arXiv:2512.14555v1 [math.KT] 16 Dec 2025

奇数阶 p-群的 HH^1 可解性。

Matthew Antrobus

摘要。我们给出了一个必要且充分的判据，用于判断 $\mathrm{HH}^1(kP)$ 作为李代数的可解性，其中 P 是一个 p-群，且 p 为奇数。该判据通过由群 P构造的有向图来表述。这一结果为此类李代数的结构提供了非平凡的结论。

1. 引言

群代数的第一 Hochschild 上同调的可解性一直备受关注，并已在许多论文中得到研究（参见 [BKL 21], [ER20], [LW25], [LZ16], [yDSS19]）。值得注意的是，$\mathrm{HH}^1(kG)$ 的李代数结构是 Morita 不变量，因此有望解决 Block 理论中的问题。特别是，Hochschild 上同调，尤其是$\mathrm{HH}^1(kG)$，为 Morita 等价类提供了数值不变量。本文给出了一个必要且充分的判据，用于判断 p-群的群代数的 Hochschild 上同调是否可解，其中 $p \neq 2$。该判据还为它们的结构带来了其他非平凡的结论。

设 p 是一个素数，k 是一个特征为 p 的域。给定一个 p-群 P，$\Phi(P)$ 是 P 的所有极大子群的交，等价地说，它是使得 $P/\Phi(P)$ 为初等阿贝尔群的最小子群。此外，给定群的一个包含关系 $H \to G$，存在一个群同态 tr_H^G：$G \to H/H'$。这个映射的定义较为微妙，我们稍后再给出。我们将用一个有向图给出 $\mathrm{HH}^1(kP)$ 可解性的判据，该图定义如下。

定义 1.1. 给定一个 p-群 P，我们构造一个有向图 $\Gamma(P)$，其包含：

- 以 $P/\Phi(P)$ 的元素为标记的顶点。
- 当存在 $x, y \in P$，其像为 a, b 且属于 $P/\Phi(P)$，使得

$$\mathrm{tr}^P_{C_P(x)}(y) \notin \Phi(C_P(x)/C_P(x)')$$

Theo注 1.2. 当 $p \neq 2$ 时，$\mathrm{HH}^1(kP)$ 作为李代数可解，当且仅当有向图 $\Gamma(P)$ 是 p-群的。

当 $D^n(\mathrm{HH}^1(kP))$ 是幂零的时，我们称 $\mathrm{HH}^1(kP)$ n-强可解。特别地，记 $l(\Gamma(P))$ 为 $\Gamma(P)$ 中最长有向路径的长度，则有以下结果。

推论 1.3。 当 $p \neq 2$ 时，如果 $l(\Gamma(P)) < n+1$，则 $\mathrm{HH}^1(kP)$ 是 n-强可解的。如果 $l(\Gamma(P)) > n+1$，则 $\mathrm{HH}^1(P)$ 不是 n-强可解的。

给定 p-群 P_1，P_2，我们可以用 $\mathrm{HH}^j(kP_i)$ 来描述其直积的 Hochschild 上同调 $\mathrm{HH}^1(k(P_1 \times P_2))$，其中 $j \in \{0, 1\}$ 且 $i \in \{1, 2\}$。关键的是，如果 $\mathrm{HH}^1(k(P_1 \times P_2))$ 可解，那么 $\mathrm{HH}^1(kP_1)$ 和 $\mathrm{HH}^1(kP_2)$ 都显然可解。逆命题一般并不成立——取 P_1，$P_2 = C_2$ 即可得到一个反例。不过，对于奇素数，我们的定理给出了逆命题。

推论 1.4. 取 $p \neq 2$, p-群 P_1, P_2，并记 $P := P_1 \times P_2$。$\mathrm{HH}^1(kP)$ 可解，当且仅当$\mathrm{HH}^1(kP_1)$ 和$\mathrm{HH}^1(kP_2)$ 可解。

我们还得到了关于 $p = 2$ 的部分结果。我们如下定义第二个有向图：

定义 1.5。 $\Gamma_2(P)$ 是一个有向图，其

- 由 $P/\Phi(P)$ 标记的顶点。
- 当 $\Gamma(P)$ 中存在边 $a \to b$ 和 $a \to ab$ 时的一条边 $a \rightsquigarrow b$。

这使我们能够陈述以下结果

推论 1.6。 如果 $\Gamma_2(P)$ 含有一个环，那么 $\mathrm{HH}^1(kP)$ 不可解。

2. 关于第一个 Hochschild 上同调的回顾

我们简要回顾第一 Hochschild 上同调的性质。给定一个 k-代数 A，由巴分解可得同构：

$$\mathrm{HH}^1(A) \cong \mathrm{Der}(A)/\mathrm{InnDer}(A).$$

其中，$\mathsf{Der}(A)$ 是 A上的 k-线性导子集合，它构成 $\mathfrak{gl}(A)$的一个李子代数；$\mathsf{InnDer}(A)$则是由以下形式的导子构成的子代数

$$a \mapsto [x, a] = xa - ax.$$

注意，对于 $f \in \mathsf{Der}(A)$ 和 $x \in A$，有

$$[f, [x, -]] = [f(x), -],$$

因此，内导子构成一个理想，且 $\mathrm{HH}^1(A)$ 继承了李代数的结构。更多详情请参阅 [Wit19]。

2.1. 可解李代数的性质

回顾一下，当李代数 $\mathfrak{g}$ 的导出级数 $D^n(\mathfrak{g})$ 在充分大的n时为零，就称其为可解。其定义如下：

$$D^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}, D^{i+1}(\mathfrak{g}) = [D^i(\mathfrak{g}), D^i(\mathfrak{g})].$$

使得 $D^n(\mathfrak{g})$ 为零的最小 $n \in \mathbb{N}$ 称为 $\mathfrak{g}$的导出长度，记作 $\mathsf{dl}(\mathfrak{g})$。下面记录可解李代数的一个重要性质，我们将反复使用它。

命题 2.1。 如果 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}$的李理想，且 $\mathfrak{h}$和 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 都是可解的，那么 $\mathfrak{g}$ 也是可解的。

证明。 注意，由于 $q\colon\ \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 是一个满射李代数同态， $q([\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}]) = [\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, \mathfrak{g}/\mathfrak{h}]$, 此外

$$q(D^i(\mathfrak{g})) = D^i(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}).$$

因此，由于 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 是可解的，我们看到，对某个 i， $D^i(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ 消失，这说明 $D^i(\mathfrak{g})$ 落在 $\mathfrak{h}$中。于是 $D^i(\mathfrak{g}) \subset D^0(\mathfrak{h})$，并由归纳法

$$D^{i+n}(\mathfrak{g}) \subset D^n(\mathfrak{h}),$$

因此，由于 $\mathfrak{h}$ 是可解的，这也消失。 □

推论 2.2. 如果 $\mathfrak{h}$ 是可解李代数 $\mathfrak{g}$ 的可解理想，那么

$$\mathrm{dl}(\mathfrak{g}) \leqslant \mathrm{dl}(\mathfrak{h}) + \mathrm{dl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}).$$

如果李代数 $\mathfrak{h}$ 的下中心列 $C^n(\mathfrak{h})$ 在充分大的 n时消失，则称其为幂零李代数。定义如下：

$$C^0(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}, C^n(\mathfrak{h}) = [\mathfrak{h}, C^{n-1}(\mathfrak{h})].$$

若李代数 $\mathfrak{g}$是可解的，且其导出代数 $D^1(\mathfrak{g})$ 是幂零的，则称其为强可解。更一般地，若 $D^n(\mathfrak{g})$ 是幂零的，我们称 $\mathfrak{g}$ 是 n-强可解。我们将用到以下关于 n-强可解李代数的结果。

命题 2.3。 设李代数 $\mathfrak{g}$有一个幂零理想 $\mathfrak{h}$，则有以下结论。

1. 若 $\mathfrak{h}$ 是幂零的，且 $D^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ 为零，则 $\mathfrak{g}$ 是 n-强可解。
2. 若 $\mathfrak{g}$ 是 n-强可解的，则 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 是 n-强可解。

证明 *1*。 由于 $D^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ 为零，我们可知 $D^n(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{h}$。但 $\mathfrak{h}$ 是幂零的，而幂零代数的子代数也是幂零的。 □

命题 *2* 的证明。 我们之前指出，写作 $q\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h},$时，有 $q(D^n(\mathfrak{g})) = D^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, \mathfrak{g}/\mathfrak{h})$。此外，我们知道幂零代数的同态像仍是幂零的，因此，由于 $D^n(\mathfrak{g})$ 是幂零的，$D^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, \mathfrak{g}/\mathfrak{h})$也如此。 □

2.2. Hochschild 上同调的中心化子分解

给定一个群 G，以及一组完备的共轭类代表元 x_1，……，x_n，Hochschild 上同调 $\mathrm{HH}^*(kG)$ 有一个众所周知的分解，如下所示：

$$\mathrm{HH}^*(kG) = \bigoplus_{j=1,\ldots,n} \mathrm{H}^*(C_G(x_j), k),$$

它由各共轭类的中心化子的群上同调构成。在 [LZ16] 中，给出了该同构的明确形式。回顾一下，任意一个上循环 $\mathrm{H}^n(C_G(x_j), k)$ 都可以用一个函数表示 $f\colon C_G(x_j)^n \to k$，该函数由巴分解导出。同理，我们可以用一个函数表示 Hochschild 上循环 $\mathrm{HH}^n(kG)$ $g\colon G^n \to kG$。给定这样一个函数 $f\colon C_G(x_j)^n \to k$，以及一组 γ_1，……，γ_m 的右陪集代表元 $C_G(x_j)$，其中假设 $\gamma_1 = e$，相应的 Hochschild 上同调上循环可表示为：

$$\hat{f}(g_1, \ldots, g_n) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} g_1 \ldots g_n \sum_{i=1}^{m} f(h'_{i,1}, \ldots, h'_{i,n}) \gamma_i^{-1} x_j \gamma_i,$$

其中，$h'_{i、1}$、$\ldots h'_{i、n}$ 被确定为满足以下条件的 $C_G(x_j)$ 唯一元素

$$\gamma_i g_n^{-1} = h'_{i,1}\gamma_{s_i^1},\ \gamma_{s_i^1} g_{n-1}^{-1} = h'_{i,2}\gamma_{s_i^2},\ \ldots,\ \gamma_{s_i^{n-1}} g_1^{-1} = h'_{i,n}\gamma_{s_i^n}.$$

在本文中，我们只考虑 G阿贝尔的情形，以及 $n = 1$。这样可以大大简化问题。在这种情况下，G是共轭类代表元的完备集合，而 $H^1(C_G(x)、k) = H^1(G、k) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Group}}(G、k)$。因此，对于每个 x，$C_G(x) = G$ 只有一个陪集，所以 $m = 1$。此外，给定 $g \in G$，相应的值$h'_{1、1} = g^{-1}$。所以我们的公式化为

$$\hat{f}(g) = -gf(g^{-1})x = f(g)gx.$$

因此，对于 A阿贝尔群，kA的第一 Hochschild 上同调为

$$\mathrm{HH}^1(kA) = \bigoplus_{a \in A} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Group}}(A, k).$$

对于 $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Group}}(A, k)$ 和 $a \in A$，我们将 (φ, a) 记作直和项中由 a 标记的元素 φ。由此可得，

$$(\varphi, a)(z) = \varphi(z)za,$$

由此我们可以计算交换子。

$$\begin{aligned}[(\varphi,a),(\psi,b)](z) &= (\varphi,a)(\psi,b)(z) - (\psi,b)(\varphi,a)(z)\\ &= (\varphi,a)(\psi(z)bz) - (\psi,b)(\varphi(z)az)\\ &= \varphi(bz)\psi(z)abz - \psi(az)\varphi(z)abz\\ &= \varphi(b)\psi(z)abz - \psi(a)\varphi(z)abz + \varphi(z)\psi(z)abz - \psi(z)\varphi(z)abz\\ &= (\varphi(b)\psi - \psi(a)\varphi)(z)abz.\end{aligned}$$

因此，我们已经证明：

命题 2.4。给定 $\varphi,\ \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Group}}(A,\ k)$ 以及 $a,\ b \in A$ 我们有

$$[(\varphi,a),(\psi,b)] = (\varphi(b)\psi - \psi(a)\varphi, ab).$$

继续之前，我们再记录一点。由于 kG是一个对称 Frobenius 代数，$\mathrm{HH}^*(kG)$自带一个度为 -1 的算子，称为 BV 算子，记作 Δ。特别地，给定一个导子 $f:\ kG \to kG,\ \Delta(f)$ 是满足下列单位元等式的唯一元素

$$\langle f(x), 1\rangle = \langle \Delta(f), x\rangle.$$

因此，再次专门考虑阿贝尔情形，给定 $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Group}}(A,\ k)$ 和 $a \in A$，我们看到

$$\langle (\varphi,a)(x), 1\rangle = \langle \varphi(x)ax, 1\rangle.$$

除非 $x = a^{-1}$，否则这个内积为零；此时其值为

$$\langle \varphi(a^{-1}), 1\rangle = -\varphi(a),$$

从而 $\Delta((\varphi,\ a)) = -\varphi(a)a$。

3. 李代数 $\mathrm{HH}^1(kP)$

3.1. 雅各布森滤过

回忆一下，雅各布森根 J 是 kG的最大幂零右理想 kG。当 G 是一个 p-群（该群将记作 P）时，这就是增广理想，它由形如 $g-1$ 的元素生成，其中 $g \in P$。我们记录 [LW25]中的一些事实。记

$$\mathrm{Der}_m(kG) := \{f \in \mathrm{Der}(kG) : f(kG) \subset J^m\}.$$

由 [LW25], 中的命题 2.3 可知，至关重要的是，$\mathrm{Der}_2(kG)$ 是一个幂零子代数。我们还记录他们论文中的引理 2.5。记 $G' = [G,\ G]$则有一个环同态

$$\begin{aligned} q : kG &\to kG/G'\\ g &\mapsto gG', \end{aligned}$$

其核由形如 $g-1$ 的元素张成，其中 $g \in G'$。引理中指出，该映射的核在所有导子下保持不变，因此它诱导出一个良定义的李代数同态 $\mathrm{HH}^1(kG) \to \mathrm{HH}^1(kG/G')$.首先，我们有一个初步观察。

命题 3.1。如果 $\mathrm{HH}^1(kG)$ 可解，那么它在 $\mathrm{HH}^1(kG/G')$ 中的像也是可解的。

这是可解性传递到商群的结果。由于对于一般群，映射的核未必可解，因此我们无法给出逆命题。不过，这将使我们能够证明一般群的不可解性。从这里开始，我们的结果将针对 p-群。

命题 3.2. 对于 P一个 p-群以及如上所述的 q: $kP \to kP/P'$，我们有 $\mathrm{Ker}(q) \subset J^2$。

证明。注意到 $\mathrm{Ker}(q)$ 是一个双边理想，由形如 $xyx^{-1}y^{-1}-1$ 的元素生成。 J 是增广理想，因此是一个双边理想，所以 J^2 也是如此。我们看到

$$xyx^{-1}y^{-1}-1 = ((x-1)(y-1)-(y-1)(x-1))x^{-1}y^{-1},$$

这显然属于 J^2。 □

命题 3.3. $\mathrm{InnDer}(kP) \subset \mathrm{Der}_2(kP)$。

证明。 我们知道，每个内导子都具有如下形式 $[x, -]$ 其中 $x \in kP$，并且

$$[x,a] = xa - ax \in \mathrm{Ker}(q) \subset J^2,$$

因此结论得证。 □

推论 3.4。 $\mathrm{HH}^1(kP)$ 可解当且仅当 $\mathrm{Der}(kP)$ 可解。

证明。 我们知道 $\mathrm{InnDer}(kP)$ 包含于 $\mathrm{Der}_2(kP)$ 这一幂零子代数中。因此，由命题 2.1 可得结论。 □

命题 3.5。 $\mathrm{HH}^1(kP)$ 可解当且仅当它在 $\mathrm{HH}^1(kP/P')$ 中的像可解。

证明。 给定 $f \in \mathrm{HH}^1(kP)$，态射 $\mathfrak{q}: \mathrm{HH}^1(kP) \to \mathrm{HH}^1(kP/P')$ 定义如下:

$$\mathfrak{q}(f)(q(a)) = qf(a),$$

这是良定义的，因为子空间 $\mathrm{Ker}(q)$在所有导子的作用下保持不变。因此，当 $f(kG) \subset \mathrm{Ker}(q)$时，态射 f 属于 $\mathrm{Ker}(\mathfrak{q})$ 。但我们知道 $\mathrm{Ker}(q) \subset J^2$，所以 $\mathrm{Ker}(\mathfrak{q}) \subset \mathrm{Der}_2(kP)/\mathrm{InnDer}(kP)$。由于 $\mathfrak{q}$的核包含在一个幂零子代数中，因此它是幂零的；利用命题 2.1即可得到我们的结果。 □

因此，我们只需弄清映射 $\mathfrak{q}$的像。

3.2. 化归到初等阿贝尔情形

我们已经证明，$\mathrm{HH}^1(kP)$ 的可解性由其阿贝尔化 $\mathrm{HH}^1(kP/P')$的一个子代数的可解性决定。因此，为了今后不必考虑元素的阶，我们可以将问题化归到初等阿贝尔群的情形。

定义 3.6。 给定一个群 G，其 p-Frattini 子群记为 $\Phi_p(G)$，是使 $G/\Phi_p(G)$ 成为初等阿贝尔 p-群的最小正规子群。

注意到该群定义良好：给定子群 A， B，使得 $G/A, G/B$ 是初等阿贝尔 p-群，我们有一个单射

$$G/(A \cap B) \to G/A \times G/B,$$

从而保证 $G/(A \cap B)$ 是一个初等阿贝尔 p-群。

命题 3.7。 $\Phi_p(G)$ 是由 G^p 和 $[G$生成的正规子群， $G]$。

证明。 注意到，由于 $G/\Phi_P(G)$ 是一个初等阿贝尔 p-群，我们必有 G^p， $[G, G] \subset \Phi_p(G)$。因此，只需证明 G对该子群取商所得的商群是一个初等阿贝尔 p-群。但它显然是阿贝尔的，因为我们对 $[G, G]$取了商；并且每个元素的阶都整除 p，因为我们对由 G^p生成的子群取了商。 □

有关更多细节，读者可参阅 [Gru70]。

命题 3.8。映射 $kG \to kG/\Phi_p(G)$ 诱导出一个李代数映射 $\mathrm{HH}^1(kG) \to \mathrm{HH}^1(kG/\Phi_p(G)),$，且 $\mathrm{HH}^1(kG)$ 的可解性蕴含其在 $\mathrm{HH}^1(kG/\Phi_p(G))$中的像可解。此外，若 G 是一个 p-群，记作 P，则 $\mathrm{HH}^1(kP)$ 可解，当且仅当其在 $\mathrm{HH}^1(kP/\Phi(P))$ 中的像可解。

证明。 假设存在 $z \in Z(G)$，使得 $z^p \neq 0$。那么对于任意导子 $f\colon kG \to kG$，我们有 e

$$f(z^p) = pz^{p-1}f(z) = 0,$$

因此所有导子在 $Z(G)^p$ 上都为零。记环同态 $r\colon kG \to kG/\langle z^p\rangle$。此映射的核由形如 $(z^{np}-1)a$ 的元素张成，其中 $a \in G$。我们看到

$$f((z^{np}-1)a) = (z^{np}-1)f(a) \in \mathrm{Ker}(r),$$

因此所有导子都保持 r 的核不变。于是我们得到一个良定义的李代数同态$\mathfrak{r}: \mathrm{HH}^1(kG) \to \mathrm{HH}^1(k(G/\langle z^p\rangle))$。此映射的核由那些像落在 r 的核中的导子组成。注意，在 G 是一个 p-群 P 的情形下，

$$(z^{np}-1) = (z^n-1)^p \in J^2,$$

因此 $\mathrm{Ker}(\mathfrak{r}) \subset \mathrm{Der}_2(kP)$。那么，$\mathrm{HH}^1(kP)$ 可解，当且仅当它在 $\mathrm{HH}^1(k(P/\langle z^p\rangle))$ 中的像可解。注意，根据前面的命题，记 $q\colon G \to G/G',$，我们有 $\Phi_p(G) = q^{-1}((G/G')^p)$。因此我们得到态射

$$\mathrm{HH}^1(kG) \to \mathrm{HH}^1(kG/G') \to \mathrm{HH}^1(k((G/G')/(G/G')^p)) \cong \mathrm{HH}^1(kG/\Phi_p(G)).$$

那么，$\mathrm{HH}^1(kG)$ 的可解性蕴含该复合映射像的可解性。当 G 是一个 p-群时，这两个映射的核都是可解的，因此复合映射的核也可解。因此，$\mathrm{HH}^1(kP)$ 可解，当且仅当它在$\mathrm{HH}^1(kP/\Phi(P))$ 中的像可解。 □

3.3. 群与态射的转移

回顾一下，给定群 $H \subset G$，我们有一个态射$\mathrm{tr}_H^G\colon G \to H/H',$，其定义如下。取 H 在 G中的一个右陪集代表系 $t_1, \ldots, t_m$，并对每个 $g \in G$ 定义

$$\mathrm{tr}_H^G(g) = (\prod_{i=1}^{m} g_{[i]})H',$$

其中 $g_{[i]}$ 的定义满足 $t_i g = g_{[i]}t_j$，其中某个 $g_{[i]} \in H$。更多细节请参阅 [Hup25]。根据前面的讨论，我们知道，给定 $\varphi\colon C_G(x) \to k$，可通过以下方式得到一个导子

$$\hat{\varphi}(g) = -g\sum_{i=1}^{m} \varphi(g_i)\gamma_i^{-1}x\gamma_i,$$

其中 $g_i \in C_G(x)$ 满足 $\gamma_i g^{-1} = g_i\gamma_{s_i}$。我们看到，应用 q 后会得到导子在$\mathrm{HH}^1(kG/\Phi_p(G))$中的像。其形式如下

$$\mathfrak{q}(\hat{\varphi})(q(g)) = q(g)q(x)\varphi(\prod_{i=1}^{m} g_i),$$

其中值得注意的是，$\prod_{i=1}^{m} g_i$ 是转移映射 $\mathrm{tr}_{C_G(x)}^G(g^{-1})$。由上面的公式可见，给定$\varphi\colon C_G(x) \to k$，将其视为通过中心化子分解得到的 $\mathrm{HH}^1(kG)$ 中的一个元素，我们有

$$\hat{\varphi} \overset{\mathfrak{q}}{\mapsto} (-\varphi \cdot \mathrm{tr}_{C_G(x)}^G, q(x)),$$

用范畴论的语言表述，映射

$$\mathrm{HH}^1(kG) \to \mathrm{HH}^1(kG/\Phi_p(G))$$

下降到直和项后为

$$\mathrm{H}^1(C_G(x), k) \xrightarrow{(-\mathrm{tr}^G_{C_G(x)})^*} \mathrm{H}^1(G/\Phi_p(G), k) \cong \mathrm{H}^1(G, k).$$

值得注意的是，李代数结构只依赖于该映射的像，而与我们在前复合中使用的负号无关。此外，还需注意，我们在此处稍微滥用了记号；$\mathrm{tr}^G_{C_G(x)}$ 并不落在 $C_G(x)$中，而是落在 $C_G(x)/C_G(x)'$中。由于我们有同构

$$\mathrm{Hom}(C_G(x), k) \cong \mathrm{Hom}(C_G(x)/C_G(x)', k) \cong \mathrm{Hom}(C_G(x)/\Phi_p(C_G(x)), k)$$

这种滥用是合理的。从这里开始，我们将稍微滥用记号，把映射 $\varphi\colon G \to k$ 与其因子 $\varphi\colon G/\Phi_p(G) \to k$联系起来。

4. $\mathfrak{q}$的像

为继续讨论，我们引入一些记号。记 $A := G/\Phi_p(G), \mathfrak{g} := \mathrm{HH}^1(kA)$，并记 $\mathfrak{h} = \mathrm{Im}(\mathfrak{q})$。记 $\mathfrak{g}_a$ 为 $\mathrm{HH}^1(kA)$ 中带有 a标记的直和项，并记 $\mathfrak{h}_a := \mathfrak{g}_a \cap \mathfrak{h}$。首先注意到 $h_e := g_e$，因为从 G到 G 的转移是单位元。

我们将用有向图来给出可解性的判据。我们构造一个有向图，其边以 A 中的元素为标记。接着，当存在元素 $x,\ y \in G$使得 $q(x) = a$ 和 $q(y) = b$，且存在群同态 $\alpha\colon C_G(x) \to k$，满足 $\alpha \circ \mathrm{tr}^G_{C_G(x)}(y) \neq 0$ 时，我们就从 a 画一条边指向 b。将此有向图称为 $\Gamma(G)$。

回忆一下，由于 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Group}}(C_G(x),\ k) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Group}}(C_G(x)/\Phi_p(C_G(x)), k),$，我们可知，这样的 $\alpha\colon C_G(x) \to k$ 存在，当且仅当 $\mathrm{tr}^G_{C_G(x)}(y) \notin \Phi_p(C_G(x)/C_G(x)')$。接下来我们将证明以下结果。

命题 4.1。 </style} $p \neq 2, \mathfrak{h}$ 可解，当且仅当 $\Gamma(G)$无环。

注 4.2. 讨论有向图 Σ中的圈和路径时，我们始终指有向路径和有向圈。也就是说，路径上的边只能从起点走向终点，不能反向通行。依此而言，Σ 无环意味着它不包含有向圈。

由此可得以下结论。

定理 4.3. 如果 $p \neq 2$，那么当且仅当 $\Gamma(P)$ 无环时，$\mathrm{HH}^1(kP)$ 可解。

证明将在以下各节中给出。在此之前，我们先定义该图的一个约化版本，稍后将用它精确陈述有关导出长度的结论。

定义 4.4. 约化图 $\Gamma(G)$ 是 $\Gamma(G)$ 的一个子图，且与其具有相同的顶点。假设 $\Gamma(G)$中有一条从 a 到 b 的边。当且仅当 $\mathfrak{h}_b \neq 0$时，该边属于 $\Gamma(G)$。

我们简要解释一下为什么这一约化很有用。我们希望，当 $\Gamma(G)$ 中存在一条从 a 到 b 的边，但 a处没有自环时，有 $[\mathfrak{h}_a,\ \mathfrak{h}_b] \neq 0$。假设我们处于刚才描述的情形中。那么我必有 $x,\ y \in G$，其中 $q(x) = a,\ q(y) = b$，并且 $\varphi := \alpha \circ \mathrm{tr}^G_{C_G(x)}$，从而 $\varphi(y) \neq 0$。此外，由于 a处没有自环，我知道 $\varphi(x) = 0$。如果 $\mathfrak{h}_b \neq 0$，那么存在某个 y' 使得 $q(y') = b$，并且 $\beta\colon C_G(y') \to G$，从而 $\psi := \beta \circ \mathrm{tr}^G_{C_G(y')} \neq 0$。关键在于，$\varphi$ 和 ψ 是 $G \to k$ 的映射，因此可下降为 $G/\Phi_p(G) \to k$ 的映射。因此，我们有 $\varphi(y') = \varphi(y) \neq 0$。将这一信息代入李括号的公式，我们看到

$$[(\varphi, a), (\psi, b)] = (\varphi(b)\psi, ab) \neq 0$$

从而得到所需结果。此外，对于任意 $(\psi, b) \in \mathfrak{h}_b$只要满足 $[\mathfrak{h}_a, \mathfrak{h}_b] = \mathfrak{h}_b a$，同一公式也成立。例如，以下结论显而易见：

¯**命题 4.5**。 $\mathfrak{h}$是阿贝尔的，当且仅当 $\Gamma(G)$ 没有边。

但进一步地， $\mathfrak{h}_b$ 非零当且仅当 b 有出边。因此，我们有如下 g.

¯**命题 4.6.** $\Gamma(G)$ 由 $\Gamma(G)$ 删去终端边得到。

4.1. 约化到 Δ的核

我们将进行一系列约化。首先处理 $\Gamma(G)$ 含有自环的情形。

命题 4.7. 设 $p \neq 2$，且存在 $a \in G$和 $\alpha\colon\ C_G(a) \to k$，其中记 $\varphi\colon = -\alpha \circ \mathrm{tr}^G_{C_G(a)}$，则有 $\varphi(a) \neq 0$。那么 $\mathfrak{h}$不可解。

证明。 因此我们知道 $(\varphi,\ a) \in \mathfrak{h}$，但此时也有 $(\varphi,\ a^{-1}) \in \mathfrak{h}$，因为转移只依赖于子群 $C_G(z) = C_G(z^{-1})$。此外，我们有 $(\varphi,\ e) \in \mathfrak{h}$，因为 $\mathfrak{h}_e = \mathfrak{g}_{e^\circ}$ 现在

$$[(\varphi, a^{\pm 1}), (\varphi, e)] = (\pm\varphi(a)\varphi, a^{\pm 1}),$$

and

$$\begin{aligned}[(\varphi, a), (\varphi, a^{-1})] &= (\varphi(a^{-1})\varphi - \varphi(a)\varphi, e) \\ &= (-2\varphi(a)\varphi, e).\end{aligned}$$

因此，由于 $\varphi(a) \neq 0$，我们看到子空间 $\mathrm{Span}_k((\varphi,\ z),\ (\varphi,\ a^{-1}),\ (\varphi,\ e))$ 是一个完美子代数。可解代数的所有子代数都是可解的，而完美代数不可解。因此 $\mathfrak{h}$ 未必可解。 □

我们之所以加上 $p \neq 2$ 这一限制，正是因为这个证明。我们注意到，当 $p = 2$时，这并不成立。考察 $P := C_2$，而 $\mathrm{HH}^1(\mathbb{F}_2 P)$ 有一个自环，但李代数是可解的。

因此，在 $p \neq 2$的情形下，不失一般性，我们可以假设对所有$\varphi,\ a$，都有 $\varphi(a) = 0$，如上所述。顺便一提，这恰好就是 $\mathfrak{h} \subset \mathrm{Ker}(\Delta)$。

4.2. 化简到情形（†）

现在考虑存在一个由两条边构成的环的情形。也就是说，在 $\Gamma(G)$中有一条从 a 到 b的边，以及一条从 b 到 a 的边。排除这两种情形后，我们的李代数结构将显著简化。

命题 4.8. 假设存在 $a, b \in G/\Phi_p(G),$，其原像为 $x, y \in G$，并且有群同态$\alpha\colon\ C_G(x) \to k, \beta\colon\ C_G(y) \to k$。记 $\varphi := \alpha \circ \mathrm{tr}^G_{C_G(x)}$ 和 $\psi := \beta \circ \mathrm{tr}^G_{C_G(y)}$，则有

$$\varphi(y) \neq 0,\ \ \psi(x) \neq 0,$$

那么 $\mathfrak{h}$ 不可解。

证明。 若 $a = b$，则我们处于上一个命题的情形，因此可以假设 $a \neq b$，并且不存在这样的 a。于是 $\varphi(a) = \psi(b) = 0$。我们考察由 $(\varphi, a), (\psi, b)$生成的 $\mathfrak{h}$ 的李子代数 $\mathfrak{a}$。接下来我们断言

$$\mathrm{Ad}((\varphi, a))^n((\psi, b)) = \varphi(b)^{n-1}(\varphi(b)\psi - n\psi(a)\varphi, a^n b),$$

其中回顾一下，我们将 $f \in \mathfrak{h}$ 记作 $\mathrm{Ad}(f) = [f, -]$。我们通过归纳法进行证明。对于基例 $n = 1$，我们先前已发现

$$[(\varphi, a), (\psi, b)] = (\varphi(b)\psi - \psi(a)\varphi, ab),$$

正如所声称的那样。现在，假设该结论对 n 成立。那么

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}^{n+1}((\varphi,a))((\psi,b)) &= \mathrm{Ad}((\varphi,a))(\mathrm{Ad}^n((\varphi,a))((\psi,b)))\\ &= \mathrm{Ad}((\varphi,a))(\varphi(b)^{n-1}(\varphi(b)\psi - n\psi(a)\varphi, a^n b))\\ &= \varphi(b)^{n-1}[(\varphi,a),(\varphi(b)\psi - n\psi(a)\varphi, a^n b)]\\ &= \varphi(b)^{n-1}(\varphi(a^n b)(\varphi(b)\psi - n\psi(a)\varphi) - (\varphi(b)\psi(a) - n\psi(a)\varphi(a))\varphi, a^{n+1}b)\\ &= \varphi(b)^{n-1}(\varphi(b)^2\psi - n\varphi(b)\psi(a)\varphi - \varphi(b)\psi(a)\varphi, a^{n+1}b)\\ &= \varphi(b)^n(\varphi(b)\psi - (n+1)\psi(a)\varphi, a^{n+1}b),\end{aligned}$$

符合要求。因此值得注意的是,

$$\mathrm{Ad}((\varphi,a))^p((\psi,b)) = (\varphi(b)^p\psi, b),$$

因为 A 中的所有元素的阶都是 p。但显然 $(\psi,\ b) \in [\mathfrak{a},\ \mathfrak{a}]$。同样，我们看到 $(\varphi,\ a) \in [\mathfrak{a},\ \mathfrak{a}]$。然而，由于 $\mathfrak{a}$ 是由 $(\psi,\ b)$ 和 $(\varphi,\ a)$生成的子代数，因此有 $\mathfrak{a} \subset [\mathfrak{a},\ \mathfrak{a}]$。所以 $\mathfrak{a}$ 是完美的，而 $\mathfrak{h}$ 不可解。 □

因此，唯一剩下的情形是：对于每个 $a,\ b \in G/\Phi_p(G),$，我们可以有一条从 a 到 b的边，或一条从 b 到 a的边，但不能两者兼有。用元素来表述，取上述的 $\alpha,\ \beta,\ \varphi,\ \psi,\ \varphi(b),\ \psi(a)$ 中至多一个非零。我们将此称为性质 (†)。

4.3. 性质 (†)

目前，我们用 $a \to b$ 表示图 $\Gamma(G)$中从 a 到 b的一条边。

命题 4.9. 假设 $\Gamma(G)$ 含有一个环。那么 $\mathfrak{h}$ 不可解。

证明. 假设我们的图含有一个环，我们不妨设它是最小的，且长度大于 2，因此有 $a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_n \to a_1$。这意味着我们有态射 (φ_i, a_i)，满足性质 $\varphi_i(a_{i+1}) \neq 0$，并且 $\varphi_n(a_1) \neq 0$。由性质 (†)，我们知道 $\varphi_{i+1}(a_i) = 0$，并且$\varphi_i(a_i) = 0$。与之前一样，我们考虑由 $\{(\varphi_i, a_i)$ 生成的子代数 $\mathfrak{b}:\ i = 1, \ldots, n\}$。值得注意的是,

$$[(\varphi_i, a_i), (\varphi_{i+1}, a_{i+1})] = (\varphi_i(a_{i+1})\varphi_{i+1}, a_i a_{i+1}),$$

因此,

$$\mathrm{Ad}((\varphi_i, a_i))^p(\varphi_{i+1}, a_{i+1}) = \varphi_i(a_{i+1})^p(\varphi_{i+1}, a_{i+1})$$

那么显然 $(\varphi_i, a_i) \in [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$，因为 $1 < i \leqslant n$。完全相同地,

$$\mathrm{Ad}(\varphi_n, a_n)^p(\varphi_1, a_1) = \varphi_n(a_1)^p(\varphi_1, a_1),$$

因此 $\mathfrak{b}$ 是完美的，而且我们不能断定 $\mathfrak{h}$ 是可解的。 □

命题 4.10。 假设 $\Gamma(G)$是无环的。那么 $\mathfrak{h}$ 是可解的。

证明。 假设 $\Gamma(G)$ 是无环的。对于 $S \subset A$，记作:

$$\mathfrak{h}_S := \bigoplus_{s \in S} \mathfrak{h}_s,$$

并假设我们有一个子代数 $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}_S$，满足:

$$\mathfrak{a} = \bigoplus_{a \in A} \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_a.$$

由于 $\Gamma(G)$ 是无环的，S 必定包含一个极小元，我们将其定义为没有入边的顶点。设 m 是这样一个极小元。我试图证明

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{h}_{S \setminus \{m\}}$$

我们将 $\mathfrak{h}_S := \mathfrak{h}_{S\backslash\{m\}} \oplus \mathfrak{h}_m$ 分解，并考虑括号的 3 种情形。根据我们的假设，$\mathfrak{a}$ 是其分次部分的直和，这样做就足够了。首先注意，根据我们之前的工作，我们知道 $\mathfrak{h}_m$ 是阿贝尔的（因为 $\mathfrak{h} \subset \mathrm{Ker}(\Delta)$）。因此，取 $(\varphi, m) \in \mathfrak{h}_m \cap \mathfrak{a}$ 和 $(\psi, b) \in \mathfrak{h}_b \cap \mathfrak{a}$，其中 $b \in S\backslash\{m\}$。那么，由于 m 是极小元，我们知道 $\psi(m) = 0$。因此我们有

$$[(\varphi, m), (\psi, b)] = (\varphi(b)\psi, mb),$$

并且如果 $\varphi(b) = 0$，我们就完成了。如果不是，那么由于 $\mathfrak{a}$ 是一个子代数，它仍然属于 $\mathfrak{h}_S$，但不属于 $\mathfrak{h}_m$，因为 $b \neq e$（否则 $\varphi(b) = 0$）。
因此我们归结为如下情形：$(\varphi, a), (\psi, b) \in \mathfrak{a}$，其中 $a, b \neq m$。假设 $ab = m$。那么我们知道 $\varphi(a) = 0$，并且还知道 $\varphi(m) = 0$。因此 $\varphi(b) = 0$。类似地，$\psi(b) = 0$和 $\psi(m) = 0$，所以$\psi(a) = 0$。于是，

$$[(\varphi, a), (\psi, b)] = 0,$$

并且 $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{h}_{S\backslash\{m\}}$，如所声称的。
由此注意到，如果 $\mathfrak{a}$ 满足

$$\mathfrak{a} = \bigoplus_{a\in A} \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_a,$$

那么 $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ 也满足这一条件。当然，我们知道

$$\bigoplus_{a\in A} [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \cap \mathfrak{g}_a \subset [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}],$$

但我们看到

$$\begin{aligned}
[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] &= \bigoplus_{a\in A} \bigoplus_{b\in A} [\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_\mathfrak{a}, \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_\mathfrak{b}] \\
&\subset \bigoplus_{a\in A} \bigoplus_{b\in A} [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \cap [\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_b] \\
&\subset \bigoplus_{a\in A} \bigoplus_{b\in A} [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \cap \mathfrak{g}_{ab} \subset \bigoplus_{a\in A} [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \cap \mathfrak{g}_a
\end{aligned}.$$

因此我们得到等式。
对 A 取一个序，使得 a_i 是 $A\backslash\{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$ 中的极小元。因此，利用证明前面的部分，我们看到 $D^i([\mathfrak{h},\mathfrak{h}]) \subset \mathfrak{h}_{A\backslash\{a_1,\ldots,a_i\}}$。显然，当 i 足够大时，这个量会消失，因此 $\mathfrak{h}$ 是可解的。 □

给定一个有向图 Σ，记 $l(\Sigma)$ 为 Σ 中的最长有向路径。由命题 4.6，我们知道 $l(\Gamma(G)) = l(\Gamma(G)) + 1$。

命题 4.11. $\mathfrak{h}$ 的导出长度由 $l(\Gamma(G))$ 给出。

证明。 我们证明导出长度为 $l(\Gamma(G)) + 1$，从而得到结论。首先注意，如果我们在 $\Gamma(G)$中有一个环，那么在 $\Gamma(G)$ 中也必定有一个环。如果有一条边从 $a \in G/\Phi_p(G)$, 出发，那么这意味着存在一个非零的 $(\psi, a) \in \mathfrak{h}_a$，因此 $\mathfrak{h}_a \neq 0$。在任何环中，每个顶点都必须有一条出边，因此 $\Gamma(G)$ 中的任何入边也会属于 $\Gamma(G)$。如果 $\mathfrak{h}$ 不可解，那么它在$\Gamma(G)$ 中有一个环，因而在 $\Gamma(G)$中也有一个环，因此路径的无限长度与导出长度无限相对应。接下来，假设 $\Gamma(G)$ 无环。定义以下子集

$$T_n := \{b \in G/\Phi_p(G) : \text{ There exists a path in } \bar{\Gamma}(G) \text{ of length greater or equal to } n \text{ ending at } b\}.$$

我们要证明 $D^n(\mathfrak{h}) := \mathfrak{h}_{T_n}$。对于 $n = 0$，这显然成立。因此我们采用归纳法。假设以 b 结尾的路径的最大长度为 n。那么，b 是 T_n中的一个极小元，因此根据上一个结果的证明，我们知道

$$D^{n+1}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}_{T_{n+1}}.$$

假设 b 有一条长度至少为 $n+1$、终止于 b的路径。那么存在 $a \in T_n$，使得在 $\Gamma(G)$中有一条从 a 到 b 的边。这说明存在 $(\varphi, a) \in \mathfrak{h}_a \subset D^n(\mathfrak{h})$，使得 $\varphi(b) \neq 0$。此外，由于$\Gamma(G)$ 是无环的，我们知道 $\varphi(a) = 0$。因此

$$[(\varphi, a), (\psi, b)] = (\varphi(b)\psi, ab),$$

并且与之前一样,

$$\mathrm{Ad}((\varphi, a))^p((\psi, b)) = \varphi(b)^p(\psi, b),$$

因此 $(\psi, b) \in D^{n+1}(\mathfrak{h})$。由于 ψ 是任意的，我们得知 $\mathfrak{h}_b \subset D^{n+1}(\mathfrak{h})$。所以 $D^{n+1}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}_{T_{n+1}}$。由此，的导出长度比 $\Gamma(G)$中一条极大路径的长度大一。 □

从这里开始，我们的结果将针对 p-群。记 $\ell\ell(kP)$ 为满足 $J^n = 0$的最小 $n > 0$。这称为 kP的 Loewy 长度。

推论 4.12. $\mathrm{HH}^1(kP)$ 的导出长度有如下上界:

$$\log_2(\ell\ell(kP) - 1) + l(\Gamma(P)).$$

证明。 根据推论 2.2，我们知道

$$\mathrm{dl}(\mathrm{HH}^1(kP)) < \mathrm{dl}(\mathrm{Der}_2(kP)) + \mathrm{dl}(\mathfrak{h}).$$

此外，由 [LW25]，我们知道

$$[\mathrm{Der}_m(kP), \mathrm{Der}_n(kP)] \subset \mathrm{Der}_{m+n-1}(kP),$$

因此，通过归纳法可以很容易地证明 $D^n(\mathrm{Der}_2(kP)) \subset \mathrm{Der}_{2^n+1}(kP)$。当然，$\mathrm{Der}_{\ell\ell(kP)}(kP) = 0$，所以我们得到了所需的界。 □

命题 4.13。 若 $l(\Gamma(P)) < n+1$，则 $\mathrm{HH}^1(kP)$ 是 n-强可解的。若 $l(\Gamma(P)) > n+1$，则 $\mathrm{HH}^1(P)$ 不是 n-强可解的。

证明。 为方便起见，我们仍考虑 $\Gamma(P)$。若 $l(\Gamma(P)) < n$，则可知 $D^n(\mathfrak{h})$ 为零。因此，由命题 2.3 可得 $\mathrm{HH}^1(kP)$ 是 n-强可解的。

若 $l(\Gamma(P)) > n$，则必有某个 $b \in T_{n+1}$，从而有某个 $a \in T_n$，其有一条边指向 b。但显然，根据上一个命题，我们知道

$$\mathrm{Ad}(\mathfrak{h}_a)^p(\mathfrak{h}_b) = \mathfrak{h}_b,$$

因此 $\mathfrak{h}_b \subset C^m(D^n(\mathfrak{h}))$ 对所有 m均成立。所以 $\mathfrak{h}$ 不是 n-强可解的，因而 $\mathrm{HH}^1(kP)$ 也不是 n-强可解的。 □

记 $\text{ss-rank}(\mathfrak{g}) := \min\{n : \mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{g}$的强可解秩，其中 $\mathfrak{g}$ 是 n 强可解的$\}$。

推论 4.14。

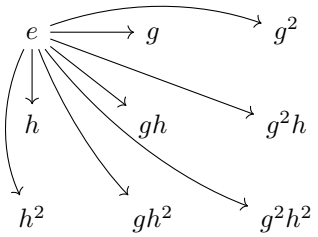
$$\text{ss-rank}(\mathrm{HH}^1(kP)) \in \{l(\Gamma(P)), l(\Gamma(P)) - 1\}.$$

5. 例子

完成了艰苦的工作后，我们现在可以欣赏一些漂亮的图形了。

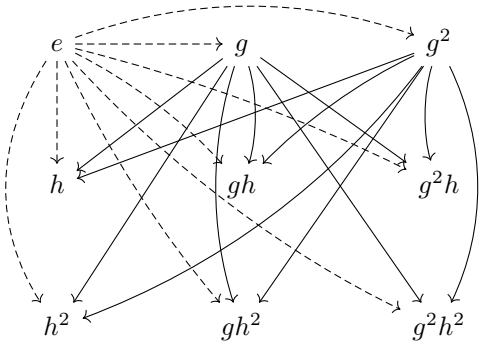
例 5.1（初等阿贝尔）。当 P 是初等阿贝尔群时，$\mathfrak{h}_a := \mathfrak{g}_a$；对于每一对 a、b，都存在 $\varphi \in \mathfrak{h}_a$，使得 $\varphi(b) \neq 0$，除非 $b = e$。因此，$\Gamma(P)$ 包含除指向 e 的边之外的所有边。当 P 是阿贝尔群时，我们在 $P/\Phi(P)$ 上得到完全相同的图。

例 5.2 （$\mathrm{UT}(3,3)$）。最小的非阿贝尔例子是两个阶 *27* 的非阿贝尔群。取 $P:=\mathrm{UT}(3,3)$，我们得到如下的图：



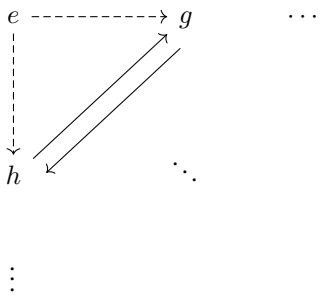
显然其中没有圈，且只有长度为 *1* 的路径。

例 5.3 ($M27$)。现在，选取 $P=M27$，即另一个最小的非阿贝尔例子，我们得到一张稍复杂的图。



由于 e 是极小的，为避免图面杂乱，我们将从 e 出发的路径画成虚线。由于 $\Gamma(P)$ 没有圈，$\mathrm{HH}^1(kP)$ 是可解的。

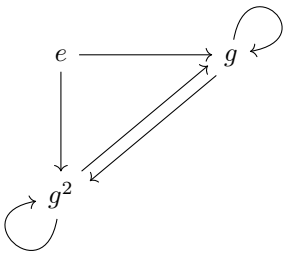
例 5.4 ($\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}\rtimes\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$)。这里所说的群，正是 *Small Groups* 标识符为 $(81,4)$ 的群。图 $\Gamma(P)$ 有 56 条边。单从这个数量就能看出必定存在一个圈；不过只看顶部角落，我们会看到如下情形，



因此 $\mathrm{HH}^1(kP)$ 不可解。

例5.5。当然，我们也关注非-p-群，在这种情况下，我们的定理给出了一个判定不可解性的充分判据。在考察较小阶数的群时，第一个可以证明是

i不可解的群是素数3下的$\mathrm{SL}(2,3)$。考察$\mathrm{SL}(2,3)/\Phi_3(\mathrm{SL}(2,3))$，我们得到以下图 ，



其中显然包含一个环。

6. 乘积群的可解性

6.1. 乘积群上的转移

现在我们用主定理证明以下推论。

推论 6.1. 给定 $p \neq 2$和 p-群 P_1, P_2，并记 $P := P_1 \times P_2$，$\mathrm{HH}^1(kP)$ 可解，当且仅当$\mathrm{HH}^1(kP_1)$ 和 $\mathrm{HH}^1(kP_2)$ 可解。

首先注意，其中一个方向显然成立。 $\mathrm{HH}^1(kP_i) \subset \mathrm{HH}^1(kP)$，因此 $\mathrm{HH}^1(kP)$的可解性蕴含 $\mathrm{HH}^1(kP_i)$ 对 $i \in \{1, 2\}$的可解性。因此，我们只需证明逆命题；为此，假设 $\mathrm{HH}^1(kP_1)$ 和 $\mathrm{HH}^1(kP_2)$ 均可解。此时，我们回顾 [BKL21] 中的一个结果：若 $p \neq 2$ 且$Z(P) \not\subset \Phi(P)$，则 $\mathrm{HH}^1(kP)$ 不可解。因此必有 $Z(P_1) \subset \Phi(P_1)$ 且 $Z(P_2) \subset \Phi(P_2)$。下面给出如下命题。

命题 6.2. 给定 $x \in P_1$， $y \in P_2$，有

$$\mathrm{tr}^P_{C_P((x,y))}(a,b) = (\mathrm{tr}^{P_1}_{C_{P_1}(x)}(a)^{|y^{P_2}|}, \mathrm{tr}^{P_2}_{C_{P_2}(y)}(b)^{|x^{P_1}|}).$$

证明。 首先，我们注意到

$$C_P((x,y) = C_{P_1}(x) \times C_{P_2}(y).$$

从 $C_{P_1}(x) \times C_{P_2}(y)$到 $C_P((x$ 的包含关系， $y))$ 显然成立。注意，若 (a, b)与 (x, y)可交换，则将其投影到 P_1, a上后，必然与 x可交换。对于 b 和y，显然也有同样的结论，因此得到反向包含关系。

取 $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ 作为 $C_{P_1}(x)$ 在 P_1中的一个右陪集代表系，并取 $\delta_1, \ldots, \delta_m$ 作为 $C_{P_2}(y)$ 在 P_2中的一个右陪集代表系。显然， $\{(\gamma_i, \delta_j) : i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, m\}\}$ 是 $C_P((x,y))$的一个右陪集代表系。因此，给定 $(a,b) \in P$ 和 $1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m$，为了定义转移，我们需要元素 $(a_{[ij]}, b_{[ij]}) \in C_P((x,y))$，使得

$$(\gamma_i, \delta_j)(a,b) = (a_{[ij]}, b_{[ij]})(\gamma_{s_{ij}}, \delta_{t_{ij}}),$$

此时，$\mathrm{tr}^P_{C_P((x,y))}(a,b) = \prod(a_{[ij]}, b_{[ij]})$。但注意，给定 $a_{[i]} \in C_{P_1}(x)$ 和 $b_{[i]} \in C_{P_2}(y)$，满足

$$\gamma_i a = a_{[i]}\gamma_{s_i},$$
$$\delta_j b = b_{[j]}\delta_{t_j},$$

我们看到，对$a_{[ij]}, b_{[ij]}$的要求是 $(\gamma_i a, \delta_j b) = (a_{[ij]}\gamma_{s_{ij}}, b_{[ij]}\delta_{t_{ij}}),$，逐坐标而言，可由$a_{[ij]} = a_{[i]}$, $b_{[ij]} = b_{[j]}$满足。因此得证。 □

由此立即得到以下结论。

推论 6.3。 设 $(x、 y) \in P$，且 x 和 y 都不是中心的。那么 $\mathrm{tr}^P_{C_P((x,\ y))}$ 为零。

6.2. graphonProduct 群

现在我们来考察图 $\Gamma(P)$ 的结构。 $\Gamma(P)$ 的顶点为 $P/\Phi(P)$; 我们知道 $\Phi(P) =\Phi(P_1) \times \Phi(P_2)$。因此 $P/\Phi(P) \cong P_1/\Phi(P_1) \times P_2/\Phi(P_2)$。

命题 6.4. 给定 P_1, P_2, P，使得 $\mathrm{HH}^1(kP_i)$ 可解， $\bar{\Gamma}(P)$ 仅包含来自子图包含关系的边

$$\bar{\Gamma}(P_1) \hookrightarrow \bar{\Gamma}(P),\ \bar{\Gamma}(P_2) \hookrightarrow \bar{\Gamma}(P),$$

其中，顶点之间的包含关系由子群的包含关系给出。

证明. 为确保论述周全，我们将此证明分为四个部分。首先，我们证明子图的包含关系定义良好。其次，我们证明这些子图包含关系是“满的”（这些子图中没有额外的边）。第三，我们证明这些子图之外没有边；最后，我们证明这两个子图之间没有边。

1. 我们首先证明这些子图定义良好。假设在$\Gamma(P_1)$中有一条从 a 到 b 的边。这由以下数据给出： x, $y \in P_1$ 使得 x （分别为 y）在 $P_1/\Phi(P_1)$, 中的像为 a （分别为 b），并且有一个映射$\alpha : C_{P_1}(x) \to k$，使得

$$\alpha \circ \mathrm{tr}^{P_1}_{C_{P_1}(x)}(y) \neq 0.$$

于是，我们要证明 $(a,\ e)$ 与 $(b,\ e)$之间存在一条边。取 $(x,\ e)$, $(y,\ e) \in P$，以及$(\alpha,\ 0)$: $C_{P_1}(x) \times P_2 \cong C_P((x,\ e)) \to k$。那么，从转移的公式可以看出

$$(\alpha, 0) \circ \mathrm{tr}^{P}_{C_P((x,e))}(y, e) = (\alpha, 0)(\mathrm{tr}^{P_1}_{C_{P_1}(x)}(y), e) = \alpha \circ \mathrm{tr}^{P}_{C_{P_1}(x)}(y),$$

$\bar{}$ $\bar{}$ $\bar{}$它不为零。因此我们看到， $\Gamma(P_1)$, $\Gamma(P_2)$ 是 $\Gamma(P)$的子图。

2. 我们要证明这些子图中没有添加额外的边。首先，假设在 $\Gamma(P)$中有一条边$\bar{}$，从 $(a,\ e)$ 到 $(b,\ e)$。这由以下数据给出： $(x,\ y)$, $(w,\ z) \in P$，使得 $(x,\ y)$（分别为 $(w,\ z)$）的像为 $(a,\ e)$（分别为 $(b,\ e)$），以及映射 α: $C_P((x,\ y)) \to k$，使得对于 $\varphi := \alpha \circ \mathrm{tr}^{P}_{C_P((x,\ y))}$，我们有

$$\varphi((w, z)) \neq 0.$$

但请注意，这是 $\varphi(w,e)+\varphi(e,z)$。此外， $z \in \Phi(P_2)$，使得 $\varphi(e, z) = 0$。因此我们知道 $\varphi(w, e) \neq 0$。于是，记 β: $C_{P_1}(x) \to k$为 α与包含映射 $C_{P_1}(x) \to C_P((x, y))$的复合映射，$\bar{}$我们有 β 在 $\Gamma(P)$中实现了 a 与 b 之间的一条边。

3. 取 $(a, b) \in P/\Phi(P),$，并假设 $a \neq e, b \neq e$，且 $(x, y) \in P$是 P中 (a, b) 的一个原像。我们知道 $Z(P_1) \subset \Phi(P_1)$ 和 $Z(P_2) \subset \Phi(P_2)$，因此知道 x 和 y 都不是 P中的中心的元素。于是 $\mathrm{tr}^{P}_{C_P((x,y))}$为零，因而 $\mathfrak{h}_{(a,b)}$ 也为零。因此，在约化图 $\bar{\Gamma}(P)$中，没有边进入或离开 (a, b)。

4. 现在取 $a \in P_1$、 $b \in P_2$，二者均不是单位元。我们要证明，不存在从形如 $(a$、 $e)$ 的元素到形如 $(e$、 $b)$的元素的边。这样的边意味着存在 $(x$、 $y)$、$(w$、 $z) \in P$和 α： $C_P(a$、 $e) \to k$，它们满足以下性质。我们有， $(x$、 $y)$（分别地， $(w$、 $z)$）在 $P/\Phi(P),$中的像为$(a$、 $e)$（分别地， $(e$、 $b)$），因此令 φ: $= \alpha \circ \mathrm{tr}_{C_P((x,\ y))}$，便有

$$\varphi((w, e)) + \varphi((e, z)) = \varphi((w, z)) \neq 0.$$

现在，根据前面的内容，我们知道

$$\mathrm{tr}^{P}_{C_P((x,y))}((w, z)) = (\mathrm{tr}^{P_1}_{C_{P_1}(x)}(w)^{|y^{P_2}|}, \mathrm{tr}^{P_1}_{C_{P_2}(y)}(z)^{|x^{P_1}|}),$$

但是由于 x 不是中心的，显然第二个坐标是 p^{th} 次幂，因此项 $\varphi((e,\ z))$ 将消失。此外，我们知道 $w \in \Phi(P_1)$，所以 $\varphi((w,\ e))$ 也将消失。因此，我们不可能有这样的边。

□

因此我们看到，$\Gamma(P)$ 有一个环，当且仅当 $\Gamma(P_1)$ 和 $\Gamma(P_2)$ 中有一个有环。

7. 关于 2-群的部分结果

如前所述，我们的证明在 $p = 2$的情形下行不通，因为我们无法排除图中存在自环。为了给出一个部分结果，我们将定义第二个图 $\Gamma_2(P)$；如果这个图中存在任何圈，那么我们的 $\mathrm{HH}^1(kP)$ 就不可解。本节余下部分中，我们假设 $p = 2$。定义该图如下。

定义 7.1. $\Gamma_2(P)$ 是一个有向图，具有以下性质：

- 顶点以 $P/\Phi(P)$标记。
- 一条边 $a \rightsquigarrow b$，当存在边 $a \to b$ 和 $a \to ab$ 于 $\Gamma(P)$中时

我们有如下相对简单的计算

引理 2。 如果我们有 a、$b \in P/\Phi(P)$ 以及 $\Gamma_2(P)$中的一条边 $a \rightsquigarrow b$，那么记由 $\mathfrak{h}_a$、$\mathfrak{h}_b$生成的子代数为 $\mathfrak{a}$，则有 $\mathfrak{h}_b \subset [\mathfrak{a},\ \mathfrak{a}]$。

证明。 假设我们处于上述情形。那么在 $\Gamma(P)$中有边 $a \to b$ 和 $a \to ab$，它们给出元素 $(\varphi,\ a)$、$(\varphi',\ a) \in \mathfrak{h}_a$，使得 $\varphi(b) \neq 0$、$\varphi'(ab) \neq 0$。我们要寻找 $(\theta,\ a)$，使得 $\theta(b) \neq 0$和$\theta(ab) \neq 0$。如果 φ、φ'中没有一个满足此条件，那么

$$(\varphi + \varphi')(b) = \varphi(b) \neq 0,$$
$$(\varphi + \varphi')(ab) = \varphi'(ab) \neq 0.$$

因此，不失一般性，我们可以假设 $\varphi(a) \neq 0$、$\varphi(ab) \neq 0$。任取 $(\psi,\ b) \in \mathfrak{h}_b$。于是我们有：

$$[(\varphi, a), (\psi, b)] = (\varphi(b)\psi - \psi(a)\varphi, ab),$$

并且进一步

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}^2((\varphi,a))((\psi,b)) &= [(\varphi,a),(\varphi(b)\psi - \psi(a)\varphi, ab)] \\ &= [(\varphi(ab)(\varphi(b)\psi - \psi(a)\varphi) - (\varphi(b)\psi(a) - \psi(a)\varphi(a))\varphi, b] \\ &= (\varphi(ab)\varphi(b)\psi, b).\end{aligned}$$

因此，作为 $\varphi(ab) \neq 0$和 $\varphi(b) \neq 0$，我们有 $(\psi,\ b) \subset [\mathfrak{a},\ \mathfrak{a}]$。但由于 $(\psi,\ b)$是任意的，我们有 $\mathfrak{h}_a \subset [\mathfrak{a},\ \mathfrak{a}]$。 □

推论 7.3. 如果 $\Gamma_2(P)$ 有一个环，那么 $\mathrm{HH}^1(kP)$ 不可解。

证明。 假设我们有一个环 $a_1 \rightsquigarrow a_2 \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow a_n \rightsquigarrow a_1$。令 $\mathfrak{a}$为由 $\{\mathfrak{h}_{a_i}\}_{i=1,\ldots,n}$生成的子代数。根据上述内容，我们显然有 $\mathfrak{h}_{a_i} \subset [\mathfrak{a},\ \mathfrak{a}]$对每个 $i = 1, \ldots, n$都成立，但由于这些生成了 $\mathfrak{a}$, $[\mathfrak{a},\ \mathfrak{a}] = \mathfrak{a}$。因此 $\mathfrak{h}$不可解，$\mathrm{HH}^1(kP)$也不可解。 □

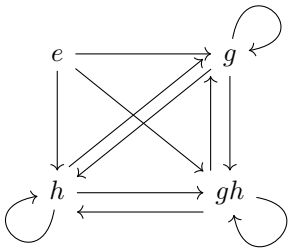
注 7.4. 这个陈述的逆命题是否成立并不明显。事实上，作者检查过的所有例子中，只有在 $\Gamma_2(P)$ 有环时才不可解。

例 7.5 (C_2)。 我们简要说明 C_2 的情形，这个例子表明我们过去的证明方法行不通。 $\Gamma(C_2)$ 如下：

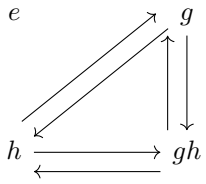


当然， $\Gamma_2(C_2)$ 没有边。

例 7.6 ($C_2 \times C_2$)。 这是我们在 $p = 2$ 情形下的第一个非可解李代数例子。下面是图 $\Gamma(C_2 \times C_2)$

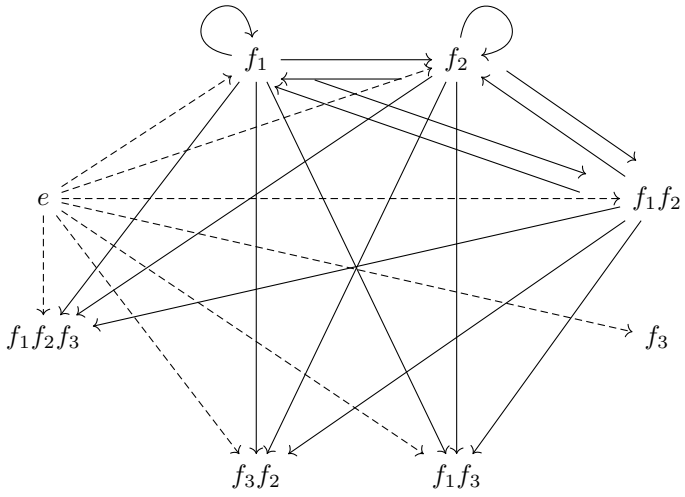


由此得到图 $\Gamma_2(C_2 \times C_2)$ 如下：

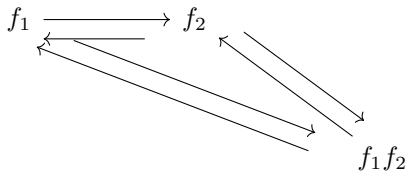


其中显然包含圈，因此 $\mathrm{HH}^1(k(C_2 \times C_2))$ 不可解。

例 7.7 （小群 $(32, 27)$）。 我们再给出一个具有更大图 $\Gamma(P)$ 的例子，以进一步说明这一点。 $\Gamma(P)$ 如下：



于是，不画出没有出边的顶点，得到的 $\Gamma_2(P)$ 具有如下形式：



.

参考文献

[BKL21] Dave Benson、Radha Kessar 和 Markus Linckelmann。有限群代数的 Hochschild 上同调上的 Batalin–Vilkovisky 结构。《太平洋数学杂志》，313(1)：1–44，2021年9月。[ER20] Florian Eisele 和 Theo Raedschelders。有限维代数的第一 Hochschild 上同调的可解性。《美国数学会汇刊》，373(11)：7607–7638，2020年。[Gru70] Karl W. Gruenberg。《群论中的上同调专题》。施普林格·柏林·海德堡，1970年。[Hup25] Bertram Huppert。《有限群 I》。施普林格·自然瑞士，2025年。[LW25] Markus Linckelmann 和 Jialin Wang。有限群的块的李代数 $\mathrm{HH}^1(b)$ 的可解性。（可访问 https://arxiv.org/abs/2503.16697），2025年。[LZ16] Yuming Liu 和 Guodong Zhou。群代数的 Hochschild 上同调环上的 Batalin–Vilkovisky 结构。《非交换几何杂志》，10(3)：811–858，2016年。[Wit19] Sarah Witherspoon。《代数的 Hochschild 上同调》。美国数学会，2019年12月。[yDSS19] Lleonard Rubio y Degrassi、Sibylle Schroll 和 Andrea Solotar。第一 Hochschild 上同调作为李代数。《数学问题》，46：1955–1980，2019年。