arXiv:2512.14685v1 [math.AC] 16 Dec 2025

关于戈茨曼阈值及 Bonanzinga 和 Eliahou 的猜想

TRUNG CHAU

Abstract. 我们得到了变量的幂的 Gotzmann 阈值的递归公式。因此，我们对 Bonanzinga 和 Eliahou 猜想给出了肯定的回答。

1. Introduction

在本文中，设 $\Bbbk$ 为一个域， $R_n = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ 为 $\Bbbk$上由 n个变量构成的多项式环。

齐次理想的希尔伯特函数 R_n 在交换代数和代数几何中发挥着重要作用，也是一个活跃的研究领域。1927 年，Macaulay 证明了齐次理想的希尔伯特函数增长的下界，并给出了能够达到此下界的特殊理想，称为字典序理想。字典序理想已应用于组合学的诸多领域，例如 Sperner 理论。更多详情请参阅 [1, 6]。希尔伯特函数增长最慢的齐次理想称为*Gotzmann* 理想，如前所述，这类理想包括字典序理想。

文献中已知的 Gotzmann 理想类别寥寥无几。Murai 和 Hibi 的一篇文章 [9]是少数研究 Gotzmann 齐次理想并证明其具有非常特定结构的文献之一。另一方面，在确定 Gotzmann 单项式理想方面已有更多成果，但即便将范围限制于这一情形，这项任务仍被普遍认为十分困难。Hoefel 和 Mermin [7]为所有 Gotzmann 无平方单项式理想给出了显式公式。Murai [8]在 R_3中完整分类了所有 Gotzmann 单项式理想。我们将重点研究 Gotzmann 主 Borel 理想。若一个单项式理想 $J \subseteq R_n$ 满足以下条件，则称其为博雷尔稳定 或强稳定： 对于任意单项式 $m \in J$ 和任意变量$x_j \mid m$，对于任意 $1 \leq i \leq j$，都有 $x_i(m/x_j) \in J$。给定一个单项式 $u \in R_n$，令 $\langle u\rangle$表示包含 u且属于 R_n 的最小单项式理想，并令 $B(u)$表示 $\langle u\rangle$的极小生成元集合。假设 $x_n \nmid u$。Bonanzinga [2] 证明，存在一个整数 $\tau_n(u) \geq 0$，使得

$$\langle ux_n^d\rangle \text{ is Gotzmann} \Leftrightarrow d \geq \tau_n(u).$$

数 $\tau_n(u)$ 称为 u 的戈茨曼阈值 。利用 Murai 的结果 [8]，可以确定单项式 $x_1^a x_2^b \in R_3$ 的戈茨曼阈值:

$$\tau_3(x_1^a x_2^b) = \binom{b}{2}.$$

下一个情形 $n = 4$ 已由 Bonanzinga 和 Eliahou [3]完全解决:

$$\tau_4(x_1^a x_2^b x_3^c) = \binom{\binom{b}{2}}{2} + \frac{b+4}{3}\binom{b}{2} + (b+1)\binom{c+1}{2} + \binom{c+1}{3} - c.$$

正如 Bonanzinga 和 Eliahou 所指出的，要确定任意单项式的戈茨曼阈值公式，难度似乎急剧增加。一个稍微容易的问题是确定增长最大的加项。从已知公式可以看出， x_2 似乎是一个主导项。因此，Bonanzinga 和 Eliahou [4] 只研究了 x_2 的幂的戈茨曼阈值，即 x_2^d。他们得到

$$\tau_5(x_2^d) = \binom{\binom{\binom{d}{2}}{2} + \binom{d+1}{3} + \binom{d}{2}}{2} - \binom{\binom{d}{2}}{3} + \binom{d+3}{4} - d.$$

有了适用于 $i \in \{3,4,5\}$ 的 $\tau_i(x_2^d)$ 公式，Bonanzinga 和 Eliahou 提出了以下猜想。

猜想 1.1 ([4, 猜想 5.3])。对于 $n \geq 3$，戈茨曼阈值 $\tau_n(x_2^d)$ 是关于 d 的 2^{n-2} 次多项式，其最高次项与 $(n-2)$ 次迭代二项式系数相同

$$\binom{\binom{\binom{d}{2}}{2}}{\cdots}{2},$$

即 $2(d/2)^{2^{n-2}}$。

在这篇文章中，我们为任意整数 n, r, d 得到了 $\tau_n(x_r^d)$ 的迭代公式。

定理 1.2. 给定整数 n, r，其中 $2 \leq r < n-1$。则 $\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$ 中的戈茨曼阈值 $\tau_n(x_r^d)$ 可递归地计算：

$$\tau_{r+1}(x_r^d) = \binom{d+r-1}{r} - d,$$

$$\tau_n(x_r^d) = \binom{d+n-1}{d} - \binom{d+n-r}{d} - \binom{d+r-1}{d} + 1 + \sum_{i=r+1}^{n-1} (-1)^{n+1-i} \binom{\tau_i(x_r^d)}{n+1-i}.$$

情形 $r = 2$ 值得关注，现陈述如下。

推论 1.3. 给定整数 $n > 3$。则$\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$ 中的戈茨曼阈值 $\tau_n(x_2^d)$ 可递归地计算：

$$\tau_3(x_2^d) = \binom{d+1}{2} - d,$$

$$\tau_n(x_2^d) = \binom{d+n-2}{n-1} - d + \sum_{i=3}^{n-1} (-1)^{n+1-i} \binom{\tau_i(x_2^d)}{n+1-i}.$$

根据归纳法，猜想 1.1 立即得证。

推论 1.4. 戈茨曼阈值 $\tau_n(x_2^d)$是 d 中的一个次数为2^{n-2}的多项式，其最高次项与$(n-2)$次迭代二项式系数的最高次项相同

$$\binom{\binom{\binom{d}{2}}{2}}{\cdots}{2}.$$

换句话说，猜想 *1.1*成立。

我们还可以用另一种形式重新得到 $n \in [3,5]$ 的 $\tau_n(x_2^d)$ 已知公式。

推论 1.5。

$$\begin{aligned}
\tau_3(x_2^d) &= \binom{d+1}{2} - d, \\
\tau_4(x_2^d) &= \binom{d+2}{3} - d + \binom{\tau_3(x_2^d)}{2}, \\
\tau_5(x_2^d) &= \binom{d+3}{4} - d + \binom{\tau_4(x_2^d)}{2} - \binom{\tau_3(x_2^d)}{3}.
\end{aligned}$$

我们主要结果定理 1.2 的证明基于 Bonanzinga 和 Eliahou 的方法 [4]。Mermin 告知作者，Costantini、Francisco、Schweig 和他本人已独立证实了猜想 1.1 。 [5]不过，他们采用的工具和技术有所不同，依赖于其他理论。

本文结构如下。在第 2 节中，我们回顾相关概念、工具，以及 Bonanzinga 和 Eliahou 用于计算 Gotzmann 阈值的方法。我们在第 3 节运用这些内容证明定理 1.2。

Acknowledgements

作者获得了 Infosys 基金会的资助。作者谨向 Manoj Kummini 致谢，感谢他进行有益且富有成效的讨论。作者还要感谢 Jeffrey Mermin 鼓励他完成这个项目。

2. Preliminaries

我们回顾 [4]中发展的工具。

2.1. 戈茨曼阈值的计算。 设有多项式环 $R_n = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$。令 S_n 表示 R_n 中单项式的集合，并令 $S_{n,d}$ 表示 R_n 中次数为 d 的单项式集合。

记号 2.1。 给定一个单项式 $u \in S_n \setminus \{1\}$ 以及一个由次数至少为 1 的单项式组成的集合 B。令

$$\begin{aligned}
\max(u) &= \max\{k \in [n] \colon x_k \mid u\}, \\
\lambda(u) &= x_{\max(u)}, \\
\operatorname{maxgen}(B) &= \prod_{u \in B} \lambda(u).
\end{aligned}$$

我们在 $S_{n,d}$ 上施加由 $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$ 诱导的字典序。

定义 2.2 ([4, 记号 2.5 和 2.6])。 </style>对于， $v \in S_{n,\ d}$ 其中 $u \le v$，令

$$\begin{aligned}
L_n(u) &= \{z \in S_{n,d} \colon z \ge u\}, \\
L_n^*(v,u) &= \{z \in S_{n,d} \colon v > z \ge u\} = L_n(u) \setminus L_n(v), \\
\mu_n(u,v) &= \operatorname{maxgen}(L_n^*(v,u)).
\end{aligned}$$

$L_n(u)$ 和 $L_n^*(v,\ u)$ 分别称为字典片段 和字典区间。单项式 $\mu_n(u,\ v)$ 称为在 $S_{n,\ d}$ 中从 u 到 v 的向上路径的代价 。我们将使用记号

$$u \xrightarrow{\mu_n(u,v)} v$$

从 u到 v的向上路径及其代价。

记号 2.3 （[4, 记号 2.9]） 。 给定 $n \geq 3$ 和 $u \in S_n$。 令

$$\mathrm{mg}_n(u) = \mathrm{maxgen}(L_n(u) \setminus B(u)).$$

注意，mg_n 是一个从 S_n 到其自身的函数。当 n 明确时，我们将简单地写作 mg。

记号 2.4 （[4, 记号 2.13]） 。 令 $n \geq i \geq 1$ 为正整数。令

$$\pi_{n,i} \colon S_n \to S_i$$
$$x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \mapsto x_1^{a_1} \cdots x_i^{a_i}$$

将其定义为截断映射。当 n 明确时，我们将简单地写作 π_i。

记号 2.5 ([4, 记号 3.1])。 定义 σ_n 如下:

$$\sigma_n \colon S_n \to S_n$$
$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i} \mapsto \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_1+a_2+\cdots+a_i} = x_1^{a_1} x_2^{a_1+a_2} \cdots x_n^{a_1+a_2+\cdots+a_n}.$$

映射 σ_n 可以进行一些简单的计算。

引理 2.6 ([4, 命题 3.4 和推论 3.6])。 对于 $u = \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i} \in S_n$和 $t \geq 0$，有

$$\mathrm{mg}_n(ux_n^t) = \sigma_n^t(\mathrm{mg}_n(u)) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\sum_{j=1}^{i} a_j \binom{t-1+i-j}{t-1}}.$$

在本小节余下部分中，假设 $u_0 \in S_{n-1}$。我们将回顾 [4] 中的结果，这些结果允许通过计算路径得到 $\tau_n(u_0)$。预告：我们需要与 u_0相关联的三个多项式 $f(t)$ $h(t)$ $k(t)$。

记号 2.7 ([4, 记号 3.10])。 令 $u_0 \in S_{n-1}$。 对于 $t \in \mathbb{N}$，设

$$f(t) \coloneqq \deg_{x_n}(\mathrm{mg}_n(u_0 x_n^t)).$$

$f(t)$的显式公式如下。

引理 2.8 （[4, 定理 3.11]） 。 设 $u = x_{i_1} \cdots x_{i_d} \in S_{n-1}$ 满足 $i_1 \leq \cdots \leq i_d \leq n-1$ 和 $n \geq 3$。对于 $t \geq 0$，我们有

$$f(t) = \sum_{k=1}^{r-1} \binom{t+d-k-2+n-i_{k+1}}{n-1-i_{k+1}} \left(|B(x_{i_1} \cdots x_{i_k})| - 1\right).$$

定义 2.9 （[4, 记号 4.10 和定义 4.11]） 。 设 $u_0 \in S_{n-1}$。对于每个$t \geq 0$，记

$$w(t) \coloneqq \pi_{n-1}(\mathrm{mg}_n(u_0 x_n^t)),$$

即，$\mathrm{mg}_n(u_0 x_n^t) = w(t) x_n^{f(t)}$。

根据定义，对于每个 $t \geq \tau_{n-1}(u_0)$，都存在一个最小的单项式 $z_n(t) \geq u_0 x_n^t$，使得

$$\pi_{n-1}\left(\mu_n(u_0 x_n^t, z_n(t))\right) = w(t).$$

对于每个 $t \geq \tau_{n-1}(u_0)$，我们定义

$$h(t) = \deg_{x_n} \mu_n(u_0 x_n^t, z_n(t)),$$
$$k(t) = \deg_{x_n} z_n(t).$$

最后，我们可以回顾本文的主要工具了。

定理 2.10 ([4, 定理 4.15])。设 u_0 是 R_n中的一个单项式，其中 $n \geq 3$，且满足 $x_n \nmid u_0$。则

$$\tau_n(u_0) = f(0) - h(0) - k(0).$$

2.2. **组合公式**。我们记录一些将在本文中反复用到的组合公式。

引理 2.11。设 a、b、$c \geq 0$ 为整数。则

$$\sum_{i=0}^{c} \binom{a+i}{a}\binom{b+c-i}{b} = \binom{a+b+c+1}{c}.$$

证明。结论由生成函数得出

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i}{n} y^i = \frac{1}{(1-x)^{n+1}}.$$ □

引理 2.12。设 $a, b \geq 0$ 为整数。那么

$$\sum_{i=0}^{b} \binom{a+i}{i} = \binom{a+b+1}{b}.$$

证明。我们对 b使用归纳法。若 $b = 0$，则两边均等于 1，符合要求。现在假设对于某个 $b > 0$，等式在 $b-1$ 时成立。于是有

$$\sum_{i=0}^{b} \binom{a+i}{i} = \left(\sum_{i=0}^{b-1} \binom{a+i}{i}\right) + \binom{a+b}{b} = \binom{a+b}{b-1} + \binom{a+b}{b} = \binom{a+b+1}{b},$$

其中第二个等号由归纳假设得出。因此结论成立。□

3. Proof of Theorem 1.2

给定两个整数 r，n，其中 $2 \leq r < n$。固定 R_n中的一个单项式 $u_0 = x_r^d$。目标是求与 u_0相关联的三个多项式 $f(t)$ $h(t)$ $k(t)$ 在 $t = 0$处的取值。根据定义，所有能整除 $\mathrm{mg}(u_0)$ 的 x_j 都属于 $\{x_i\}_{i\in[r+1,n]}$。因此我们可以令 $\mathrm{mg}(u_0) = x_{r+1}^{f_{r+1}} x_{r+2}^{f_{r+2}} \cdots x_n^{f_n}$。

引理 3.1。对于任意 $j \in [r+1, n]$，我们有

$$f_j = \binom{j+d-2}{j-1} - \binom{j-r+d-1}{d-1}.$$

证明。 显然， $|B(x_r^k)| = \binom{k+r-1}{r-1}$ 对任意 k。根据定理 2.8，我们得到

$$\begin{aligned} f_j &= \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-i-2-r+j}{j-r-1} \left(\binom{i+r-1}{r-1} - 1 \right) \\ &= \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-i-2-r+j}{j-r-1} \binom{i+r-1}{r-1} - \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-i-2-r+j}{j-r-1} \\ &= \sum_{i=1}^{d-1} \binom{(j-r-1)+(d-1-i)}{j-r-1} \binom{(r-1)+i}{r-1} - \sum_{i=1}^{d-1} \binom{(j-r-1)+(d-1-i)}{j-r-1}. \end{aligned}$$

应用定理2.11于第一个和式，并应用定理2.12 于第二个和式，我们得到

$$\begin{aligned} &\left(\binom{j+d-2}{j-1} - \binom{j-r+d-2}{j-r-1} \right) - \left(\binom{j-r+d-2}{d-2} \right) \\ &= \binom{j+d-2}{j-1} - \left(\binom{j-r+d-2}{d-1} + \binom{j-r+d-2}{d-2} \right) \\ &= \binom{j+d-2}{j-1} - \binom{j-r+d-1}{d-1}, \end{aligned}$$

这正是所需的结果。 □

由定理 2.6，我们得到 $\mathrm{mg}_n(u_0 x_n^t) = x^{f_{r+1}\binom{t}{r+1}} x^{f_{r+2}\binom{t}{r+2}} \cdots x_n^{f_n)(t)}$，其中

$$\begin{aligned} f_{r+1}(t) &= f_{r+1}, \\ f_{r+2}(t) &= f_{r+2} + f_{r+1}\binom{t}{1}, \\ &\cdots \\ f_n(t) &= f_n + f_{n-1}\binom{t}{1} + \cdots + f_{r+1}\binom{t+n-r-2}{n-r-1}. \end{aligned}$$

换言之，对于任意 $j \in [r+1, n]$，我们有

$$f_j(t) = \sum_{i=0}^{j-r-1} f_{j-i}\binom{t+i-1}{i}.$$

根据定义， $f_j(t)$ 恰好是与 u_0 相关联的 f 多项式，其中 u_0 被视为 S_j 中的一个单项式。特别地，由此以及定义可得

$$f(t) = f_n(t) = \sum_{i=0}^{n-r-1} f_{n-i}\binom{t+i-1}{i}. \tag{1}$$

下一步是确定 $h(t)$和 $k(t)$。从现在起，假设 t 足够大。由于我们将要计算的所有函数都是多项式（[4,推论 4。13]），因此只需对足够大的 t值进行计算即可。对于任意 $j \in [r+1, n]$，令 $z_j(t)$为满足以下条件的最小单项式：

$$\pi_{j-1}\left(\mu_n(u_0 x_n^t, z_j(t))\right) = \pi_{j-1}(\mathrm{mg}(u_0 x_n^t)).$$

对于足够大的 t，我们令

$$h_j(t) = \deg_{x_j} \mu_n(u_0 x_n^t, z_j(t)),$$
$$k_j(t) = \deg_{x_j} z_j(t),$$

对每个 $j \in [r+1, n]$。注意，根据定义，$h_j(t)$ 和 $k_j(t)$ 分别恰好是将 u_0 视为 S_j 中的一个单项式时所对应的 $h(t)$ 和 $k(t)$ 多项式。

接下来，对每个 $j \in [r+1, n]$，令

$$\delta_j = f_j(0) - h_j(0) = f_j(t) - h_j(t)$$

对任意 t。由于 [4, 命题 412]，这个定义是良定义的。现在我们继续证明若干公式，从而得到 $f(t)$ $h(t)$、以及 $k(t)$。

引理 3.2. 给定正整数 n, r, j, a, b, c，其中 $r < n$ 和 $j \in [r+1, n]$。令 $z(t) \geq x_r^a x_n^{t-c}$ 为满足下述条件的最小单项式

$$\pi_j\left(\mu_n\left(x_r^a x_n^{t-c}, z(t)\right)\right) = x_j^b.$$

Then

$$z(t) = x_r^{a+b} x_n^{t-c-b},$$
$$\mu_n\left(x_r^a x_n^t, z(t)\right) = \left(x_j^b\right)\left(\prod_{s=j+1}^{n} x_s^{\binom{t-c+s-j}{s-j+1} - \binom{t-c-b+s-j}{s-j+1}}\right).$$

证明. 不失一般性，我们可以假设 $c = 0$，因为将 t 替换为 $t-c$，即可由这个特例推出结论。

我们将执行必要的步骤，以几乎达到这个代价：

$$\begin{aligned}
u_0 x_n^t = x_r^a x_n^t &\xrightarrow{x_n^t} x_r^a x_{n-1}^t \\
x_r^a x_{n-1}^t &\xrightarrow{x_{n-1}^t x_n^{\binom{t}{2}}} x_r^a x_{n-2}^t \\
x_r^a x_{n-2}^t &\xrightarrow{x_{n-2}^t x_{n-1}^{\binom{t}{2}} x_n^{\binom{t+1}{3}}} x_r^a x_{n-3}^t \\
&\cdots \\
x_r^a x_{j+1}^t &\xrightarrow{x_{j+1}^t x_{j+2}^{\binom{t}{2}} \cdots x_n^{\binom{t+n-j-2}{n-j}}} x_r^a x_j^t \\
x_r^a x_j^t &\xrightarrow{x_j^{b-1} x_{j+1}^{\binom{t}{2} - \binom{t-b+1}{2}} \cdots x_n^{\binom{t+n-j-1}{n-j+1} - \binom{t-b+n-j}{n-j+1}}} x_r^{a+b-1} x_j^{t-b+1}.
\end{aligned}$$

从上述过程可以看出，我们有

$$\pi_j\left(\mu_n\left(u_0 x_n^t, x_r^{a+b-1} x_j^{t-b+1}\right)\right) = x_j^{b-1},$$

因此，再多一步就足以得到所需的代价。故我们有

$$z(t) = x_r^{d+b} x_n^{d-b},$$

如所愿。接下来，我们确定每个 $s \in [n]$ 的 $\deg_{x_s} \mu_n(u_0 x_n^t, z(t))$。由上述过程可立即得到，$\deg_{x_j} \mu_n(u_0 x_n^t, z(t)) = b$，且 $\deg_{x_s} \mu_n(u_0 x_n^t, z(t)) = 0$

对于任意 $s \in [j-1]$ 均成立。接下来，对于每个 $s \in [j+1, n]$，我们有

$$\begin{aligned}\deg_{x_s} \mu_n\left(u_0 x_n^t, z(t)\right) &= t + \sum_{u=2}^{s-j} \binom{t+u-2}{u} + \binom{t+s-j-1}{s-j+1} - \binom{t-b+s-j}{s-j+1} \\ &= \sum_{u=0}^{s-j+1} \binom{t+u-2}{u} - \binom{t-b+s-j}{s-j+1} \\ &= \binom{t+s-j}{s-j+1} - \binom{t-b+s-j}{s-j+1},\end{aligned}$$

正如所需，其中最后一个等号由定理2.12得出。 □

命题 3.3。我们有

$$\begin{aligned} z_{r+1}(t) &= u_0 x_n^t, \\ \mu_n(u_0 x_n^t, z_{r+1}(t)) &= 0, \\ h_{r+1}(t) &= 0, \\ \delta_{r+1} &= f_{r+1}. \end{aligned}$$

此外，对于任意 $j \in [r+2, n]$，我们有

$$\begin{aligned} z_j(t) &= x_r^{d+\sum_{i=r+1}^{j-1}\delta_i} x_n^{t-\sum_{i=r+1}^{j-1}\delta_i}, \\ \mu_n(u_0 x_n^t, z_j(t)) &= \left(\prod_{i=r+1}^{j-1} x_i^{f_i(t)}\right)\left(\prod_{s=j}^{n} x_s^{g_{j,s}(t)}\right), \\ h_j(t) &= \binom{t+j-r-1}{j-r} - \binom{t-\sum_{l=r+1}^{j-1}\delta_l+1}{2} - \\ &\qquad \sum_{i=3}^{j-r}\binom{t-\sum_{l=r+1}^{j+1-i}\delta_l+i-2}{i}, \\ \delta_j &= f_j + \binom{-\sum_{l=r+1}^{j-1}\delta_l+1}{2} + \sum_{i=3}^{j-r}\binom{-\sum_{l=r+1}^{j+1-i}\delta_l+i-2}{i}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} g_{j,s}(t) = \binom{t+s-r-1}{s-r} - \binom{t-\sum_{l=r+1}^{j-1}\delta_l+s-j+1}{s-j+2} - \\ \sum_{i=3}^{j-r}\binom{t-\sum_{l=r+1}^{j+1-i}\delta_l+s-j+i-2}{s-j+i} \end{aligned}$$

对于每个 $s \in [j, n]$。

证明。我们将直接证明第一个结论，并对 j 进行归纳来证明第二个结论。根据定义，$z_{r+1}(t) \geq u_0 x_n^t$ 是满足以下条件的最小单项式

$$\pi_r\left(\mu_n\left(u_0 x_n^t, z_{r+1}(t)\right)\right) = \pi_r\left(\mathrm{mg}(u_0 x_n^t)\right) = 0.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned} z_{r+1}(t) &= u_0 x_n^t, \\ \mu_n\left(u_0 x_n^t, z_{r+1}(t)\right) &= 0, \\ h_{r+1}(t) &= \deg_{x_{r+1}} \mu_n\left(u_0 x_n^t, z_{r+1}(t)\right) = 0, \\ \delta_{r+1} &= f_{r+1}(0) - h_{r+1}(0) = f_{r+1}. \end{aligned}$$

这证明了第一个陈述。

对于第二个陈述，我们首先证明基例 $j = r+2$。根据定义，$z_{r+2}(t) \geq u_0 x_n^t$ 是满足以下条件的最小单项式

$$\pi_{r+1}\left(\mu_n\left(u_0 x_n^t, z_{r+2}(t)\right)\right) = \pi_{r+1}\left(\mathrm{mg}(u_0 x_n^t)\right) = x_{r+1}^{f_{r+1}(t)} = x_{r+1}^{f_{r+1}} = x_{r+1}^{\delta_{r+1}}.$$

应用引理 3.2，我们得到

$$\begin{aligned} z_{r+2}(t) &= x_r^{d+\delta_{r+1}} x_n^{t-\delta_{r+1}}, \\ \mu_n\left(u_0 x_n^t, z_{r+2}(t)\right) &= \binom{\delta_{r+1}}{x_{r+1}} \left(\prod_{s=r+2}^{n} x_s^{\binom{t+s-r-1}{s-r} - \binom{t-\delta_{r+1}+s-r-1}{s-r}} \right), \end{aligned}$$

如所愿。然后

$$\begin{aligned} h_{r+2}(t) &= \deg_{x_{r+2}} \mu_n\left(u_0 x_n^t, z_{r+2}(t)\right) = \binom{t+1}{2} - \binom{t-f_{r+1}+1}{2}, \\ \delta_{r+2} &= f_{r+2}(0) - h_{r+2}(0) = f_{r+2} + \binom{-\delta_{r+1}+1}{2}, \end{aligned}$$

如所愿。这就完成了归纳法基例的证明。通过归纳法，我们现在可以假设 $z_{j-1}(t)$ $\mu_n(u_0 x_n^t, z_{j-1}(t))$ $h_{j-1}(t)$，以及δ_{j-1} 的公式均如预期。

根据定义，$z_j(t) \geq u_0 x_n^t$ 是满足以下条件的最小单项式

$$\pi_{j-1}\left(\mu_n\left(u_0 x_n^t, z_j(t)\right)\right) = \pi_{j-1}\left(\mathrm{mg}(u_0 x_n^t)\right) = \prod_{i=r+1}^{j-1} x_i^{f_i(t)}.$$

由于

$$\pi_{j-1}\left(\mu_n\left(u_0 x_n^t, z_{j-1}(t)\right)\right) = \left(\prod_{i=r+1}^{j-2} x_i^{f_i(t)} \right) \left(x_{j-1}^{h_{j-1}(t)} \right),$$

单项式 $z_j(t) \geq z_{j-1}(t)$是满足以下条件的最小单项式

$$\pi_{j-1}\left(\mu_n\left(z_{j-1}(t), z_j(t)\right)\right) = x_{j-1}^{f_{j-1}(t)-h_{j-1}(t)} = x_{j-1}^{f_{j-1}(0)-h_{j-1}(0)} = x_{j-1}^{\delta_{j-1}}.$$

应用引理3.2，我们得到

$$\begin{aligned} z_j(t) &= x_r^{d+\sum_{i=r+1}^{j-1}\delta_i} x_n^{d-\sum_{i=r+1}^{j-1}\delta_i}, \\ \mu_n\left(z_{j-1}(t), z_j(t)\right) &= \binom{\delta_{j-1}}{x_{j-1}} \left(\prod_{s=j}^{n} x_s^{\binom{t-\sum_{l=r+1}^{j-2}\delta_l+s-j+1}{s-j+2} - \binom{t-\sum_{l=r+1}^{j-1}\delta_l+s-j+1}{s-j+2}} \right). \end{aligned}$$

$z_j(t)$ 的公式现已证明。接下来我们处理 $\mu_n\left(u_0 x_n^t,\ z_j(t)\right)$。对于任意$s \in [n]$，我们有

$$\deg_{x_s} \mu_n\left(u_0 x_n^t, z_j(t)\right) = \deg_{x_s} \mu_n\left(u_0 x_n^t, z_{j-1}(t)\right) + \deg_{x_s} \mu_n\left(z_{j-1}(t), z_j(t)\right),$$

这两项均可由上述公式和归纳假设得知。当 $s \leq j-1$ 时，结论由我们的过程得出。现在假设 $s \in [j,n]$。我们有

$$\begin{aligned}&\deg_{x_s} \mu_n \left(u_0 x_n^t, z_{j-1}(t)\right)\\ =& \binom{t+s-r-1}{s-r} - \binom{t-\sum_{l=r+1}^{j-2}\delta_l + s-j+2}{s-j+3} - \\ &\sum_{i=3}^{j-r-1} \binom{t-\sum_{l=r+1}^{j-i}\delta_l+s-j+i-1}{s-j+i+1}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&\deg_{x_s} \mu_n \left(z_{j-1}(t), z_j(t)\right)\\ =& \binom{t-\sum_{l=r+1}^{j-2}\delta_l+s-j+1}{s-j+2} - \binom{t-\sum_{l=r+1}^{j-1}\delta_l+s-j+1}{s-j+2}\end{aligned}$$

我们将 $\deg_{x_s} \mu_n \left(u_0 x_n^t, z_{j-1}(t)\right)$ 的第二个加数与 $\deg_{x_s} \mu_n \left(z_{j-1}(t)\ z_j(t)\right)$ 的第一个加数合并:

$$\begin{aligned}&-\binom{t-\sum_{l=r+1}^{j-2}\delta_l+s-j+2}{s-j+3} + \binom{t-\sum_{l=r+1}^{j-2}\delta_l+s-j+1}{s-j+2}\\ =& -\binom{t-\sum_{l=r+1}^{j-2}\delta_l+s-j+1}{s-j+3}.\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}&\deg_{x_s} \mu_n \left(u_0 x_n^t, z_j(t)\right)\\ =& \deg_{x_s} \mu_n \left(u_0 x_n^t, z_{j-1}(t)\right) + \deg_{x_s} \mu_n \left(z_{j-1}(t), z_j(t)\right)\\ =& \left(\binom{t+s-r-1}{s-r} - \sum_{i=3}^{j-r-1}\left(\binom{t-\sum_{l=r+1}^{j-i}\delta_l+s-j+i-1}{s-j+i+1}\right)\right) + \\ &\left(-\binom{t-\sum_{l=r+1}^{j-1}\delta_l+s-j+1}{s-j+2}\right) + \left(-\binom{t-\sum_{l=r+1}^{j-2}\delta_l+s-j+1}{s-j+3}\right)\end{aligned}.$$

我们将上述表达式的第二个加数改写为:

(2)
$$-\sum_{i=3}^{j-r-1}\left(\binom{t-\sum_{l=r+1}^{j-i}\delta_l+s-j+i-1}{s-j+i+1}\right) = -\sum_{i=4}^{j-r}\left(\binom{t-\sum_{l=r+1}^{j-i+1}\delta_l+s-j+i-2}{s-j+i}\right).$$

现在显然有

$$-\binom{t-\sum_{l=r+1}^{j-2}\delta_l+s-j+1}{s-j+3}$$

可以加到总和（方程（2））中，因为它对应于情形 $i=3$。因此,

$$\begin{aligned}&\deg_{x_s} \mu_n \left(u_0 x_n^t, z_j(t)\right)\\ =& \binom{t+s-r-1}{s-r} - \binom{t-\sum_{l=r+1}^{j-1}\delta_l+s-j+1}{s-j+2} - \\ &\sum_{i=3}^{j-r}\binom{t-\sum_{l=r+1}^{j-i+1}\delta_l+s-j+i-2}{s-j+i},\end{aligned}$$

正如所需。于是， $h_j(t)$ 和 δ_j 的公式便显然成立。 □

我们得到了一个看似简单的 $\tau_n(x_r^d)$ 公式。

定理 3.4。 给定整数 n、 r ， 其中 $2 \leq r < n$。则单项式 x_r^d 在 R_n 中的 *Gotzmann* 阈值为

$$\tau_n(x_r^d) = \sum_{i=r+1}^{n} \delta_i.$$

证明。 固定 $n \geq r+1$。我们将证明

$$\tau_m(x_r^d) = \sum_{j=r+1}^{m} \delta_j$$

对每个 $m \in [r+1, n]$ 都成立。对于基例 $m = r+1$，我们有

$$\tau_m(x_r^d) = f_{r+1}(0) - h_{r+1}(0) - k_{r+1}(0) = f_{r+1} = \delta_{r+1},$$

如所需，其中第二个等式由定理 3.3 得出。现在假设$m > r+1$。我们有

$$\tau_m(x_r^d) = (f_m(0) - h_m(0)) - k_m(0) = (\delta_m) + \sum_{j=r+1}^{m-1} \delta_j = \sum_{j=r+1}^{m} \delta_j,$$

正如所需，其中第二个等式由归纳假设得出。 □

现在我们可以证明主要结果了。

定理 *1.2* 的证明。固定一个 $n \geq r+1$。我们指出， δ_{r+1}的公式与 δ_j 在 $j \in [r+2, n]$时的公式相同。因此，我们将采用这个统一公式。对于每个 $j \in [r+1, n]$，我们将 δ_j 改写如下:

$$\begin{aligned}
\delta_j &= f_j + \binom{-\sum_{l=r+1}^{j-1} \delta_l + 1}{2} + \sum_{i=3}^{j-r} \binom{-\sum_{l=r+1}^{j+1-i} \delta_l + i - 2}{i} \\
&= f_j + \binom{-\sum_{l=r+1}^{j-1} \delta_l + 1}{2} + \sum_{i=r+1}^{j-2} \binom{-\sum_{l=r+1}^{i} \delta_l + j - 1 - i}{j+1-i} \\
&= f_j + \binom{-\tau_{j-1}(x_r^d) + 1}{2} + \sum_{i=r+1}^{j-2} \binom{-\tau_i(x_r^d) + j - 1 - i}{j+1-i}.
\end{aligned}$$

现在我们有

$$\begin{aligned}
\tau_n(x_r^d) &= \sum_{j=r+1}^{n} \delta_j \\
&= \sum_{j=r+1}^{n} \left(f_j + \binom{-\tau_{j-1}(x_r^d) + 1}{2} + \sum_{i=r+1}^{j-2} \binom{-\tau_i(x_r^d) + j - 1 - i}{j+1-i} \right) \\
&= \left(\sum_{j=r+1}^{n} f_j \right) + \sum_{j=r+1}^{n} \left(\binom{-\tau_{j-1}(x_r^d) + 1}{2} + \sum_{i=r+1}^{j-2} \binom{-\tau_i(x_r^d) + j - 1 - i}{j+1-i} \right).
\end{aligned}$$

令 Δ_s 表示上标包含 $\tau_s(x_r^d)$ 的二项式系数之和，其中每个 $s \in [r+1, n-1]$ 均如此定义。根据此定义，我们有

$$\tau_n(x_r^d) = \left(\sum_{j=r+1}^{n} f_j\right) + \sum_{s=r+1}^{n-1} \Delta_s.$$

我们将简化上面的每个加项。对于第一个表达式，有

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=r+1}^{n} f_j \\
&= \sum_{j=r+1}^{n} \left(\binom{j+d-2}{j-1} - \binom{j-r+d-1}{j-r}\right) \\
&= \left(\sum_{j=r+1}^{n} \binom{j+d-2}{j-1}\right) - \left(\sum_{j=r+1}^{n} \binom{j-r+d-1}{j-r}\right).
\end{aligned}$$

将 $\binom{r+d-1}{r-1}$ 加到第一个和式中，并将 $1 = \binom{d-1}{0}$ 加到第二个和式中，可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=r+1}^{n} f_j \\
&= \left(\binom{r+d-1}{r-1} + \sum_{j=r+1}^{n} \binom{j+d-2}{j-1}\right) - \left(\binom{d}{0} + \sum_{j=r+1}^{n} \binom{j-r+d-1}{j-r}\right) - \\
&\qquad\qquad \left(\binom{r+d-1}{r-1} - 1\right) \\
&= \left(\binom{r+d-1}{r-1} + \sum_{j=r+1}^{n} \binom{j+d-2}{j-1}\right) - \left(\sum_{j=r}^{n} \binom{j-r+d-1}{j-r}\right) - \left(\binom{r+d-1}{r-1} - 1\right) \\
&= \left(\binom{r+d-1}{r-1} + \sum_{j=r}^{n-1} \binom{j+d-1}{j}\right) - \left(\sum_{j=0}^{n-r} \binom{j+d-1}{j}\right) - \left(\binom{r+d-1}{r-1} - 1\right)
\end{aligned}$$

我们应用定理 2.12于最前面的第一个加数 $\binom{r+d-1}{r-1}$，得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=r+1}^{n} f_j \\
&= \left(\sum_{j=0}^{r-1} \binom{j+d-1}{j} + \sum_{j=r}^{n-1} \binom{j+d-1}{j}\right) - \left(\sum_{j=0}^{n-r} \binom{j+d-1}{j}\right) - \left(\binom{r+d-1}{r-1} - 1\right) \\
&= \left(\sum_{j=0}^{n-1} \binom{j+d-1}{j}\right) - \left(\sum_{j=0}^{n-r} \binom{j+d-1}{j}\right) - \left(\binom{r+d-1}{r-1} - 1\right)
\end{aligned}$$

应用定理 2.12于前两个加项，我们得到

$$\sum_{j=r+1}^{n} f_j = \left(\binom{n+d-1}{n-1}\right) - \left(\binom{n+d-r}{n-r}\right) - \left(\binom{r+d-1}{r-1} - 1\right)$$
$$= \binom{d+n-1}{d} - \binom{d+n-r}{d} - \binom{d+r-1}{d} + 1.$$

接下来，对于每个 $s \in [r+1, n-2]$，我们有

$$\Delta_s = \binom{-\tau_s(x_r^d)+1}{2} + \sum_{j=s+2}^{n} \binom{-\tau_s(x_r^d)+j-1-s}{j+1-s}$$
$$= \binom{-\tau_s(x_r^d)+1}{2} + \sum_{j=3}^{n+1-s} \binom{-\tau_s(x_r^d)+j-2}{j}.$$

应用定理 2.12于第一个加数，我们得到

$$\binom{-\tau_s(x_r^d)+1}{2} = \sum_{j=0}^{2} \binom{-\tau_s(x_r^d)+j-2}{j}.$$

因此，我们可以合并求和并再次应用定理 2.12 ：

$$\Delta_s = \sum_{j=0}^{n+1-s} \binom{-\tau_s(x_r^d)+j-2}{j} = \binom{-\tau_s(x_r^d)+n+1-s}{n+1-s} = (-1)^{n+1-s}\binom{\tau_s(x_r^d)}{n+1-s},$$

其中，最后一个等号由负二项式系数的公式得出$\binom{-a}{b} = (-1)^b\binom{a+b-1}{b}$ 其中 $a \geq 1$ 且 $b \geq 0$。最后，我们计算 Δ_{n-1}:

$$\Delta_{n-1} = \binom{-\tau_{n-1}(x_r^d)+1}{2} = (-1)^{n+1-(n-1)}\binom{\tau_{n-1}(x_r^d)}{n+1-(n-1)}.$$

结论随即得证。 □

References

1. Sergei L. Bezrukov 和 Uwe Leck， *Macaulay posets*，Electron. J. Combin. DS12 (2004)，45。MR 4336214 1 2. Vittoria Bonanzinga， *Principal Borel ideals and Gotzmann ideals*，Arch. Math. (Basel) 81 (2003 2057059 1 3 4, 385 396)，no. – 。MR 。Vittoria Bonanzinga 和 Shalom Eliahou， *Gotzmann monomials in four variables*，Rev. Un. Mat. Argentina 62 4281072 1 4 2021 1, 67 93 ( )，no. – 。MR 。，

_____ *On the Gotzmann threshold of monomials* **62** 2025 2, 3, 4, 5, 6, 7 ，J. Algebr. Comb. ( )。. Alesandra Costantini、Christopher Francisco、Jeffrey Mermin 和 Jay Schweig， *When are Borel ideals gotzmann?* ，准备中的工作。3 6。Konrad Engel， *Sperner theory*，数学百科全书及其应用丛书，第65卷，剑桥大学出版社，剑桥，1997年。MR 1429390 1 7. Andrew H. Hoefel 和 Jeff Mermin， *Gotzmann squarefree ideals*，Illinois J. Math. 56 (2012)，no. 2，397–414。MR 3161331 1 8. Satoshi Murai， *Gotzmann monomial ideals*，Illinois J. Math. 51 (2007)，no. 3，843–852。MR 2379725 1 9. Satoshi Murai 和 Takayuki Hibi， *Gotzmann ideals of the polynomial ring*，Math. Z. 260 (2008)，no. 3，629–646。MR 2434473 1