arXiv:2512.14519v1 [math.AC] 16 Dec 2025

Nonnil-S-拉斯克环

图沙尔·辛格[1], 阿吉姆·乌丁·安萨里[2], 和希夫·达特·库马尔[3]

[1, 3]印度普拉亚格拉杰 211004，莫蒂拉尔·尼赫鲁国家理工学院阿拉哈巴德分校数学系 电子邮箱: sjstusharsingh0019@gmail.com, tushar.2021rma11@mnnit.ac.in, sdt@mnnit.ac.in[2]印度普拉亚格拉杰 211002，阿拉哈巴德大学 CMP 学院数学系 电子邮箱：ajimmatau@gmail.com

2025年12月17日

摘要

本文引入了非零幂-S-Laskerian 环的概念，该概念同时推广了非零幂 Laskerian 环和 S-Laskerian 环。若环 R 的每个非零幂理想 I（与 S不相交）都是 S-可分解的，则称 R 为非零幂-S-Laskerian 环。作为一项主要结果，我们证明非零幂-S-Noetherian 环属于非零幂-S-Laskerian 环类。此外，我们证明在一个较弱条件下，非零幂-S-Laskerian 环具有 S-Noetherian 谱。其他结果还包括：若幂级数环 $R[[X]]$是非零幂-S-Laskerian 环，且其幂零根基 S-可分解，则 R 是 S-Laskerian 环，并满足 S-SFT 性质。

关键词： 非幂零-S-诺特环、非幂零-S-拉斯克环、拉斯克环、 S-拉斯克环。

MSC（2020）： 13E05, 13E99, 13F25, 16N40.

1 引言

在全文中，设 R 是一个带单位元的交换环，且 S 是 R 的一个乘法闭子集。我们用 $Nil(R)$ 表示 R 的幂零元集合，称为 R 的幂零根。若理想 I 满足 $I \nsubseteq Nil(R)$，则称其为非幂零理想。若理想 I 对每个 $a \in R \setminus I$ 都满足 $I \subset (a)$，则称其为分裂理想。2003 年，Badawi [4] 引入了非幂零诺特环的概念，作为诺特环的推广。若 R 的每个非幂零理想都是有限生成的，则称环 R 为非幂零诺特环。他们将诺特环的若干著名结果推广到了这一类环。2020 年，Kwon 和 Lim [11] 将非幂零诺特环的概念推广到非幂零-S-诺特环。若 R 的每个非幂零理想都是 S-有限的，则称环 R 为非幂零-S-诺特环。

Theory of Laskerian rings, initiated by Lasker-Noether ([12], [15]), is one of the basic tools for both commutative algebra and algebraic geometry. A ring R is called Laskerian if every ideal of R can be written as a finite intersection of primary ideals. It gives an algebraic foundation for decomposing an algebraic variety into its irreducible components. It is proved in historical

Lasker-Noether theorem that every Noetherian ring is Laskerian. Due to their significance, numerous authors attempted to generalize the concept of Laskerian rings (see [10], [11], [14], [16], [17], and [18]). For instance, Subramanian [18] introduced the concept of S-Laskerian rings, and Moulahi [14] introduced the concept of nonnil-Laskerian rings as proper generalizations of Laskerian rings. A ring R is called nonnil-Laskerian (respectively, S-Laskerian) if every nonnil ideal (respectively, every ideal disjoint from S) of R can be written as a finite intersection of primary ideals (respectively, S-primary ideals). Hizem [9] showed that the class of nonnil-Noetherian rings belongs to the class of nonnil-Laskerian rings.

In this paper, we introduce the concept of nonnil-S-Laskerian rings, which generalize both nonnil-Laskerian rings and S-Laskerian rings. We provide an example of a nonnil-S-Laskerian ring which is not nonnil-Laskerian (see Example 2.6). We extend several properties and characterizations of both nonnil-Laskerian rings and S-Laskerian rings to this new class of rings. Among other results, Gilmer and Heinzer [10] proved that every Laskerian ring has a Noetherian spectrum. We extend this result for the case of nonnil-S-Laskerian rings (see Theorem 2.12). It is well known that every S-primary ideal is S-decomposable but converse is not true in general. We provide a sufficient condition for an S-decomposable ideal to be S-primary (see Proposition 2.11). Further, Eljeri [8] introduced the concept of the S-strong finite type rings (in short, S-SFT rings) as a generalization of SFT rings. We provide a connection between nonnil-S-Laskerian rings and S-SFT rings. More precisely, we prove that if a power series ring $R[[X]]$ is nonnil-S-Laskerian with $Nil(R[[X]])$ being S-decomposable, then R is an S-SFT ring (see Proposition 2.15). Finally, as a main result of the paper, we prove that every nonnil-S-Noetherian ring is a nonnil-S-Laskerian ring (see Theorem 2.22).

2 主要结果

回顾 [13, 定义 2.1], 环 R 的一个真理想 Q，若与 S 不相交，则称其为 S-主理想，若存在一个 $s \in S$，使得对所有 $a, b \in R$，若 $ab \in Q$，则 $sa \in Q$ 或 $sb \in rad(Q)$。根据 [13, 命题 2.5]，，若 R的一个 S-主理想为 Q，则Q的根理想 $\mathsf{rad}(Q)$ 是一个 S-素理想。在此情形下，称 R的 P-S-主理想为 Q。对于环 R的理想 I，记$S(I) = \{a \in R \mid \frac{a}{1} \in S^{-1}I\}$，称为 I 关于 S的收缩。本节首先介绍 S-可分解理想和非幂零-S-拉斯克环的概念。

定义 2.1. 设 R 是一个环，S 是 R的一个乘法集。设 I 是 R的一个理想，满足 $I \cap S = \emptyset$。我们称 I 允许 S-主分解，如果 I 是 R的有限个 S-主理想的交。在这种情况下，我们称 I 是 S-可分解的。若 I的一个 S-主n分解 $I = \bigcap Q_i$满足：对每个 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$都有 $rad(Q_i) = P_i$，则称其为极小$_{i=1}$分解，当且仅当满足以下条件：

1. $S(P_i) \neq S(P_j)$ *for all distinct* $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
2. $S(Q_i) \not\supseteq \bigcap_{j \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{i\}} S(Q_j)$ *for each* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *(equivalently,* $S(Q_i) \not\supseteq \bigcap_{j \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{i\}} Q_j$ *for each* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$*).*

Clearly, the concepts of S-primary decomposition and primary decomposition coincide for $S = \{1\}$. The following example shows that the concept of S-primary decomposition is a proper generalization of the concept of primary decomposition.

例 *2.2.* 考虑布尔环 $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2 \times \cdots$（ $\mathbb{Z}_2$ 的可数无限个副本）。根据 *[19,* 定理，R 中的零理想 $(0) = (0, 0, 0, \ldots)$ 没有主分解。接下来，我们证明 (0) 是 R 的一个 S-主理想。首先，我们注意到 $(0) \cap S = \emptyset$。现在，令 $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$、 $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in R$，满足 $ab = 0$，其中每个 a_i、$b_i \in \mathbb{Z}_2$。这意味着对所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $a_n b_n = 0$，特别地， $a_1 b_1 = 0$。于是我们有 $a_1 = 0$ 或 $b_1 = 0$。若 $a_1 = 0$，则 $sa = 0$。若 $b_1 = 0$，则 $sb = 0$。因此，(0) 是一个 S-主理想，故也是 S-主可分解的。

命题 2.3. 设 S 是环 R 的一个乘法子集。那么以下陈述成立：

1. 有限个 P-S-初等理想的交是 P-S-初等的。

2. 如果 Q 是 R 的一个 P-主理想，且满足 $Q \cap S = \emptyset$，那么对于任意满足 $J \cap S \neq \emptyset$ 的 R 的理想 J，$Q \cap J$ 是 R 的 $(P \cap rad(J))$-S-主理想。

证明。

1. 设 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ 为 P-S-准素理想，则对于每个 $i = 1$（ $i = 1$=2, $\ldots, n$），有 $S \cap Q_i = \emptyset$，且 n n，因此 $S \cap (\bigcap Q_i) = \emptyset$。设 $Q = \bigcap_{i=1} Q_i$。由于每个 Q_i 都是 P-S-准素的，故 $rad(Q) = {}_{i=1}$ $_n$ $_n rad(\bigcap Q_i) = \bigcap rad(Q_i) = P$。现在，令 $xy \in Q$，其中 $x, y \in R$，并且对所有 $_{i=1}$ $_{i=1}$，均有 $sy \notin Q\, s \in S$。因此，对于每个 $s \in S$，存在 k_s 使得 $xy \in Q_{k_s}$ 且 $sy \notin Q_{k_s}$。令 $s_i \in S$ 为满足 Q_i 的 S-准素性质的元素。由于只有有限多个 Q_i，令 $s = s_1 s_2 \ldots s_n \in S$。现在，固定 s，并假设 $xy \in Q$ 但 $sy \notin Q$。于是，存在 k 使得 $xy \in Q_k$ 且 $sy \notin Q_k$。那么对于 $s_k \in S$，我们得到 $s_k x \in rad(Q_k) = P$ 或 $s_k y \in Q_k$。后一种情况推出 $sy \in Q_k$，矛盾。因此 $sx \in rad(Q) = P$，从而 Q 是 P-S-准素的。

2. 由于 $Q \cap S = \emptyset$，可得 $(Q \cap J) \cap S = \emptyset$。根据假设， $J \cap S \neq \emptyset$。令 $s \in J \cap S$。令 $a, b \in R$ 使得 $ab \in Q \cap J$。或者 $a \in Q$，或者 $b \in rad(Q) = P$，因为 Q 是 R的 P-准素理想。因此，或者 $sa \in Q \cap J$，或者 $sb \in P \cap J \subseteq P \cap rad(J) = rad(Q) \cap rad(J) = rad(Q \cap J)$。这证明 $Q \cap J$是 R 的 $(P \cap rad(J))$-S-准素理想。

□

Remark 2.4. *Let R be a ring, and let S be a multiplicative closed subset of R. Let I be an ideal of R such that $I \cap S = \emptyset$. Suppose that I admits an S-primary decomposition. Let $I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ be an S-primary decomposition of I with Q_i is a P_i-S-primary ideal of R for each $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Then, by [13, Proposition 2.7], $S^{-1}Q_i$ is $S^{-1}P_i$-primary, $S(I) = \bigcap_{i=1}^{n} S(Q_i)$ is a primary decomposition with $S(Q_i)$ is a $S(P_i)$-primary for each $i \in \{1, \ldots, n\}$. Let $1 \leq i \leq n$. Let $s_i \in S$ be such that it satisfies the S-primary property of Q_i. Notice that $(P_i : s_i)$ is a*

prime ideal of R and $(Q_i : s_i)$ is a $(P_i : s_i)$-primary ideal of R. Let $s = \prod_{i=1}^{n} s_i$. Then $s \in S$. Observe that $(Q_i : s_i) = (Q_i : s)$, $(P_i : s_i) = (P_i : s)$, $S(Q_i) = (Q_i : s)$, and $S(P_i) = (P_i : s)$. From $I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$, it follows that $(I : s) = \bigcap_{i=1}^{n} (Q_i : s) = \bigcap_{i=1}^{n} S(Q_i) = S(I)$. Let k of the $S(P_1) \ldots, S(P_n)$ be distinct. After a suitable rearrangement of $\{1, \ldots, n\}$, we can assume without loss of generality that $S(P_1) \ldots, S(P_k)$ are distinct among $S(P_1) \ldots, S(P_n)$. Let $A_1 = \{j \in \{1, \ldots, n\} \mid S(Q_j)$ is $S(P_1)$-primary$\}$, $\ldots$, $A_k = \{j \in \{1, \ldots, n\} \mid S(Q_j)$ is $S(P_k)$-primary $\}$.

It is clear that $1 \in A_1, \ldots, k \in A_k$, and $\{1, \ldots, n\} = \bigcup_{t=1}^{k} A_t$. Let $1 \leq t \leq k$. Notice that $\bigcap_{j \in A_t} S(Q_j)$ is $S(P_t)$-primary by [3, Lemma 4.3]. It is convenient to denote $\bigcap_{j \in A_t} Q_j$ by I'_t. Thus $(I : s) = S(I) = S(I'_1) \cap S(I'_2) \cap \cdots \cap S(I'_k)$ with $S(I'_t)$ is $S(P_t)$-primary for each $t \in \{1, \ldots, k\}$ and $S(P_1) \ldots, S(P_k)$ are distinct. After omitting those $S(I'_i)$ such that $S(I'_i) \supseteq \bigcap_{t \in \{1,\ldots,k\} \setminus \{i\}} S(I'_t)$ from the intersection, we can assume without loss of generality that $(I : s) = S(I) = \bigcap_{t=1}^{k} S(I'_t)$ is a minimal primary decomposition of $S(I)$. Next, we claim that $I = (I : s) \cap (I + Rs)$. It is clear that $I \subseteq (I : s) \cap (I + Rs)$. Let $y \in (I : s) \cap (I + Rs)$. Then $ys \in I$ and $y = a + rs$ for some $r \in R$. This implies that $ys = as + rs^2$ and so, $rs^2 \in I$. Hence, $r \in S(I) = (I : s)$. Therefore, $y = a + rs \in I$. This shows that $(I : s) \cap (I + Rs) \subseteq I$. Thus $I = (I : s) \cap (I + Rs)$ and hence, $I = (\bigcap_{t=1}^{k} S(I'_t) \cap (I + Rs)) = \bigcap_{t=1}^{k} (S(I'_t) \cap (I + Rs))$. Let $1 \leq t \leq k$. For convenience, let us denote $S(I'_t) \cap (I + Rs)$ by Q'_t. As $S(I'_t)$ is $S(P_t)$-primary with $S(I'_t) \cap S = \emptyset$ and $(I + Rs) \cap S \neq \emptyset$, we obtain from Proposition 2.3(2) that Q'_t is $S(P_t) \cap rad(I + Rs)$-S-primary. Since $S(S(P_t)) = S(P_t)$, $S(rad(I + Rs)) = R$, it follows that $S(S(P_t) \cap rad(I + Rs)) = S(P_t)$. Notice that $S(Q'_t) = S(S(I'_t) \cap (I + Rs)) = S(I'_t)$, as $S(S(I'_t)) = S(I'_t)$ and $S(I + Rs) = R$. Hence, for all distinct $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, $S(S(P_i) \cap rad(I + Rs)) \neq S(S(P_j) \cap rad(I + Rs))$ and for each i with $1 \leq i \leq t$, $S(Q'_i) \not\supseteq \bigcap_{t \in \{1,\ldots,k\} \setminus \{i\}} S(Q'_t)$. Therefore, $I = \bigcap_{t=1}^{k} Q'_t$ is a minimal S-primary decomposition.

定义 2.5。如果环 R 的每个非零幂零理想（与 S不相交）都是 R 的 S-分解的，则称环 R 为非零幂零-S-*Laskerian* 环。

设 $S_1 \subseteq S_2$ 为环 R 的两个乘法子集。若 R 是非幂零-S_1-Laskerian 环，则 R 也是非幂零-S_2-Laskerian 环。若 R 是约化环，则非幂零-S-Laskerian 环的概念与 S-Laskerian 环的概念完全一致。

回顾 [1]，若环 R 满足根理想上的升链条件（ACC），则称其具有诺特谱。这等价于 R 满足素理想上的升链条件，且每个理想上方都只有有限多个极小素理想。

显然，每个非零理想均为拉斯克环的环都是非零理想均为 S-拉斯克环的环。然而，以下例子表明，非零理想均为 S-拉斯克环的环未必是非零理想均为拉斯克环的环。

例 2.6. 令 $R = F[x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots]$ 为域 F 上关于无限多个未定元的多项式环。由于 R 有一个素理想升链$(x_1) \subseteq (x_1, x_2) \subseteq \cdots \subseteq (x_1, x_2, \ldots, x_n) \subseteq \cdots$ *which does not terminate, so R has no Noetherian spectrum. Evidently, $Nil(R) = (0)$ is the primary ideal so it is decomposable. This implies that R is not a*

nonnil-Laskerian ring since every nonnil-Laskerian ring with decomposable nilradical $Nil(R)$ has a Noetherian spectrum, by [14, Proposition 2.11]. Consider the multiplicative set $S = R \setminus \{0\}$. Since R has no nonnil ideal which is disjoint from S, and hence R is a nonnil-S-Laskerian ring but not a nonnil-Laskerian.

命题 2.7。设 R 为非幂零-S-**Laskerian** 环，I 为 R的一个理想。若 $I \subset Nil(R)$，则商环 R/I为非幂零-S-**Laskerian** 环，其中 $S = \{s+I \mid \overline{s} \in S\}$ 是 R/I的一个乘法闭子集。

证明。设 $y + I \in Nil(R/I)$。那么存在 $k \in \mathbb{N}$，使得 $y^k + I = I$。这意味着 $y^k \in I \subset Nil(R)$，因此 $y \in rad(Nil(R)) = Nil(R)$。于是 $Nil(R/I) \subseteq Nil(R)/I$。反向包含方面，设 $\alpha + I \in Nil(R)/I$，其中 $\alpha \in Nil(R)$。那么存在 $n \in \mathbb{N}$，使得 $\alpha^n = 0$。这意味着 $\alpha^n + I = I$，因此 $(\alpha + I)^n = I$。于是 $\alpha + I \in Nil(R/I)$，从而 $Nil(R/I) = Nil(R)/I$。现在，设 J是 R/I的一个真非幂零理想（与 S不相交）。写作 $J = Q'/I$，其中 Q'是 R的一个包含 I的真理想。由于 $J \nsubseteq Nil(R/I) = Nil(R)/I$，$Q' \nsubseteq Nil(R)$。这意味着 Q' 是 R的一个非幂零理想。现在我们证明 Q' 与S不相交。若 $Q' \cap S \neq \emptyset$，则存在 $s \in S$，使得 $s \in Q'$。这意味着 $s + I \in Q'/I = J$，矛盾，因为 J 与 S不相交。因此 Q' 是 R的一个非幂零理想（与 S不相交）。由于$_nR$ 是非幂零-S-拉斯克环，Q' 是 S-可分解的，即 $Q' = \bigcap Q_i$，其中 Q_i $(1 \leq i \leq n)$ 是 P_i-S-$_{i=1}$初等理想。因此，$J = \left(\bigcap_{i=1}^{n} Q_i\right)/I = \bigcap_{i=1}^{n}(Q_i/I)$。根据 [13, 命题 2.10], ，每个 Q_i/I 都是S-初等的。因此 J是 S-可分解的，从而 $R/Nil(R)$ 是非幂零-S-拉斯克环。 □

注记 2.8。设 R 是一个非零-S-拉斯克环。那么 $S^{-1}R$ 是一个非零-拉斯克环。为证明这一点，设 J 是 $S^{-1}R$的一个真非零理想。那么 $J = S^{-1}I$ 对于某个 R 的真非零理想 I_n，其与 S不相交。显然，I 是 S-可分解的。写作 $I = \bigcap Q_i$，其中每个 $Q_i{}_{i=1}{}_n$都是 S-初等的。因此，$J = S^{-1}I = \bigcap S^{-1}Q_i$。由 *[13, 命题 2.7(3)]*, ，每个 $S^{-1}Q_i$ 都是$_{i=1}$中的一个初等理想，因此 J 是 S-可分解的。

命题 2.9。设 R 是一个具有 S-可分解幂零根的环。若 R 是非幂零-S-**Lasker** 环，则 $R/Nil(R)$ 是一个 S-**Lasker** 环，其中 $S = \{s + Nil(R) \mid s \in S\}$ 是 $R/Nil(R)$ 的一个乘法闭子集。

Proof. Let J be an ideal (disjoint from $\overline{S}$) of $R/\mathrm{Nil}(R)$. If $J = 0$, then it is S-decomposable since $Nil(R)$ is S-decomposable. Now, let $J \neq 0$. Then $J = I/\mathrm{Nil}(R)$ for some proper ideal I of R containing $Nil(R)$. If there exists $s \in I \cap S$, then $s + Nil(R) \in I/Nil(R) = J$, a contradiction since J is disjoint from $\overline{S}$. This indicates that I is disjoint from S. Also, if $I \subseteq Nil(R)$, then $I = Nil(R)$, and so $J = 0$, a contradiction. Since R is nonnil-S-Laskerian, I is S-decomposable, i.e., $I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$, where each Q_i is P_i-S-primary. This concludes that $J = \left(\bigcap_{i=1}^{n} Q_i\right)/\mathrm{Nil}(R)$. For each $i = 1, \ldots, n$, by [13, Proposition 2.10], $Q_i/Nil(R)$ is $\overline{S}$-primary. Now, we show that $J = \bigcap_{i=1}^{n}(Q_i/\mathrm{Nil}(R))$. It is easy to see that $J \subseteq \bigcap_{i=1}^{n}(Q_i/\mathrm{Nil}(R))$. Now, let

$y \in \bigcap_{i=1}^{n} (Q_i/\mathrm{Nil}(R))$. If $y = 0$, then $y \in J$. Suppose $y \neq 0$, then for all $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, there exists an $x_i \in Q_i \setminus \mathrm{Nil}(R)$ such that $y = x_i + \mathrm{Nil}(R)$. Thus for all $i \in \{2, \ldots, n\}$, there exists a $w_i \in \mathrm{Nil}(R)$ such that $x_1 = w_i + x_i$. But $w_i \in \mathrm{Nil}(R) \subset Q_i$, for all $i \in \{2, \ldots, n\}$, so $x_1 \in \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$. Hence $y = x_1 + Nil(R) \in \left(\bigcap_{i=1}^{n} Q_i\right)/Nil(R) = J$, as desired. □

接下来，我们在 Nil(R) 是除理想这一条件下证明命题 2.9 的逆命题。

命题 2.10。设 R 为具有可除零根的环。若 $R/Nil(R)$是一个 S-拉斯克环，其中 $\bar{S} = \{s + Nil(R) \mid s \in S\}$是 $R/Nil(R)$的乘法闭子集，则 R是一个非零根-S-拉斯克环。

证明。设 I 是 R 的一个非幂零理想，且与 S不相交。则存在 $y \in I \setminus Nil(R)$ 使得 $Nil(R) \subset yR \subseteq I$，因为 $Nil(R)$ 是约化的。这意味着 $J = I/\mathrm{Nil}(R)$ 是 $R/Nil(R)$ 的一个理想。若 $J \cap S \neq \emptyset$，则对某个 $s \in S$和 $i \in I$，有 $s + Nil(R) = i + Nil(R)$。因此，$s - i \in Nil(R) \subseteq I$，从而 $s \in I$；这与 $I \cap S = \emptyset$矛盾。故 J 与 S不相交。现在，由于 $R/\mathrm{Nil}(R)$ 是 S-拉斯克环，J 是 S-可分解的。写作 $J = \bigcap_{i=1}^{n}(Q_i/\mathrm{Nil}(R)) = \left(\bigcap_{i=1}^{n} Q_i\right)/Nil(R)$，其中每个 Q_i 都是 R的一个 P_i-S-准素理想。这意味着 $I \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$。对于 $_n$的反向包含，设 $x \in \bigcap Q_i$。则 $x + Nil(R) \in J$，因此可将 $x + Nil(R)$ 写为 $=_{i=1n} a + Nil(R)$，其中某个 $a \in I$。因此，$x \in Nil(R) \subseteq I$。故 $I = \bigcap Q_i$，证毕。$_{i=1}$ □

“可除 $Nil(R)$”这一条件在命题 2.10 中是必要的。例如，设 $R = \mathbb{Z}(+)\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{Q}$ 作为 $\mathbb{Z}$-模的理想化，且 $A = R[X]$。那么，根据 [13, 例 4.8]，$A = R[X]$ 不是非幂零-S-Laskerian 环，但对于 $S = \{1\}$，$A/Nil(A)$ 是一个 S-Laskerian，而 $Nil(A) = ((0)(+)\mathbb{Q})[X]$ 不是一个可除理想。

命题 2.11. 设 R 是一个环，使得 $Nil(R)$ 是与 S 不相交的素除理想，并设 I 是 R 的一个幂零理想。那么，I 是 S-可分解的，当且仅当 I 是 S-准素的。特别地，R 是 S-拉斯克环，当且仅当 R 是非幂零-S-拉斯克环，且包含于 $Nil(R)$ 中的每个理想都是 Nil(R)-S-准素的。

Proof. Suppose I is S-decomposable. Let $I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ be a minimal S-primary decomposition of I, where each Q_i is P_i-S-primary. If $\mathrm{Nil}(R) = (0)$, then $I = Nil(R) = (0)$ since I is a nil ideal. By hypothesis, $Nil(R)$ is a prime ideal, and hence I is S-primary. Now, suppose $\mathrm{Nil}(R) \neq (0)$. Since $I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$, $\mathrm{rad}(S(I)) = S(\mathrm{Nil}(R)) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{rad}(S(Q_i)) = \bigcap_{i=1}^{n} S(P_i)$. This implies that $S(\mathrm{Nil}(R)) = S(P_{i_0})$ for some i_0 as $Nil(R)$ is a prime ideal. Evidently, Q_{i_0} is a nil ideal. Now, we claim that each Q_i is a nil ideal. Contrary, suppose there exists $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_0\}$ such that Q_j is nonnil. This implies that $Nil(R) \subset Q_j$, and so $S(\mathrm{Nil}(R)) \subset S(Q_j)$. Consequently, $S(Q_{i_0}) \subseteq S(P_{i_0}) = S(\mathrm{Nil}(R)) \subset S(Q_j)$, which contradicts the minimality of S-decomposition. Hence each Q_i is a nil ideal of R. Now, we show that $Q_j = Q_{i_0}$ for each j. Suppose $Q_{i_0} \neq Q_j$

for some $j \neq i_0$. Since Q_{i_0} and Q_j are both contained in Nil(R), we have $S(P_{i_0}) = S(P_j) = S(Nil(R))$. This contradicts the first condition of Definition 2.1(1). Therefore $I = Q_{i_0}$, i.e., I is S-primary. Conversely, if I is S-primary, then I is S-decomposable. The second statement follows from the first. □

回顾 [1], , R 的一个理想 I 称为根式 S有限的，如果存在 $s \in S$，以及 R 的一个有限生成理想 J，使得 $sI \subseteq \sqrt{J} \subseteq \sqrt{I}$。$R$ 的每个素理想都是根式 $\overline{S}$有限的，当且仅当 R 满足 S-诺特谱性质（参见 [1, 定理 2.2.]）。

在 [14, 命题 2.11], 中，证明了若 R 是一个非幂零 Laskerian 环，且其幂零根基可分解为 $Nil(R)$，则 R 具有 Noetherian 谱。在下述定理中，我们将这一结果推广到非幂零-S-Laskerian 环。

定理 2.12。若 R 是非幂零-S-*Laskerian* 环，且其幂零根基 $Nil(R)$ 可分解为 S，则其谱为 S-*Noetherian*。

Proof. Let P be a nonzero prime ideal of R. If $Nil(R)$ is prime and $P \subseteq Nil(R)$, then $rad(0) = Nil(R) \subseteq P \subseteq Nil(R)$, which implies that $P = Nil(R) = rad(0)$. Hence P is radically S-finite. Now, suppose P is a nonnil prime ideal of R. By Proposition 2.9, $R/Nil(R)$ is $\overline{S}$-Laskerian, and so by [18, Proposition 3.11], $R/Nil(R)$ has an $\overline{S}$-Noetherian spectrum. Consequently, the nonzero prime ideal $J = P/Nil(R)$ of $R/Nil(R)$ is radically $\overline{S}$-finite. This implies that there exist $\bar{s} \in \overline{S}$ and a finitely generated ideal K of $R/Nil(R)$ such that $\bar{s}J \subseteq rad(K) \subseteq J$. Suppose $K = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$, for some $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n \in R/Nil(R)$. Consider an ideal $I = (x_1, \ldots, x_n)$ of R. Now, we prove $sP \subseteq rad(I) \subseteq P$ for some $s \in S$. For this, let $x \in P$. Then $\bar{x} \in J$, and so $\bar{s}\bar{x} \in \bar{s}J \subseteq rad(K)$. This implies that $(\bar{s}\bar{x})^k = \bar{a}_1\bar{x}_1 + \cdots + \bar{a}_n\bar{x}_n$, for some $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n \in R/Nil(R)$ and $k \in \mathbb{N}$. Then there exists $y \in Nil(R)$ such that $(sx)^k = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + y$. Let n be a positive integer such that $y^n = 0$. Then, $(sx)^{kn} \in I$ and therefore $sP \subseteq rad(I)$. Further, let $z \in rad(I)$. Then $z^m = \alpha_1x_1 + \cdots + \alpha_nx_n$, for some $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R$ and $m \in \mathbb{N}$. Consequently, $\bar{z}^m = \bar{\alpha}_1\bar{x}_1 + \cdots + \bar{\alpha}_n\bar{x}_n \in K$, and so $\bar{z} \in rad(K) \subseteq J = P/Nil(R)$. This implies that $z \in P$, and thus $sP \subseteq rad(I) \subseteq P$, as desired. □

命题 2.13. 设 R 是一个非幂零-S-拉斯克环。若 I 是 R的非幂零理想，则 R/I 是一个 S-拉斯克环。

Proof. Let $R' = R/I$ and J be an ideal (disjoint from $\overline{S}$) of R'. Then $J = K/I$ for some ideal $K \supset I$ of R. If $K \subseteq Nil(R)$, then $I \subseteq Nil(R)$, a contradiction that I is nonnil. Therefore K is nonnil ideal of R. Also, K is disjoint from S because J is disjoint from $\overline{S}$. Since R is nonnil-S-Laskerian, $K = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$, where each Q_i is P_i-S-primary. This implies that $J = \left(\bigcap_{i=1}^{n} Q_i\right)/I$. For each $i = 1, \ldots, n$, by [13, Proposition 2.10], Q_i/I is $\overline{S}$-primary. Now, we show that $J = \bigcap_{i=1}^{n} (Q_i/I)$. It is easy to see that $J \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} (Q_i/I)$. Let now $y + I \in \bigcap_{i=1}^{n} (Q_i/I)$. Then for each $i = 1, \ldots, n$, there exists $x_i \in Q_i$ such that $y + I = x_i + I$. Consequently, there exists $a_i \in I$ for all $i \in \{i, \ldots, n\}$ such that $y = a_i + x_i$. But $a_i \in I \subset Q_i$, for all $i \in \{1, \ldots, n\}$. Hence $y \in \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ and therefore $y + I \in J$. □

Recall [6] that an ideal I of R is called a strong finite type (in short, SFT) ideal if there exist a finitely generated ideal $F \subseteq I$ of R and $n \in \mathbb{N}$ such that for each $x \in I$, $x^n \in F$. Eljeri [8] extended the definition of SFT to S-SFT by using a multiplicative closed subset S of R. An ideal I of R is called an S-strong finite type (in short S-SFT) ideal if there exist an S-finite ideal $F \subseteq I$ of R and $n \in \mathbb{N}$ such that for each $x \in I$, $x^n \in F$. Also, R is said to be a S-strongly finite type ring (in short S-SFT ring) if all its ideals are S-SFT ideals.

现在，我们给出一个 S-SFT 理想的例子，它不是 SFT。

例 2.14. 考虑 $R = F[x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots]$，即域 F 上具有无穷多个不定元的多项式环。令 $I = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots)$，它不是 R 的有限生成理想。显然， I不是一个 SFT 理想，因为若它是 SFT，则存在一个形如 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 的有限生成理想 K。然而，对于任意满足 $i > n$ 的 $x = x_i \in I$，对所有 $k \in \mathbb{N}$，都有 $x^k \notin K$。现在，考虑乘法集 $S = R \setminus \{0\}$。根据 *[2,* 命题 *2(a)],*，环 R 是一个 S- 诺特环。因此，理想 I 是 S-SFT。

我们将 $Spec(R, S)$ 表示为与 S 不相交的 R 的所有素理想的集合。下一个结果将揭示形式幂级数环在非幂零-S-Laskerian 性质方面的情况。

命题 2.15。设 $R[[X]]$ 为形式幂级数环，且 $Nil(R[[X]])$ 是 S-可分解的。如果 $R[[X]]$是非幂零-S-*Laskerian* 的，那么 R 具有 S-*SFT* 性质。

证明。对于所有 $P \in Spec(R, S)$、$P[[X]] \in Spec(R[[X]], S)$，于是根据 [8,备注 3.2(2)]，它是 $R[[X]]$ 的 S-根式理想。假设 R 不是 S-SFT 环。那么存在一个理想 $P \in Spec(R, S)$，使得根据 [8, 定理 3.8]，$P[[X]]$ 不是 S-根式有限的。因此，根据 [8,定理 3.6(2)]，$R[[X]]$ 不具有S-诺特谱，因为若环 R 的每个 R 的 S-根式理想都是S-根式有限的，则该环 R 具有 S-诺特谱；因此 $R[[X]]$不是非零幂零-S-拉斯克环。

□

命题 2.16。设 $R[[X]]$ 是非幂零-S-*Laskerian* 环。则 R 是 S-*Laskerian* 环。

证明。将命题 2.13 应用于 $R[[X]]$和非幂零理想 $XR[[X]]$。

□

回顾一下，如果存在 J的某个有限生成理想以及某个 $s \in S$，使得 $sI \subseteq J \subseteq I$，那么 R 的一个理想 I 称为 S-有限。此外，如果 R 的每个理想都是S-有限的，则称环 R 为 S-诺特环。Kwon 和 Lim [11] 将 S-诺特环的概念推广到了非幂零-S-诺特环。

定义 2.17. *[6]*若环 R 的每个非幂零理想都是 R S-有限的，则称 R 为非幂零-S-诺特环。

现在，我们的目标是证明，非幂零-S-诺特环属于非幂零-S-拉斯克环这一类。为此，我们需要不可约理想的一个 S-版本。

定义 2.18。环 R 的理想 Q（与 S 不相交）称为 S-不可约的，若 $s(I \cap J) \subseteq Q \subseteq I \cap J$ 对某个 $s \in S$ 以及 R 的某些理想 I、J 成立，则存在 $s' \in S$，使得 $ss'I \subseteq Q$ 或 $ss'J \subseteq Q$。

It is clear from the definition that every irreducible ideal is an S-irreducible ideal. However, the following example shows that an S-irreducibile ideal need not be irreducible.

Example 2.19. *Let $R = \mathbb{Z}$, $S = \mathbb{Z} \setminus 3\mathbb{Z}$ and $I = 6\mathbb{Z}$. Since $I = 2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}$, therefore I is not an irreducible ideal of R. Now, take $s = 2 \in S$. Then $2(3\mathbb{Z}) = 6\mathbb{Z} \subseteq I$. Thus I is an S-irreducible ideal of R.*

设 [7], let E 是环 R 的一族理想。若存在一个 $s \in S$，使得对于每个 $J \in E$，只要 $I \subseteq J$，就有 $sJ \subseteq I$，则称元素 $I \in E$ 为 E 的一个 S-极大元。此外，若存在 $k \in \wedge$ 和 $s \in S$，使得对于所有 $i \in \wedge$ 都有$sI_i \subseteq I_k$，其中 $\wedge$ 是任意指标集，则称 R 的理想链 $(I_i)_{i\in\wedge}$ 为 S-平稳的。若环 R 的一族理想 $\mathcal{F}$ 满足以下性质，则称其为 S-饱和的：对于 R 的每个理想 I，若存在$s \in S$ 和 $J \in \mathcal{F}$ 使得 $sI \subseteq J$，则 $I \in \mathcal{F}$。

引理 2.20. 对于环 R，以下断言等价：

(a) 环 R 是非幂零-S-诺特环。*(b)* R 的每个非幂零理想升链都是 S-稳定的。*(c)* R 的每个非空 S-饱和非幂零理想集都有一个极大元。*(d)* R 的每个非空非幂零理想集在包含关系下都有一个 S-极大元。

证明。

1. $(a) \implies (b)$。设 $(I_n)_{n\in\wedge}$ 是 R 的一个递增非幂零理想序列。定义理想$I = \bigcup I_n$。若 $I \subseteq Nil(R)$，则对所有 n，都有 $I_n \subseteq Nil(R)$，这是不可能的，因为每个 $I_n{}_{n\in\wedge}$ 都是非幂零的。因此，I 是 R 的一个非幂零理想。此外，由于 R 是非幂零-S-诺特的，I 是 S-有限的。因此，存在一个有限生成理想 $J \subseteq R$ 和 $s \in S$，使得 $sI \subseteq J \subseteq I$。由于 J 是有限生成的，存在一个满足 $J \subseteq I_k$ 的 $k \in \wedge$。于是我们有 $sI \subseteq J \subseteq I_k$，由此可知，对每个 $n \in \wedge$，都有 $sI_n \subseteq I_k$。

2. $(b) \implies (c)$。设 $\mathcal{D}$ 是 R 的一个 S-饱和非幂零理想集。则对于任意链 $\{I_n\}_{n\in\wedge} \subseteq \mathcal{D}$，我们断言 $I = \bigcup I_n$ 属于 $\mathcal{D}$，这就证明了 I 是该链的一个上$_{n\in\wedge}$界。事实上，由 (b) 可知，存在某些 $k \in \wedge$ 和 $s \in S$，使得对每个 $n \in \wedge$ 都有 $sI_n \subseteq I_k$。因此，我们得到 $sI = s\left(\bigcup_{n\in\wedge} I_n\right) \subseteq I_k$。由于 $\mathcal{D}$ 是 S-饱和的，故可得 $I \in \mathcal{D}$，如所需。应用佐恩引理，我们得出 $\mathcal{D}$ 有一个极大元。

3. $(c) \implies (d)$。令 $\mathcal{D}$ 为 R 的非空非幂零理想集合。考虑由所有满足存在某些 $s \in S$ 和 $L_0 \in \mathcal{D}$ 使得 $sL \subseteq L_0$ 的非幂零理想 $L \subseteq R$ 组成的族 $\mathcal{D}^S$。显然，$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}^S$，因此 $\mathcal{D}^S \neq \emptyset$。不难看出，$\mathcal{D}^S$ 是 S-饱和的。因此，由 (c) 可知 $\mathcal{D}^S$ 具有一个极大元 $K \in \mathcal{D}^S$。固定 $s \in S$ 和 $J \in \mathcal{D}$ 使得 $sK \subseteq J$。现在，我们声称 J 是 $\mathcal{D}$ 的一个 S-极大元；具体地，给定满足 $J \subseteq L$ 的 $L \in \mathcal{D}$，我们证明 $sL \subseteq J$。注意到 $K + L$ 满足 $s(K + L) = sK + sL \subseteq J + L \subseteq L$，因此 $K + L \in \mathcal{D}^S$。此外，若 $(K + L) \subseteq Nil(R)$，则 $K \subseteq Nil(R)$，这是不可能的，因为 K 是 R 的非幂零理想。因此 $K + L$ 是 R 的非幂零理想。于是 K 的极大性蕴含 $K = K + L$，从而 $L \subseteq K$。但此时 $sL \subseteq sK \subseteq J$，如所需。

4. $(d) \implies (a)$。设 I 是 R的一个非幂零理想。接下来我们将证明 I 是 S-有限的。令 $\mathcal{D}$ 为 R中所有满足 $J \subseteq I$的非幂零有限生成理想 J构成的族。取 $x \in I \setminus Nil(R)$。则 $J = (x) \subseteq I$，且 $J \nsubseteq Nil(R)$。这意味着 $J \in \mathcal{D}$，因此 $\mathcal{D}$ 非空。于是 $\mathcal{D}$ 有一个 S- 极大元 $K \in \mathcal{D}$。固定 $x \in I$，取一个形如 $L = K + xR$的有限生成理想。由于 $K \subseteq I$ 且 $x \in I$，所以 $L \subseteq I$。因此，存在 $L \in \mathcal{D}$ 使得 $K \subseteq L$。这意味着存在 $s \in S$ 使得 $sL \subseteq K$；特别地， $sx \in K$。这验证了 $sI \subseteq K$，故 I 是 S-有限的。由此可得 R 是非幂零-S-诺特的。

□

下面的引理揭示了非幂零 S-不可约理想与 S-主理想这两个概念之间的联系。

引理 2.21。 设 R 是一个非幂零-S-诺特环。则 R 的每个非幂零 S-不可约理想都是 S-准素的。

Proof. Suppose Q is a nonnil S-irreducible ideal of R. Let $a, b \in R$ such that $ab \in Q$ and $sb \notin Q$ for all $s \in S$. Our aim is to show that there exists $t \in S$ such that $ta \in rad(Q)$. Consider $A_n = \{x \in R \mid a^n x \in Q\}$ for $n \in \mathbb{N}$. Since Q is nonnil, there exists $\alpha \in Q \setminus Nil(R)$. Clearly, $\alpha \in A_n$ for each n but $\alpha \notin Nil(R)$. Consequently, each A_n is a nonnil ideal of R and $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$ is an increasing chain of ideals of R. Since R is a nonnil-S-Noetherian, by Lemma 2.20, this chain is S-stationary, i.e., there exist $k \in \mathbb{N}$ and $s \in S$ such that $sA_n \subseteq A_k$ for all $n \geq k$. Consider the two ideals $I = (a^k) + Q$ and $J = (b) + Q$ of R. Then $Q \subseteq I \cap J$. For the reverse containment, let $y \in I \cap J$. Write $y = a^k z + q$ for some $z \in R$ and $q \in Q$. Since $ab \in Q$, $aJ \subseteq Q$; whence $ay \in Q$. Now, $a^{k+1}z = a(a^k z) = a(y - q) \in Q$. This implies that $z \in A_{k+1}$, and so $sz \in sA_{k+1} \subseteq A_k$. Consequently, $a^k sz \in Q$ which implies that $a^k sz + sq = sy \in Q$. Thus we have $s(I \cap J) \subseteq Q \subseteq I \cap J$. This implies that there exists $s' \in S$ such that either $ss'I \subseteq Q$ or $ss'J \subseteq Q$ since Q is S-irreducible. If $ss'J \subseteq Q$, then $ss'b \in Q$ which is not possible. Therefore $ss'I \subseteq Q$ which implies that $ss'a^k \in Q$. Put $t = ss' \in S$. Then $(ta)^k \in Q$ and hence $ta \in rad(Q)$, as desired. □

现在，我们可以将 nonnil-S-Noetherian 环表示为 nonnil-S-Laskerian 环的一类例子。

定理 2.22. 每个非幂零-S-诺特环都是非幂零-S-拉斯克环。

Proof. Suppose R is a nonnil-S-Noetherian ring. Let E be the collection of nonnil ideals of R which are disjoint with S and can not be written as a finite intersection of S-primary ideals. We wish to show $E = \emptyset$. On the contrary suppose $E \neq \emptyset$. Since R is a nonnil-S-Noetherian ring, by Lemma 2.20, there exists an S-maximal element in E, say I. Evidently, I is not an S-primary ideal, by Lemma 2.21, I is not an S-irreducible ideal, and so I is not an irreducible ideal. This implies that $I = J \cap K$ for some ideals J and K of R with $I \neq J$ and $I \neq K$. Since I is nonnil, there exists $\alpha \in I \setminus Nil(R)$. This implies that $\alpha \in J$ and $\alpha \in K$ but $\alpha \notin Nil(R)$. Consequently, J and K both are nonnil ideals of R. Since I is not S-irreducible, $sJ \nsubseteq I$ and $sK \nsubseteq I$ for all $s \in S$. Now, we claim that $J, K \notin E$. For this, if J (respectively, K) belongs to E, then since I is an S-maximal element of E and $I \subset J$ (respectively, $I \subset K$), there exists s' (respectively, s'')

来自 S 使得 $s'J \subseteq I$（分别为 $s''K \subseteq I$）。这是不可能的，因为 I 不是 S-不可约的。因此 J, $K \notin E$。此外，如果 $J \cap S \neq \emptyset$（$respectively,\ K \cap S \neq \emptyset$），那么存在 $s_1 \in J \cap S$（$respectively,\ s_2 \in K \cap S$）。这意味着 $s's_1 \in s'J \subseteq I$（$respectively,\ s''s_2 \in s''K \subseteq I$），这是矛盾的，因为 I 与 S不相交。因此 J 和 K 也与 S不相交。这意味着 J 和 K 可以写成有限个 S-primary 理想的交。 Consequently，I 也可以写成有限个 S-primary 理想的交，因为 $I = J \cap K$, 这与 $I \in E$矛盾。因此 $E = \emptyset$，即 R 的每个与 S 不相交的真理想都可以写成有限个 S-primary 理想的交。因此 R 是一个非幂零-S-Laskerian 环。 □

参考文献

[1] H. Ahmed (2018) :*S-Noetherian spectrum condition.* Commun. Algebra 46:3314-3321.

[2] D. D. Anderson and T. Dumitrescu (2002) :*S-Noetherian rings.* Commun. Algebra. 30:4407-4416.

[3] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald (1969) :*Introduction to Commutative Algebra.* Addison-Wesley Publishing Company.

[4] A. Badawi (2003) :*On Nonnil-Noetherian Rings.* Commun. Algebra 31:1669-1677.

[5] A. Badawi (1999) :*On Φ-Pseudo-Valuation Rings.* Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, vol. 205, pp. 101-110. Marcel Dekker, New York.

[6] A. Benhissi (2022) :*Chain Conditions in Commutative Rings.* Springer https://doi.org/10.1007/978-3-031-09898-7.

[7] Z. Bilgin, M.L. Reyes and U. Tekir (2018) :*On right S-Noetherian rings and S-Noetherian modules.* Commun. Algebra. 46:863-869.

[8] M. Eljeri (2018) :*S-Strongly Finite Type Rings.* Asi. Rese. J. Math. 9:1-9.

[9] S. Hizem (2008) :*Chain conditions in rings of the form $A+XB[X]$ and $A+XI[X]$.* In: M. Fontana, et al. (Eds.), Com. Alg. and Its App.: Proceedings of the Fifth International Fez Conference on Comm. Alg.a and Its App., Fez, Morocco, W. de Gruyter Publisher, Berlin. 259-274.

[10] R. Gilmer and W. Heinzer (1980) :*The Laskerian Property, Power Series Rings and Noetherian Spectra.* Proc. Amer. Math. Soc. 79:13-16.

[11] M. J. Kwon and J. W. Lim (2020) :*On Nonnil-S-Noetherian Rings.* Mathematics 8:14-28.

[12] E. Lasker (1905) :*Zur Theorie der Moduln und Ideale.* Math. Ann. 60:20-116.

[13] E. Massaoud (2022) :*S-primary ideals of a commutative ring.* Commun. Algebra 50:988-997.

[14] S. Moulahi (2022) :*Nonnil-Laskerian Rings.* Beitr Algebra Geom. 63:697-706.

[15] E. Noether（1921）：环域中的理想理论。Math. Ann. 83:24–66.[16] T. Singh A. U. Ansari 和 S. D. Kumar（2023）：*S-Noether* 环、模及其推广。Surv. Math.Appl. 18:163-182.[17] T. Singh A.U. Ansari 和 S. D. Kumar（2024）：的存在性与唯一性 S在 S-*Noether* 模中的 -主分解。Commun. Algebra 52:4515-4524.[18] V. Subramanian（2022）：交换环的 *S*-主理想的一些结果。Beitr Algebra Geom. 63:247-266.[19]D. C. Vella（2018）：布尔环中的主分解。Pi Mu Epsilon Journal 14:581-588.