arXiv:2512.14533v1 [math.GT] 16 Dec 2025

双曲布伦尼 θ 曲线

Luis Celso Chan Palomo、Scott A. Taylor

Abstract. 在 S^3 中的非平凡 θ-曲线若其每个圈都是平凡结，则称为布伦尼的。我们证明，若布伦尼 θ-曲线的外部无环面，则其中不含本质环带。此前，Ozawa-Tsutsumi 已证明其中不存在本质圆盘。因此，根据 Thurston 的工作，无环面的布伦尼 θ-曲线的外部是具有全测地边界的双曲流形。由此可知，桥数较低的布伦尼 θ-曲线，其外部具有全测地边界且为双曲流形。我们还证明，两条布伦尼 θ-曲线同伦当且仅当它们邻域合痕，并对亏格 2 把手体结的布伦尼脊进行分类。我们的工作大量依赖 Koda-Ozawa 对二属把手体结外部中的环带所作的分类，以及 Wang 结合 Taylor 的缝合流形理论结果对该分类所作的进一步发展。

1. Introduction

θ 曲线是空间图，其复杂程度似乎介于纽结与二分支链环之间。它们出现在纽结理论的许多领域中，例如隧道数为 1 的纽结 [3], 强可逆纽结 [22], 纽结类 [36], 的理论，以及打结 DNA 和打结蛋白质的研究中 [4, 20]。布伦尼 θ 曲线构成一个有趣且重要的子类。例如，木下图（图 1）是最著名的布伦尼 θ-曲线，常被用来检验某个空间图不变量能否检测空间图的打结性即 空间图本身，还是只能检测其组成纽结的打结性 [8, 13, 18]。此外，Wolcott 证明，布伦尼 θ-曲线类在顶点和运算 $\#_3$ 下封闭（见下文命题 4.3）。最近 [31], ，第二作者发现了布伦尼 θ-曲线与可通过两种不同方式闭合成平凡结的非平凡 1-缠结之间的对应关系。文献 [12]介绍了若干布伦尼 θ-曲线的构造，其中包括外部含有本质环面的例子。文献 [28] 综述了与布伦尼 θ 曲线及其他抽象可平面空间图有关的主题，其中也介绍了布伦尼 θ-曲线的构造。

1.1. 布伦尼曲线的双曲性

θ。本文的主要目的是证明：

定理 1.1。 无环面布伦尼 θ-曲线的外部是无环带的。



Figure 1. 木下图是最著名的布伦尼 θ曲线实例。

Date: 2025年12月17日。

鉴于本质圆盘、环带和环面与双曲性的关系，这一定理尤其值得关注。空间图的双曲性有两种概念：带抛物经线的双曲，以及具有测地边界的双曲。设 $X(\Gamma)$ 为三价空间图 Γ 的外部。按照 [11], ，我们称 Γ 为带抛物经线的双曲（下文简称*pm*-双曲</*style*），如果 *()* 具有完备双曲度量且边界全测地，其中 是 各边的子午线与 的任意纽结分支的并。若图 满足 *()* 具有完备双曲度量且边界全测地，则称其为双曲（下文简称tg-双曲</style）。

正如 [11] 的作者所指出的，空间图要成为 tg-双曲图，远比成为 pm-双曲图困难。最自然的理解是，tg-双曲性是空间图的正则邻域所形成的把手体纽结（或链环）的性质；为该把手体选择不同的脊，不会改变其外部。另一方面，pm-双曲性是空间图本身的性质，因为其中记录了各边的子午线。与纽结连通和的情形不同，这两种性质在顶点和下均保持不变（命题4.4）。

Thurston 的工作（见 [11]的推论2.5和定理 2.6）表明，非平凡空间图 Γ 在 S^3 中是 pm-双曲的，当且仅当其外部不含有与 Γ各边的子午线不相交的本质圆盘或环带，且不含本质球面或环面；它是 tg-双曲的，当且仅当其外部不含本质球面、圆盘、环带或环面。他还证明（见 [35]）木下图是 tg-双曲的。另有一些布伦尼 θ曲线的外部含有本质环面 [12]；它们既不是 pm-双曲的，也不是 tg-双曲的。根据 Thurston 的工作，定理 1.1 立即推出以下结论：

推论1.2。 如果 Γ 是一个布伦尼 θ-曲线，且其外部无环面，那么 Γ 的外部既是 *pm*-双曲的，也是 *tg*-双曲的。

结合 Taylor-Tomova 最近的研究，我们得到以下令人欣喜的推论，它类似于这样一个事实：大多数二桥纽结都是双曲的：

推论1.3。 设 $T \subset S^3$ 是一个桥数至多为 *7/2* 的布伦尼 θ-曲线。那么T 既是 *pm*-双曲的，也是 *tg*-双曲的。

备注1.4。 空间图 Γ 在 S^3 中的桥数 $\mathfrak{b}(\Gamma)$是 $|H \cap \Gamma|/2$的最小值，其中 $H \subset S^3$ 是一个与 Γ 横截的 2-球面，它将 S^3 分成两个 3-球 B_1， B_2，并且对每个$i \in \{1, 2\}$， $\Gamma \cap B_i$都是一个 ∂-平行（在 B_i中）的无环图。更多详情见 [32]。 [12] 中布伦尼 θ-曲线的构造所得桥数至多为 3。木下图的桥数为 5/2。

证明。 根据推论1.2，只需证明：在外部含有一个本质环面的 θ-曲线 Γ ，其桥数至少为 4。从本质上说，这可以由 Schubert 关于卫星纽结桥数的定理 [26, 27]推出。不过，对于空间图而言，其中存在一些微妙之处，Taylor 和 Tomova 已对这些问题作了研究 [33]。

假设 $\Gamma \subset S^3$ 是一个 θ-曲线，其外部包含一个本质环面 Q 。那么 Q 围成一个包含 Γ 的实心环面 $V \subset S^3$。 Γ 在 Q 中的缠绕数 ω 是所有与 Γ 横截相交的本质圆盘 $D \subset V$ 中 $|\Gamma \cap D|$ 的最小值。若 $\omega = 1$，那么我们可以沿着一个与 Γ 相交于一点的圆盘压缩 Q ，得到一个与 Γ 横截相交于两点的球面 P。这意味着 Γ 是一个（可能平凡的） θ-曲线与一个非平凡纽结 K' 的连通和。但这反过来意味着 Γ 的某个组成结是非平凡纽结，产生矛盾。因此，$\omega \geq 2$。

设 K 是 V 的核心环所对应的纽结。 [33] 的推论 6.13 表明， Γ 的桥数至少为 $\omega\mathfrak{b}(K)$，其中 $\mathfrak{b}(K)$ 是 K 的桥数。非平凡纽结的桥数至少为 2。因此，

$$7/2 \geq \mathfrak{b}(\Gamma) \geq \omega\mathfrak{b}(K) \geq 2\mathfrak{b}(K) \geq 4.$$

这是一个矛盾。 □

注 1.5. 很可能可以使用 [27] 或 [33] 中的技巧，将推论1.3加强为：桥数至多为 4 的布伦尼 θ-曲线是无环面的，因此是 pm-双曲且 tg-双曲的：如果 Γ 的桥数为 4，那么两个顶点都位于同一个极小桥球面 H的一侧。根据前面的计算， K 必定是二桥，因此很可能可以将Q 同痕变形，使其与 H 相交于四条简单闭曲线；这些曲线在 H 中围成互不相交的圆盘，并将 Q 切割成环带。然而，这是不可能的，因为在 H的一侧， Γ 至多有三个分支。

1.2. **布伦尼属 2 柄体纽结的脊**。 如果 $\Gamma \subset S^3$ 是一个连通空间图，那么闭正则邻域 V =Nb(Γ)是一个带有脊 Γ的把手体结 。等价地，V 是嵌入S^3 中的一个把手体，它可变形收缩到 Γ。如果存在环境同痕将一个连通空间图Γ_1 映到另一个 Γ_2 ，则称它们等价 ； 如果存在环境同痕将一个图的正则邻域映到另一个图的正则邻域，则称它们邻域等价 ； 也就是说，相应的把手体结等价。任何亏格至少为 2 的把手体结都有无穷多个互不等价的脊。特别地，尽管两个空间图等价意味着它们邻域等价，但邻域等价并不意味着等价。例如，如果 K 是一个带有隧道 τ的隧道数为 1 的纽结，那么 $K \cup \tau$ 与平凡 θ-曲线邻域等价。

不过，我们证明了：

定理 1.6。 两个布伦尼 θ-曲线等价，当且仅当它们邻域等价。特别地，一个亏格 *2* 把手体结至多有一个布伦尼脊（在等价意义下）。

因此，称某个对象为布伦尼亏格 *2* 把手体结是有意义的：即其脊为布伦尼 θ-曲线的亏格 2 把手体结。在不至于离题太远时，我们也会考虑其他亏格 2 空间图：手铐图和二花束。

Th定理 1.6 的证明采用了与我们证明定理 1 时相同的一些工具 .1.

1.3. **问题与猜想**。 我们以几个问题和猜想结束本引言。

1.3.1. 本质环带？ 定理 1.1 的证明引出了以下问题：

问题 1.7. 是否存在一个（必然是含环面的）布伦尼 θ-曲线，使其外部包含一个本质环带?

1.4. **唯一的补空间?** 根据定理 1.6，我们提出猜想[1]：

猜想。布伦尼 θ-曲线由其补空间确定。也就是说，若 Γ_1 和 Γ_2 是 S^3 中的布伦尼 θ-曲线，且它们的补空间同胚，则存在一个从 S^3 到其自身的同胚，将 Γ_1 映至 Γ_2。

以下是一些支持该猜想可能成立的其他理由：

[1]基于本文工作的初步版本，这一猜想在 [28]中提出

• 非平凡纽结是只有一个分支的布鲁尼安链环。Gordon 和 Luecke [10] 证明了纽结由其补空间唯一确定。
• Mangum 和 Stanford [17] 证明，大多数布伦尼链环都由其补空间唯一确定。据我们所知，他们的定理未涵盖的情形仍未解决。
• 除了通过边滑动得到同一把手体的不同脊之外，已知的另一种构造外部同胚的不同空间图的方法，是在空间图外部中扭转一个本质平面曲面。横跨一个组成无结的圆盘与布伦尼 θ-曲线的外部相交，所得的是本质平面曲面。然而，沿这样的圆盘扭转会导致其他组成结发生扭转。在几乎所有情况下，沿圆盘扭转一个平凡结都会产生一个非平凡纽结 [16, 定理 4.2]。

1.5. 体积? 对于一个在闭3-流形 M中至少有一个顶点真嵌入的三价双曲图 Γ，我们可以考虑使用具有全测地边界及对应于 Γ [11]的纽结分支的尖点的完备双曲度量，来定义 X(Γ)的体积 vol^{tg}(M, Γ)。类似地，如果 Γ 具有抛物型子午线且为双曲的，我们可以考虑该非紧双曲流形的体积 vol^{pm}(M, Γ)；其全测地边界由裤形曲面构成，并带有对应于 T 子午线的环形尖点，以及对应于 T纽结分支的环面尖点。在下文的命题4.4中，我们证明，两个布伦尼θ-曲线的顶点和为双曲的（任一种意义下）当且仅当各因子都是双曲的。因此，我们提出：

问题1.8. 假设（M_1, Γ$_1$）和（M_2, Γ$_2$）是双曲的，或是带有抛物型子午线 θ的双曲θ曲线。令（M, Γ）=（M_1, Γ$_1$）#$_3$（M_2, Γ$_2$）为任意三价顶点和。不变量 vol^{tg}（M, Γ）和 vol^{tg}（M_1, Γ$_1$）+vol^{tg}（M_2, Γ$_2$）之间有何关系？不变量 vol^{pm}（M, Γ）和 vol^{pm}（M_1, Γ$_1$）+vol^{pm}（M_2, Γ$_2$）之间有何关系?

Turaev 在其关于纽结胚的原始论文中，建立了球面结弧与带有一个指定组成无结的θ曲线之间的关系。他证明，从球面结弧到这类θ曲线存在一个半群同构。其基本过程如下。一个球面结弧（非正式地说）是球面中的一条浸入弧，并在交叉点处带有上下信息。将球面视为 S^3的 Heegaard球面，可以将弧的端点锥化到球面两侧各个球的中心，从而构造一条 θ曲线。反过来，如果 T 是一条包含指定组成无结 U的 θ曲线，我们可以安排使 U 相对于一个 Heegaard球面处于1桥位置，然后将第三条边一般地投影到该 Heegaard球面上，从而得到一个纽结胚。

最近， [1] 和 [2] 的作者为球面结弧定义了两种双曲性概念，并由此分别给出了双曲体积的定义。这些双曲体积在结绳乘积下具有可加性。这两种定义都不等同于相应的 θ-曲线为 pm-双曲或 tg-双曲；因此，它们为定义球面结弧的双曲性提供了另外两种可能方式。厘清这些不同版本之间的关系将会很有意义。

2. 定义与约定

我们用 X(U)表示集合 $U \subset S^3$ 的外部，用 Nb(U)表示正则邻域（根据上下文，取开邻域或闭邻域）。

A 空间图 （分别为把手体结）是指真嵌入于三维流形中的图（分别为把手体）；本文中的三维流形为 S^3。若每个顶点都是三价的，则称该图为

三价图。若空间图 Γ 存在一个真嵌入球面，在 M 中与其Γ 横截地相交于一点，则称其为可约。 θ-曲线是具有两个顶点、三条边且无圈的连通空间图。手铐曲线是具有三条边的连通空间图，其中两条边是基于不同顶点的圈；它有一个由这些圈构成的组成二分支链环。二花束是具有一个顶点和两个圈的连通空间图；它有两个在一点相交的组成纽结。若空间图是 θ-曲线、手铐曲线或二花束，则称其为亏格 *2* 曲线。对于 S^3中的亏格 2 曲线，只有手铐曲线可以是可约的。空间图中的组成纽结（分别为链环）是指该空间图的一个圈（分别为互不相交的圈之并）。若 Γ 是边为 e_1， e_2，e_3的 θ-曲线，我们记 $K_{ij} = e_i \cup e_j$。

S^3 中的空间图如果可以通过同痕变形置于一个正则的 2-球面上，就称为平凡或平凡结。 S^3 中的空间图具有布伦尼性质，当且仅当它的每个真子图都是平凡的。特别地，aθ-曲线或二花束具有布伦尼性质，当且仅当其每个组成结都是平凡结。手铐曲线具有布伦尼性质，当且仅当其组成的二分支链环是平凡链环。空间图若非平凡且具有布伦尼性质，则称为布伦尼空间图。在文献中，布伦尼 θ-图也称为几乎平凡结、极小打结或缠结。对于其他空间图，根据作者不同，这些术语的含义可能略有差异。注意，如果 Γ 是具有布伦尼性质的可约手铐曲线，那么它必定是平凡手铐曲线。

给定空间图 Γ_1 和 Γ_2 （它们可能位于不同的三维流形中），其三价顶点分别为 v_1 和v_2，我们可以按如下方式构造三价顶点和 $\Gamma_1\#_3\Gamma_2$ 。从环境三维流形中分别移去 v_1 和 v_2 的一个正则邻域，再通过同胚 h将所得的球面边界分支S_1， S_2 粘合起来，使 $S_1 \to S_2$ 将 $\Gamma_1 \cap S_1$ 映到 $\Gamma_2 \cap S_2$。所得空间图 $\Gamma_1\#_3\Gamma_2$ 位于这两个三维流形的连通和中。对于 S^3中的θ-曲线，这种和尤其性质良好。若 Γ_1 和 Γ_2 是定向的 θ-曲线，且 h 保持定向，则所得的 θ-曲线在等价意义下唯一。详情见 [39] 。Matveev 和 Turaev [19] 证明，关于三价顶点和， θ-曲线具有唯一的（在某种意义下）素分解。平凡的 θ-曲线是$\#_3$运算的单位元。存在一个求和球面 S，它与$\Gamma_1\#_3\Gamma_2$ 相交三次，并将 $\Gamma_1\#_3\Gamma_2$ 重新分为 Γ_1 和 Γ_2。

把手体 V的子午线 是 ∂V 中的一条本质简单闭曲线，它在 V中围成一个圆盘。若 Γ是空间图，则 Γ 的子午线 是 V =Nb(Γ)的一条子午线，它围成的圆盘在 V 中与Γ 恰好相交于一点，且该点位于 Γ 某条边的内部。注意，在真同痕意义下，空间图的子午线与其边一一对应；但亏格至少为二的把手体结有无穷多条子午线。

设 N 是一个边界非空的紧致可定向三维流形。若 $b \subset N$ 是一条简单闭曲线，我们将沿曲线 b粘接一个 2-柄后得到的三维流形记为 $N[b]$。我们将此记号用于 N 为亏格二把手体 $V \subset S^3$的外部的情形。在这种情况下，若 b是分离曲线，则 $N[b]$ 是 S^3 中一个二分支链环的外部；若 b 是非分离的，则 $N[b]$ 是 S^3中一个纽结的外部。给定一个真嵌入曲面 $Q \subset N$ ，其中 ∂Q与 b 在同痕意义下相交次数最少，则 b-边界压缩圆盘 是一个嵌入于N中的圆盘，其内部与 $\partial N \cup Q$ 不相交，边界由 Q 上的一条弧和 b的一条子弧的端点并构成。若 ∂Q与 b不相交，则不存在 Q的 b-边界压缩圆盘。

3. Outline

我们结合经典三维流形理论技术、Taylor 的缝合流形理论结果 [29, 30], 以及亏格二把手体外部中本质环带的分类，证明定理 1.1

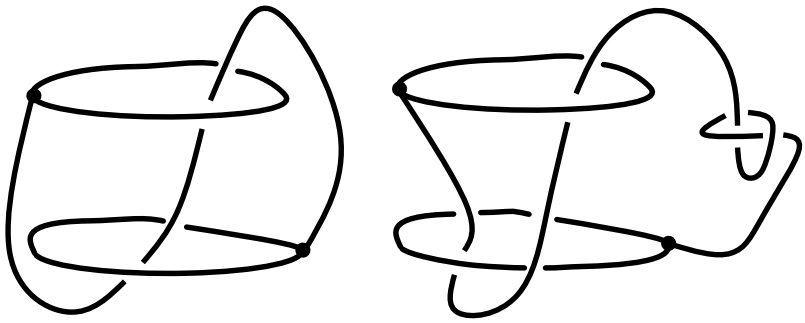


FIGURE 2. 左侧是一个布伦尼手铐曲线，其中一条本质环带连接两个环，并且与分离边不相交。右侧是一个布伦尼手铐曲线，其中一条本质环带的两个边界分支都是分离边的子午线。

该分类由 Koda 和 Ozawa [14] 提出，随后由 Wang [38]和 Koda-Ozawa-Wang[15]进一步发展。

在第4节中，我们证明了关于布伦尼 θ-曲线的一些基本事实，其中有些可能本身就值得关注。

在第5节中，我们概述Koda-Ozawa环带分类。Koda-Ozawa分类保证（在我们的语境中），把手体结 $V = \mathrm{Nb}(\Gamma)$存在一个特定的子午圆盘。（这个圆盘可能是也可能不是 Γ的子午线。）我们认为给这个圆盘命名会很有帮助。

定义3.1。 设 $V \subset S^3$ 是一个亏格2把手体结。设 $Q \subset X(V)$是一个本质环带。 Q 的一个护栏 是一个本质圆盘 $A \subset V$，满足 $a = \partial A$ 与∂Q不相交。我们也称曲线 a为 Q的护栏 。

就我们的目的而言，分类中的关键结果是推论 5.4，它保证了护栏的存在。

在第6节中，我们考虑护栏实际上是 Γ的子午线，而不只是 $\mathrm{Nb}(\Gamma)$ 的子午线的可能性。最复杂的情形涉及这样一种可能性：本质环带 Q 的每个边界分支都是 Γ中某个圈的正则邻域上的一条（p， q）曲线，同时与包含护栏的第三条边的邻域不相交。只有在 ∂Q的分支是该圈的优选经线时，我们才无法排除这种环带 Q存在的可能性。但在这种情况下，我们可以用位于该圈邻域边界上的一个环带将它们连接起来，从而在 θ-曲线外部中得到一个本质环面。

在第7节中，我们通过将 Taylor 的缝合流形理论结果应用于护栏不是 Γ子午线的情形，完成证明：无环面的布伦尼 θ-曲线外部不含本质环带。图 3 展示了两个含有本质环带的布鲁尼安手铐曲线示例。注意，在每个示例中，该环带都以分离边的子午线作为护栏；命题 7.1 表明情况总是如此。

在第8节中，我们应用同一结果来理解亏格2把手体结何时具有多个布伦尼安脊，并证明定理 1.6。

4. 基本性质

我们反复使用以下有用结果（这是一个更一般结果的特例）：

引理 4.1 (Ozawa-Tsutsumi [21])。 若 Γ 是布伦尼 θ-曲线或手铐曲线，则 $X(\Gamma)$ 是∂-不可约

同样:

引理 4.2。 设 Γ 是一个具有组成平凡结 σ 的布伦尼 θ-曲线。那么，在 $X(\sigma)$ 中不存在与边 $\Gamma \setminus \sigma$ 交于单个点的本质圆盘。

在引理 4.2 的表述中，我们将 $X(\sigma)$ 定义为与 $\Gamma \setminus \sigma$ 相交于其端点的正则邻域中的开正则邻域 $\mathrm{Nb}(\sigma)$ 的补集。

证明。 设 Γ 是一条具有布伦尼性质的 θ-曲线。设 σ 是一个圈，其外部包含一个与 $\Gamma \setminus \sigma$ 交于一点 p 的本质圆盘 D。设 σ' 是其他圈中的一个。不失一般性，假设 $\sigma = e_1 \cup e_2$ 和 $\sigma' = e_2 \cup e_3$。设 E 是一个边界为 σ' 的圆盘。选择它使得 $E \cap \mathrm{Nb}(\sigma)$ 是 E 中弧 $e_2 \cup (e_3 \cap \mathrm{Nb}(\sigma))$ 的正则邻域。

交 $D \cap E$ 由 e_2 以及一组弧和先验的圆组成。然而， $D \cap E$ 中恰有一条弧，其一个端点位于 p上。因此，通过最内圆盘论证可知，不存在圆。其他任何交弧的两个端点都位于 $\partial\mathrm{Nb}(\sigma)$上。最外弧论证表明，依据极小性，这类弧不可能存在。因此， $D \cap E$ 恰由一条弧 ζ组成；它的一个端点位于 p ，另一个位于 $\partial\mathrm{Nb}(\sigma)$上。在 E 中，该弧截出一个子圆盘，可用它对 Γ 作同痕变形，从而消去点 p。因此， $X(\Gamma)$ 是 ∂-可约的，这与引理 4.1 矛盾。□

最后，我们给出两个结果，表明布伦尼 θ-曲线是一类有趣的对象。第一个结果归功于 Wolcott, 它很容易由 $\#_3$ 在 θ-曲线的圈上起连通和作用这一事实推出。第二个结果依赖于推论1.2。

命题 4.3 （引理 4.1 和定理 4.2，见 [39]）。 如果 Γ_1 和 Γ_2 是布伦尼 θ-曲线，那么 $\Gamma_1 \#_3 \Gamma_2$ 也是布伦尼的。反之，如果 $\Gamma = \Gamma_1 \#_3 \Gamma_2$ 是一条布伦尼 θ-曲线，且 Γ_1、Γ_2 都是非平凡的，那么 Γ_1 和 Γ_2 也都是布伦尼的。

命题4.4。 设 Γ_1 和 Γ_2 是 S^3 中的空间图，且 $\Gamma = \Gamma_1 \#_3 \Gamma_2$ 是任意的三价顶点和。如果 Γ_1 和 Γ_2 是 *tg*-双曲的或 *pm*-双曲的，那么 Γ 也是如此。另一方面，如果 Γ 是一条布伦尼 *tg*-双曲 θ- 曲线，且 Γ_1 和 Γ_2 是非平凡的，那么 Γ_1 和 Γ_2 也都是 *tg*- 双曲布伦尼 θ- 曲线。

证明。 我们证明其逆否命题。假设 Γ 不是 tg-双曲的，或者不是 pm-双曲的。根据 Thurston 的研究，若一个空间图不是 tg-双曲的，则其外部包含一个本质球面、圆盘、环带或环面 [11, 定理 2。6] ；若它不是 pm-双曲的，则其外部包含一个本质球面或环面，或者一个与其边的子午线不相交的本质圆盘或环带 [11, 定理 2。2]。令 S 为与顶点和对应的求和球面。

我们证明 tg-双曲性的结论，因为 pm-双曲性的证明几乎完全相同。令 $P \subset X(\Gamma)$ 为一个本质球面、圆盘、环带或环面。在所有这些可能性中，选择使 $|S \cap P|$最小的 P。若 $S \cap P = \varnothing$，则 P 位于 $X(\Gamma_1)$ 或 $X(\Gamma_2)$ 中。无论是哪一种，都不是 tg-双曲的。因此，假设 $S \cap P \neq \varnothing$。

设 $\gamma \subset S \cap P$ 是一个交圆（如果存在），其界定一个最内层圆盘 $D \subset S$。由于 S 是一个三次穿孔球面，因此有 $|D \cap \Gamma| \in \{0, 1\}$。由于 P 是不可压缩的，如果 $D \cap \Gamma = \varnothing$，那么 γ 也在 P 中界定一个与 Γ 不相交的圆盘 E。经过一个小的同痕后，球面 $D \cup E$ 与 S 的交次数少于 P。因此，它不是本质的，所以在 S^3 中界定一个与 Γ 不相交的 3-球。

将 E 沿着 D 进行同痕，会把 P 变成一个球面，这与我们对 P 的选择相矛盾。因此， $|D\cap\Gamma| = 1$。在所有情况下，使用 D 对 P 进行压缩都会产生一个曲面，这与我们最初对 P 的选择相矛盾。因此，$S \cap P$ 由弧组成。特别地， P 是一个圆盘或环带。

设 $\zeta \subset S\cap P$。如果 P是一个圆盘，考虑由 $S\cap P$的一条弧截出的最外层圆盘 $D \subset P$。圆盘D 要么在 $X(\Gamma_1)$ 或 $X(\Gamma_2)$ 中是非本质的，此时我们可以对 P 进行同痕变形以减少 $|P \cap S|$；要么它是本质的。在这种情况下， Γ_1 或 Γ_2 是非双曲的。因此，考虑 P为环带的情形。和之前一样，如果 $S \cap P$的某条弧在 P中是非本质的，就会与我们对 P的选择相矛盾。因此，所有弧在 P中都是本质的。于是，$P \setminus S$ 的一个分支是 $X(\Gamma_1)$ 或$X(\Gamma_2)$中的本质圆盘。因此， Γ_1 或 Γ_2 中至少有一个不是 tg-双曲的。

另一方面，设 Γ 是一个布伦尼 θ-曲线，并且 Γ_1, Γ_2 都是非平凡的。根据命题 4.3，它们是布伦尼的。如果其中一个（例如 Γ_1）不是 tg-双曲的，那么根据推论1.2，$X(\Gamma_1)$包含一个本质环面。在构造 Γ时，由于执行求和的 Γ_1 的顶点与该环面不相交，本质环面会保留到 $X(\Gamma)$中，这表明 $X(\Gamma)$不是 tg-双曲的。□

5. Koda-Ozawa Annuli Classification

本节将介绍亏格 2 把手体结外部中环带的 Koda-Ozawa分类 [14] 。在此过程中，我们会采用后续论文 [15, 38] 中提出的一些改述和改进。我们也会调整符号，使其与本文其余部分所用的符号一致；不过，本文后文不会用到所有术语。

定义5.1 ([15, 第3页-4]). 设 $V \subset S^3$ 是一个亏格二把手体结，且$Q \subset X(V)$ 是一个本质环带。则：

(1) 若 ∂Q 的两个分支都是 V的子午线，则 Q 为类型 1；(2) 若 ∂Q 恰有一个分支是 V中的子午线，则 Q 为2型；(3) 若 ∂Q 没有分支是 V的子午线，但存在一个 S^3 中的压缩圆盘 D，它压缩 ∂V 且与 ∂Q不相交，则 Q 为3型。此外，对某个这样的 D：(a) 若 $D \subset X(V)$，则 Q 为3-1型；(b) 若 $D \subset V$，且 D 不分离 ∂Q，并且 ∂Q 的各分支在 ∂V中平行，则 Q 为3-2型；(c) 若 $D \subset V$，且 D 确实分离 ∂Q，并且 ∂Q 的各分支在 ∂V中不平行，则 Q 为3-3型；(4) 若 V 是一个Eudave-Mu˜noz缠结的双重分支覆盖，且 Q是标准关联环，则 Q为 Eudave-Mu ˜noz型。(5) 若 ∂Q 的各分支在 ∂V 中平行，且不存在与 Q不相交的 S^3 中的压缩圆盘来压缩 ∂V ，则 Q 为4型。此外，(a) 若 $X(V)$是无环面的[2]，则 Q 为4-1型；(b) 若 $X(V)$是含环面的，则 Q 为4-2型。

注 5.2。 根据 [14] 和 [15, 引理 4.1], , 每个 4-1型环带都是 Eudave-Mu˜noz 类型。

引理 5.3。 如果 $X(V)$ 是 ∂-不可约且无环面的，并且 $X(V)$ 含有一个本质环带，那么 $X(V)$ 含有一个类型 *1*、*2*、*3-2* 或 *3-3* 的本质环带。

证明。 根据 [14], , 二属把手体结外部中的每个本质环带都是 1型、2型、3-1型、3-2型、3-3型、4-1型或4-2型。由于 $X(V)$是无环面的，因此不存在4-2型环带。根据 [15], , 如果

[2]注意 [15]中的印刷错误。

V 存在一个4-1型环带，那么它也存在一个3-2型本质环带。由于 [15], 并未明确陈述这一点，我们将说明如何从文中陈述的结果推出这一结论。我们假定读者熟悉该文的术语。

假设 V 具有一个4-1型环带。根据注记5.2，该环带属于Eudave-Muñoz型。 [15], 中的定理 2.2、引理3.2和定义3.3共同表明，配对(S^3，V)要么属于 K 型，要么属于 M型。第一种情况下，V 的外部恰有一个特征环。此时，根据 [15, 引理4.9]（这是对 [38, 引理2.3]的改写）以及 [15, 第3–4], 页所述的记号，该环带是一个3-2型本质环带。另一方面，如果(S^3，V)属于 M型，那么 $E(V)$ 有两个非特征环，其中一个是4-1型。根据 [15, 定理5.2], ，另一个非特征环是3-2型。（此外，根据[15, 引理2.3、定理4.3和定理2.3], ，还有两个特征环，二者均为3-2型。）

根据假设，$X(V)$ 是 ∂-不可约的，因此不可能出现 3-1 型。 □

推论 5.4. 假设 $V \subset S^3$ 是一个 ∂-不可约、无环面的亏格 *2* 把手体结，且其外部存在一个本质环带 Q 。那么存在这样一个带有护栏的环带。

证明. 根据引理 5.3，我们可以假设 Q 属于类型 1、2、3-2 或 3-3。如果 Q 属于类型 1 或 2，那么 ∂Q 的某个分支的推出是子午线。根据定义，3-2 型和 3-3 型都带有护栏。□

注5.5. 下文中，我们将使用各类环带对应的具体护栏，如推论 5.4 的证明中所示。

6. Specific annulus configurations

在本节中，我们考察这样的情形：假设环带 Q 的护栏不仅是 Nb(Γ) 的子午线，也是 Γ 本身的子午线。最复杂的情况是 Q 为 3-2型环带。我们将这种情况分为两个子情况。第一种是 Q 为我们称作“管状打结消除圆盘环”（TUDA）的环带。TUDA 是通过将 Γ 中某个圈的打结消除圆盘的两个平行副本用管连接而构造的。它是一种特殊的 3-2型环带，其护栏是 Γ 的子午线。

定义 6.1。设 Γ 是一条 θ 曲线，它有一个组成无结 σ ，且 σ 不围成一个内部与 Γ 不相交的圆盘。设 Q 是真嵌入于 Γ 外部的本质环带，并满足 ∂Q 是 ∂ Nb(σ) 中的一对本质曲线，且 Q 在 σ 的外部可压缩。（必然地，∂Q 由 ∂ Nb(σ) 上的一对优选经线组成。）我们称 Q 为管状打结消除圆盘环（*TUDA*）参见图 3。

当 Q 是一个 TUDA 时，我们证明可以将一个环带附接到 ∂Q ，从而在X(Γ)中构造一个本质环面。第二种子情形是 Q 不是 TUDA。在这种情况下，我们采用受[9, 第 3]节启发的技巧来导出矛盾。我们证明：

命题 6.2. 如果 Γ 是一个布伦尼 θ-曲线，使得 $X(\Gamma)$ 包含一个本质环带 Q ，其类型为类型 *1*、*2*、*3-2* 或 *3-3*，且护栏为 Γ的一条子午线，那么 Q是一个 *TUDA*，并且 $X(\Gamma)$ 包含一个本质环面。

本节其余部分将致力于证明命题 6.2。在本节中，设 Γ为一条 θ曲线，$Q \subset X$(Γ)为一个本质环带。在每种情况下，我们都证明 Γ 不可能是布伦尼，或者（当 Q为一个 TUDA 时） X(Γ)包含一个本质环面。考虑以下选项：

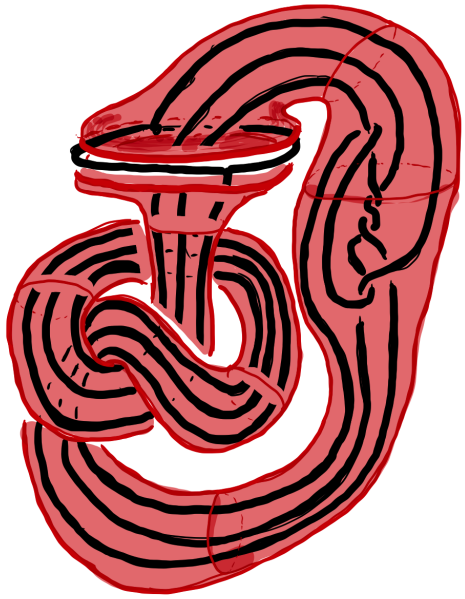


FIGURE 3. 管状打结消除圆盘环（TUDA）的一个例子。其边界分支是圈 $\sigma \subset \Gamma$上的优选经线。

6.1. **Q 是一个 1 型环带，其每个分支都是 ∂Q 的子午线** Γ。我们可以将Γ中的子午圆盘附加到 ∂Q 上，从而得到一个与 Γ 相交于两点的球面 P。球面 P将 S^3 分隔成两个 3-球。其中一个 3-球 B 必定与 Γ 相交于Γ的一条边的子弧 τ。如果 τ 是纽结的，则 Γ 的至少两个组成结会是非平凡的，这意味着 Γ 不是布伦尼。另一方面，如果 τ 是平凡结，这将意味着 Q在 $X(\Gamma)$中与 ∂平行，从而产生矛盾。

6.2. **Q 是一个 2型环带，其一个边界分支是 Γ的子午线。** 假设 Q是一个 1 型环带，且 ∂Q 的一个分支是 Γ的子午线。将 Nb(Γ) 中的一个子午圆盘附着到 ∂Q 的该分支上，从而构造圆盘 P。于是， P 是圈 σ 的外部的一个 ∂-压缩圆盘；它与边 $\Gamma \setminus \sigma$ 恰好相交一次。根据引理 4.2， Γ 不是布伦尼的。

6.3. **带有护栏的 3-3型环带是 Γ的子午线。** Q不可能是 3-3型，因为 Γ 的每条子午线在 $\partial X(\Gamma)$中都是非分离的。

接下来考虑 3-2型环带。假设 Q 是一个 3-2型环带，其护栏是 Γ的子午线。令 $\sigma \subset \Gamma$ 为由与护栏不对偶的两条边组成的圈。那么 $X(\sigma)$是一个实心环面，并且 Q在 $X(\sigma)$中要么不可压缩，要么可压缩。若其可压缩，则压缩后会在 $X(\sigma)$中构造出两个本质圆盘；因此，环带 Q是一个 TUDA。另一方面， Q 可能在 $X(\sigma)$中不可压缩。

6.4. **Q 是一个 TUDA 的 3-2型环带。**

引理6.3。 假设 Γ 是一个 θ-曲线，其 ∂不可约外部具有 *TUDA*，则 $X(\Gamma)$含有一个本质环面。

证明。 假设 Q 是一个 TUDA；根据定义，它是可压缩的。压缩 Q 后会得到两个本质圆盘，因此 ∂Q 必定由 σ的优选经线组成。曲线 ∂Q 将 ∂Nb(σ) 分成

两个环带。将其中任一个环带粘到 Q 上都会形成一个环面。由于每个环面都会分离 S^3，且 Γ 是一条 θ-曲线，因此这两个环带中，一个 A 必定与 Γ 不相交，另一个则与 $\Gamma \setminus \sigma$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$相交两次。令 $Q = Q \cup A$。稍微同痕变形环面 Q，使其真嵌入 $X(\Gamma)$ 中。$\widehat{\ }$它在 Q 压缩到的一侧包含 Γ；在 Q上，存在唯一的同痕类曲线，它在 S^3 中向该侧围成一个压缩圆盘。由于 A 的核心曲线是平凡结 σ的优选经线$\widehat{\ }$，它必定代表该同痕类。环面 Q 在包含 Γ 的$\widehat{\ }$一侧不可压缩。若它在不包含 Γ的一侧可压缩，则环面 Q将是 S^3 的海加德环面，因此可对压缩圆盘作同痕变形，使其边界与 $A \subset \widehat{Q}$ 相交于一条跨越弧。这将意味着 Q是 ∂-可压缩的。进行 ∂-压缩后，会在 $X(\Gamma)$ 中产生一个本质圆盘 D，这与 $X(\Gamma)$ 是 ∂-不可约的假设矛盾。□

注6.4. 我们不知道（必然含环面的）布伦尼 θ-曲线是否可能容纳带管解结圆盘环带。

6.5. Q 是一个3-2型环带，其护栏是 Γ 的一条子午线，而 Q 在圈 σ 的外部中不可压缩，并且与对偶于护栏的边不相交。设 Q为这样的环带；它不是TUDA。图4展示了本情形所用记号。给 Γ 的边编号，使 e_3 对偶于作为 Γ子午线的护栏。设 $\sigma = e_1 \cup e_2$。设 $U =$为$\mathrm{Nb}(\sigma)$。那么 ∂Q 由 ∂U 上的两条平行曲线组成，它们将其分成两个环带 A_1 和A_2。由于 σ 是平凡结，Q 平行于 A_1、A_2之一。由于 Q在 $X(\Gamma)$中是本质的，它恰好平行于其中一条。选择标记，使 Q平行于 A_1；它们共同围成一个包含弧 $\psi = e_3 \setminus U$的实心环面 V。设 $S_U = \partial U$ 和 $S_V = \partial V$，使得 $S_U \cap S_V = A_1$。设 Δ 为一个圆盘，其边界为 $K_{13} = e_1 \cup e_3 = \psi \cup \phi_1$，并与$(\partial U) \cup Q = S_U \cup S_V$横截。设$e_3^{\pm}$为 $e_3 \cap U$的各分支，并设 $\phi_1 = e_1 \cup e_3^+ \cup e_3^-$和 $\phi_2 = e_2 \cup e_3^+ \cup e_3^-$。这些是 U中真嵌入的弧。

假设环带 A_1 沿纵向绕 U 缠绕 $p \in \mathbb{Z}$ 圈，并沿经向绕 U缠绕 $q \geq 0$ 圈。事实上，$q \geq 2$。因为若 $q = 0$，则 $X(\Gamma)$ 将是 ∂-可约的；若 $q = 1$，则 Q 在 $X(\Gamma)$ 中将是 ∂-可压缩的。此外，$p \neq 0$，因为若 $p = 0$，则 Q 将是一个 1 型环带，其 ∂Q 的两个分支都是 Γ 的子午线。

定义 6.5。我们称 Δ 关于 U 是正规的，如果 $\Delta \cap U$ 的每个分支都是以下之一（见图5）：

(1) 一个圆盘 Δ_U，其边界是 ϕ_1 与一条弧 $\epsilon_U \subset \partial U$ 的并，该弧与 ∂A_1 横截。（这样的分支唯一）(2) 一个属于 U 的子午圆盘 D，其边界与 A_1 恰好相交于 p 条贯穿弧。(3) 一个圆盘 D，使得 ∂D 是 ϵ_U 的正则邻域的前沿，并且在 $S_U \setminus \mathrm{Nb}\,\partial\phi_1$ 中，与 ∂A_1 的相交在同痕意义下达到最小。

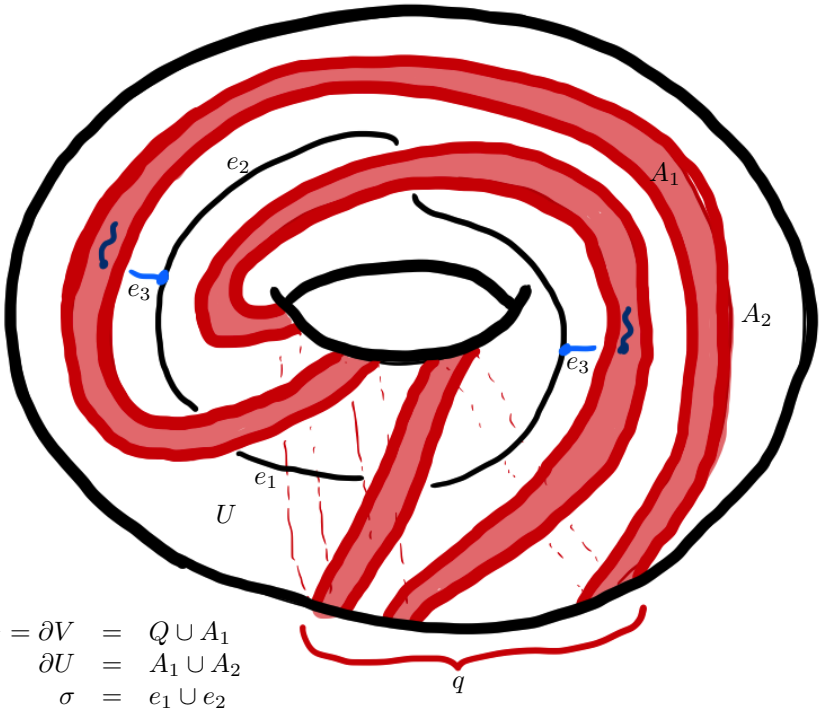
由于 ϕ_1 在 U中与 ∂平行，因此存在一个相对于 K_{13} 的 Δ 同痕，使其相对于 U是正规的。在所有相对于 U正规的此类圆盘中，选择 Δ 使其最小化

$$c(\Delta) = (|\Delta \cap U|, |\Delta \cap Q|, |\Delta \cap A_2|).$$

我们按字典序比较这些元组。

断言 1： Ei 否则，$\Delta \cap X(U)$在 $X(U)$中不可压缩且 ∂-不可压缩，或者 $\Delta \cap S_U = \epsilon_U$.

反设 $E \subset X(U)$是 $\Delta \cap X(U)$的压缩圆盘。由于 Δ是一个圆盘，∂E围成一个子圆盘 $E' \subset \Delta$。由于 E 是一个压缩圆盘，E' 与 U相交。因此，将E' 移至 E的同痕保持正规性，却使 $c(\Delta)$减小，矛盾。因此，$\Delta \cap X(U)$在 $X(U)$中不可压缩。



$$\begin{aligned} S_V = \partial V &= Q \cup A_1 \\ \partial U &= A_1 \cup A_2 \\ \sigma &= e_1 \cup e_2 \\ \psi &= e_3 \cap V \\ \phi_i &= e_i \cup (e_3 \setminus V) \quad i = 1,\ 2 \end{aligned}$$

FIGURE 4. 特殊情形 6.5 中使用的记号。我们未显示与环带 $A_1 \subset \partial U$ 平行的环带 Q。

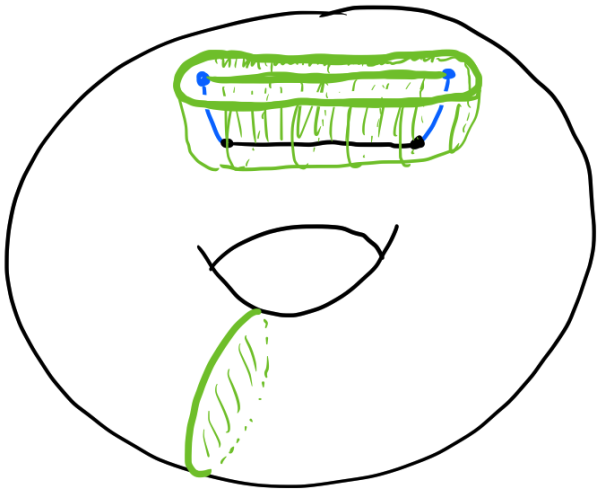


FIGURE 5. 定义 6.5 中所用记号的示意图。

假设 $\Delta \cap S_U \neq \epsilon_U$。为了导出矛盾，假设 $D \subset X(U)$ 是 $X(U)$ 中针对 $\Delta \cap X(U)$ 的一个 ∂-压缩圆盘。 D是一个圆盘，其边界由一条弧 $\delta = D \cap S_U$和 $\Delta \cap X(U)$ 中的一条本质弧组成。简单闭曲线 $(\Delta \cap S_U) \setminus \epsilon_U$将 S_U分割成若干子曲面；设 S 为包含 ϵ_U的子曲面。曲面 S 属于以下情形之一：

(1) 一个与 ϵ_U不相交的环带(2) 一个包含 ϵ_U的环带(3) 一个包含 ϵ_U的圆盘(4) 一个亏格为一且有一个边界分支、与 ϵ_U不相交的曲面

事实上， S不可能属于情形 (1)，因为那样 $\Delta \cap X(U)$ 就会是可压缩的。圆盘 D引导 Δ相对于 $\partial\Delta$进行同痕，从而实现 ∂-压缩。如果 δ连接 $(\Delta \cap S_U) \setminus \epsilon_U$的不同分支，那么同痕之后， Δ 相对于 U仍然是正规的，但 $|\Delta \cap U|$ 已减少，这就产生矛盾。如果 δ将 ϵ_U连接到 $\Delta \cap S_U$的一个圆形分支，那么同痕之后， Δ相对于 U仍然是正规的，但弧 ϵ_U 已转变为一条由原来的 ϵ_U 与该圆带化得到的弧。这一同痕再次使 $|\Delta \cap U|$减少，产生矛盾。

因此，假设 Δ 将 $\Delta \cap S_U$的一个分支连接到自身。在这种情况下，$\Delta \cap U$ 的一个圆盘分支会转变为一个环带 α。可以验证，在每种情况下， α 的一端要么在 $U \setminus \phi_1$中围成一个圆盘，要么 α 的两端是在 S_U上的平行曲线。

假设 α 的一端 c 围成一个圆盘 $E \subset U \setminus \phi_1$。由于 Δ 是一个圆盘， c 也围成一个子圆盘$E' \subset \Delta$。圆盘 E' 的内部必与 S_U相交。将 E' 同痕到 E，再稍稍将其从 S_U 上移开，便会得到一个圆盘，这与我们对 Δ的选择相矛盾。另一方面，若 α的两端是 S_U中的平行简单闭曲线，它们会在 S_U 中围成一个与 ϵ_U不相交的环带。对 Δ进行环带交换后，我们便得到一个圆盘，这与最初对 Δ的选择相矛盾。

□(断言 1)

断言 2： ψ 在 $X(U)$中并非与 ∂平行。

反设结论不成立。令 D 为一个平行圆盘，并使其与 Q的交最小。由于 Q 不可压缩，不存在交圆。如果存在交弧，则它必定横跨 Q。在 D 中，这样的一条最外侧弧会截出一个 ∂-压缩圆盘，用于 Q 在 $X(\Gamma)$中的压缩，矛盾。□(断言 2)

断言 3： $\Delta \cap U$ 至少包含一个子午圆盘

反设 $\Delta \cap U$仅由圆盘 Δ_U以及定义 6.5中的类型（3）圆盘组成。该段落中记号的示意图见图6。每个这样的圆盘 D 的边界都围成一个包含 ϵ_U的圆盘 $D' \subset S_U$。令 D和 D'为其中最外侧的圆盘。于是，在 U中，$D \cup D'$共同围成一个乘积区域 $B = D' \times [0,1]$，其中 $D' = D' \times \{0\}$。我们可以对乘积结构进行同痕变形，使圆盘 $\Delta_U = \epsilon_U \times [0, 1/2]$ 满足该条件，并使除$D \cup \Delta_U$之外、 $\Delta \cap U$中的每个其他圆盘都成为一个竖直环带与一个水平圆盘的并。使用 D的法向量，将乘积结构延拓到 $D' \times [0, 3/2]$。随后，我们可以相对于端点，将 ϕ_2同痕变形为弧 ϕ_2'，使其与 $D' \times [0, 3/2]$ 的交等于 $\partial\psi \times [0, 3/2]$。这一同痕变形可能通过在 e_1 与 e_2之间进行交叉变换来改变图 Γ。纽结 $\phi_2' \cup \psi$ 与 K_{23} 同伦，因此是一个平凡结。然而，我们还可看到，它也是通过使用带 $\Phi = \epsilon_U \times [0, 3/2]$将纽结 $K_{12} = \phi_1 \cup \psi$带化为纽结 $\phi_2' \cup (\epsilon_U \times \{3/2\})$所得的结果。

令 P 为 Δ 的正则邻域的前沿所构成的球面。它与带 Φ 相交于 $2(|(\Delta \cap U) \setminus \Delta_U| + 1$ 条弧：每个 Δ 中类型（3）的圆盘对应两条，另有一条来自 Δ_U 的前沿。因此，带 Φ 连接了分裂链环的分支，所以 $K_{23} = \phi_2' \cup \psi$ 是一个带和。Scharlemann [23] 的一个著名定理指出，该带和是一个连通和。特别是，

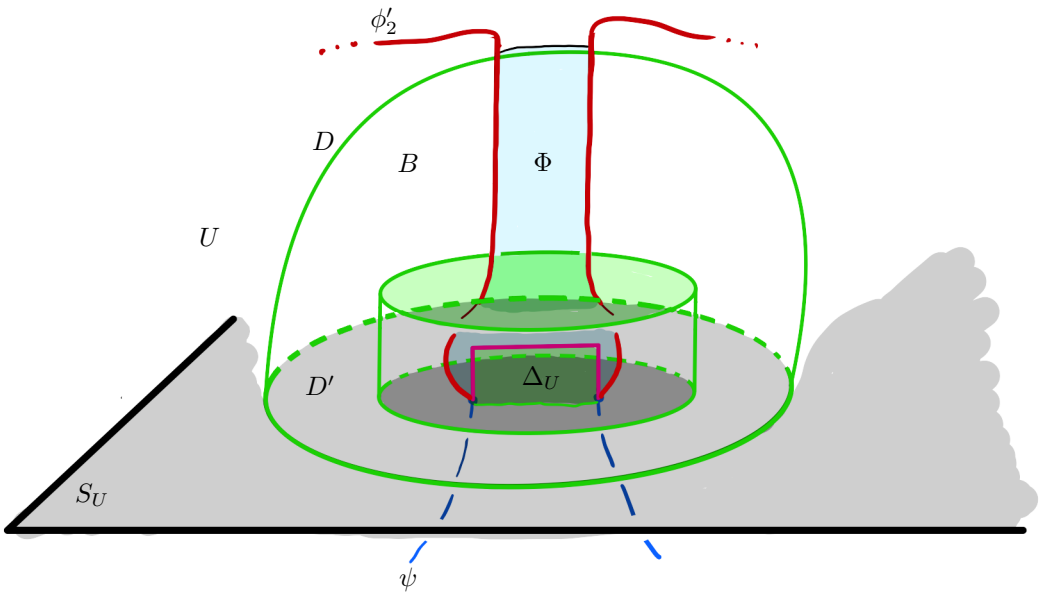


FIGURE 6. 纽结 $K(\phi_2')$ 可通过带化纽结 $K(\phi_1)$与 W中同伦于 $\phi_1 \cup \phi_2'$的纽结得到。带 Φ 以蓝色标示。绿色圆盘是 $\Delta \cap W$。参见情形6.5中断言 3的证明。

由 Δ 的极小性， $\Delta \cap S_U = \epsilon_U$。特别是， ψ 在 $X(U)$ 中与 ∂ 平行，这与断言 2 矛盾。□（断言 3）

断言4： $\Delta \cap A_1$ 和 $\Delta \cap Q$ 分别由 A_1 和 Q中的贯穿弧组成 y.

由于 $\Delta \cap U$ 包含一个子午圆盘，且 U 的每个子午圆盘都与 A_1相交 $|p| \geq 1$ 次，因此A_1 至少包含 $|p|$ 条跨越弧。因此， Q 至少包含一条交弧。 $c(\Delta)$的极小性意味着 Δ 与 Q 或 A_1中的任一个之间均没有交圆。若 Q或 A_1中存在非本质的交弧，则通过同痕即可消除这些交弧，这又会与 $c(\Delta)$的极小性矛盾。□(断言 4)

断言5： $\Delta \cap X(U \cup V)$ 在 $X(U \cup V)$ 中不可压缩

这与断言 1 证明的第一部分相同。

断言6： $\Delta \cap X(U \cup V)$ 由 $X(U \cup V)$ 的子午圆盘组成

实心环面 $X(U \cup V)$ 中唯一的不可压缩可定向连通曲面是子午圆盘，以及与 ∂ 平行的圆盘和环带。由于 $\Delta \cap A_2$或 $\Delta \cap Q$的任何分支都不是非本质圆或非本质弧，因此 $\Delta \cap X(U \cup V)$ 的任何分支都不是与 ∂ 平行的圆盘。假设某个分支$\Delta' \subset \Delta \cap X(U \cup V)$ 是 $X(U \cup V)$ 中一个最外侧的、与 ∂ 平行的环带。根据 $c(\Delta)$ 的极小性，它不可能与 Q 平行。因此 Δ' 与 $\partial X(U \cup V)$ 中的一个环带平行，而该环带与 A_2 和Q 相交于交替矩形。然而，这意味着 $\Delta \cap X(U)$ 有一个 ∂-压缩圆盘，这与断言 1 矛盾。□(断言 5)

现在我们可以得出矛盾，从而完成情形6.5。令 τ_m: $\partial X(U \cup V) \to \partial X(U \cup V)$ 为沿 Q 做 m 重扭的同胚。由于 $\Delta \cap A_2$ 和 $\Delta \cap Q$ 都由贯穿弧组成，因此存在 $m \in \mathbb{Z}$，使得 $\tau_{-m}(\Delta \cap \partial X(U \cup V))$ 的某个分支包含一条曲线，它是实心环面 $U \cup V$ 的子午线。因此，由于 ∂Q 的每个分支的斜率均为 q/p

（相对于 $U \cup V$），$\Delta \cap \partial X(U \cup V)$ 的每个分支的斜率均为 $(mq+1)/mp$。这些简单闭曲线必定都是 U 的优选经线（即 $X(U \cup V)$ 的子午线），因此必有$mq+1=0$。但这意味着 $q=\pm 1$，矛盾。□

7. Sutured Manifold Theory

本节独立于第6节，运用缝合流形理论的结果证明：

命题 7.1。设 $\Gamma \subset S^3$ 是布伦尼手铐曲线或 θ-曲线。若 $X(\Gamma)$包含一个本质环带，则以下情形之一成立：

(1) Γ 是手铐曲线，且分离边的一条子午线是本质环带 Q的护栏。*(2)* Γ是含环面的 θ-曲线。*(3)* Γ 是无环面的 θ 曲线，且以下情形之一成立：*(a)* Q 属于类型 *1*，且 ∂Q 的每个分支都是 Γ的一条子午线；或*(b)* Q 属于*3-2*型，其护栏是一条 Γ的子午线。

随后，我们将这一结果与第6节的结果结合起来，完成定理 1.1 的证明。

缝合流形理论最初由 David Gabai [5–7], 提出，其中包含一套强有力的技巧，可用于研究 Haken 3-流形中本质曲面的欧拉示性数。我们不必重新讨论该理论的技术机制，只需用到两个关于向缝合线添加一个2-柄的结果。以下便是我们所需的内容。相关术语取自 [5, 24, 25, 29, 30]。

令 N 为一个紧致可定向三维流形。在我们的情形中，这个三维流形将是 S^3中的二属把手体结、二分支链环或纽结的外部。在这些情形下，$H_2(N, \partial N; \mathbb{Z})$要么是 $\mathbb{Z}^2$（前两种情形），要么是 $\mathbb{Z}$（最后一种情形）。如果 ∂N 是两个环面的并集，我们称类 $\xi \in H_2(N, \partial N)$为类塞弗特，如果 $\partial \xi$ 在 ∂N 每个分支的第一同调上的投影都非平凡。

紧致、连通、定向曲面 S 的瑟斯顿范数 $\chi_-(S)$在其为球面或圆盘时为 0，否则为 $-\chi(S)$。非连通紧致定向曲面的瑟斯顿范数等于其各分支的瑟斯顿范数之和 [34]。如果曲面 S 真嵌入于 N，且在所有满足 $\partial T = \partial S$ 和$[S, \partial S] = [T, \partial T]$、并属于同调群[3] $H_2(N, \partial S)$的定向真嵌入曲面 $T \subset N$ 中，$\chi_-(S) \leq \chi_-(T)$，则称该曲面为范数极小。如果曲面 S不可压缩、瑟斯顿范数极小，且不是非本质球面或圆盘，则称其在 N中是紧致。

假设 $\gamma \subset N$ 是一组互不相交的定向曲线，$A(\gamma)$ 是 γ 在 ∂N 中的一个固定正则邻域，而 $T(\gamma)$ 是 ∂N 的若干环面分支的并，其中每个分支都与 γ 不相交。我们利用 γ 的定向来定向 $\partial A(\gamma)$。要求曲线 γ 满足以下性质：$\partial N \setminus (A(\gamma) \cup T(\gamma))$ 的各个分支被划分为子曲面 $R_-(\gamma)$ 和 $R_+(\gamma)$，使得 $R_-(\gamma)$具有一致的向内定向，而 $R_+(\gamma)$具有一致的向外定向。此外，由 $R_\pm(\gamma)$的定向诱导的 $\partial R_\pm(\gamma)$的定向，与由 γ诱导的定向相一致。我们用简洁记号 (N, γ)表示所有这些数据，并称 (N, γ)为缝合流形。若 N 不可约，且曲面 $R_-(\gamma)$、$R_+(\gamma)$和 $T(\gamma)$均为紧致，则缝合流形 (N, γ)称为紧致缝合流形。曲线 γ 和环面 $T(\gamma)$称为 (N, γ)的缝合线。本文中，γ 将是图7所示的某种形式的曲线。

[3]所有同调群的系数均为整数。

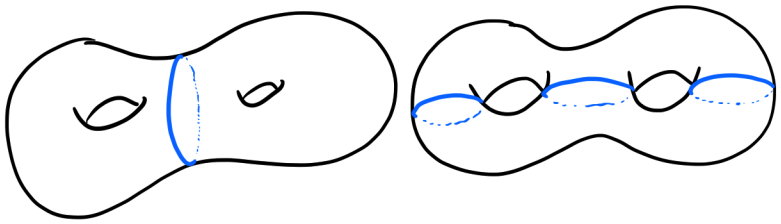


FIGURE 7. 亏格为二的边界分支上标准缝合线的两种选择

我们将沿一条缝合线附加一个 2-柄。注意，若（N，γ）是一个缝合流形，且 b 是 γ 的一个分支，那么通过选择 2-柄的附着方式，使其附着区域与 b 在 $A(\gamma)$ 中的邻域重合，可知（$N[b]$，$\gamma \setminus b$）是一个缝合流形。

给定一个真嵌入的定向曲面 $S \subset N$，且 ∂S 与 γ 横截，对于从 N 中移去 S 的正则开邻域所得到的缝合流形 $N \setminus S$，缝合线 γ' 有一种自然的选择。曲线 γ' 同伦于 γ 与 ∂S 的双曲线和。我们称 $(N,\gamma) \xrightarrow{S} (N \setminus S, \gamma')$ 是一个以分解曲面 S 为分解曲面的缝合流形分解。如果 (N,γ) 和 $(N \setminus S, \gamma')$ 都是紧致的，则称缝合流形分解 $(N,\gamma) \xrightarrow{S} (N \setminus S, \gamma')$ 是紧致的。注意，如果该分解是紧致的，那么 S 也是如此，但反过来未必成立。缝合流形层次是一列 $\mathcal{H}$ 缝合流形分解，最终到达一个缝合流形 (N_n, γ_n)，其中 $H_2(N_n, \partial N_n) = 0$。与 $\mathcal{H}$ 相关联的是一个分支曲面 $B(\mathcal{H})$，它由层次结构中各分解曲面的并经平滑得到，平滑方式由曲面的定向决定。

Taylor 在 [29]，中证明了以下结果 [30, 此处的陈述与定理 2.1] 中的陈述一致。在该陈述中，我们令 $\beta \subset N[b]$ 为沿曲线 b 附加的 2-柄的余核，即适当嵌入弧。

定理 7.2。设 (N,γ) 是一个具有属 *2* 边界分支F的紧致缝合流形。设 $\gamma \cap F$ 由一条分离曲线或三条非分离曲线组成，且 b 是 $\gamma \cap F$ 的一个分支。令 $Q \subset N$ 为一个真嵌入曲面，且其分支中没有任何球面或与 γ 不相交的圆盘。另假设 ∂Q 与 γ 的相交在同痕意义下是最小的，并且 $|\partial Q \cap b| \geq 1$。那么以下情形之一成立：

(1) Q 有一个压缩圆盘或 b-边界压缩圆盘。*(2)* 有序对 $(N[b], \beta)$ 有一个真直和项 (M_1', β_1')，其中 M_1' 是一个透镜空间（不包括 S^3 或 $S^1 \times S^2$），且 β_1' 是 M_1' 的亏格一 *Heegaard* 分解中某个实心环面的核。*(3)* 缝合流形 $(N[b], \gamma \setminus b)$ 是紧致的。弧 β 可以经过适当同痕变形，使其与某个缝合流形层次结构 $\mathcal{H}$ 中的第一个分解曲面 S 不相交，该层次结构属于 $(N[b], \gamma \setminus b)$。若 $|\gamma \cap F| = 3$，则对于 $H_2(N[b], \partial N[b])$ 中任意给定的非零类同调类$\widehat{\ }$，曲面 S 可以取为代表 $\pm y$。若 $|\gamma \cap F| = 1$，则曲面 S 可以取为 $H_2(N[b], \partial N[b])$ 中任意一个类塞弗特同调类的代表。*(4)* $-2\chi(Q) + |\partial Q \cap \gamma| \geq 2|\partial Q \cap b|$。

给定一条手铐曲线或 θ-曲线 $\Gamma \subset S^3$，我们可以如下构造一个缝合流形。令$N = X(\Gamma)$。如果 Γ 是一条手铐曲线，令 γ 为 Γ的分离边的子午线。给γ定向，选取一个正则邻域 $A(\gamma)$，并给其各个分支定向（每个分支都是一个连通亏格一

曲面，且只有一个边界分支），从而得到 $\partial N \setminus A(\gamma)$ 和 $R_-(\gamma)$。如果 Γ 是一条θ-曲线，令 $\gamma \subset \partial N$ 为三条简单闭曲线的并，每条都是 Γ的一条边的子午线。选取 γ的正则邻域 $A(\gamma)$。于是，$\partial N \setminus A(\gamma)$的每个分支都是一片裤子曲面（一个具有三个边界分支的连通亏格零曲面）。给其中一个分支向内定向，并称其为 $R_-(\gamma)$；给另一个分支向外定向，并称其为 $R_+(\gamma)$。这些选择为 γ 定向，将 (N, γ) 转变为一个缝合流形。我们称之为与图 Γ 对应的标准缝合流形 。参见图7。

引理 7.3。 假设 $\Gamma \subset S^3$ 是布伦尼手铐曲线或 θ-曲线，则与 Γ 对应的标准缝合流形是紧致的。

证明。 令 (N, γ) 为与 Γ 对应的标准缝合流形。注意，$R_-(\gamma)$ 和 $R_+(\gamma)$ 都是连通曲面，欧拉示性数等于 -1。若其中一个（记为 S）不是瑟斯顿范数极小的，则存在一个边界相同的同调曲面 T，其瑟斯顿范数严格更小。这样的曲面必定是若干球面、圆盘、环带和环面的并。由于 ∂T 是 $\Gamma \subset S^3$ 各边的子午线，因此 T 至少有一个分支是圆盘。这意味着 Γ 是可约手铐曲线，因此正如先前所述，它不是布伦尼曲线。因此，若 Γ 是布伦尼曲线，则 $R_-(\gamma)$ 和 $R_+(\gamma)$ 都是瑟斯顿范数极小的。这也意味着它们不可压缩。由于 S^3 中每个驯嵌球面两侧都围成一个球，故 N 不可约。因此，(N, γ) 是紧致的。□

设 (N, γ) 是对应于布伦尼手铐曲线或 θ-曲线 $\Gamma \subset S^3$ 的标准缝合流形。设 $b \subset \gamma$ 是一条缝合线。由于 b 是 Γ 的一条边 e 的子午线，沿 b 将一个 2-柄附加到 ∂N 上，对应于从 Γ 中移除边 e。因此， $N[b]$ 要么是双分支平凡链环的外部（如果 Γ 是布伦尼手铐曲线），要么是平凡结的外部（如果 Γ 是布伦尼 θ-曲线）。

因此，我们得到定理 7.2 的如下改写。

定理 7.4. 设 $\Gamma \subset S^3$ 是一条布伦尼 θ-曲线或手铐曲线。令 (N, γ) 为对应于 Γ 的标准缝合流形。令 $b \subset \gamma$ 为一条缝合线，并设 $Q \subset N$ 是一个真嵌入曲面，使得 ∂Q 与 γ 的交数最小，且具有 $|\partial Q \cap b| \geq 1$。设 Q 不可压缩，且不含 b-边界压缩圆盘。那么

$$-2\chi(Q) + |\partial Q \cap \gamma| \geq 2|\partial Q \cap b|.$$

证明。 由引理 7.3，(N, γ) 是紧致的。令 e 为 T 中以 b 为子午线的边。弧 β 等于边 e 去掉其端点的一个正则邻域。我们应用定理 7.2。由于 S^3 没有透镜空间因子，我们只需考虑以下可能性:

- 缝合流形 $(N[b], \gamma \setminus b)$ 是紧致的。弧 β 可以经过适当同痕变形，使其与某个缝合流形层次结构 $\widehat{\mathcal{H}}$ 中的第一个分解曲面 S 不相交，其中该层次结构是 $(N[b], \gamma \setminus b)$ 的紧致缝合流形层次。若 $|\gamma \cap \partial N| = 3$，则曲面 S 可以取为代表 $\pm y$，其中 $H_2(N[b], \partial N[b])$ 中任意给定的非零类为 $\widehat{\ }$。若 $|\gamma \cap \partial N| = 1$，则曲面 S 可以取为代表 $H_2(N[b], \partial N[b])$ 中任意一个类塞弗特同调类。

若 Γ 是手铐曲线，则 $\Gamma \setminus e$ 是分裂链环，因此可知 $N[b]$ 是可约的。因此，$(N[b], \varnothing)$ 并不紧致。于是，我们只需考虑 Γ 是一条 θ-曲线的情形；也就是说， $|\gamma \cap \partial N| = 3$。$\widehat{\ }$我们将 $y \in H_2(N[b], \partial N[b])$ 视为由定向圆盘 $S = S \cap N[b]$ 所代表的类，其中 S 是 S^3 中边界为圈 $\gamma \setminus e$ 的圆盘。不失一般性，假设 $\widehat{S}$ 已经同痕变形，以使 $|\partial S \cap \gamma|$ 最小。由于 $\chi_-(S) = 0$，类中的每个范数极小曲面

$\frown$ $\frown[S,\partial S]$ 的瑟斯顿范数等于 0。由于 $N[b]$ 是实心环面，层次结构中的第一个曲面 $\frown\mathcal{H}$ 是一个圆盘；相对于其边界，它与 S 同伦（必要时可反转定向）。但这意味着 N 是 ∂-可约的，这与引理 4.1 矛盾。□

命题 *7.1* 的证明。设 Γ 是一条布伦尼 θ曲线或手铐曲线，使得 $X(\Gamma)$ 含有一条本质环带。设 $(N,\ \gamma)$ 是 $X(\Gamma)$ 上的标准缝合流形结构。若 Γ 是一条手铐曲线，令 $b=\gamma$。若 Γ 是一条 θ 曲线，令 b_1，b_2，b_3 为 γ 的各个分支。令 Q 为 $X(\Gamma)$ 中任意一条本质环带，它在同痕意义下与 γ 的交点数最少。

我们先证明，对 γ 的任意分支 b，Q 都没有 b-∂ 压缩圆盘。假设 D 是这样一个圆盘。沿 D 对 Q 作边界压缩，得到 Q'，它要么是一个圆盘，要么是一个圆盘与一个环带的并。由于（根据引理 4.1） $X(\Gamma)$ 是 ∂不可约且不可约的，圆盘分支是 ∂平行的。因为 Q 是本质的，这意味着 Q' 是一个圆盘与一个环带的并；此外，可以将 ∂Q 同痕变形，使其与 γ 的交点更少。这与我们对 Q 的选择矛盾。

根据定理 7.4，对于任意分支 $b\subset\gamma$

$$|\partial Q\cap(\gamma\setminus b)|\geq|\partial Q\cap b|. \tag{1}$$

（注意，当 $\partial Q\cap b=\varnothing$ 时，该陈述显然成立。）因此，若 Γ 是一条手铐曲线，则 $\partial Q\cap b=\varnothing$。

以下假设 Γ 是一条 θ-曲线。根据推论 5.4，我们可以假设存在一个圆盘 $A\subset \mathrm{Nb}(T)$，它是 Q 的护栏；令 $a=\partial A$。

γ 的每个分支 b_i 都围成 $\mathrm{Nb}(T)$ 中的一个圆盘 B_i。我们可以假设 B_i 已相对于 ∂B_i 经过同痕变形，使得 $B_i\cap A$ 是一组弧；根据 a 的定义，这组弧在同痕意义下是极小的。$(B_1\cup B_2\cup B_3)\cap A$ 中任何在 A 内最外侧的弧分支，都会切出 A 的一个子圆盘，其边界是在 $R_\pm$ 中真嵌入的一条弧，且其端点位于 γ 的同一个分支上。

情形 1： $a\cap\gamma\neq\varnothing$.

不失一般性，我们可以假设 $a\cap R_+$ 包含一条将 b_1 与自身相连的弧。$a\cap R_+$ 的其他每条弧，要么将 b_1 与自身相连，要么将 b_1 与 b_2 或 b_3相连。这意味着 $|a\cap b_1|>|a\cap(b_2\cup b_3)|$。因此，$a\cap R_-$ 也包含一条将 b_1 与自身相连的弧。

由于 ∂Q 与 a不相交，$\partial Q\cap R_\pm$ 的每条弧（若有）要么将 b_1 与自身相连，要么将 b_1 与 b_2 或 b_3相连。若 $\partial Q\cap b_1=\varnothing$，则 $\partial Q\cap R_\pm$ 的每个分支都是与 b_2 或 b_3平行的圆。这意味着结论（3a）。

因此，假设 $\partial Q\cap b_1\neq\varnothing$。我们将证明结论（3b）成立。在这种情况下，我们利用定理 7.4 得出：

$$|\partial Q\cap b_1|\geq|\partial Q\cap(b_2\cup b_3)|.$$

根据不等式（1），这将意味着 $|\partial Q\cap b_1|=|\partial Q\cap(b_2\cup b_3)|$。如果情况确实如此，那么对于某个 $j\in\{2,3\}$，∂Q必定与 b_j 相交。不妨设 $j=2$。将不等式（1）应用于 b_2，我们看到必然有 $|\partial Q\cap b_2|=|\partial Q\cap b_1|$。因此，$|\partial Q\cap b_3|=0$，所以 ∂Q与 b_3不相交。于是，$\partial Q\cap R_\pm$的弧将 b_1 与 b_2连接起来，并且与 b_3不相交。因此，∂Q 始终以相同的符号与 b_1 和 b_2 中的每一个相交，并且与 b_3不相交。这就是结论（3b）。

情形 2： $a\cap\gamma=\varnothing$

由于每个 $R_\pm$ 都是一个裤子曲面，这意味着 a 平行于 γ 的一个分支。不失一般性，我们可以假设这个分支是 b_1。因此， ∂Q 的每个分支要么同伦于 $b_2 \cup b_3$ 的一个分支，要么 $\partial Q \cap R_\pm$ 是一组与 b_1 不相交的弧。对于 $\{j,k\} = \{2,3\}$ 的每种选择，我们都可以应用不等式 1，得到 $|\partial Q \cap b_j| \geq |\partial Q \cap b_k|$。因此，$|\partial Q \cap b_2| = |\partial Q \cap b_3|$，于是 $\partial Q \cap R_\pm$ 的每个分支都是一条连接 b_2 和 b_3 的弧。因此，∂Q 与 b_2 和 b_3 的每次相交符号始终相同，并且与 b_1 不相交。这又是结论（3b）。□

现在我们可以结合命题 6.2 和命题 7.1 来证明定理 1.1。

定理 *1.1* 的证明。假设 Γ 是一条布伦尼 θ-曲线，且 $X(\Gamma)$ 无环面。我们将证明 $X(\Gamma)$ 也无环带。反设 $X(\Gamma)$ 含有一个本质环带 Q。根据引理 5.3，我们可以假设 Q 属于类型 1 、 2 或 3。如果它属于 3 型，那么根据引理 4.1，它属于 3-2 型或 3-3 型。根据推论 5.4， Q 有一个护栏 A。根据命题 7.1， Q 有一个护栏，且该护栏是 Γ 的子午线。于是根据命题 6.2， $X(\Gamma)$ 含有一个本质环面。□

8. Uniqueness of Brunnian spines

如何为同一个亏格 2 把手体结构造多个布伦尼安骨架? 有两种方法:

(1) 从一条布鲁尼安手铐曲线出发，将分离边收缩，得到一个布伦尼安 2 花束。(2) 从一条布伦尼安 θ-曲线出发，将任意一条边收缩，得到一个布伦尼安 2 花束。

在 [30] 推论 6.2], Taylor 根据定理 7.2 得出了以下结论:

定理 8.1. 假设 V 是嵌入紧致可定向 *3*-流形 M 中的一个亏格 *2* 把手体，且 M 不含透镜空间因子，任何一对在 M 中可压缩的 ∂M 中的曲线在 M中同伦，并且 $N = X(V)$ 不可约且 ∂-不可约。若 a 和 b 是 ∂V 上的本质闭曲线，它们在 V 中分别围成圆盘，且不能通过同痕变形使其互不相交，则以下情况之一成立:

(1) $N[a]$ 和 $N[b]$ 中的一个是不可约的和 ∂-不可约的。*(2)* 存在一个本质环带 $A \subset N$，使得 ∂A 的一个分支位于 ∂M 的一个分支上，另一个位于 ∂V上，与 a 或 b 不相交，并在 V中界定一个圆盘。

下面的定理可轻易推出。

定理 8.2。 设 $V \subset S^3$ 是一个具有布伦尼安脊的亏格二把手体。那么（在 V中的同痕意义下），V 的任意两个布伦尼安脊要么在 V 中同伦，要么其中一个是二花束，并且由一个同样是 V的脊的布伦尼安手铐图收缩分离边得到；或者由一个同样是 V的脊的布伦尼安 θ-图收缩一条边得到。特别地，一个亏格二布伦尼安把手体结至多有一个三价布伦尼安脊；如果它有两个布伦尼安二花束脊，那么它有四个布伦尼安脊，其中三个是二花束，一个是 θ-曲线。

证明。令 Γ_1 和 Γ_2 为 W 的布伦尼安脊，并设 $V = \mathrm{Nb}(\Gamma_1) = \mathrm{Nb}(\Gamma_2)$，使得 $N = X(\Gamma_1) = X(\Gamma_1)$。不失一般性，我们可以假设，若其中一个是 θ-曲线或手铐曲线，

则 Γ_2 是。令 a，$b \subset \partial V$ 分别为 Γ_1 和 Γ_2 的边的子午线。$N[a]$ 和 $N[b]$ 均为可约的或 ∂-可约的。由引理 4.1，N 是不可约的，且 ∂-不可约。因此，由定理 8.1 及 $M = S^3$，我们可知 a 和 b 可以经过同痕变形而互不相交。

令 $\mu_i \subset X(\Gamma_i)$ 由 Γ_i 的每条边上的一条子午线组成。由于 μ_1 的每条曲线都可以通过同痕变形与 μ_2 的每条曲线不相交，我们可以将 μ_1 同痕变形为与 μ_2 不相交。令 D_i 为一组由 μ_i 界定的子午圆盘。该同痕变形可以延拓到 V 中，从而我们也将 D_1 同痕变形为与 D_2 不相交。将 Γ_1 随此同痕变形一起移动。

假设 Γ_2 是一条 θ-曲线或手铐曲线。那么 $V \setminus \mathrm{Nb}(D_2)$ 是两个 3-球 B 和 B' 的并。图 Γ_2 分别与 B 和 B' 相交于一棵具有单个内部顶点和三条边的树。根据脊的定义，该图是 ∂- 平行的。由于 $\partial V \setminus \mathrm{Nb}(\partial D_2)$ 是两个裤子曲面的不交并，因此 μ_1 的每条曲线都与 γ_2 的某条曲线同伦。回顾一下，μ_1 的曲线在 ∂W 中两两不同痕。对 V 进行同痕变形，使其经过 $\mu_1 \subset \mu_2$ 和 $D_1 \subset D_2$。如果 $|\mu_1| = |\mu_2|$，那么该同痕变形还可以延拓为 $\Gamma_1 \cap B$ 的同痕变形，使其经过 $\Gamma_2 \cap B$，并使 $\Gamma_1 \cap B'$ 经过 $\Gamma_1 \cap B$，且该同痕变形固定 D_1 和 D_2。因此，如果 Γ_1 和 Γ_2 都不是二花束，则结论成立。

假设 Γ_2 再次是一个 θ-曲线或手铐曲线，但 Γ_1 是一个二花束。根据我们之前的论证，有 $D_1 \subset D_2$，且 $|\mu_1| = 2$ 和 $|\mu_2| = 3$。因此，$V \setminus \mathrm{Nb}(D_1)$ 是一个 3-球 B，其边界上有圆盘 D_1 的两个副本。图 $\Gamma_1 \cap B$ 是一棵有四个顶点的树，且只有一个内部顶点，该顶点与 ∂平行。图 $\Gamma_2 \cap B$ 是一棵有六个顶点的树，其中两个是内部顶点。它也与 ∂平行。因此，Γ_1 同伦于在 Γ_2 中收缩$\Gamma_2 \cap B$ 的内部边所得的结果。

最后，假设 Γ_1 和 Γ_2 都是二花束。论证与我们此前所做的类似，不同之处在于，$V \setminus \mathrm{Nb}(D_2)$ 是一个单独的 3-球 B，其中有 D_2 的两个副本。图 $\Gamma_2 \cap B$ 是一棵有四条边的树，且只有一个内部顶点，该顶点在 B中与 ∂平行。曲线 μ_2 位于曲面 $P = \partial V \setminus \mathrm{Nb}(\mu_2)$中，该曲面是一个有四个边界分支的连通平面曲面。如果 μ_1 的每条曲线都同伦于 μ_2的一条曲线，那么，如前所述，我们可以将 D_1 同痕变形为D_2，再将 Γ_1 同痕变形为 Γ_2。

因此，假设 μ_1 与 μ_2不同伦。令 α 为 μ_1 的一个分支，且不同伦于 μ_2中的任何曲线。于是，$P \setminus \mathrm{Nb}(\alpha)$是两个裤子曲面的不交并。$\mu_1$ 的各个分支在 ∂V中彼此不同伦。因此，曲线 $\alpha' = \mu_1 \setminus \alpha$ 同伦于 μ_2中的一条曲线。进行这一同痕。此时，μ_1 和 μ_2 分别是亏格 2 曲面 ∂V中两条互不相交、非平行的非分离曲线之并。它们共有分支 α'。因此，$\mu = \mu_1 \cup \mu_2$ 将 ∂V切割成两个裤子曲面的不交并；μ 中的三条曲线均为非分离曲线，且每条曲线都围成 V中的一个圆盘。令 Γ 为 V中 θ的一条曲线，它是 V的脊，且与这些圆盘对偶。曲线α、α'和 $\alpha'' = \mu_2 \setminus \alpha'$ 是 Γ各边的子午线。令 e、e'和 e'' 为相应的边。注意，Γ_1 可通过收缩 e'' 得到，而 Γ_2 可通过收缩 e得到。与 α 对偶的 Γ_1 的组成结，是将 e''收缩为一点后从 $K' = e \cup e''$得到的。因此，在 S^3中，该纽结与 K' 同伦，所以 K' 是平凡结。同理，与 α' 对偶的Γ_1 的组成结，是将 e'' 收缩为一点后从 $K = e' \cup e''$ 得到的，因此 K'' 也是平凡结。同样，Γ_2 的组成结，是将e 收缩为一点后从 $K' = e \cup e''$ 和 $K'' = e \cup e'$ 得到的，因此它们都是平凡结。因此，T的三个组成结 K、K'和 K'' 都是平凡结，所以 Γ 具有布伦尼性质。由于 $X(\Gamma) = X(\Gamma_1) = X(\Gamma_2)$是 ∂-不可约的，Γ非平凡，因此它是布伦尼的。□

Acknowledgements

SAT感谢Alex Zupan和Ryan Blair提供的有益讨论。本研究部分由美国国家科学基金会DMS-2104022号资助项目和科尔比学院研究基金资助。

References

[1] Colin Adams、Alexandra Bonat、Maya Chande、Joye Chen、Maxwell Jiang、Zachary Romrell、Daniel Santiago、Benjamin Shapiro 和 Dora Woodruff, *Hyperbolic knotoids*, 《欧洲数学杂志》10 (2024)，第 3 期，论文编号 43，30 页，DOI 10.1007/s40879-024-00755-z。MR4773250[2] Colin Adams、Zachary Romrell、Alexandra Bonat、Maya Chande、Joye Chen、Maxwell Jiang、Daniel Santiago、Benjamin Shapiro 和 Dora Woodruff, *Generalised knotoids*, 《剑桥哲学学会数学会刊》177 (2024)，第 1, 67 102, 10 1017 0305004124000148 4829311 期– DOI . /S . MR Sangbum Cho 和 Darryl McCullough, [3] *The tree of knot tunnels*, 《几何与拓扑》13 (2009)，第 2 期，769–815，DOI 10.2140/gt.2009.13.769。MR2469530[4] Dabrowski-Tumanski P、Goundaroulis D、Stasiak A、Rawdon EJ 和 Sulkowska JI, *Theta-curves in proteins*, 《蛋白质科学》33 (2024)，DOI doi.org/10.1002/pro.5133。[5] David Gabai, *Foliations and the topology of 3-manifolds*, 《微分几何杂志》18 (1983)，第 3 期，445–503。MR0723813[6] *Foliations and the topology of 3-manifolds. II*, 《微分几何杂志》26 (1987)，第 3 期，461–478。MR0910017[7] *Foliations and the topology of 3-manifolds. III*, 《微分几何杂志》26 (1987)，第 3 期，479–536。MR0910018[8] Catherine Gille 和 Louis-Hadrien Robert, *A signature invariant for knotted Klein graphs*, 《代数与几何拓扑》18 (2018)。[9] C. McA. Gordon 和 R. A. Litherland, *Incompressible planar surfaces in 3-manifolds*, 《拓扑应用》18 (1984)，第 2 3, 121 144, 10 1016 0166 8641 84 90005 1 0769286 期- – DOI . / - ( ) - . MR C. McA. Gordon 和 J. Luecke, [10] *Knots are determined by their complements*, 《美国数学会杂志》2 (1989)，第 2 期，371–415，DOI 10.2307/1990979。MR0965210[11] Damian Heard、Craig Hodgson、Bruno Martelli 和 Carlo Petronio, *Hyperbolic graphs of small complexity*, 《实验数学》 **19** 2010 2, 211 236 2676749 ( )，第 – 期。MR Byoungwook Jang、Anna Kronaeur、Pratap Luitel、Daniel Medici、Scott A. Taylor 和 Alexander Zupan, [12] *New examples of Brunnian theta graphs* **9** 2016 5, 857 875, 10 2140 2016 9 857 , 《Involve》( )，第 – 期，DOI . /involve. . . . MR 3541985 [13] *Alexander polynomials as isotopy invariants. I* **10** 1958 263 271 Shin'ichi Kinoshita, 《大阪数学杂志》( )， MR0102819[14] Yuya Koda 和 Makoto Ozawa, *Essential surfaces of non-negative Euler characteristic in genus two handlebody exteriors* **367** 2015 4, 2875 2904, 10 1090 0002 9947 2014 06199 0 , 《美国数学会会刊》( )，第 – 期，DOI . /S - - - - . 附录由 Cameron Gordon 撰写。MR3301885[15] Yuya Koda、Makoto Ozawa 和 Yi-sheng Wang, *Essential annuli in genus two handlebody exteriors*, ArXiV/2404.04503。[16] Masaharu Kouno、Kimihiko Motegi 和 Tetsuo Shibuya, *Twisting and knot types*, 《日本数学会杂志》44 (1992 2, 199 216, 10 2969 04420199 1154840)，第 – 期，DOI . /jmsj/ . MR Brian Mangum 和 Theodore Stanford, [17] *Brunnian links are determined by their complements*, 《代数与几何拓扑》 **1** 2001 143 152, 10 2140 2001 1 143 1823496 ( )，–，DOI . /agt. . . . MR Jenelle McAtee、Daniel S. Silver 和 Susan G. Williams, [18] *Coloring spatial graphs*, 《纽结理论及其应用杂志》 **10** 2001 1, 109 120, 10 1142 0218216501000755 1822144 ( )，第 – 期，DOI . /S . MR Sergei Matveev 和 Vladimir Turaev, [19] *A semigroup of theta-curves in 3-manifolds*, 《莫斯科数学杂志》11 (2011)，第 4 期，805–814，822，DOI 10.17323/1609-4514-2011-11-4-805-814（英文，附英文和俄文摘要）。MR2918296[20] Danielle O'Donnol、Andrzej Stasiak 和 Buck Dorothy, *Two convergent pathways of DNA knotting in replicating DNA molecules as revealed by θ-curve analysis*, 《核酸研究》46 (2018年9月28日)，DOI https://doi.org/10.1093/nar/gky559。[21] Makoto Ozawa 和 Yukihiro Tsutsumi, *Minimally knotted spatial graphs are totally knotted*, 《东京数学杂志》26 (2003)，第 2 期，413–421，DOI 10.3836/tjm/1244208599。MR2020794[22] Makoto Sakuma, *On strongly invertible knots*, 《代数与拓扑理论》（Kinosaki, 1984），纪伊国屋书店，东京，1986年，第176–196页。MR1102258

[23] Martin Scharlemann, *Smooth spheres in* ^{4} *with four critical points are standard* **79** 1985 1, **R**, 125 141, 10 1007 01388659 0774532
《数学发明》( ), 第 – 期, DOI . /BF . MR[24]
_____
Sutured manifolds and generalized Thurston norms, 《微分几何杂志》**29** (1989), 第 3 期, 557–614。MR0992331[25]
Producing reducible 3*-manifolds by surgery on a knot*, 《拓扑学》**29** (1990), 第 4 期, 481–500, DOI
10 1016 0040 9383 90 90017 1071370 . / - ( ) -E。MR Horst Schubert, *Über eine numerische Knoteninvariante*, 《数学杂志》**61**
[26] 0072483
(1954), 245–288, DOI 10.1007/BF01181346（德文）。MR[27] Jennifer Schultens,
Additivity of bridge numbers of knots **135** 2003 3, , 《剑桥哲学学会数学会刊》( ),
539 544, 10 1017 0305004103006832 2018265
第 – 期, DOI . /S . MR[28] *Abstractly planar spatial graphs* Scott A. Taylor, 《纽结理论百科全书》（Colin Adams、
Erica Flapan、Allison Henrich、Louis H. Kauffman、Lewis D. Ludwig 和 Sam Nelson 编）, CRC出版社, 佛罗里达州博卡拉顿, [2021]
©2021。由 Colin Adams、Erica Flapan、Allison Henrich、Louis H. Kauffman、Lewis D. Ludwig 和 Sam Nelson 编辑。[29]
Band-taut sutured manifolds, 《代数与几何拓扑》**14** (2014), 第 1 期, 157–215, DOI 10 2140 2014 14 157 3158757 . /agt. . . .
MR, *Comparing 2-handle additions to a genus 2 boundary component*, 《美国数学会会刊》[30] **366** (2014), 第
7, 3747 3769, 10 1090 0002 9947 2014 06253 3 3192616 期– DOI . /S - - - - . MR, ( ), 可在 arXiv 上获取。[32] Scott A. Taylor
[31] _____*Closures of 1-tangles and annulus twists* 2025
和 Maggy Tomova, *Tunnel number and bridge number of composite genus 2 spatial graphs*, 《太平洋数学杂志》
314 2021 2, 451 494, 10 2140 2021 314 451 4337471 ( ), 第 – 期, DOI . /pjm. . . . MR, 《伦敦数学会杂
[33] _____*The genus 1 bridge number of satellite knots* 2 **112**
志》( ) (2025), 第 2 期, 论文编号 e 70260, 80, 10 1112 70260 4946426 DOI . /jlms. . MR William P. Thurston,
[34]
A norm for the homology of 3*-manifolds*, 《美国数学会回忆录》**59**(1986), 第 339 号, i–vi 和 99–130。MR0823443[35]
_____
Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1（Silvio Levy 编）, 普林斯顿数学丛书, 第
35, 1997 1435975 卷, 普林斯顿大学出版社, 新泽西州普林斯顿, 。
[36] *Knotoids* **49** 2012 1, 195 223
由 Silvio Levy 编辑。MR Vladimir Turaev, 《大阪数学杂志》( ), 第 – 期。MR2903260
[37] _____ *Heegaard-Zerlegungen der* 3*-Sphäre* **7** 1968 Friedhelm Waldhausen, 《拓扑学》( ), 195–203,
DOI 10.1016/0040- 9383 68 90027 0227992 ( )-X（德文）。MR Yi-Sheng Wang,
[38]
Annulus configurations in handlebody-knot exteriors, 《几何进展》**24** (2024), 第 3 期, 341–355, DOI
10 1515 2024 0010 4781466 . /advgeom- - . MR Keith Wolcott, *The knotting of theta curves and other graphs in* S^3, 《几
[39]
何与拓扑》（雅典, 佐治亚州, 1985）, 《纯数学与应用数学讲义》, 第 105 卷, Dekker, 纽约, 1987年, 第325–346页。MR0873302