LB′ 表示针对松弛后问题找到的最佳目标值，该值可能不是原始海尔布pon问题的有效下界。

对于 $n = 5$，已证明的全局最优值为 0.1924500 [10]。方法1和方法2都达到了这一数值，且符合所要求的相对最优性容差（分别报告为 0.1924508 和 0.1924507）。方法 1 还通过使上下界完全相等（0.1924508–0.1924508）证明了最优性，而方法2仍报告存在较小的剩余差距。方法 3 得到的数值为 0.1926462，严格大于真正的最优值。这与方法 3 是原最大化问题的松弛问题这一事实相符；因此，它为最优值提供了有效的 上界，但无法保证得到原问题的可行配置（即有效下界）。

对于 $n = 6$，其全局最优值为 $1/8 = 0.125$ [10]，方法1和方法2再次得出了与已知最优值一致的下界（分别为0.1250012和0.1250019）。相比之下，方法 3 给出的界限为0.1252447。与 $n = 5$ 情况一样，这个较大的值反映了松弛间隙：方法 3 通过放松非凸约束，实际上高估了最大面积。此外，在时间限制内仍存在相对较大的最优性间隙（0.1252447–0.1266927）。

计算时间。
表 2 显示，当 $n = 3$ 时，方法 2 速度最快，其次是方法 1，而方法 3 则慢得多。对于较大的实例，方法 1 始终更快：在 $n = 6$ 时，它约用 468。535 秒即可求解，而方法 2 需要 59920。142 秒，方法 3 则达到一天的时限。随着 n 增大，性能差距急剧扩大。这一差距不断拉大，表明除了非常小的实例外，只有方法 1 在计算上仍切实可行，而其他方法的代价高得令人难以承受，不再适合作为大型 n的候选方法。

选择。
对于 $n = 3, \ldots\ldots, 6$，方法 1 和方法 2 得出的目标值均与已知全局最优值一致，尤其是在报告的容差下，两者都没有明显的数值偏差。此外，方法 1 通常能够通过消除上下界差距直接证明最优性，而方法 2 仍可能报告较小的剩余差距。考虑运行时间后，差异更加明显：尽管方法 2 对非常小的实例具有竞争力，但随着 n 增大，其速度会显著变慢，而方法 1 仍然切实可行。方法 3 不仅准确度较低（例如对于 $n = 5, 6$），速度也慢得多。基于这些情况，我们选择方法 1 作为后续所有实验的基线。

4.2.2 求解器比较

我们在 BARON 和 Gurobi 上评估了 第 4.2.1 节中确定的 更优模型（不含增强措施），以选出在后续实验中表现最佳的求解器。除非另有说明，两个求解器均采用默认设置运行，但对每个实例施加一天的墙钟时间限制。所得上下界及运行时间（秒）汇总于表 3。

与已知最优值的准确性。
对于 $n \in \{3, 4\}$，两种求解器都找到了已知的全局最优值 0.5，且在两种情况下，上下界均一致。对于 $n = 5$，已证明最优值为 $H_5^* = \sqrt{3}/9 = 0.192450$ [10]。Gurobi 达到了该值

n	Gurobi 下界–上界	Gurobi 时间（秒）	BARON 下界–上界	BARON 时间（秒）
3	0.5–0.5	0.021	0.5–0.5	0.064
4	0.5–0.5	0.013	0.5–0.5	0.062
5	0.1924508–0.1924508	4.540	0.1924553–0.1924562	285.302
6	0.1250012–0.1250137	468.535	0.1250081–0.1992033	86 400

表3：组合求解器界限与运行时间（秒）。数值 86400s 表示已达到一天时间限制。

并满足所要求的相对最优性容差，通过报告相同的上下界 0.1924508–0.1924508。BARON 返回的值略高，其上下界为 0.1924553–0.1924562，高于已证明最优值，且未能弥合最优性间隙。对于 $n = 6$，其精确值为 $H_6^* = 1/8 = 0.125$[10, 24], Gurobi 报告的上下界为 0.1250012–0.1250137；在给定容差下，这与已知最优值一致，而 BARON 得出的区间则宽得多，为 0.1250081–0.1992033。

计算时间。
对于 $n \in \{3, 4\}$，运行时间差异可以忽略不计。从 $n = 5$ 开始，Gurobi 的速度明显更快（约为 4.54 秒，而另一者为 285.30 秒）；在 $n = 6$ 时，差距进一步显著扩大：Gurobi 在 468.535 秒内完成求解，而 BARON 达到一天时间上限（报告为 86 400 秒）仍未完成认证。

选择。
对于非常小的实例，两种求解器都能重现已知最优值，但从 $n = 5$ 开始，它们的表现出现分歧。Gurobi 仍能在要求的容差范围内达到已知最优值，并通过缩小界限间隙来证明该值；而 BARON 开始报告高于已证明最优值的结果，且保留了不可忽略的间隙。到 $n = 6$时，Gurobi 仍与精确值 $1/8$一致，而 BARON 已无法给出紧确的界限。结合表 3中的运行时间趋势，这些结果表明，Gurobi 是更可靠的求解器，因此我们在后续所有计算中均使用它。

4.2.3 增强方法比较

基于第 4.2.1 节确定的最佳方法以及第4.2.2节选择的求解器，我们通过一个包含 2^3 项实验的全因子设计，量化三个增强组的贡献，结果见表 4。

对于 $n \in \{7, 8, 9\}$，表 4 列出了八种构型，对应于三个组 $\mathcal{G}_1$、$\mathcal{G}_2$、$\mathcal{G}_3$的所有开关模式：(i) 均不启用，(ii–iv) 分别单独启用一个组，(v–vii) 启用任意两组，(viii) 三组全部启用。所有 n的组定义一致；不过，每个组都包含若干约束，其适用性取决于点的数量 n。因此，当某个组在给定的 n中“启用”时，只有组内满足适用条件的约束会被激活，而不适用的约束则保持非激活状态。

每种构型均根据以下指标进行评估：(a) 墙钟时间（秒）和 (b) 以 LB/UB（以及由此隐含的最优性间隙）概括的解质量。所有运行均使用 Gurobi 默认设置，并对每个实例采用统一的墙钟时间限制（表4 中等于时限的条目表示运行已超时）。

此设计使我们能够估算各组的主效应（启用该组时的边际改进），以及各组之间的交互效应，涵盖 $n = 7$、8、9。

与已知最优值的准确性。
对于 $n = 7$ 和 $n = 8$，最优值约为 $H_7^* = 0.083859$ [11] 和 $H_8^* = 0.0723764$[12]。在表 4中，一些增强设置能重现这些已知最优值，并通过报告相匹配的上下界（LB =UB）对其进行认证，而其他设置则不能。对于 $n = 7$，除不含任何增强措施的基线（--）和单独使用组 $\mathcal{G}_3$ 外，所有构型均达到下界等于上界 H_7^*，即认证了最优性。对于 $n = 8$，包含$\mathcal{G}_1$ 的设置（即 $\mathcal{G}_1$、 $\mathcal{G}_{1、2}$、$\mathcal{G}_{1、3}$，以及 $\mathcal{G}_{1、2、3}$）以及 $\mathcal{G}_{2、3}$可实现认证；相比之下，--、 $\mathcal{G}_2$和 $\mathcal{G}_3$ 无法认证。

对于 $n = 9$，精确最优值尚不明确；已发表区间的最佳结果为 $0.054875999 < H_9^* < 0.054878314$ [15]。在我们的配置中，只有 $\mathcal{G}_{1、2}$ 和 $\mathcal{G}_{1、2、3}$ 能在与该区间一致的取值下使下界等于上界，从而生成证书。所有其他设置（--、 $\mathcal{G}_1$、 $\mathcal{G}_2$、$\mathcal{G}_3$、$\mathcal{G}_{1、3}$、$\mathcal{G}_{2、3}$）均未能在规定时间内完成认证（见表4）。

[1]对于 $n = 9$ i nstance，例如，需要先进行一天的初步计算来确立命题5；此后，包含 g 增强组 2 的组合可以使用。

n	组	下界–上界	时间（秒）
7	–	0.0838601–0.1599112	86 400
	1	0.0838597–0.0838597	16.570
	2	0.0838599–0.0838599	218.782
	3	0.0838598–0.1229744	86 400
	1, 2	0.0838601–0.0838601	7.537
	1, 3	0.0838599–0.0838599	29.638
	2, 3	0.0838600–0.0838600	104.361
	1, 2, 3	0.0838595–0.0838595	4.542
8	–	0.0723771–0.1684433	86 400
	1	0.0723774–0.0723774	314.720
	2	0.0723775–0.0921830	86 400
	3	0.0723772–0.1475525	86 400
	1, 2	0.0723773–0.0723773	385.604
	1, 3	0.0723770–0.0723770	82.888
	2, 3	0.0723775–0.0723775	3 639.555
	1, 2, 3	0.0723767–0.0723767	53.334
9[1]	–	–	86 400
	1	0.0548767–0.0640982	86 400
	2	0.0548770–0.0893424	86 400
	3	0.0483269–0.1803900	86 400
	1, 2	0.0548769–0.0548769	3 334.102
	1, 3	0.0548765–0.0689799	86 400
	2, 3	0.0548771–0.0730435	86 400
	1, 2, 3	0.0548767–0.0548767	633.331

表4：使用 Gurobi 计算的 $n \in \{7, 8, 9\}$ 各增强组的下界/上界及运行时间（秒）。数值 86 400 秒表示已达到时间上限。

计算时间。
基线 -- 和单独的 $\mathcal{G}_3$ 均持续超时（86 400 秒）。在可认证配置中，存在明显的正向交互作用：启用全部三个组 $\mathcal{G}_{1,\,2,\,3}$ 时，对每个 n 而言都最快（ $n = 7$为 4.542 秒； $n = 8$为 53.334 秒； $n = 9$为 633.331 秒），显著优于表现强劲的成对设置（例如 $\mathcal{G}_{1,\,2}$：分别为 7.537 秒、385.604 秒和 3 334.102 秒）。有些组合能够完成认证，但速度仍然较慢（例如，在 $n = 8$时，$\mathcal{G}_{2,\,3}$ 耗时 3 639.555 秒），这表明只有与 $\mathcal{G}_1$ 和/或 $\mathcal{G}_2$ 搭配时， $\mathcal{G}_3$ 才有益；否则可能会妨碍剪枝。

选择。
在 $n = 7$ 和 $n = 8$中，包含 $\mathcal{G}_1$ 的增强设置始终能够达到并认证已知的全局最优值，而不包含 $\mathcal{G}_1$ 的配置往往无法做到这一点。对于 $n = 9$，由于目前只有一个界区间，既符合该区间又能缩小差距的设置只有 $\mathcal{G}_{1,\,2}$ 和$\mathcal{G}_{1,\,2,\,3}$。同时考虑运行时间后（表 4），$\mathcal{G}_{1,\,2,\,3}$ 不仅能在可能认证时完成认证，而且比其他可认证的组合更有效率。因此，我们将$\mathcal{G}_{1,\,2,\,3}$ 设为后续实验的默认配置。

4.3 最终结果

根据以上结果，我们采用方法 1 作为基础公式，使用 Gurobi 作为求解器，并从完整的增强组合 $\mathcal{G}_{1,\,2,\,3}$（表现最佳的组合组）开始。只有在实例特定增强适用于给定 n时才启用：第 3.1.1 节中的目标值界不适用于 $n = 3$；每条边上一点的结果（命题 3）也不适用于 $n = 3$；每条边两点构型（命题 3.2.2）仅用于 $n \in \{7, 8\}$；而 $n = 9$ 的近边界模式（第 3.2.3节）仅用于 $n = 9$。表 $3 \le n \le 10$的最终设置性能汇总于表 5，其中报告了每个 n的经认证的下界/上界、实际运行时间和计算面积；该面积是直接根据报告的最优配置坐标计算得出的。

由于文献中已确定 $n = 5$、6、7、8 的最优值，因此我们这些行的数据基本与已知值一致；任何细微差异都源于求解器中的数值容差。

$n = 9$ 这一案例此前唯一的纪录来自 Chen 等人，他们在 [15] 中报告了 $0.054875999 < H_9^* < 0.054878314$ 。他们的结果是通过在一套

专业的大规模计算基础设施上运行密集型网格搜索方法得出的。该基础设施包括一个配备 4TB 内存的 IBM NUMA 集群，以及三台总共配备 12 张 NVIDIA Tesla C2050 显卡的 GPGPU 机器。整个搜索耗费了 2 695833。174 秒（约 31 天）的 GPGPU 计算时间 [15]。与此形成鲜明对比的是，我们改进后的数学规划模型仅用 6335 秒（约 10 分钟），就在一台基于 CPU 的工作站上运行并得到了经认证的全局最优值（如表。所示）。需要提醒读者的是，即使将数值证明命题 5 所需的预处理时间也计算在内（另见脚注 1），所需的计算工作量仍远小于参考文献 [15]。

n	下界	上界	时间（秒）	计算面积[2]	已证明答案
3	0.5000000	0.5000000	0.016	0.5000000	0.5
4	0.5000000	0.5000000	0.026	0.5000000	0.5
5	0.1924506	0.1924506	0.186	0.1924499	0.1924500
6	0.1250010	0.1250010	0.787	0.1249999	0.125
7	0.0838594	0.0838594	5.280	0.0838584	0.0838591
8	0.0723767	0.0723767	53.334	0.0723758	0.0723764
9	0.0548767	0.0548767	633.331	0.0548756	-
10	0.0465383	-	86 400	0.0465369	-

表 5：不同 n 取值下的优化结果。

表 5 的最后一行展示了我们在 $n = 10$ 次运行中取得的最佳结果，该结果是在一个 受限模型 下得到的。该模型包含两个有力但尚未证明的结构猜想：(i) 我们假设猜想 1 成立，即最优解必须在边界边上恰好放置 八个 点。这一假设的依据是 近边界 模式：在第 $n = 9$ 节中观察到，每条边上都有两个点。3.2.3。(ii) 我们添加了对称破缺约束 $y_5 \le \frac{1}{2}$，其依据是表 1 中的水平划分界，它们限制了每个半区内可放置的点数。在此受限模型下，$n = 10$ 很快就触及了当前硬件的极限。在多次运行中，随着割平面逐步收紧，求解器始终证明了一个可证明的下界 0 .0465383（计算面积为 0.0465369），耗时约 800 秒——这一结果已与 Comellas 和 Yebra 在 [8] 报告的最佳经验值 0.046537 相当。要弥合剩余差距以得到匹配的上界（从而获得完整的最优性证书），似乎需要显著更长的实际运行时间，或新的结构性洞见。尽管 $n = 10$ 仍未解决，但如此迅速地得到这么强的下界，凸显了强化模型的潜力；若能获得更多计算资源或更强的有效不等式，这一潜力将得到进一步发挥。

找到的最佳构型（适用于 $n = 6$ 至 $n = 10$ ）如图 5所示。完整的点坐标也列于附录 A 的表 A1 中。

5 结论

本文探讨了海尔布隆三角形问题的三种新颖建模方法，并通过若干组增强措施系统地改进了每种方法。我们首先在小规模实例上单独测试了每组增强措施，并测试了它们与其他措施的组合；最终仅保留了那些能够稳定缩短运行时间，同时保持最优性证明的组合。

在尝试了各种建模方法后，我们还对其他求解器进行了基准测试。具体而言，我们将 BARON 实现与 Gurobi 配置进行了比较；结果表明，Gurobi 始终能提供更短的运行时间和更紧的界。在采用最优的约束组合和效率更高的求解器后，结果汇总于表 5。

采用这一构型后，我们得以 认证 九点情形的全局最优值：求解器返回了相同的上下界（LB = UB），数值为 0。0548767，对应于 $n = 9$，从而收紧了先前发表的 [15] 界区间，并给出了完整的最优性证书（见表 5）。对于 $n = 10$，完整认证仍未完成：在施加了两项尚未证明的结构性假设的受限模型下——（i）“每条边两个点”的近边界模式，以及（ii）对称性破缺约束 $y_5 \le \frac{1}{2}$ ——我们在约 800 秒内获得了有效下界 0。0465383（计算面积为 0。0465369）；然而，在一天的时限内未能达到相匹配的上界。要解决 $n = 10$，可能还需要进一步的结构性洞见或更长时间的运行。

展望未来，我们看到了为更大规模实例实现认证的一条具体路径。首先，命题背后的结构性现象 3.2.3 （“每条边大约有两个点”）似乎可以推广到 $n = 10$；而

[2]求解器报告的目标值受求解器数值容差和模型近似的影响。为了获得表 A1所示特定构型的更准确数值，我们根据列出的坐标直接重新计算了最小三角形面积，并在此将其报告为 *computed area*。

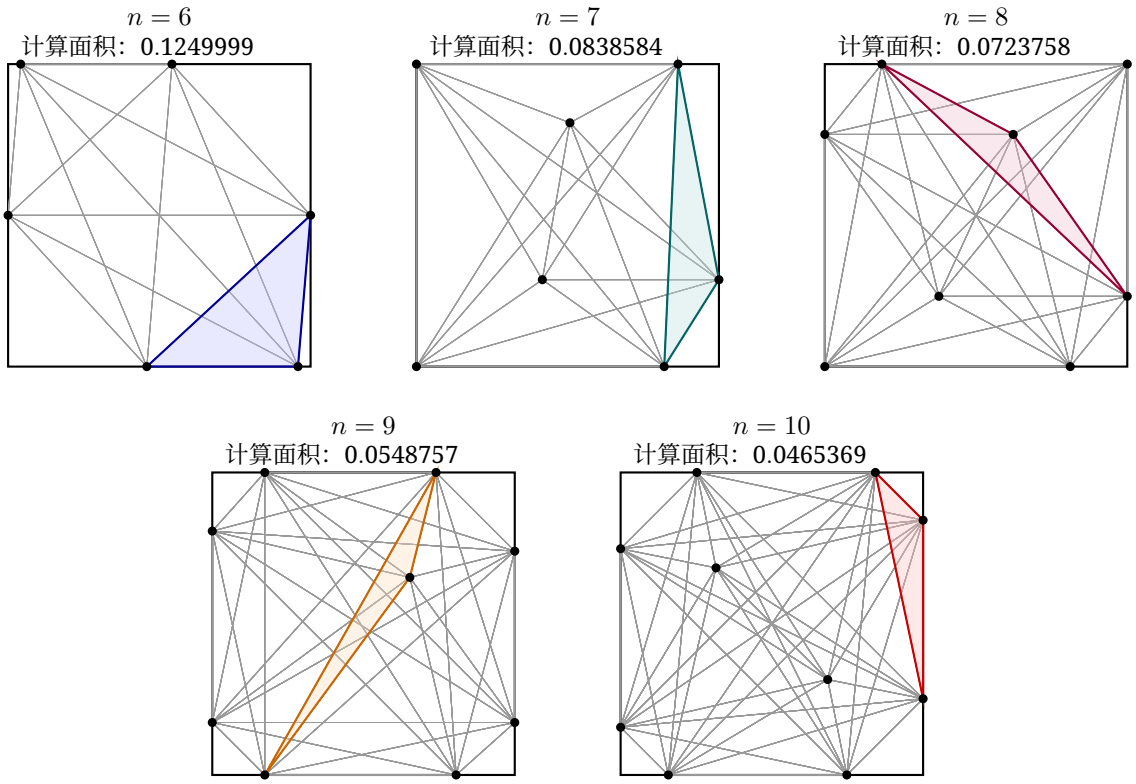

图 5： $n = 6$ 至 $n = 10$的点位布置。一个最小三角形已高亮显示 .

对这种近边界模式的形式化证明或许能显著缩小可行域，并有望弥合剩余差距。其次，我们制定了额外的对称性破缺规则。尽管这些规则尚未得到证明，但在实践中始终能收紧松弛，是很有希望通过形式化验证的候选方案。第三，我们计划在模型中加入方向计数 约束：令 $\beta_{ijk} \in \{0, 1\}$ 表示三角形（i， j， k）有向面积的符号，据此可以限定“正”三角形与“负”三角形的总数，从而约束目前会扩大搜索空间的组合退化。结合对现有割平面的进一步收紧，这些方向使该框架在技术上有望实现对 $n = 10$ 的认证，并推动我们朝着 $n = 11$迈进。

声明

伦理审批和参与同意

不适用

发表同意

不适用

资金支持

不适用

数据和材料的可用性

数据已在本文及其参考文献中提供。

利益冲突

作者声明不存在任何利益冲突。

作者贡献

Amirali Modir 和 Amirhossein Monji 负责方法论、实现、可视化、分析和写作，Burak Kocuk 负责方法论、分析和写作。

参考文献

[1] Roth, K.F.：关于海尔布隆问题。伦敦数学学会杂志 1(3)，198–204（1951）[2] Roth, K.F.：关于海尔布隆问题，II。伦敦数学学会会刊 3(2)，193–212（1972）[3] Roth, K.F.：关于海尔布隆问题，III。伦敦数学学会会刊 3(3)，543–549（1972）[4] Roth, K.F.：海尔布隆三角形问题的发展。数学进展 22(3)，364–385（1976）[5]Koml´os, J.、Pintz, J.、Szemer´edi, E.：关于海尔布隆三角形问题。伦敦数学学会杂志 2(3)，385–396（1981）[6] Koml´os, J.、Pintz, J.、Szemer´edi, E.：海尔布隆问题的一个下界。伦敦数学学会杂志 2(1)，13–24（1982）[7] Goldberg, M.：在正方形中使 n 个点构成的最小三角形面积最大化。数学杂志 45(3)，135–144（1972）[8]Comellas, F.、Yebra, J.L.A.：海尔布隆数的新下界。组合学电子期刊，6–6（2002）[9] Bertram–Kretzberg, C.、Hofmeister, T.、Lefmann, H.：海尔布隆问题的一种算法。SIAM计算杂志 30(2)，383–390（2000）[10] Lu, Y.、Jingzhong, Z.、Zhenbing, Z.：关于Goldberg猜想：前几个海尔布隆数的计算。Universit¨at Bielefeld。SFB 343。数学中的离散结构，???（1991）[11] Zeng, Z.、Chen, L.：正方形中七个点的海尔布隆最优构型。载于：几何自动演绎国际研讨会，第196–224页（2008）。施普林格[12] Dehbi, L.、Zeng, Z.：正方形中八个点的海尔布隆问题。系统科学与复杂性杂志 35(6)，2452–2480（2022）[13] Jiang, T.、Li, M.、Vit´anyi, P.：海尔布隆三角形的期望规模。载于：第十四届IEEE计算复杂性年度会议论文集（原名：复杂性理论结构会议）（目录号：99CB36317），第105–113页（1999）。IEEE[14] Jiang, T.、Li, M.、Vit´anyi, P.：海尔布隆型三角形的平均面积。随机结构与算法 20(2)，206–219（2002）[15] Chen, L.、Xu, Y.、Zeng, Z.：通过通用图形处理器计算搜索单位正方形中九个点的近似全局最优海尔布隆构型。全球优化杂志 68，147–167（2017年）[16]Gurobi Optimization, L.：Gurobi优化器参考手册。www.gurobi.com/documentation/（2022）[17] Tawarmalani, M.、Sahinidis, N.V.：一种用于全局优化的多面体分支切割方法。数学规划 103(2)，225–249（2005）[18] McCormick, G.P.：可因子分解的非凸规划全局解的可计算性：第一部分——凸低估问题。数学规划 10(1)，147–175（1976）[19] Dey, S.S.、Gupte, A.：混合池问题的混合整数线性规划技术分析。运筹学 63(2)，412–427（2015）[20] Dey, S.S.、Kocuk, B.、Santana, A.：二次约束二次规划中基于秩一的子结构的凸化及其在混合池问题中的应用。全球优化杂志 77(2)，227–272（2020）

[21] Jalilian, M., Kocuk, B.：《混合池问题的改进型基于秩一的松弛与界收紧技术》。《优化与工程》，1–51（2025）

[22] Litvinchev, I., Infante, L., Ozuna Espinosa, E.：《近似装填：整数规划模型、有效不等式与嵌套》，第105卷，第117–135页。施普林格，???（2015）。https://doi.org/10.1007/978-3-319-18899-7 9

[23]Ta.spınar, R., Kocuk, B.：基于离散化的圆堆积问题求解方法。《工程优化》56(12), 2060–2077（2024）

[24] Dress, A.W.M., Yang, L., Zeng, Z.：平面凸体中六个点的海尔布ронн问题。载于：Minimax及其应用，第173–190页。施普林格，美国马萨诸塞州波士顿（1995）

附录 A $n = 6$ 至 $n = 10$的坐标

所有坐标都位于单位正方形 $[0, 1]^2$内。对于每个 n，表格列出了点坐标 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n}$。对于每个构型，我们还报告了数值 H_n，该数值直接根据这些坐标计算得出，表示由这些点确定的所有 $\binom{n}{3}$ 三角形中的最小面积。换言之， H_n 是表格所示明确布点方案所能达到的最小三角形面积。

	$n = 6$ (0.1249999)		$n = 7$ (0.0838584)		$n = 8$ (0.0723758)		$n = 9$ (0.0548757)		$n = 10$ (0.0465369)	
i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
1	0.0000000	0.5002079	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.1734434	0.0000000	0.1576891	0.0000000
2	0.9583795	0.0000095	0.8191741	0.0000000	0.8114203	0.0000000	0.8062261	0.0000000	0.7479323	0.0000000
3	1.0000000	0.5002258	0.4161417	0.2872579	1.0000000	0.2324082	1.0000000	0.1734440	0.0000000	0.1576884
4	0.4585968	0.0000000	1.0000000	0.2872583	0.3771617	0.2324082	0.0000000	0.1734439	1.0000000	0.2520800
5	0.0415842	0.9999909	0.5074140	0.8060633	0.0000000	0.7675903	0.6531127	0.6531128	0.6846219	0.3153852
6	0.5418013	1.0000000	0.8648099	1.0000000	0.6228391	0.7675912	1.0000000	0.7398341	0.3153851	0.6846210
7	–	–	0.0000000	1.0000000	0.1885812	1.0000000	0.0000000	0.8062269	0.0000000	0.7479305
8	–	–	–	–	1.0000000	1.0000000	0.1734429	1.0000000	1.0000000	0.8423081
9	–	–	–	–	–	–	0.7398355	1.0000000	0.8423085	1.0000000
10	–	–	–	–	–	–	–	–	0.2520782	1.0000000

表 A1: 对于不同的 nv 图中点位布置的精确坐标及相应的最小面积值。