arXiv:2512.14605v1 [math.AC] 16 Dec 2025

任意亏格超椭圆函数微分的多项式向量场

E. Yu. Bunkova

Abstract. 本文直接证明了两个关于显式定义的多项式向量场的定理，这些向量场与任意亏格超椭圆函数的微分相关。我们证明了确定这些向量场的算子彼此可交换，并表明每个算子都会湮灭用生成函数在 $\mathbb{C}^\infty$ 中定义的多项式。

1. Introduction

在文献 [1] 中，定义了无穷维复空间 $\mathbb{C}^\infty$ 上带有算子 $\mathcal{D}_k$ 的多项式动力系统。算子 $\mathcal{D}_k$ 的指标 k 是奇自然数。

复空间 $\mathbb{C}^\infty$ 具有坐标 $b = (b_{1,\ 2j-1},\ b_{2,\ 2j-1},\ b_{3,\ 2j-1}$，其中 $j \in \mathbb{N})$，并带有由复空间 $\mathbb{C}^{3g}$ 的 $\mathbb{C}^\infty = \lim_{\to} \mathbb{C}^{3g}$ 诱导的直接极限拓扑；这些复空间具有坐标$b^g = (b_{1,\ 2j-1},\ b_{2,\ 2j-1},\ b_{3,\ 2j-1}$，其中 $j = 1, \ldots, g)$ 以及 $g \in \mathbb{N}$。详细内容可参见 [1] 的第 §4 节。

算子 $\mathcal{D}_k$ 通过 [1],中的公式（40）–（42）定义了 $\mathbb{C}^\infty$ 中的多项式向量场，即对于奇自然数 j 和 k:

$$\mathcal{D}_1(b_{1,j}) = b_{2,j}, \qquad \mathcal{D}_1(b_{2,j}) = b_{3,j}, \qquad \mathcal{D}_1(b_{3,j}) = 4(2b_{1,1}b_{2,j} + b_{2,1}b_{1,j} + b_{2,j+2}), \tag{1}$$

$$\mathcal{D}_k(b_{1,j}) = b_{2,j+k-1} + \sum_{s=1}^{(k-1)/2} b_{2,2s-1}b_{1,j+k-2s-1} - \sum_{s=1}^{(k-1)/2} b_{1,2s-1}b_{2,j+k-2s-1}, \tag{2}$$

$$\mathcal{D}_k(b_{2,j}) = \mathcal{D}_1(\mathcal{D}_k(b_{1,j})), \qquad \mathcal{D}_k(b_{3,j}) = \mathcal{D}_1(\mathcal{D}_k(b_{2,j})). \tag{3}$$

与 $\mathcal{D}_k$ 对应的 $\mathbb{C}^{3g}$ 中的算子给出了关于 g 亏格超椭圆曲线的雅可比簇的万有丛的纤维中变量的 g 亏格超椭圆函数的微分；关于对应关系，参见 [1]，关于定义和构造，参见 [2] 和 [3] 。

本文第 2 节专门讨论定理 2.1，该定理指出所有算子 $\mathcal{D}_k$彼此对易。该定理的结果与 [1]中的推论 4.4 直接相关。这里我们给出定理 2.1 的一个证明，该证明仅使用显式公式（1）–（3）。

在文献 [4] 的定理 6.7 和公式 (54) 中，可以找到一些关系式，将某些参数 λ_{2j+2}（其中 $j \in \mathbb{N}$ ）表示为坐标 b的多项式。 $\mathbb{C}^{3g}$ 中相应的关系式见 [5] 的定理 4.2；在这种情况下， $j \leqslant 2g$ 的参数 λ_{2j+2} 是双曲曲线的参数，参见 [4]中的引理 5.3。关系式如下:

$$4\mathbf{m}(\xi) = \mathbf{b}_2(\xi)^2 + 2\mathbf{b}_3(\xi)(1 - \mathbf{b}_1(\xi)) + 4(\xi^{-1} + 2b_{1,1})(1 - \mathbf{b}_1(\xi))^2, \tag{4}$$

其中

$$\mathbf{b}_i(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} b_{i,2j-1}\xi^j \qquad \text{for} \qquad i = 1, 2, 3, \qquad \text{and} \qquad \mathbf{m}(\xi) = \xi^{-1} + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{2j+2}\xi^j,$$

且 ξ 是一个自由参数，因此方程 (4) 给出了关系式：将其左侧的参数 λ_{2j+2} 表示为右侧坐标 b 的多项式。更多详情请参见 [4] 。

本文第3节专门讨论定理 3.1。该定理指出，我们有 $\mathcal{D}_k(\lambda_{2j+2}) = 0$，其中 λ_{2j+2} 是关于坐标 b的多项式，这些坐标由关系式（4）定义。因此，这些多项式给出了系统（1）–（3）的积分。该定理的结果与 [1]中的推论4.5直接相关。这里我们给出定理3.1的证明，该证明仅使用显式公式（1）–（3）和关系式（4）。

2. The operators $\mathcal{D}_k$ commute

由关系式（3），利用关系式（1）–（2），我们得到显式公式

$$\mathcal{D}_k(b_{2,j}) = b_{3,j+k-1} + \sum_{s=1}^{(k-1)/2} b_{3,2s-1}b_{1,j+k-2s-1} - \sum_{s=1}^{(k-1)/2} b_{1,2s-1}b_{3,j+k-2s-1}, \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_k(b_{3,j}) = {} & 4(2b_{1,1}b_{2,j+k-1} + b_{2,1}b_{1,j+k-1} + b_{2,j+k+1}) + \\ & + 4\sum_{s=1}^{(k-1)/2} (2b_{1,1}b_{2,2s-1} + b_{2,1}b_{1,2s-1} + b_{2,2s+1})b_{1,j+k-2s-1} + \\ & + \sum_{s=1}^{(k-1)/2} b_{3,2s-1}b_{2,j+k-2s-1} - \sum_{s=1}^{(k-1)/2} b_{2,2s-1}b_{3,j+k-2s-1} - \\ & - 4\sum_{s=1}^{(k-1)/2} b_{1,2s-1}(2b_{1,1}b_{2,j+k-2s-1} + b_{2,1}b_{1,j+k-2s-1} + b_{2,j+k-2s+1}).\end{aligned} \tag{6}$$

定理 2.1. 对于奇自然数 k, l，我们有

$$[\mathcal{D}_k, \mathcal{D}_l] = 0,$$

其中方括号表示算子的交换子。

证明. 首先证明

$$[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_k] = 0 \tag{7}$$

对于每个奇自然数 k。由公式（1）和（3），我们有

$$\mathcal{D}_k(\mathcal{D}_1(b_{1,j})) = \mathcal{D}_1(\mathcal{D}_k(b_{1,j})), \qquad \mathcal{D}_k(\mathcal{D}_1(b_{2,j})) = \mathcal{D}_1(\mathcal{D}_k(b_{2,j})).$$

注意，对于 $j = 1$，由（2）可得 $\mathcal{D}_k(b_{1,1}) = b_{2,k}$，因为

$$\sum_{s=1}^{(k-1)/2} b_{2,2s-1}b_{1,k-2s} = \sum_{s=1}^{(k-1)/2} b_{1,2s-1}b_{2,k-2s}.$$

由（5）可得 $\mathcal{D}_k(b_{2,\,1}) = b_{3,\,k}$ 因为

$$\sum_{s=1}^{(k-1)/2} b_{3,2s-1}b_{1,k-2s} = \sum_{s=1}^{(k-1)/2} b_{1,2s-1}b_{3,k-2s}.$$

因此，由表达式（1）、（2）和（5）可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\mathcal{D}_k(\mathcal{D}_1(b_{3,j})) = \mathcal{D}_k(2b_{1,1}b_{2,j} + b_{2,1}b_{1,j} + b_{2,j+2}) = \\ = 2b_{2,k}b_{2,j} + 2b_{1,1}\mathcal{D}_k(b_{2,j}) + b_{3,k}b_{1,j} + b_{2,1}\mathcal{D}_k(b_{1,j}) + \mathcal{D}_k(b_{2,j+2}) = \\ = 2b_{2,k}b_{2,j} + 2b_{1,1}b_{3,j+k-1} + 2b_{1,1}\sum_{s=1}^{(k-1)/2} b_{3,2s-1}b_{1,j+k-2s-1} - 2b_{1,1}\sum_{s=1}^{(k-1)/2} b_{1,2s-1}b_{3,j+k-2s-1} + \\ + b_{3,k}b_{1,j} + b_{2,1}b_{2,j+k-1} + b_{2,1}\sum_{s=1}^{(k-1)/2} b_{2,2s-1}b_{1,j+k-2s-1} - b_{2,1}\sum_{s=1}^{(k-1)/2} b_{1,2s-1}b_{2,j+k-2s-1} + \\ + b_{3,j+k+1} + \sum_{s=1}^{(k-1)/2} b_{3,2s-1}b_{1,j+k-2s+1} - \sum_{s=1}^{(k-1)/2} b_{1,2s-1}b_{3,j+k-2s+1}.\end{aligned} \tag{8}$$

由方程（1）和（6）可得

$$\frac{1}{4}\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_k(b_{3,j})) = 2b_{1,1}b_{3,j+k-1} + 3b_{2,1}b_{2,j+k-1} + b_{3,1}b_{1,j+k-1} + b_{3,j+k+1} + \\ + \sum_{s=1}^{(k-1)/2} 2b_{2,2s+1}b_{2,j+k-2s-1} - \sum_{s=1}^{(k-1)/2} 2b_{2,2s-1}b_{2,j+k-2s+1} + \\ + 2b_{1,1}\sum_{s=1}^{(k-1)/2}(b_{3,2s-1}b_{1,j+k-2s-1} - b_{1,2s-1}b_{3,j+k-2s-1}) + \\ + b_{2,1}\sum_{s=1}^{(k-1)/2}(b_{2,2s-1}b_{1,j+k-2s-1} - b_{1,2s-1}b_{2,j+k-2s-1}) + \\ + \sum_{s=1}^{(k-1)/2} b_{3,2s+1}b_{1,j+k-2s-1} - \sum_{s=1}^{(k-1)/2} b_{1,2s-1}b_{3,j+k-2s+1}. \quad (9)$$

方程（9）与方程（8）一致，因为

$$3b_{2,1}b_{2,j+k-1} + \sum_{s=1}^{(k-1)/2} 2b_{2,2s+1}b_{2,j+k-2s-1} - \sum_{s=1}^{(k-1)/2} 2b_{2,2s-1}b_{2,j+k-2s+1} = \\ = 2b_{2,k}b_{2,j} + b_{2,1}b_{2,j+k-1}$$

and

$$b_{3,1}b_{1,j+k-1} + \sum_{s=1}^{(k-1)/2} b_{3,2s+1}b_{1,j+k-2s-1} = \sum_{s=1}^{(k-1)/2} b_{3,2s-1}b_{1,j+k-2s+1} + b_{3,k}b_{1,j}.$$

因此，方程（7）对每个奇自然数 k都成立。

现在让我们利用方程（7）证明该定理。只需证明以下关系

$$\mathcal{D}_k(\mathcal{D}_l(b_{1,j})) = \mathcal{D}_l(\mathcal{D}_k(b_{1,j})). \quad (10)$$

由（2）可得

$$\mathcal{D}_l(\mathcal{D}_k(b_{1,j})) = \mathcal{D}_l(b_{2,j+k-1}) + \\ + \sum_{s=1}^{(k-1)/2} \mathcal{D}_l(b_{2,2s-1})b_{1,j+k-2s-1} + \sum_{s=1}^{(k-1)/2} b_{2,2s-1}\mathcal{D}_l(b_{1,j+k-2s-1}) - \\ - \sum_{s=1}^{(k-1)/2} \mathcal{D}_l(b_{1,2s-1})b_{2,j+k-2s-1} - \sum_{s=1}^{(k-1)/2} b_{1,2s-1}\mathcal{D}_l(b_{2,j+k-2s-1}). \quad (11)$$

由（2）和（5），表达式（11）等于以下表达式

$$b_{3,j+k+l-2}+\sum_{s=1}^{(l-1)/2}\left(b_{3,2s-1}b_{1,j+k+l-2s-2}-b_{1,2s-1}b_{3,j+k+l-2s-2}\right)+$$
$$+\sum_{s=1}^{(k-1)/2}b_{1,j+k-2s-1}\sum_{n=1}^{(l-1)/2}\left(b_{3,2n-1}b_{1,2s+l-2n-2}-b_{1,2n-1}b_{3,2s+l-2n-2}\right)+$$
$$+\sum_{s=1}^{(k-1)/2}b_{1,j+k-2s-1}b_{3,2s+l-2}+\sum_{s=1}^{(k-1)/2}b_{2,2s-1}b_{2,j+k+l-2s-2}+$$
$$+\sum_{s=1}^{(k-1)/2}b_{2,2s-1}\sum_{n=1}^{(l-1)/2}\left(b_{2,2n-1}b_{1,j+k+l-2s-2n-2}-b_{1,2n-1}b_{2,j+k+l-2s-2n-2}\right)-$$
$$-\sum_{s=1}^{(k-1)/2}b_{2,j+k-2s-1}\sum_{n=1}^{(l-1)/2}\left(b_{2,2n-1}b_{1,2s+l-2n-2}-b_{1,2n-1}b_{2,2s+l-2n-2}\right)-$$
$$-\sum_{s=1}^{(k-1)/2}b_{2,j+k-2s-1}b_{2,2s+l-2}-\sum_{s=1}^{(k-1)/2}b_{1,2s-1}b_{3,j+k+l-2s-2}-$$
$$-\sum_{s=1}^{(k-1)/2}b_{1,2s-1}\sum_{n=1}^{(l-1)/2}\left(b_{3,2n-1}b_{1,j+k+l-2s-2n-2}-b_{1,2n-1}b_{3,j+k+l-2s-2n-2}\right).$$

这个关系关于 k 和 l 对称，因为以下关系式成立

$$\sum_{s=1}^{(l-1)/2}b_{3,2s-1}b_{1,j+k+l-2s-2}+\sum_{s=1}^{(k-1)/2}b_{1,j+k-2s-1}b_{3,2s+l-2}=\sum_{s=1}^{(k+l-2)/2}b_{3,2s-1}b_{1,j+k+l-2s-2},$$

$$\sum_{s=1}^{(k-1)/2}b_{2,2s-1}b_{2,j+k+l-2s-2}-\sum_{s=1}^{(k-1)/2}b_{2,j+k-2s-1}b_{2,2s+l-2}=$$
$$=\sum_{s=1}^{(l-1)/2}b_{2,2s-1}b_{2,j+k+l-2s-2}-\sum_{s=1}^{(l-1)/2}b_{2,j+l-2s-1}b_{2,2s+k-2},$$

并且以下表达式关于 k 和 l对称:

$$\sum_{s=1}^{(k-1)/2}b_{1,j+k-2s-1}\sum_{n=1}^{(l-1)/2}b_{3,2n-1}b_{1,2s+l-2n-2}-\sum_{s=1}^{(k-1)/2}b_{1,j+k-2s-1}\sum_{n=1}^{(l-1)/2}b_{1,2n-1}b_{3,2s+l-2n-2}-$$
$$-\sum_{s=1}^{(k-1)/2}b_{1,2s-1}\sum_{n=1}^{(l-1)/2}b_{3,2n-1}b_{1,j+k+l-2s-2n-2},\quad(12)$$

$$\sum_{s=1}^{(k-1)/2}b_{2,j+k-2s-1}\sum_{n=1}^{(l-1)/2}b_{1,2n-1}b_{2,2s+l-2n-2}-\sum_{s=1}^{(k-1)/2}b_{2,j+k-2s-1}\sum_{n=1}^{(l-1)/2}b_{2,2n-1}b_{1,2s+l-2n-2}-$$
$$-\sum_{s=1}^{(k-1)/2}b_{2,2s-1}\sum_{n=1}^{(l-1)/2}b_{1,2n-1}b_{2,j+k+l-2s-2n-2}.\quad(13)$$

我们看到，表达式 (12) 和 (13) 通过变换 $b_{1,j} \mapsto b_{2,j}$,$b_{3,j} \mapsto b_{1,j}$ 相互关联，因此只需证明其中一个表达式关于 k 和 l 对称，即可得到另一个表达式的对称性。下面证明 (12) 关于 k 和 l对称。表达式 (12) 等于以下表达式:

$$\sum_{n=1}^{(l-1)/2} b_{3,2n-1} \sum_{s=1}^{(k-1)/2} b_{1,j+k-2s-1} b_{1,2s+l-2n-2} - \sum_{n=1}^{(l-1)/2} b_{3,2n-1} \sum_{s=1}^{(k-1)/2} b_{1,2s-1} b_{1,j+k+l-2s-2n-2} -$$
$$- \sum_{n=1}^{(l+k-4)/2} b_{3,2n-1} \sum_{s=1}^{(k-1)/2} b_{1,j+k-2s-1} \sum_{p=1}^{(l-1)/2} b_{1,2p-1} \delta(2p-1, 2s+l-2n-2),$$

其中， $\delta(\cdot,\cdot)$ 是克罗内克δ函数。因此，在 $1 \leqslant 2n-1 \leqslant min(k,l)$ 中，$b_{3,2n-1}$ 处的系数为 (12)

$$\sum_{s=n+1}^{(k-1)/2} b_{1,j+k-2s-1} b_{1,2s+l-2n-2} - \sum_{s=1}^{(k-1)/2} b_{1,2s-1} b_{1,j+k+l-2s-2n-2} =$$
$$= \sum_{s=(l+1)/2}^{(k+l)/2-n-1} b_{1,2s-1} b_{1,j+k+l-2s-2n-2} - \sum_{s=1}^{(k-1)/2} b_{1,2s-1} b_{1,j+k+l-2s-2n-2}.$$

在 (12) 中，对于 $l < k$ 和 $l \leqslant 2n-1 \leqslant k-2$，$b_{3,2n-1}$ 处的系数为

$$- \sum_{s=(2n-l+3)/2}^{n} b_{1,j+k-2s-1} b_{1,2s+l-2n-2} = - \sum_{s=1}^{(l-1)/2} b_{1,2s-1} b_{1,j+k+l-2s-2n-2},$$

而在 (12) 中，对于 $k < l$ 和 $k \leqslant 2n-1 \leqslant l-2$，$b_{3,2n-1}$ 处的系数为

$$- \sum_{s=1}^{(k-1)/2} b_{1,2s-1} b_{1,j+k+l-2s-2n-2}.$$

对于 $max(k,l)$，$b_{3,2n-1}$ 处的系数为

$$- \sum_{s=(2n-l+3)/2}^{(k-1)/2} b_{1,j+k-2s-1} b_{1,2s+l-2n-2} = - \sum_{s=1}^{(k+l)/2-n-1} b_{1,j+2s-2} b_{1,k+l-2s-2n-1}.$$

这些表达式关于 k 和 l对称，因此我们证明了关系 (10) 和该定理。

□

3. The operators $\mathcal{D}_k$ annulate the polynomials λ_{2j+2}

定理 3.1. 对于奇自然数 k 和 $j \in \mathbb{N}$，我们有

$$\mathcal{D}_k(\lambda_{2j+2}) = 0,$$

其中 λ_{2j+2} 是由关系 (4)定义的坐标 b中的多项式。

证明. 回忆

$$\mathbf{b}_i(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} b_{i,2j-1}\xi^j \qquad \text{for} \qquad i = 1, 2, 3, \qquad \text{and} \qquad \mathbf{m}(\xi) = \xi^{-1} + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{2j+2}\xi^j,$$

因此，由 (1) 可得

$$\mathcal{D}_1(\mathbf{b}_1(\xi)) = \mathbf{b}_2(\xi), \tag{14}$$

$$\mathcal{D}_1(\mathbf{b}_2(\xi)) = \mathbf{b}_3(\xi), \tag{15}$$

$$\mathcal{D}_1(\mathbf{b}_3(\xi)) = 4(2b_{1,1}\mathbf{b}_2(\xi) + b_{2,1}\mathbf{b}_1(\xi) + \xi^{-1}\mathbf{b}_2(\xi) - b_{2,1}). \tag{16}$$

因此，由 (4)、(14) 和 (15) 可得

$$\begin{aligned} 2\mathcal{D}_1(\mathbf{m}(\xi)) &= \mathbf{b}_2(\xi)\mathcal{D}_1(\mathbf{b}_2(\xi)) + \mathcal{D}_1(\mathbf{b}_3(\xi))(1 - \mathbf{b}_1(\xi)) - \mathbf{b}_3(\xi)\mathcal{D}_1(\mathbf{b}_1(\xi))) + \\ &+ 4b_{2,1}(1 - \mathbf{b}_1(\xi))^2 - 4(\xi^{-1} + 2b_{1,1})(1 - \mathbf{b}_1(\xi))\mathcal{D}_1(\mathbf{b}_1(\xi)) = \\ &= (1 - \mathbf{b}_1(\xi))\left(\mathcal{D}_1(\mathbf{b}_3(\xi)) + 4b_{2,1}(1 - \mathbf{b}_1(\xi)) - 4(\xi^{-1} + 2b_{1,1})\mathbf{b}_2(\xi)\right), \end{aligned}$$

so 利用关系 (16)，我们得到 $\mathcal{D}_1(\mathbf{m}(\xi)) = 0$，因此对于 $j \in \mathbb{N}$，有 $\mathcal{D}_1(\lambda_{2j+2}) = 0$.

由（2）可得 $j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{D}_{2k-1}(b_{1,2j-1}) = b_{2,2j+2k-3} + \sum_{s=1}^{k-1} b_{2,2s-1}b_{1,2j+2k-2s-3} - \sum_{s=1}^{k-1} b_{1,2s-1}b_{2,2j+2k-2s-3}. \tag{17}$$

我们将使用以下关系式

$$\mathbf{b}_i(\xi) = \sum_{p=1}^{k-1} b_{i,2p-1}\xi^p + \sum_{j=1}^{\infty} b_{i,2j+2k-3}\xi^{j+k-1} \qquad \text{for} \qquad i = 1, 2, 3,$$

因此

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_{i,2j+2k-3}\xi^j = \mathbf{b}_i(\xi)\xi^{-k+1} - \sum_{p=1}^{k-1} b_{i,2p-1}\xi^{p-k+1} \qquad \text{for} \qquad i = 1, 2, 3.$$

注意,

$$\sum_{s=1}^{k-1} b_{2,2s-1} \sum_{p=1}^{k-s-1} b_{1,2p-1}\xi^{p-k+s+1} = \sum_{s=1}^{k-1} b_{1,2s-1} \sum_{p=1}^{k-s-1} b_{2,2p-1}\xi^{p-k+s+1}.$$

Thus

$$\mathcal{D}_{2k-1}(\mathbf{b}_1(\xi)) = \mathcal{D}_{2k-1}\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_{1,2j-1}\xi^j\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} b_{2,2j+2k-3}\xi^j + \sum_{s=1}^{k-1} b_{2,2s-1}\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_{1,2j+2k-2s-3}\xi^j\right) - \sum_{s=1}^{k-1} b_{1,2s-1}\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_{2,2j+2k-2s-3}\xi^j\right) =$$

$$= \mathbf{b}_1(\xi)\sum_{s=1}^{k-1} b_{2,2s-1}\xi^{-k+s+1} + \mathbf{b}_2(\xi)\left(\xi^{-k+1} - \sum_{s=1}^{k-1} b_{1,2s-1}\xi^{-k+s+1}\right) - \sum_{p=1}^{k-1} b_{2,2p-1}\xi^{p-k+1}.$$

利用关系式 (1)、(3)、(14) 和 (15)，我们得到

$$\mathcal{D}_{2k-1}(\mathbf{b}_2(\xi)) = \mathbf{b}_1(\xi)\sum_{s=1}^{k-1} b_{3,2s-1}\xi^{-k+s+1} + \mathbf{b}_3(\xi)\left(\xi^{-k+1} - \sum_{s=1}^{k-1} b_{1,2s-1}\xi^{-k+s+1}\right) - \sum_{p=1}^{k-1} b_{3,2p-1}\xi^{p-k+1}.$$

利用关系式 (1)、(3)、(14) 和 (16)，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{2k-1}(\mathbf{b}_3(\xi)) = 4\left(\mathbf{b}_2(\xi)\left(2b_{1,1} + \xi^{-1}\right) - b_{2,1}\right)\left(\xi^{-k+1} - \sum_{s=1}^{k-1} b_{1,2s-1}\xi^{-k+s+1}\right) + \\ + 4\mathbf{b}_1(\xi)\left(b_{2,1}\xi^{-k+1} + \sum_{s=1}^{k-1}(2b_{1,1}b_{2,2s-1} + b_{2,2s+1})\xi^{-k+s+1}\right) + \\ + \mathbf{b}_2(\xi)\sum_{s=1}^{k-1} b_{3,2s-1}\xi^{-k+s+1} - \mathbf{b}_3(\xi)\sum_{s=1}^{k-1} b_{2,2s-1}\xi^{-k+s+1} - \\ - 4\sum_{p=1}^{k-1}(2b_{1,1}b_{2,2p-1} + b_{2,1}b_{1,2p-1} + b_{2,2p+1})\xi^{p-k+1}.\end{aligned}$$

现在我们利用这些关系式以及 $\mathcal{D}_{2k-1}(b_{1,\ 1}) = b_{2,\ 2k-1}$ 来计算 $\mathcal{D}_{2k-1}$ 对方程 (4) 的作用。我们有

$$\begin{aligned}2\mathcal{D}_{2k-1}(\mathbf{m}(\xi)) = \mathbf{b}_2(\xi)\mathcal{D}_{2k-1}(\mathbf{b}_2(\xi)) + \mathcal{D}_{2k-1}(\mathbf{b}_3(\xi))(1 - \mathbf{b}_1(\xi)) - \mathbf{b}_3(\xi)\mathcal{D}_{2k-1}(\mathbf{b}_1(\xi)) + \\ + 4b_{2,2k-1}(1 - \mathbf{b}_1(\xi))^2 - 4(\xi^{-1} + 2b_{1,1})(1 - \mathbf{b}_1(\xi))\mathcal{D}_{2k-1}(\mathbf{b}_1(\xi)).\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_2(\xi)\mathcal{D}_{2k-1}(\mathbf{b}_2(\xi)) - \mathbf{b}_3(\xi)\mathcal{D}_{2k-1}(\mathbf{b}_1(\xi)) = \\ = (1 - \mathbf{b}_1(\xi))\left(\mathbf{b}_3(\xi)\sum_{s=1}^{k-1} b_{2,2s-1}\xi^{-k+s+1} - \mathbf{b}_2(\xi)\sum_{s=1}^{k-1} b_{3,2s-1}\xi^{-k+s+1}\right).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{2\mathcal{D}_{2k-1}(\mathbf{m}(\xi))}{1 - \mathbf{b}_1(\xi)} = \mathbf{b}_3(\xi)\sum_{s=1}^{k-1} b_{2,2s-1}\xi^{-k+s+1} - \mathbf{b}_2(\xi)\sum_{s=1}^{k-1} b_{3,2s-1}\xi^{-k+s+1} + \mathcal{D}_{2k-1}(\mathbf{b}_3(\xi)) + \\ + 4b_{2,2k-1}(1 - \mathbf{b}_1(\xi)) - 4(\xi^{-1} + 2b_{1,1})\mathcal{D}_{2k-1}(\mathbf{b}_1(\xi)).\end{aligned}$$

将 $\mathcal{D}_{2k-1}(\mathbf{b}_1(\xi))$ 和 $\mathcal{D}_{2k-1}(\mathbf{b}_3(\xi))$ 的表达式代入该方程，得到右端等于零。因此我们得到 $\mathcal{D}_{2k-1}(\mathbf{m}(\xi)) = 0$，于是$\mathcal{D}_{2k-1}(\lambda_{2j+2}) = 0$ 对于 $j \in \mathbb{N}$成立，由此完成定理的证明。

□

References

[1] V. M. Buchstaber, E. Yu. Bunkova，与 *KdV*层级相关的多项式动力系统，应用数学中的偏微分方程，12（2024）。[2] V. M. Buchstaber, E. Yu. Bunkova，关于参数和周期对超椭圆函数求导的公式，斯捷克洛夫数学研究所论文集，325（2024），60–73。[3] E. Yu. Bunkova, V. M. Buchstaber，超椭圆函数求导的显式公式，数学札记，114:6（2023），1159–1170。[4] E. Yu. Bunkova, V. M. Buchstaber，参数化的 *Korteweg–de Vries*层级与超椭圆σ函数，泛函分析及其应用，56:3（2022），169–187。[5] V. M. Buchstaber, S. Yu. Shorina，*KdV*层级的 w-函数，几何、拓扑与数学物理，美国数学学会译丛第二辑，212，美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，2004，41–66。

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia电子邮箱地址: bunkova@mi-ras.ru