arXiv:2512.14849v1 [math.QA] 16 Dec 2025

正特征下来自 Temperley-Lieb 范畴的四维 2-手柄体的不变量

Thibault D. D´ecoppet 和 Benjamin Ha¨ıoun

2025年12月

摘要

我们研究与特征为 $p > 2$ 且取本原四次单位根时的 Temperley-Lieb 范畴相关联的四维 2-手柄体的不变量。这些不变量还取决于高度参数 n，我们重点考察 $n = 2$ 的情形。在 $p > 3$ 的条件下，我们证明，与取本原四次单位根时的 Temperley-Lieb 范畴相关联的高度为 $n = 2$ 的不变量在 $\mathbb{C}P^2$、$\mathbb{C}P^2$ 和 $S^2 \times S^2$ 上消失。特别是，它有望检测奇异光滑结构。

目录

引言 **2**结果.3 进一步方向.6

1 拓扑学背景 **7**

1.1 手柄分解.7 1.2 纽结理论.8 1.3 四维 2-手柄体的不变量.11

2 Temperle y-Lieb 在高度二与四次单位根处 12

2.1 混合 Temperley-Lieb 范畴.12 2.2 射影对象理想的线性结构.14 2.3 与生成元的范畴化融合规则.15 2.4 与生成元的双重编织.16 2.5 扭曲.17 2.6 更多范畴化融合规则.18 2.7 更多双编织.20 2.8 环绕.22 2.9 Hopf 配对.23

3 相关拓扑不变量 相关拓扑不变量 25

3.1 修正迹，或 4-柄.25 3.2 切割态射，或 3-柄.25 3.3 色度态射，或 2-手柄.27 3.4 无1-手柄.28

4 四维 2-柄体不变量的计算 **30**

4.1 复射影平面.30 4.2 两个2-球面的乘积.32 4.3 Mazur流形.32

参考文献 **37**

引言

在 [Wit89], Witten提出了一种与Jones 多项式相关的三维量子场论的存在性。Reshetikhin和Turaev实现了他的构想，他们利用一个结构高度精细的Hopf代数 [RT91]著名地构造了这样一种量子场论。具体而言，通过考虑 $\mathfrak{sl}_2$ 在复单位根处的Lusztig 的除幂量子群，建立了它与Jones 多项式之间的联系。 [KM91],对相应的定向三维流形不变量进行了广泛研究，并证明它们能够恢复许多经典不变量。另一方面，Lickorish提出了Reshetikhin-Turaev不变量的纽结图理论构造 [Lic91b, Lic91a, Lic92]（另见 [BHMV92]）。他的方法依赖于量子 $\mathfrak{sl}_2$ 的表示论与Temperley-Lieb代数之间的密切联系。随后， [KL94] 利用Temperley-Lieb 范畴的组合结构，明确计算了Reshetikhin-Turaev不变量在一些小型三维流形上的取值。最后， [BHMV95]给出了Reshetikhin和Turaev的三维拓扑量子场论的纽结图理论描述。

更一般地，Turaev 为任意模融合范畴构造了一个三维拓扑量子场论 [Tur92, Tur94]。随后，这一构造得到进一步扩展，使其适用于不一定是半单的模张量范畴 [DGG+22]。在这种情况下，所得理论是一种所谓的非紧三维拓扑量子场论，这意味着它通常只能在具有非空入边界的三维流形上求值。另一方面，研究表明，任意模融合范畴都对应一个四维拓扑量子场论 [CY93] ，而更一般地，任意编织带融合范畴也都对应一个四维拓扑量子场论 [CKY97]。近期，这后一种构造得到推广，以适用于不一定是半单的带状张量范畴。其中一种构造由 [CGHP23], 引入，采用 skein理论方法，并利用了 [Juh18] 给出的定向四维流形范畴的一种方便表示。更具体地说，对于满足一项称为 色性非退化性 的技术条件的带状张量范畴，他们构造了一个非紧四维拓扑量子场论。此外，若输入的带状张量范畴满足更强的条件，即具有 色度紧致 性，则相应的四维拓扑量子场论实际上定义在所有四维流形上。另一种不同的构造见于 [BDR24]。给定一个带状张量范畴，他们构造了一个四维 2-手柄体的不变量；这类手柄体是带边界四维流形的一种表示，其组成部分仅包括 0-手柄、1-手柄和 2-手柄。

四维拓扑的一个主要研究兴趣是探测奇异光滑结构，也就是说，区分彼此同胚但不同胚的四维流形。目前，唯一已知具有这一性质的代数不变量是 Khovanov 同调 [RW24]。我们自然会问，前文提到的由辫带张量范畴导出的四维拓扑量子场论是否能够探测奇异光滑结构。已知这类拓扑量子场论的若干性质会阻止这种情况发生。例如，Gompf 在 [Gom84] 中证明，任意两个同胚的四维流形（可能带有边界）经过有限次与 $S^2\times S^2$ 作连通和后，便会微分同胚。对于 $\mathbb{C}P^2$ 与 $\mathbb{C}P^2$ 这一对，也有类似结果。因此，若一种四维拓扑量子场论有可能探测奇异光滑结构，它必须在 $S^2\times S^2$ 上以及 $\mathbb{C}P^2$ 和 $\mathbb{C}P^2$ 中至少一个上取零。特别地，由 [Reu23, Ha¨ı25a] 的结果可知，通过 [CGHP23] 的构造与色度紧致辫带张量范畴相关联的四维拓扑量子场论不能在 $S^2\times S^2$ 上取零，因此无法探测奇异光滑结构。

展示四维 2-手柄体的不变量也有充分的动机。四维 2-手柄体是由 0-、1-和 2-手柄组成的带边界四维流形的表示。请回想，这些对象之间有两种自然的等价概念：微分同胚和 2-等价。若两个 2-手柄体无需引入 3-柄即可相互转化，就称它们是 2-等价的。人们认为 2-等价是一种严格强于微分同胚的等价关系，但目前尚无反例。探究这一问题的另一动机，源于它与著名的 Andrews-Curtis 猜想之间的密切联系 [Gom91]。

与辫带张量范畴相关的不变量的强度，与该辫带张量范畴的性质密切相关。例如，已知有限辫带张量范畴若为半单的，或更一般地，具有色度紧致性，则通过构造 [CGHP23] 产生

仅取决于同胚类型 [Reu23] 的不变量。能够避开这些障碍的自然候选对象包括小量子群的表示范畴。尽管相应的辫带张量范畴并不具有色度紧致性，但相应的不变量仍会发生稳定化，因为它们在 $S^2 \times S^2$ 上不消失；这一点已在 [CGHP23], 中证明，另见 [BDR24]。由不太熟悉的霍普夫代数导出的例子也曾在 [FM24, Man], 中得到研究，但它们同样无法检测奇异光滑结构。因此，似乎有必要提供真正奇异的辫带张量范畴作为输入。

现在，色度紧致是一种纽结图理论条件，因此在实践中相当难以检验。不过，人们相信色度紧致性存在纯代数刻画。回顾一下，编织张量范畴的对称中心（亦称 M¨uger 中心）是由那些对双重编织而言透明的对象构成的全对称张量子范畴。特别地，众所周知，有限带状张量范畴是模的，当且仅当其对称中心是平凡的。猜想上，有限带状张量范畴是色度紧致的，当且仅当其对称中心是可分的；可分性是半单性的一个细化概念，在正特征下不可或缺。对于对称张量范畴，这一最后的刻画已得到证明 [CGHP23]。高阶代数考量 [D´ec25] 也为其正确性提供了更多证据。

上一段的讨论表明，要得到有趣的不变量，必须考虑其对称中心不可分的带状张量范畴，或者更一般地，考虑尽可能奇异的范畴。最奇异的对称张量范畴定义在正特征域上 $p > 0$。具体而言，在 [BEO23 中，Cou21], the authors 引入了一族杰出的对称张量范畴 Ver_{p^n} ，它们由参数±1处的 Temperley-Lieb 范畴的商构造而成。粗略地说，自然数 n 应被视为范畴 Ver_{p^n}复杂程度的一种度量。具体来说，当 $p \neq 2,3$ if$n = 1$ 时，Ver_{p^n} 不可分。随后， [STWZ23], 将这一构造推广到任意单位根处的正特征 Temperley-Lieb 范畴的商，并由此构造了带状张量范畴。我们将这些带状张量范畴称为混合高阶 Verlinde 范畴，记作 $\mathrm{Ver}_{p^{(n)}}^{\zeta^{1/2}}$。 [D´ec24] 证明，对于 $\zeta \neq \pm 1$ 偶数阶的单位根，$\mathrm{Ver}_{p^{(n)}}^{\zeta^{1/2}}$ 的对称中心是 $\mathrm{Ver}_{p^{n-1}}^{+}$，即 $\mathrm{Ver}_{p^{n-1}}$ 的一个全对称张量子范畴。特别地，若 $n = 2$ 且 $p \neq 2,3$，或若 $n \geq 3$，则 $\mathrm{Ver}_{p^{(n)}}^{\zeta^{1/2}}$ 的对称中心不可分。因此，这些带状张量范畴是构造 [CGHP23] 时非常自然的输入选择。

结果

现在固定一个代数闭域 $\Bbbk$，并令 $\mathcal{B}$ 为 [EGNO15]意义下的幺模有限带状张量范畴。如上文所述，与 $\mathcal{B}$ 相关联的、在二等价下的四维 2-手柄体不变量有两种构造。第一种构造见于 [BDR24]，利用了 $\mathcal{B}$中的 Lyubashenko 的泛 Hopf 代数。这种方法的一个困难在于，实际上，泛 Hopf 代数往往很难被明确描述。另一方面，第二种通过纽结理论进行的构造见于 [CGHP23]。在这种情况下，其主要成分是 $\mathcal{B}$ 中的射影对象理想，以及所选定的修正迹。[1]就我们的目的而言，也就是当 $\mathcal{B}$ 为混合高阶 Verlinde 范畴时，该理想最终成为一组比泛 Hopf 代数易于处理得多的代数数据。更准确地说， [CGHP23]的构造在附加条件 $\mathcal{B}$满足色度非退化（见下文定义 1.8）时，会产生一个非紧四维拓扑量子场论。在没有这一假设的情况下，他们的构造仍可部分实施，从而产生一个在二等价下的四维 2-手柄体不变量，正如我们下文所记录的那样。

[1]对于幺模有限球张量范畴，射影对象理想上的（非零）修正迹由（非零）标量参数化 [GKP22]。

定理 （[CGHP23]）。 令 $\mathcal{B}$ 为一个配备修正迹的幺模有限带状张量范畴。则存在一个对称幺半函子

$$\mathcal{S}_{\mathcal{B}} : \mathbf{HD}_4^{2,3,4} \to \mathrm{Vec}\,,$$

来自四维 *2*-手柄体范畴[2], , 见定义 *1.1*。此外，若 $\mathcal{B}$ 是色度非退化的，则这一赋值可扩展为一个对称幺半函子

$$\mathcal{S}_{\mathcal{B}} : \mathbf{HD}_4^{1,2,3,4} \to \mathrm{Vec}\,,$$

其定义域为非紧四维配边范畴，也就是说，可扩展为一个非紧四维拓扑量子场论。

现在假设 $\Bbbk$ 的特征为 $p > 0$。我们将上述构造应用于 [STWZ23], 中引入的混合高阶 Verlinde 范畴，它推广了 [BEO23, Cou21]中的对称高阶 Verlinde 范畴。这些有限辫带张量范畴源自带参数 ζ 的 Temperley-Lieb 范畴 $\mathrm{TL}^{\zeta^{1/2}}$ ，其中参数是 k 中的一个单位根。通过 Kauffman 括号，选取平方根 $\zeta^{1/2}$ 后， ζ 便赋予 $\mathrm{TL}^{\zeta^{1/2}}$ 带状结构。范畴 $\mathrm{TL}^{\zeta^{1/2}}$ 与范畴 $\mathrm{Tilt}^{\zeta^{1/2}}$ 密切相关，后者由 Lusztig 的除幂量子群在 $\mathfrak{sl}_2$ 处于单位根 ζ时的倾斜模构成。具体而言，范畴 $\mathrm{Tilt}^{\zeta^{1/2}}$ 是 $\mathrm{TL}^{\zeta^{1/2}}$的 Cauchy 完备化。[STWZ23] 证明，带状范畴 $\mathrm{Tilt}^{\zeta^{1/2}}$ 包含一列由自然数 n参数化的无限多个理想 $\mathrm{J}_{p^{(n)}}$ 。于是，商范畴 $\mathrm{Tilt}^{\zeta^{1/2}}/\mathrm{J}_{p^{(n)}}$ 具有阿贝尔包络，即嵌入某个有限张量范畴的泛嵌入，我们将其记为 $\mathrm{Ver}_{p^{(n)}}^{\zeta^{1/2}}$ 。对后续讨论至关重要的是，$\mathrm{Ver}_{p^{(n)}}^{\zeta^{1/2}}$ 的射影对象理想恰好是 $\mathrm{J}_{p^{(n-1)}}/\mathrm{J}_{p^{(n)}}$，因此完全由 Temperley-Lieb 范畴 $\mathrm{TL}^{\zeta^{1/2}}$的组合性质刻画。下一个结果由上述讨论直接推出。

推论。 对于任意自然数 n 以及 $\Bbbk$ 中的单位根 ζ ，存在一个不变量 $\dot{\mathcal{S}}_{p^{(n)}}^{\zeta^{1/2}}$ ，它与混合高阶 *Verlinde* 范畴 $\mathrm{Ver}_{p^{(n)}}^{\zeta^{1/2}}$ 相关联，用于研究模 *2*-等价的四维 *2*-手柄体。此外，还存在一个对称幺半函子 $\mathcal{S}_{p^{(n)}}^{\zeta^{1/2}}$： $\mathbf{HD}_4^{2\,3\,4} \to ,\ , \mathrm{Vec}$。

混合高阶 Verlinde 范畴 $\mathrm{Ver}_{p^{(n)}}^{\zeta^{1/2}}$ 的代数性质在 [D´ec24],中得到了研究，这项研究建立在 [BEO23] 对对称高阶 Verlinde 范畴所作的全面研究之上。在高度 $n = 1$时，混合 Verlinde 范畴 $\mathrm{Ver}_{p^{(1)}}^{\zeta^{1/2}}$ 是可分的。特别地，它们给出了完全定义的四维拓扑量子场论 [CGHP23], , 因此也给出了四维流形的相对较弱的不变量 [Reu23]。在高度 $n = 2$时，混合 Verlinde 范畴 $\mathrm{Ver}_{p^{(2)}}^{\zeta^{1/2}}$ 不再是可分的。为明确起见，我们考虑 ζ 为本原四次单位根的情形，因此 $p \neq 2$。事实上，我们将假设 $p > 3$。具体而言，在 $p = 3$的情形下，有限带状张量范畴 $\mathrm{Ver}_{3^{(2)}}^{\zeta^{1/2}}$ 恰好是非退化的。[3]因此，相应的四维拓扑量子场论不仅定义在所有四维流形上，而且还是可逆的[CGHP23，定理 5.8]。相较之下，若 $p > 3$，则有以下结果。

定理 A. 令 $p > 3$，并令 ζ 为四次单位根。有限带状张量范畴 $\mathrm{Ver}_{p^{(2)}}^{\zeta^{1/2}}$ 是色度退化的。此外，函子 $\mathcal{S}_{p^{(2)}}^{\zeta^{1/2}}$： $\mathbf{HD}_4^{2\,3\,4} \to ,, \mathrm{Vec}$ 无法扩展为对称幺半函子 $\mathbf{HD}_4^{1\,2\,3\,4} \to ,,, \mathrm{Vec}$。

[2] [CGHP23] 的构造定义在 2、3 和 4-手柄上，而通常将 2-手柄体定义为由 0、1 和 2-手柄组成。两种概念在定向反转下彼此对应。[3]取 ζ 为一个四次单位根时，$\mathrm{Ver}_{p\ 2}^{\zeta^{1/2}}{}_{()}$ 的对称中心为 Ver_p^+。恰好，$\mathrm{Ver}_3^+ = \mathrm{Vec}$。

这表明，不变量 $\dot{\mathcal{S}}^{\zeta^{1/2}}_{p^{(n)}}$ 或许能够区分那些微分同胚但不 2-等价的四维 2-手柄体。

为了确立上述结果，并更一般地说，为了能够计算我们的不变量，我们研究 $\mathbf{Ver}^{\zeta^{1/2}}_{p^{(2)}}$ 的射影对象理想上的带状结构。这恰好等同于考察带有 ζ（本原四次单位根）的带状范畴 $\mathbf{Tilt}^{\zeta^{1/2}}/\mathbf{J}_{p^{(2)}}$ 的结构。在零特征下，Temperley-Lieb 范畴的带状结构已得到全面理解，并在 [KL94] 中作了便于查阅的总结。相比之下，正特征下的情况要困难得多。例如，$\mathbf{Tilt}^{\zeta^{1/2}}$ 中任意不可分解对象的融合规则尚不为人所知。[STWZ23] 在这一方向上取得了一些部分结果。在他们工作的基础上，我们明确描述了四次单位根处 $\mathbf{Tilt}^{\zeta^{1/2}}/\mathbf{J}_{p^{(2)}}$ 的不可分解对象上的编织与扭曲。借助这些代数数据，我们计算了相应不变量 $\dot{\mathcal{S}}^{\zeta^{1/2}}_{p^{(n)}}$ 在若干四维 2-手柄体上的取值。特别值得关注的是，该不变量在 $\mathbb{C}P^2$、$\mathbb{C}P^2$ 和 $S^2\times S^2$ 上的取值。也就是说，正如我们上文已经提到的，在这些 4-流形上不为零的不变量会受到稳定化的影响，因此无法检测奇异光滑结构。

—

定理 B. 设 $p>3$，并令 ζ 为本原四次单位根。那么，我们有

$$\dot{\mathcal{S}}^{\zeta^{1/2}}_{p^{(2)}}(\mathbb{C}P^2)=0\,,\quad \dot{\mathcal{S}}^{\zeta^{1/2}}_{p^{(2)}}(\overline{\mathbb{C}P}^2)=0\,,\quad \dot{\mathcal{S}}^{\zeta^{1/2}}_{p^{(2)}}(S^2\times S^2)=0\,.$$

特别地，不变量 $\dot{\mathcal{S}}^{\zeta^{1/2}}_{p^{(2)}}$ 不受稳定化影响。

与 [FM24]，的不变量一起，我们的不变量是少数几个源自张量范畴且已知具有这些性质的不变量之一。尽管已知许多有限辫带张量范畴可产生在 $\mathbb{C}P^2$ 和 $\mathbb{C}P^2$ [上取值为零的不变量（BDR24、CGHP23、Man],），但在所有这些例子中，相应的不变量在 $S^2\times S^2$ 上都不为零。因此，它们会受到稳定化的影响，无法检测奇异光滑结构。

展现奇异行为的四维 2-手柄体的一个著名例子是 Mazur流形 [AK92]。更确切地说，Mazur流形的边界存在一个自微分同胚，它可以延拓为内部的一个自同胚，却不能延拓为自微分同胚。[CGHP23] 的构造有一个优点，即允许我们利用纽结图来探究这类现象。我们计算了用各种纽结图装饰的Mazur流形上的不变量取值。然而，我们的计算并未检测到这一奇异现象。

部分定义的拓扑量子场论与部分可对偶性

下面我们从高阶代数视角简要介绍主要结果。回顾一下，协边假设 [BD95, Lur10] 提出了一种代数分类，用于分类完全扩张的带框架 n 维拓扑量子场论。更确切地说，取值于对称幺半高阶范畴的完全扩张带框架拓扑量子场论，完全由其在点上的取值决定；该取值必然是目标高阶范畴中的一个 n-可对偶对象。这一分类可以推广到部分定义的拓扑量子场论，它们由部分可对偶对象分类。具体而言，存在一种 $(n+\frac{k}{n+1})$-可对偶对象的概念，这一概念隐含于 [Lur10] 的工作中，并由 [Haı̈25b] 加以形式化。相应的 $(\underline{n+}1)$d 拓扑量子场论，先验地仅定义在由附加指标介于 0 与 k 之间的手柄所得到的 $(n+1)$-配边上。

[CGHP23]的四维拓扑量子场论预计是完全扩张的。作为朝这一方向发展的证据，[Haı̈25a]证明了这些拓扑量子场论是一次扩张的。此外，很自然地可以猜想，相应的假定完全扩张拓扑量子场论在点上的取值，是将输入带状张量范畴视为可呈现的辫幺半范畴的莫里塔 4-范畴 $\mathbf{Mor}_2$(Pr) 中的一个对象所得的结果 [JS17, BJS21]。因此，人们怀疑，[CGHP23] 中的拓扑量子场论的性质，反映了输入带状张量范畴的可对偶性——将其视为

Mor_2(Pr) 中的一个对象。事实上， [D´ec25]证明了，编织张量范畴的可对偶性完全由其对称中心的可对偶性所控制。因此，根据 [CGHP23]的构造和定理 A，我们预期：

猜想 C. 每个幺模有限编织张量范畴，尤其是每个混合高阶 *Verlinde* 范畴 $\mathrm{Ver}_{p^{(n)}}^{\zeta^{1/2}}$，都是 $(3+\frac{2}{4})$-可对偶化的，且属于 $\mathrm{Mor}_2(\mathrm{Pr})$。此外，对于 $p>3$ 和 $n=\ell=2$，混合高阶 *Verlinde* 范畴 $\mathrm{Ver}_{p^{(2)}}^{\zeta^{1/2}}$ 不是 $(3+\frac{3}{4})$-可对偶化的。

我们计划在未来工作中继续探讨这一问题以及相关问题。

进一步方向

我们重点研究了与混合高阶 Verlinde 范畴 $\mathrm{Ver}_{p^{(2)}}^{\zeta^{1/2}}$ 相关的不变量 $\dot{\mathcal{S}}_{p^{(n)}}^{\zeta^{1/2}}$，其中$\zeta$ 为本原四次单位根。不过，我们猜测，与混合高阶 Verlinde 范畴 $\mathrm{Ver}_{p^{(n)}}^{\zeta^{1/2}}$ 相关的不变量 $\dot{\mathcal{S}}_{p^{(n)}}^{\zeta^{1/2}}$，在 ζ 为任意单位根且 $n\geq 2$ 时，也具有类似的性质。

猜想 D。令 $n\geq 2$，并假设当 $n=2$ 时 $p>3$。对于任意单位根 ζ，有限带状张量范畴 $\mathrm{Ver}_{p^{(n)}}^{\zeta^{1/2}}$ 都是色度退化的。此外，我们有

$$\dot{\mathcal{S}}_{p^{(n)}}^{\zeta^{1/2}}(\mathbb{C}P^2)=0\,,\quad \dot{\mathcal{S}}_{p^{(n)}}^{\zeta^{1/2}}(\overline{\mathbb{C}P}^2)=0\,,\quad \dot{\mathcal{S}}_{p^{(n)}}^{\zeta^{1/2}}(S^2\times S^2)=0\,.$$

因此，只要 $n\geq 2$，我们就预期不变量 $\dot{\mathcal{S}}_{p^{(n)}}^{\zeta^{1/2}}$ 不会受到稳定化的影响；当 $n=2$ 时，$p>3$。此外，鉴于带状张量范畴 $\mathrm{Ver}_{p^{(n)}}^{\zeta^{1/2}}$ 的结构会随着 n 的增大而变得更加复杂，我们预期相应的不变量 $\dot{\mathcal{S}}_{p^{(n)}}^{\zeta^{1/2}}$ 也会变得更加有趣。与此相关的是，计算也会变得更加复杂。特别是，要处理上述猜想，无疑需要对正特征下 Temperley-Lieb 范畴的带状结构进行深入研究。

正如我们上文所强调的，混合高阶 Verlinde 范畴是目前已知最为奇异的有限辫带张量范畴。因此，我们很感兴趣地提出这样一个问题：相应的不变量是否能够为四维拓扑中的经典问题提供新的线索。

问题 E. 不变量族 $\dot{\mathcal{S}}_{p^{(n)}}^{\zeta^{1/2}}$ 能否区分彼此微分同胚但不 2-等价的四维 2-手柄体？如果不能，也就是说，如果 $\dot{\mathcal{S}}_{p^{(n)}}^{\zeta^{1/2}}$ 是微分同胚不变量，它们能否检测奇异光滑结构？

上述两个问题属于研究与四维拓扑量子场论相关的不变量之敏感性这一总体计划。对于一次扩张且完全定义的四维拓扑量子场论，这个问题已经得到彻底解答：它们恰好检测稳定微分同胚类型 [Reu23, RS25] 。已知一次范畴化的四维拓扑量子场论，也就是说，将向量空间赋给四维流形的拓扑量子场论，能够检测奇异对 [RW24]。

致谢

T. D. 谨向 Anna Beliakova 和 Ivelina Bobtcheva 致谢，感谢她们参与讨论。B. H. 谨向 Francesco Costantino、Nathan Geer 和 Bertrand Patureau-Mirand 致谢，感谢他们进行的许多有益交流。两位作者尤其感谢 Maksymilian Manko 就四维 2-手柄体这一主题与他们进行了多次交流。两位作者感谢辛蒙斯全球范畴对称性合作项目的支持。

1 拓扑学背景

我们回顾了 [CGHP23] 中基于有限幺模带状张量范畴构造一个四维流形不变量的方法。特别地，我们解释了为什么该构造也能给出四维 2-手柄体的不变量。

1.1 手柄分解

我们将采用的 4-流形不变量建立在手柄分解的基础上。因此，我们首先按照[Juh18]回顾如何利用把手附着来表示 4-流形范畴。

定义 1.1。范畴 $\mathbf{HD}^{k,\dots,n}_{n}$ 由指标为 $k,\dots,n$的 n维手柄体构成，并取 k-等价，其对象为闭定向光滑 $(n-1)$-流形，态射由以下映射生成：

(a) 态射 e_d：对于每个微分同胚 $d\colon M \to M'$，

(b) 态射 $e_{\mathbb{S}}\colon M \to M(\mathbb{S})$，对于每个带框架附着球面 $\mathbb{S}\colon S^{p-1}\times D^{n-p}\hookrightarrow M$，其中 $p\in\{k,\dots,n\}$ 且 $M(\mathbb{S}) = (M\smallsetminus \mathbb{S}) \cup (D^p\times S^{n-p-1})$ 是手术流形，

满足以下关系：

（1）当 d 与 d' 复合时，我们有 $e_d\circ e_{d'}\sim e_{d\circ d'}$；当 d 同伦变形为恒等映射时，我们有 $e_d\sim \mathrm{Id}$；（2）对于 $d\colon M\to M'$ 和 $\mathbb{S}\subseteq M$，我们有 $e_{M'、\,d\circ\mathbb{S}}\circ e_d \sim e_{d^{\mathbb{S}}}\circ e_{M、\,\mathbb{S}}$，其中 $d^{\mathbb{S}}\colon M(\mathbb{S})\to M'(d\circ\mathbb{S})$ 是由 d 诱导的微分同胚；（3）当 $\mathbb{S}、\,\mathbb{S}'\subseteq M$ 不相交时，我们有 $e_{M(\mathbb{S})、\,\mathbb{S}'}\circ e_{M、\,\mathbb{S}}\sim e_{M(\mathbb{S}')\,\mathbb{S}}\circ e_{M、\,\mathbb{S}'}$，因此可以将 $\mathbb{S}'$ 推到 $M(\mathbb{S})$，并将 $\mathbb{S}$ 推到 $M(\mathbb{S}')$；（4）当 $\mathbb{S}'$ 的粘附球面与 $\mathbb{S}$ 的腰球面在 $M(\mathbb{S})$ 中横截地恰好相交一次时，我们有 $e_{M(\mathbb{S})、\,\mathbb{S}'}\circ e_{M、\,\mathbb{S}}\sim e_{\varphi}$，且 φ 是诱导的微分同胚 $M\simeq M(\mathbb{S})(\mathbb{S}')$；（5）我们有 $e_{M、\,\mathbb{S}}\sim e_{M、\,\mathbb{S}}$，其中 $\mathbb{S}$ 是某个 $p\in\{k,\dots,n-1\}$ 的带框架（$p-1$）球面，而 $\mathbb{S}$ 是通过同时反转 S^{p-1} 和 D^{n-p} 因子由 $\mathbb{S}$ 得到的（这会对 $S^{p-1}\times D^{n-p}$ 加上一个保定向自同构）。

微分同胚为把手体上的等价提供了另一种更为熟悉的概念 s.

定义 1.2. 范畴 $\mathbf{Cob}^{k,\dots,n}_{n}$ 由 n 维、把手指标为 $k,\dots,n$的手柄体构成，其态射是微分同胚类。其对象为闭的定向光滑 $(n-1)$-流形，态射则是能够通过仅包含指标为 $k,\dots,n$的手柄的把手分解得到的 n-配边的微分同胚类。

对于 $k=0$，我们有 $\mathbf{Cob}^{0,\dots,n}_{n}$ 是标准的配边范畴，例如 Mil65 第 1] 节中所定义的那样。这是因为每个配边都存在把手分解。对于 $k=1$，我们有 $\mathbf{Cob}^{1,\dots,n}_{n}$ 是非紧协边范畴，其中每个配边在每个连通分支中都必须具有非空的入边界 [Haï24b，定义 1.3.5]。

对于任意 $0\le k\le n$，范畴 $\mathbf{HD}^{k,\dots,n}_{n}$ 和 $\mathbf{Cob}^{k,\dots,n}_{n}$ 在不交并下构成对称幺半范畴。此外，存在一个对称幺半函子

$$F:\mathbf{HD}^{k,\dots,n}_{n}\to\mathbf{Cob}^{k,\dots,n}_{n}\ .$$

该函子在对象上是恒等映射：对于任意 $(n-1)$-流形 M，有 $F(M)=M$。它将生成态射 e_d 映射为 d的映射圆柱，也就是说，我们有

$$F(e_d) = (M\times[0,1]) \underset{(x,1)\sim d(x)}{\cup} M'.$$

最后，函子 F 将生成态射 $e_{\mathbb{S}}$ 映射为 $\mathbb{S}$的把手附加，也就是说，我们有

$$F(e_{\mathbb{S}}) = (M \times [0,1]) \underset{\mathbb{S}}{\cup} (D^p \times D^{n-p}).$$

这个函子显然是本质满的。根据构造，它也是满的。更确切地说，为给定的配边选择一个手柄表示，与在该配边上选择一个 Morse 函数密切相关。对于 $k=0$，上述关系 (1)–(5) 正是 Cerf 理论所给出的不同 Morse 函数之间的关系。这可用于证明以下结果。

定理 1.3 ([Juh18])。函子 $F\colon \mathbf{HD}^{k,\dots,n}{}^{n} \to \mathbf{Cob}^{k,\dots,n}{}^{n}$对于 $k=0$ 或 $k=1$是一个等价.

更一般地，自然会想知道，对于哪些 k，函子 $F\colon \mathbf{HD}^{k,\dots,n}{}^{n} \to \mathbf{Cob}^{k,\dots,n}{}^{n}$是一个等价。在 $n=4$ 和 $k=2$的情形下，这个问题最早由 [Gom91], 提出，并与著名的 Andrews-Curtis 猜想联系起来。

问题 1.4. 函子 $F\colon \mathbf{HD}_4^{2\,3\,4} \to_{,,} \mathbf{Cob}_4^{2,3,4}$ 是一个等价吗？换言之，是否存在彼此微分同胚但不 2-等价的四维 2-手柄体?

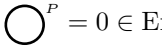
1.2 纽结理论

设 $\mathcal{B}$ 是代数闭域 $\Bbbk$ 上的带状张量范畴，定义见 [EGNO15]。对于任意定向 3-流形 M，我们可以按照 [CGP23] 的定义，考察可容许骨架模 $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(M)$。有关细节请参阅该文献。对我们而言，只需知道 $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(M)$ 是一个以 $\Bbbk$ 为底域的向量空间，其由 $\mathcal{B}$-着色带状图张成；这些图位于 M 中，且 M的每个连通分支中至少有一条标记为投射对象的线股。若两个这样的 $\mathcal{B}$-着色带状图同伦变形，则它们等价。此外，它们还满足某些局部容许纽结关系，见 [CGP23，第 2.1] 节。

我们不打算回顾容许纽结理论的所有细节，但想指出一个值得注意的微妙之处：在 $\mathcal{B}$ 中，由对象和态射标记的闭图可以有两种不同的解释。举一个具体例子，考虑一个圆



由 $\mathcal{B}$ 中的投射对象 P 着色。诠释此图的第一种方式，是将其视为 $\mathcal{B}$ 中的一个态射；在这种情况下，我们会使用辫带张量范畴的标准图形演算，计算出 $\mathcal{B}$ 中相应的态射。诠释上图的第二种方式，则是将其视为 S^3 中的一个可容许骨架。这两种概念截然不同。例如，若 $\mathcal{B}$ 不是半单的，则有



$$= 0 \in \mathrm{End}_{\mathcal{B}}(\mathbb{1})\,.$$

另一方面，相应的 S^3 中的可容许骨架通常不会求值为零，也就是说



$$\neq 0 \in \mathcal{S}_{\mathcal{B}}(S^3)\,.$$

为了区分 $\mathcal{B}$ 中的态射与 S^3 中的可容许骨架，后者将以蓝色表示。现在我们说明如何将可容许骨架模升级为部分定义的拓扑量子场论。首先，根据其构造可知，可容许骨架在微分同胚下具有函子性。接着，对 4-柄求值的可能取值恰好对应于线性映射

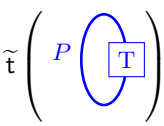
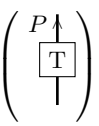
$$\widetilde{\mathrm{t}}\colon \mathcal{S}_{\mathcal{B}}(S^3) \to \Bbbk\,.$$

但是，[CGP23，推论 3.2]证明了，这类线性映射与 $\mathcal{B}$上的修正迹 一一对应。回顾一下，$\mathcal{B}$ 上的修正迹 t 是定义在射影对象理想上的迹

Proj，它是 $\mathcal{B}$ 的投射对象构成的理想，并满足若干公理 [GKP11，定义 3.2.1]。具体而言，修正迹与左、右偏迹相容，含义如下：对于任意投射对象 P、任意对象 X以及任意态射 $f \in \mathrm{End}(P \otimes X)$，用 $\mathrm{pTr}^R(f) \in \mathrm{End}(P)$表示 f的右偏迹，则有

$$\mathsf{t}(f) = \mathsf{t}\big(\mathrm{pTr}^R(f)\big)\,. \tag{1}$$

修正迹 t 通过沿着标记为投射对象的任意线股剪开 S^3 中给定的可容许骨架，再对所得自同态应用修正迹，从而给出 S^3 中可容许骨架的不变量：

$\widetilde{\mathsf{t}}$  := t  . (2)

综上所述，我们看到，带有选定的射影对象理想上的修正迹的带状张量范畴会诱导一个函子

$$\mathcal{S} : \mathbf{HD}_4^4 \to \mathrm{Vec}\,,$$

该函子将三维流形映射为其可容许骨架模，将微分同胚 e_d 映射为诱导的线性~映射，并将一个 4-柄 $e_{\mathbb{S}}$ 映射为线性映射 t。

为了能够给三柄赋值，我们需要回顾一个来自 [CGHP23]，的概念；详情请参阅该文献。现在假设 $\mathcal{B}$ 在 [EGNO15] 的意义下是有限且幺模的。在这些假设下，射影对象理想上的修正迹在相差一个标量的意义下唯一 [GKP22]。特别地，对于任意投射对象 $P \in \mathcal{B}$，修正迹诱导出一个配对

$$\mathsf{t} : \mathrm{Hom}(P, \mathbb{1}) \otimes \mathrm{Hom}(\mathbb{1}, P) \to \Bbbk\,,$$

当 t 非零时，该形式非退化 [GKP22，推论 5.6]。

定义 1.5。假设 $\mathcal{B}$ 的投射对象理想上的修正迹 t 非零。基于投射对象 $P \in \mathcal{B}$ 的切割态射 Λ_P 定义为

$$\Lambda_P = \sum_i x_i \circ x^i \in \mathrm{End}(P)\,,$$

其中 $(x^i)_i \in \mathrm{Hom}(P,\ \mathbb{1})$ 和 $(x_i)_i \in \mathrm{Hom}(\mathbb{1},\ P)$ 是关于 t 的对偶基

我们记录切割态射的以下性质，以备后用。

引理 1.6。对于 $\mathcal{B}$ 中的任意投射对象 P，有

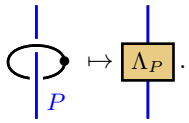
$$\mathsf{t}(\Lambda_P) = \dim \mathrm{Hom}(P, \mathbb{1})\,.$$

证明。我们有

$$\mathsf{t}(\Lambda_P) = \mathsf{t}(\sum_i x_i \circ x^i) = \sum_i 1 = \dim \mathrm{Hom}(P, \mathbb{1})\,,$$

因为 $\{x_i\}$ 和 $\{x^i\}$ 是 $\mathrm{Hom}(\mathbb{1}, P)$ 与 $\mathrm{Hom}(P, \mathbb{1})$ 关于配对 t 的对偶基。 □

切割态射用于通过切割穿过附着S^2的纽结图来定义 $\mathcal{S}$ 在三柄上的作用。将附着 S^2 表示为对一个平凡结进行手术（我们用一个点来绘制它），可得到如下三柄的图示：

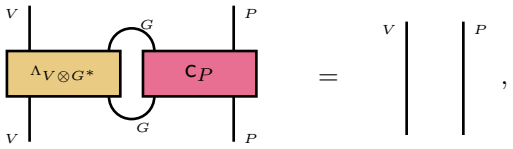
 . (3)

为了对 2-手柄求值，我们需要回顾 [CGHP23]中的另一个概念。鉴于我们特别假设 $\mathcal{B}$ 是一个有限张量范畴，它存在一个射影生成元 G。

定义 1.7。 基于投射对象 $P \in \mathcal{B}$ 的色度态射 c_P 是一个自同态

$$\mathsf{c}_P \in \mathrm{End}(G \otimes P)$$

满足

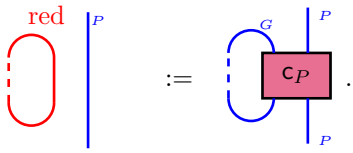


(4)

对于 $\mathcal{B}$ 中任意的投射对象 V。

我们强调，色度态射并非唯一。不过，正如 [CGHP23，引理 2.3]所示，所有可能的选择都会得到相同的不变量。

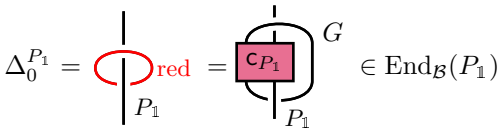
色度态射用于定义 $\mathcal{S}$ 在 2-手柄上的结构：添加一个标记为“红色”的腰球面作为纽结图，再通过以下红到蓝操作将其转化为实际的纽结图：



(5)

色度态射推广了与 Reshetikhin–Turaev 构造 [RT91]中出现的模融合范畴相关联的 Kirby 颜色。更一般地说，上述色度态射与任意有限编织张量范畴中典范余端上的 Lyubashenko 积分密切相关。色度态射的优点是不必识别典范余端，而这在实践中可能很困难。

定义 1.8 . 若幺模有限带状张量范畴 $\mathcal{B}$ 满足色度非退化的，则态射



非零。

综上所述，得到以下结果。

定理 1.9 ([CGHP23]). 设 $\mathcal{B}$ 是一个带状张量范畴，且其投射对象理想上选定了一个非零修正迹。则可容许骨架模函子 $\mathcal{S}_{\mathcal{B}} : \mathbf{HD}_4^4 \to \mathrm{Vec}$ 可延拓为

1. 函子 $\mathcal{S}_{\mathcal{B}} : \mathbf{HD}_4^{2\,3\,4} \to {}_{,,}\mathrm{Vec}$ 只要 $\mathcal{B}$ 有限且幺模；*2.* 函子 $\mathcal{S}_{\mathcal{B}} : \mathbf{Cob}_4^{1\quad 4} \simeq {}_{,\ldots,}\mathbf{HD}_4^{1\quad 4} \to {}_{,\ldots,}\mathrm{Vec}$ 只要 $\mathcal{B}$ 色度非退化；*3.* 函子 $\mathcal{S}_{\mathcal{B}} : \mathbf{Cob}_4 \simeq HD_4^{0\quad 4} \to {}_{,\ldots,}\mathrm{Vec}$ 只要 $\mathcal{B}$ 色度紧致。

证明。 </style}第一项在 [CGHP23]中并未如此表述。不过，在 [CGHP23的命题5.2、5.3和定理5.4]中，已在所述假设下验证了2、3、4-柄附着定义良好，且满足不涉及1-把手的关系。 □

注记 1.10。 在 [Haïa25a 的第 4] 节中证明了，这些部分定义的拓扑量子场论可以进行一次扩张，也就是说，可以定义在带角配边的2-范畴上。在此情形下，若扩张存在，则从 $\mathbf{HD}_4^{k+1\quad 4}{}_{,\ldots,}$到 $\mathbf{HD}_4^{k\quad 4}{}_{,\ldots,}$的扩张是唯一的 [Haïa24a，第 6], 节，因此上述扩张在适当意义下确实是唯一的。

1.3 四维 2-手柄体的不变量

现在我们回顾如何显式计算由上一节所述构造得到的四维 2-手柄体在 2-等价意义下的不变量。文献中通常将 2-手柄体视为由 0-、1-和 2-手柄构成。对给定的 Morse 函数取反，即可将这些手柄转化为 2-、3-和 4-柄。具体而言，设W 是一个连通的四维 2-手柄体。可以用若干个 1-把手和 2-手柄来表示 W：前者表示为虚线（平凡）圆，后者表示为普通链环；这就是 Akbulut 点圈记号，参见例如 [AK79]。图1给出了一个相关示例。

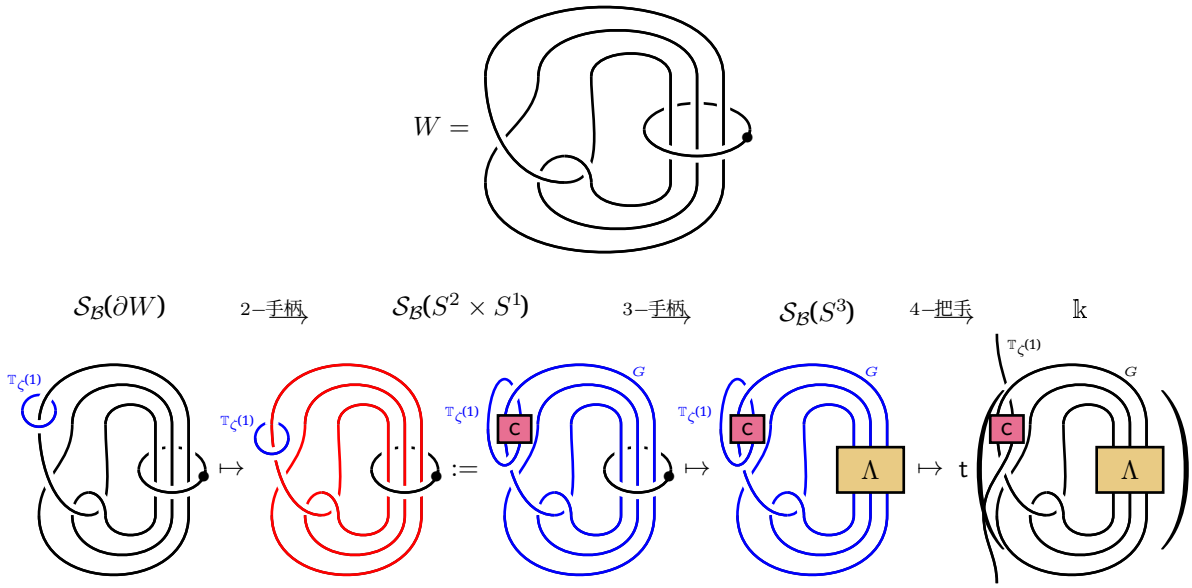


图1：上：Akbulut 点圈记号中的一个 2-手柄体。下：相应的不变量。我们从 W 边界中任意一个以蓝色绘制的可容许纽结图出发。通过添加 W 中以红色表示的 2-手柄，并使用方程（5），得到一个位于 $S^2 \times S^1$ 的连通和中的纽结图。然后通过方程（3）得到一个位于 S^3 中的纽结图，再使用方程（2）将其计算为一个标量。

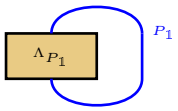
我们将把四维 2-手柄体 W 视为一个配边 $-W : \partial W \to \emptyset$。这样便可以将普通链环视为 2-手柄的腰球面，而带点圆则表示 3-柄的附着球面。上一节简要回顾的 [CGHP23] 构造随即给出一个线性映射 $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(-W) : \mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\partial W) \to \Bbbk$。现在，$\partial W$ 中的一个纽结图 Γ 可以表示为一个与 W 的表示不相交的带状图。随后，将 W 表示中的每个普通分支替换为红色着色缠结图，通过红到蓝操作将其转化为可容许纽结图；接着，使用切割态射切开所有穿过带点圆的线股；最后，对所得的 S^3 中的纽结图取修正迹，即可得到不变量 $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(-W)(\Gamma)$。图1记录了这一过程的一个例子。

先验地，这个不变量取决于边界的一个参数化 $\partial W \simeq M$ 以及M中的一个纽结图 Γ。若通过微分同胚 $d : M \to M'$改变参数化，则可按以下方式通过 d 传输纽结图 Γ，从而改变该不变量：

$$\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(-W)(\Gamma) = \mathcal{S}_{\mathcal{B}}(W \circ e_{d^{-1}})(d(\Gamma)) .$$

为了避免处理这类参数化，考虑纽结图会更方便

$$\Gamma_0 := \quad (6)$$



插入到 M 中一个足够小的球内。这里 $P_{\mathbb{1}}$ 表示单位对象 $\mathbb{1}$ 在 $\mathcal{B}$ 中的射影覆盖。显然，该纽结图Γ_0 在边界的微分同胚下保持不变。这引出了下一个定义。

定义 1.11。 设 $\mathcal{B}$ 是一个有限幺模带状范畴，并设 W 是一个四维 2-手柄体。我们记

$$\dot{\mathcal{S}}_{\mathcal{B}}(W) := \mathcal{S}_{\mathcal{B}}(-W)(\Gamma_0) \in \Bbbk$$

与 W 相关的不变量。

2 Temp高度为二时的 Temperley-Lieb 范畴与四次单位根

现在固定一个正特征代数闭域 $\Bbbk$ p，以及其中的一个单位根 ζ $\Bbbk$。我们先简要回顾 Temperley-Lieb 范畴 $\mathbf{TL}^{\zeta}$ 的一般性质，这些性质来自 [STWZ23]。特别地，选取一个平方根 $\zeta^{1/2}$，即可赋予 $\mathbf{TL}^{\zeta}$ 带状结构；我们将相应的带状范畴记为 $\mathbf{TL}^{\zeta^{1/2}}$。此外，带状范畴 $\mathbf{TL}^{\zeta^{1/2}}$ 具有一列由整数 n 索引的张量理想$\mathbf{J}_{p^{(n)}}$，我们将其视为高度参数。在回顾这些一般事实后，我们聚焦于 ζ 为本原四次单位根的情形，并明确描述商范畴 $\mathbf{TL}^{\zeta^{1/2}}/\mathbf{J}_{p^{(2)}}$ 的带状结构。用 [KL94]，的语言来说，我们研究高度为 $n=2$ 且取本原四次单位根时 $\mathbf{TL}^{\zeta^{1/2}}$ 的重耦合理论。

2.1 混合 Temperley-Lieb 范畴

设$\Bbbk$ 是特征为正的代数闭域 p，且 ζ 是$\Bbbk$ 中的一个阶为 $N>2$ 的单位根。Temperley-Lieb 范畴记作$\mathbf{TL}^{\zeta}$，它是一个$\Bbbk$-线性范畴，其对象为非负整数，态射为平面缠结图，并对同痕及以下关系取商

$$\bigcirc = -(\zeta+\zeta^{-1}) \in \mathrm{End}(\mathbb{1}) = \Bbbk\,.$$

在$\mathbf{TL}^{\zeta}$ 中，复合由图的纵向叠放给出。范畴$\mathbf{TL}^{\zeta}$ 具有由横向叠放给出的幺半群结构。选取 ζ 的一个平方根 $\zeta^{\frac{1}{2}}$ 后，幺半群范畴$\mathbf{TL}^{\zeta}$ 可借助 Kauffman括号规则赋予相容的编织:

$$\times = \zeta^{\frac{1}{2}} \cdot \;|\;\; |\; + \zeta^{-\frac{1}{2}} \cdot \cup\cap .$$

我们将$\mathbf{TL}^{\zeta^{1/2}}$ 记作配备上述对应于 $\zeta^{\frac{1}{2}}$ 的编织的 Temperley-Lieb 范畴$\mathbf{TL}^{\zeta}$。对我们而言，关键的是范畴$\mathbf{TL}^{\zeta^{1/2}}$ 不仅是编织范畴，还具有典范的带状结构。

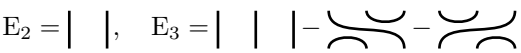
Temperley-Lieb 范畴$\mathbf{TL}^{\zeta}$ 的一个关键特征是其中包含一些特定的幂等元[STWZ23]。更确切地说，对每个整数 $v\geq 1$，都有一个作用于 $v-1$ 股上的幂等元 E_{v-1}。我们将用图形方式将这个幂等元表示为

$$\mathrm{E}_{v-1} = \quad .$$



我们认为考察一些例子会很有启发性。

例 2.1. 令 ζ 为一个本原四次单位根。在这种情况下，我们有：

$\mathrm{E}_2 =$  , $\mathrm{E}_3 =$  , $\mathrm{E}_4 =$.

特别地，幂等元 E_{v-1} 不一定等于其左右镜像 $\mathrm{E}_{v-1}^{\leftrightarrow}$。不过，这两个幂等元 E_{v-1} 和 $\mathrm{E}_{v-1}^{\leftrightarrow}$ 总是同构的。

$\mathbf{TL}^{\zeta}$ 中的每个对象都是刚性的，也就是说，它具有对偶。求值态射和余求值态射由熟知的帽态射和杯态射给出。$\mathbf{TL}^{\zeta}$ 中幂等元的对偶在图示上由其旋转 180 度得到。由 [STWZ23] 中给出的构造可知，幂等元 E_{v-1} 是其自身的上下镜像，即有 $\mathrm{E}_{v-1} = (\mathrm{E}_{v-1})^{\updownarrow}$。然而，它们通常并非其自身的左右镜像。由于旋转 180 度是这两种镜像操作的复合，因此 E_{v-1} 的对偶就是其左右镜像，我们将其记为

$$(\mathrm{E}_{v-1})^* = (\mathrm{E}_{v-1})^{\leftrightarrow} = \boxed{\scriptstyle v-1}\,.$$

为完整起见，我们指出，E_{v-1} 总是与 $(\mathrm{E}_{v-1})^*$ 同构，但显式写出该同构可能很困难，参见 [STWZ23，引理 3。16]。

Temperley-Lieb 范畴$\mathbf{TL}^{\zeta}$ 与 Lusztig 的除幂量子群在 $\mathfrak{sl}_2$ 的单位根 ζ处对应的倾斜模范畴 $\mathbf{Tilt}^{\zeta}$ 密切相关。 [STWZ23, 第4.B节], 对此关系作了详细讨论，详情请参阅该文。简而言之，范畴 $\mathbf{Tilt}^{\zeta}$ 是一个最高权范畴，其不可分解对象是倾斜模 $\mathrm{T}_{\zeta}(v-1)$，其中 v 为正整数。此外，典范幺半函子

$$\mathbf{TL}^{\zeta} \to \mathbf{Tilt}^{\zeta}$$

由将 E_1 映为 $\mathrm{T}_{\zeta}(1)$ 确定，它表明 $\mathbf{Tilt}^{\zeta}$ 是$\mathbf{TL}^{\zeta}$的 Cauchy 完备化，也就是说，$\mathbf{Tilt}^{\zeta}$ 中的每个对象都可表示为$\mathbf{TL}^{\zeta}$中幂等元的直和。更具体地说，幂等元 E_{v-1} 对应于不可分解倾斜模 $\mathrm{T}_{\zeta}(v-1)$。因此，选取平方根 $\zeta^{1/2}$ 便赋予范畴 $\mathbf{Tilt}^{\zeta}$ 一个与典范函子 $\mathbf{TL}^{\zeta} \to$$\mathbf{Tilt}^{\zeta}$相容且本质上唯一的带状结构。我们将$\mathbf{Tilt}^{\zeta^{1/2}}$ 记作相应的带状范畴。

现在我们回顾 $p\ell$-进展开的概念，正如 [STWZ23] 中所观察到的，它在范畴 $\mathrm{T}_{\zeta}(v-1)$ 的结构中起着关键作用。回想一下， N 表示单位根 ζ 的阶。我们令 ℓ 等于 $N/2$ ，当且仅当 N 为偶数；否则令其等于 N 。对于任意整数 $k \geq 1$，我们定义 $p^{(k)} := \ell p^{k-1}$。任意正整数 v 都可以唯一地表示为和式 $v = \sum_{i=0}^{k} a_i p^{(i)}$ ，其中$0 \leq a_0 \leq \ell - 1$、 $0 \leq a_i \leq p-1$，对 $i \geq 1$ 和 $a_k \neq 0$ 均成立。若如此，我们记作 $v = [a_k, \ldots, a_0]_{p,\ \ell}$。对于任意正整数 n，可以考虑全子范畴

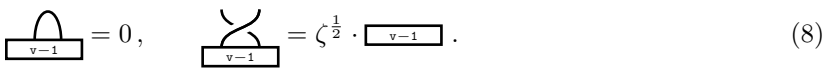
$$\mathbf{J}_{p^{(n)}} = \{\mathrm{T}_{\zeta}(v-1) | v \geq p^{(n)}\}^{\oplus} \subseteq \mathbf{Tilt}^{\zeta}\,.$$

换言之，$\mathbf{J}_{p^{(n)}}$ 是由不可分解倾斜模 $\mathrm{T}_{\zeta}(v-1)$（其中 $v = [a_k, \ldots, a_0]_{p,\ \ell}$ 且满足 $k \geq n$）生成的全加性子范畴。 [STWZ23 的定理 5.1] 证明了，$\mathbf{J}_{p^{(n)}}$ 是 $\mathbf{Tilt}^{\zeta}$ 中的厚张量理想，并且 $\mathbf{Tilt}^{\zeta}$ 中的每个张量理想都具有这种形式。

对于某些特定的 v 值，称为 Eves，相应的幂等元 E_{v-1} 具有一些额外性质，这些性质令人联想到零特征下的琼斯-温茨尔投影算子。更准确地说，若固定 $v = [a_j, 0, \ldots, 0]_{p,\ \ell}$ 且满足 $a_j \neq 0$，则由 [STWZ23，公式 (3-8)] 可知，E_{v-1} 与自身互为左右镜像；在这种情况下，我们将其记为

$$\boxed{\scriptstyle v-1} = \boxed{\scriptstyle v-1} = \boxed{\scriptstyle v-1}\,. \tag{7}$$

此外，由 [STWZ23, 定理 3.19 和公式 (2-3)] 可知，E_{v-1} 在对任意两条相邻股线进行封底或封顶时都会被湮灭，由此得到此类幂等元与任意两条相邻股线的编织之间相互作用的一个简洁公式：



(8)

在下一节中，我们将把 [CGHP23] 的构造应用于商范畴 $\mathsf{Tilt}^{\zeta^{1/2}}/\mathsf{J}_{p^{(n)}}$，其中 $n \geq 1$ 是某个固定的自然数。为此，最方便的做法是将 $\mathsf{Tilt}^{\zeta^{1/2}}/\mathsf{J}_{p^{(n)}}$ 嵌入一个有限张量范畴。正如 [STWZ23, 第 5.A 节], 中所解释的，这可以借助 [BEO23] 中发展的阿贝尔化理论来实现。我们用 $\mathsf{Ver}^{\zeta}_{p^{(n)}}$ 表示由 $\mathsf{Tilt}^{\zeta}/\mathsf{J}_{p^{(n)}}$ 的阿贝尔化所给出的有限张量范畴。根据构造，存在一个幺半函子 $U : \mathsf{Tilt}^{\zeta}/\mathsf{J}_{p^{(n)}} \to \mathsf{Ver}^{\zeta}_{p^{(n)}}$，它在 $\mathsf{Ver}^{\zeta}_{p^{(n)}}$ 中的射影对象理想与 $\mathsf{J}_{p^{(n-1)}}/\mathsf{J}_{p^{(n)}}$ 之间诱导出等价。事实上，正如 [D´ec24], 中所解释的，函子 U 是全忠实的，因此具有泛性质。由此可知，由选择 $\zeta^{1/2}$ 所诱导的 $\mathsf{Tilt}^{\zeta}/\mathsf{J}_{p^{(n)}}$ 上的带状结构，会在 $\mathsf{Ver}^{\zeta}_{p^{(n)}}$ 上诱导出相容的带状结构。我们用 $\mathsf{Ver}^{\zeta^{1/2}}_{p^{(n)}}$ 表示相应的有限带状张量范畴。关于这些带状张量范畴的许多一般性质已在 [D´ec24], 中得到研究，感兴趣的读者可参阅该文了解详情。

最后，我们用 $\mathbb{T}_{\zeta}(v-1)$ 表示不可分解倾斜模 $\mathsf{T}_{\zeta}(v-1)$ 在 U 下的像，其中 $1 \leq v \leq p^{(n)} - 1$。特别地，所有对象 $\mathsf{T}_{\zeta}(v-1)$ 都是自对偶的，因此 $\mathsf{Ver}^{\zeta^{1/2}}_{p^{(n)}}$ 是幺模的。此外，$\mathsf{Ver}^{\zeta^{1/2}}_{p^{(n)}}$ 的不可分解射影对象为 $\mathbb{T}_{\zeta}(v-1)$，其中$p^{(n-1)} \leq v \leq p^{(n)} - 1$。我们注意到，单位对象 $\mathbb{1} = \mathbb{T}_{\zeta}(0)$ 的射影覆盖是 $P_{\mathbb{1}} = \mathbb{T}_{\zeta}(2p^{(n-1)} - 2)$。为后文起见，我们还指出，$\mathbb{T}_{\zeta}(v-1)$ 是 $\mathsf{Ver}^{\zeta^{1/2}}_{p^{(n)}}$ 的单对象，当且仅当 v 是一个 Eve，也就是说，$v = [a_j, 0, \ldots, 0]_{p,\ \ell}$ 对于某个 $a_j \neq 0$ 和 $0 \leq j \leq n-1$。

2.2 射影对象理想的线性结构

现在我们固定 ζ 为本原四次单位根。在这种情况下，我们观察到

$$\bigcirc = -(\zeta + \zeta^{-1}) = 0 \in \mathrm{End}(\mathbb{1}) = \Bbbk\,.$$

我们将研究 $\mathsf{Ver}^{\zeta^{1/2}}_{p^{(2)}}$ 的射影对象理想的带状结构，也就是范畴 $\mathbf{J}_{p^{(1)}}/\mathbf{J}_{p^{(2)}}$。我们首先回顾其在 [STWZ23] 中的线性结构。

$\mathsf{Ver}^{\zeta^{1/2}}_{p^{(2)}}$ 的不可分解射影对象为

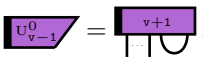
$$\mathbb{T}_{\zeta}(1),\, \mathbb{T}_{\zeta}(2) = P_{\mathbb{1}},\, \mathbb{T}_{\zeta}(3), \ldots,\, \mathbb{T}_{\zeta}(2p-2).$$

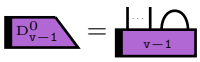
当 $v = [a_1, 0]_{p,\ell}$ 时，不可分解对象 $\mathbb{T}_{\zeta}(v-1)$ 是单对象，也就是说，它们是奇数条线股上的幂等元。特别地，当 $v = [a_1, 0]_{p,\ell}$ 时，我们有

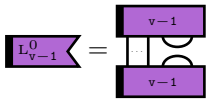
$$\mathrm{Hom}(\mathbb{T}_{\zeta}(v-1), \mathbb{T}_{\zeta}(w-1)) = \begin{cases} \Bbbk \mathrm{E}_{v-1}\,, & \text{if } v = w\,, \\ 0\,, & \text{otherwise}\,. \end{cases}$$

上文中，E_{v-1} 表示定义 $\mathbb{T}_{\zeta}(v-1)$ 的幂等元，我们将其视为 $\mathbb{T}_{\zeta}(v-1)$ 的恒等态射。

对于 $v = [a_1, 1]_{p,\ \ell}$，对象 $\mathbb{T}_{\zeta}(v-1)$ 不是单对象。对于任意这样的 v，我们可以考虑 $\mathbf{Tilt}^{\zeta}$ 中的以下态射:

$\mathrm{U}^0_{v-1} =$ 

, $\mathrm{D}^0_{v-1} =$ 

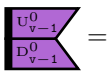
, $\mathrm{L}^0_{v-2} =$ 

.

由 [STWZ23，定理 3.25] 可知，$\mathsf{Ver}^{\zeta^{1/2}}_{p^{(2)}}$ 中不可分解射影对象之间其余的态射空间，对于任意 $w = [b_1, b_0]_{p,\ \ell}$，均由下式给出

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{T}_{\zeta}(v-1), \mathbb{T}_{\zeta}(w-1)) = \begin{cases} \Bbbk \mathrm{U}^0_{v-1}\,, & \text{if } w = v+2\,, \\ \Bbbk \mathrm{E}_{v-1} \oplus \Bbbk \mathrm{L}^0_{v-1}\,, & \text{if } w = v\,, \\ \Bbbk \mathrm{D}^0_{v-1}\,, & \text{if } w = v-2\,, \\ 0\,, & \text{otherwise}\,. \end{cases}$$

这些态射的复合规则也见于 [STWZ23，定理 3.25], ，现记录如下



$$\mathrm{U}^0_{v-3}\circ\mathrm{D}^0_{v-1} = \text{[}\mathrm{U}^0_{v-1}\text{]}\text{[}\mathrm{D}^0_{v-1}\text{]} = \text{[}\mathrm{L}^0_{v-1}\text{]} = \mathrm{L}^0_{v-1}\,,$$

$$\mathrm{U}^0_{v+1}\circ\mathrm{U}^0_{v-1}=0\,,\quad \mathrm{D}^0_{v-3}\circ\mathrm{D}^0_{v-1}=0\,,$$



$$\mathrm{D}^0_{v-1}\circ\mathrm{U}^0_{v-3} = \text{[}v-1\text{]} = -\frac{a_1}{a_1-1}\cdot\text{[}\mathrm{L}^0_{v-1}\text{]},\quad \text{provided that } a_1>1\,. \tag{9}$$



特别地，态射 L^0_{v-1} 是阶为 2 的幂零元。

2.3 利用生成元的范畴化融合规则

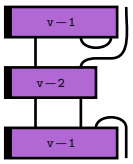
现在我们考虑 $\mathrm{Ver}^{\zeta^{1/2}}_{p^{(2)}}$ 中的一个不可分解投射对象与生成元 $\mathbb{T}_\zeta(1)$ 的融合规则。对于任意 $0<v<2p-1$，这些规则为

$$\mathbb{T}_\zeta(v-1)\otimes\mathbb{T}_\zeta(1)\cong\begin{cases}\mathbb{T}_\zeta(v)\,, & \text{if } v=[a_1,0]_{p,\ell}\,,\\ \mathbb{T}_\zeta(v)\oplus\mathbb{T}_\zeta(v-2)\oplus\mathbb{T}_\zeta(v-2)\oplus\mathbb{T}_\zeta(v-4)\,, & \text{if } v=[a_1,1]_{p,\ell}\,,\end{cases}$$

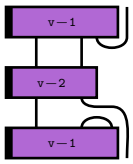
其中，若 $v=2p-1$，则省略第二个表达式中的项 $\mathbb{T}_\zeta(v)$；若 $v=3$，则省略项 $\mathbb{T}_\zeta(v-4)$。

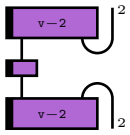
对于我们接下来的目的，给出能够见证上述分解为不可分解直和项的真实态射至关重要。第二种情形更为微妙，因为其中有两个与 $\mathbb{T}_\zeta(v-2)$ 同构的直和项。 [STWZ23 中的定理 4.15] 讨论了如何描述这类范畴化融合规则；我们在此记录一个经过修正的特例。

定义 2.2。 设 $v=[a_1,1]_{p,\ell}$。我们定义张量积 $\mathbb{T}_\zeta(v-1)\otimes\mathbb{T}_\zeta(1)$ 的自同态为



$$\mathrm{A}^0_v = \text{[}v-1\text{]}\text{[}v-2\text{]}\text{[}v-1\text{]}\,,\qquad \tilde{\mathrm{A}}^0_v = \text{[}v-1\text{]}\text{[}v-2\text{]}\text{[}v-1\text{]}\,,\qquad \mathrm{B}^1_v = -\frac{a_1-1}{a_1}\cdot\text{[}v-2\text{]}^2\text{[}v-2\text{]}^2\,.$$





命题 2.3。 设 $v=[a_1,a_0]_{p,\ell}$。

1. 若 $a_0=0$，则有

$$\text{[}v-1\text{]}\,\big| = \text{[}v\text{]}\,.$$

2. 若 $a_0=1$，则有以下正交幂等元分解

$$\text{[}v-1\text{]}\,\big| = \mathrm{E}_v+\mathrm{A}^0_v+\tilde{\mathrm{A}}^0_v+\mathrm{B}^1_v\,,$$

其中，若 $v=[p-1,1]_{p,\ell}=2p-1$，则省略 E_v；若 $v=[1,1]_{p,\ell}=3$，则省略 B^1_v。态射 A^0_v 和 $\tilde{\mathrm{A}}^0_v=(\mathrm{A}^0_v)^{\updownarrow}$ 是正交幂等元，分别投影到与 $\mathbb{T}_\zeta(v-2)$ 同构的两个直和项上；态射 B^1_v 是一个幂等元，投影到与 $\mathbb{T}_\zeta(v-4)$ 同构的直和项上。

证明。 如上所述，这本质上就是 [STWZ23，定理 4.15]，不过其表述需要稍作修正。具体而言，他们使用下文公式（11）中引入的态射 Y^0_v，声称 $\mathrm{A}^0_v+\mathrm{Y}^0_v$ 和 $\tilde{\mathrm{A}}^0_v+\mathrm{Y}^0_v$ 正交；而我们认为，真正正交的是 A^0_v 和 $\tilde{\mathrm{A}}^0_v=(\mathrm{A}^0_v)^{\updownarrow}$。这很容易由以下公式推出。这些公式是在 [STWZ23，引理 4.21] 的证明中推导出来的，也可以利用公式（9）直接验证：

$$\mathrm{A}^0_v\mathrm{A}^0_v=\mathrm{A}^0_v,\ \mathrm{A}^0_v\mathrm{Y}^0_v=\mathrm{Y}^0_v,\ \mathrm{Y}^0_v\mathrm{A}^0_v=0,\ \mathrm{Y}^0_v\mathrm{Y}^0_v=0,\ \mathrm{A}^0_v(\mathrm{A}^0_v)^{\updownarrow}=0,\ (\mathrm{A}^0_v)^{\updownarrow}\mathrm{A}^0_v=0.$$

□

记号 2.4。 现在我们为任意 $v=[a_1,a_0]_{p,\ \ell}$ 固定一个自同态环 $\mathrm{End}(\mathbb{T}_\zeta(v-1)\otimes\mathbb{T}_\zeta(1))$ 的基。
如果 $a_0=1$，则有

$$\mathrm{End}(\mathbb{T}_\zeta(v-1)\otimes\mathbb{T}_\zeta(1))\cong\mathrm{End}(\mathbb{T}_\zeta(v))=\Bbbk\mathrm{E}_v\oplus\Bbbk\mathrm{L}_v^0\,.$$

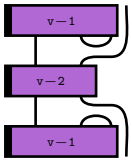
这里 E_v 是恒等映射，L_v^0 是幂零自同态。
若 $a_0=1$，则有

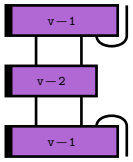
$$\mathrm{End}(\mathbb{T}_\zeta(v-1)\otimes\mathbb{T}_\zeta(1))\cong\mathrm{End}(\mathbb{T}_\zeta(v))\oplus\mathrm{End}(\mathbb{T}_\zeta(v-2)^{\oplus 2})\oplus\mathrm{End}(\mathbb{T}_\zeta(v-4))\,.$$

由于 $a_1=1$，不可分解对象 $\mathbb{T}_\zeta(v)$、$\mathbb{T}_\zeta(v-2)$ 和 $\mathbb{T}_\zeta(v-4)$ 都是单对象，因此第一个代数仅由 E_v生成，第三个代数由 B_v^1生成。此外，第二个代数可视为 $\Bbbk$ 上的 (2×2) 阶矩阵代数。两个对角项是 A_v^0和 $\tilde{}\mathrm{A}_v^0$。两个非对角项可对应于以下两个态射

$$\mathrm{Y}_v^0:\tilde{\mathrm{A}}_v^0\to\mathrm{A}_v^0\,,\quad \mathrm{Z}_v^0:\mathrm{A}_v^0\to\tilde{\mathrm{A}}_v^0\,, \tag{10}$$

用图形表示为

$\mathrm{Y}_v^0=$ 

，　$\mathrm{Z}_v^0:=$ 

． (11)

Th这四个态射满足关系 $\mathrm{Y}_v^0\mathrm{Z}_v^0=\mathrm{A}_v^0$，$\mathrm{Z}_v^0\mathrm{Y}_v^0=\tilde{}\mathrm{A}_v^0$，以及 $\mathrm{Y}_v^0\mathrm{Z}_v^0=\mathrm{Z}_v^0\mathrm{Y}_v^0=0$.

引理 2.5。 设 $v=[a_1,1]_{p,\ \ell}$，则 $\mathrm{Y}_v^0=\mathrm{L}_{v-1}^0\otimes\mathrm{E}_1=$ 

。

证明。 左侧与右侧之差在于定义 Y_v^0时出现的中间幂等因子 E_{v-2}。对于 $v=3$，结论显然成立；注意到项 A^0，$\tilde{}\mathrm{A}^0$，和 B^1 均不产生贡献，由归纳法和命题 2.3 即可推出。

□

2.4 与生成元的双重编织

我们利用第 2.3 节的范畴化融合规则，描述 β^2 在 $\mathbb{T}_\zeta(v-1)\otimes\mathbb{T}_\zeta(1)$ 上的双重编织。为避免记号过于繁杂，我们将这些态射简单记作 $\beta_{v-1,\ 1}$。首先，根据定义，有

$$\beta_{1,1}^2=\zeta\cdot\mathrm{E}_2+2\cdot\mathrm{L}_2^0.$$

注意到 $\mathbb{T}_\zeta(1)=\mathbb{T}_\zeta([1,0]_{p,\ \ell-1})$，因此此情形对应于 $v=[1,0]_{p,\ \ell}$。
也可以手动验证

$$\beta_{2,1}^2=-\mathrm{E}_3+\mathrm{A}_3^0+\tilde{\mathrm{A}}_3^0+2\zeta\cdot\mathrm{Y}_3^0\,.$$

我们使用了上文记号 2.4 中引入的基。这是 $v=[1,1]_{p,\ \ell}$ 的情形 .

命题 2.6。 设 $v=[a_1,a_0]_{p,\ \ell}$。

1. 若 $a_0=0$，则有

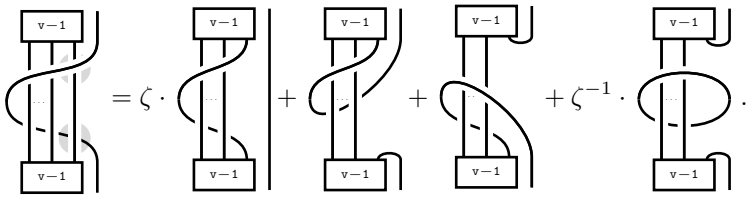
$$\beta_{v-1,1}^2=\zeta^{v-1}\cdot\mathrm{E}_v+2\zeta^{v-2}\cdot\mathrm{L}_v^0\,.$$

2. 若 $a_0=1$，则有

$$\beta_{v-1,1}^2=\zeta^{v-1}\cdot\mathrm{E}_v+\zeta^{v-3}\cdot\mathrm{A}_v^0+\zeta^{v-3}\cdot\tilde{\mathrm{A}}_v^0+2\zeta^{v-2}\cdot\mathrm{Y}_v^0+\zeta^{v-1}\cdot\mathrm{B}_v^1\,,$$

当 $v=[p-1,1]_{p,\ell}$ 时，省略第一项；当 $v=[1,1]_{p,\ell}=3$ 时，省略最后一项。

证明。 我们先考虑 $a_0 = 0$ 的情形。通过展开下图中最底部和最顶部的交叉，我们得到



此外，由 [STWZ23 引理 5.10]，可知，最后一项为零。也就是说，单根线股绕着 E_{v-2} 的环取值为 $-[2]_{\zeta^{v-1}} \cdot \mathrm{E}_{v-2} + \varsigma \cdot \mathrm{L}_{v-2}$，其中某个标量为 ς。但我们有 $[2]_{\zeta^{v-1}} = 0$，而第二项由于存在幂等元 E_{v-1} 而为零。现在，由于 $v = [a_1, 0]_{p,\ \ell}$，我们可以利用公式 (8) 计算剩余各项。通过计算交叉的数量，我们因此得到

$$\beta^2_{v-1,1} = \zeta^{v-1} \cdot \mathrm{E}_v + 2\zeta^{v-2} \cdot \mathrm{L}^0_v + 0\,,$$

正如所需。

现在考虑 $a_0 = 1$ 的情形。写出 $\mathrm{E}_{v-1} = \mathrm{E}_{v-2} \otimes \mathrm{E}_1$ 并展开涉及 E_1, 的交叉，我们得到

$$\begin{aligned}\beta^2_{v-1,1} = \zeta \cdot (\beta^2_{v-2,1} \otimes \mathrm{E}_1)\\ + (\mathrm{E}_{v-2} \otimes \mathrm{L}^0_2) \circ (\beta^2_{v-2,1} \otimes \mathrm{E}_1)\\ + (\beta^2_{v-2,1} \otimes \mathrm{E}_1) \circ (\mathrm{E}_{v-2} \otimes \mathrm{L}^0_2)\\ + \zeta^{-1} \cdot (\mathrm{E}_{v-2} \otimes \mathrm{L}^0_2) \circ (\beta^2_{v-2,1} \otimes \mathrm{E}_1) \circ (\mathrm{E}_{v-2} \otimes \mathrm{L}^0_2)\,.\end{aligned}$$

但是，结合命题 2.3 和引理 2.5 使用 $a_0 = 0$ 的情形，可得

$$\begin{aligned}\beta^2_{v-2,1} \otimes \mathrm{E}_1 &= \zeta^{v-2} \cdot \big(\mathrm{E}_{v-1} \otimes \mathrm{E}_1\big) + 2\zeta^{v-3} \cdot \big(\mathrm{L}^0_{v-1} \otimes \mathrm{E}_1\big)\\ &= \zeta^{v-2} \cdot (\mathrm{E}_v + \mathrm{A}^0_v + \tilde{\mathrm{A}}^0_v + \mathrm{B}^1_v) + 2\zeta^{v-3} \cdot \mathrm{Y}^0_v\,.\end{aligned}$$

此外，根据定义，我们有

$$\mathrm{E}_{v-2} \otimes \mathrm{L}^0_2 = \mathrm{Z}^0_v\,.$$

利用这两 个观察，结果可通过直接但冗长的计算得出。 □

2.5 扭曲

对象 $\mathbb{T}_\zeta(v-1)$ 上的扭曲 $\theta_{\mathbb{T}_\zeta\,(v-1)} = \theta_{v-1}$ 可用图形表示为

$$\theta_{\mathbb{T}_\zeta(v-1)} = \theta_{v-1} =$$ 

.

现在我们来识别这些态射。

命题 2.7。 令 $v = [a_1, a_0]_{p,\ \ell}$ 且 $a_1 \geq 1$。

1. 如果 $a_0 = 0$，则 $\mathbb{T}_\zeta\ (v-1)$ 上的扭曲为

$$\theta_{v-1} = \zeta^{(v-1)(v-3)/2} \cdot \mathrm{E}_{v-1} = \zeta^{(4a_1^2 - 8a_1 + 3)/2} \cdot \mathrm{E}_{v-1} = (-1)^{a_1} \zeta^{\frac{3}{2}} \cdot \mathrm{E}_{v-1}\,.$$

2. 如果 $a_0 = 1$，那么 $\mathbb{T}_\zeta(v-1)$ 上的扭曲由下式给出

$$\theta_{v-1} = \mathrm{E}_{v-1} + 2\zeta^{-1} \cdot \mathrm{L}^0_{v-1}\,.$$

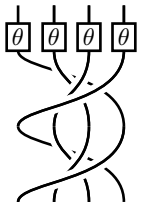


图 2：全扭转。

证明。 $a_0 = 0$ 的情形可由公式 (8) 和 $\theta_1 = \zeta^{-1/2} \cdot \mathrm{E}_1$ 得出。也就是说， $v-1$股上的扭曲可表示为单股之间的 $(v-1)(v-2)$ 个正交叉，以及每条单独线股上的一个扭曲 θ_1 ，示例见图 2。我们得到

$$\theta_{v-1} = \zeta^{-\frac{v-1}{2}} \cdot \zeta^{\frac{(v-1)(v-2)}{2}} \cdot \mathrm{E}_{v-1} = \zeta^{\frac{(v-1)(v-3)}{2}} \cdot \mathrm{E}_{v-1} \ .$$

情形 $a_0 = 1$ 可利用以下事实推导得出

$$\theta_{v-1} = (\theta_{v-2} \otimes \theta_1) \circ \beta^2_{v-2,1} \, .$$

因此，上述公式可由命题 2.6 以及以下观察得出：对于任意整数 a_1， $a_1^2 - a_1$ 都是偶数，因此 $\zeta^{2a_1^2 - 2a_1} = 1$。 □

2.6 更多范畴化融合规则

Eve 在$\mathbf{Tilt}^{\zeta}$ 中的融合规则见 [STWZ23，命题 4.11]。下面我们记录 $\mathrm{Ver}^{\zeta}_{p^{(2)}}$ 中不可分解射影对象对应的融合规则。我们强调，这对应于商范畴 $\mathbf{Tilt}^{\zeta}/\mathbf{J}_{p^{(2)}}$的融合规则，因此， [STWZ23]中出现的某些项在我们的情形中并不存在。我们给出以下定义和公式。

定义 2.8. 设 $v = [a_1, 0]_{p,\ell}$和 $w = [b_1, 0]_{p,\ell}$。我们称 $u = [c_1, 1]_{p,\ell}$对于 v和 w 是 $p^{(2)}$-可容许的，当且仅当：

1. 在 $a_1 + b_1 - 1 < p$ 的情况下，我们有 $|a_1 - b_1| + 1 \leq c_1 \leq a_1 + b_1 - 1$ ，且 $a_1 + b_1 - c_1$ 为奇数。2. 在 $a_1 + b_1 - 1 \geq p$ 的情况下，we have $|a_1 - b_1| + 1 \leq c_1 \leq 2p - a_1 - b_1 - 1$ and $a_1 + b_1 - c_1$ is odd.

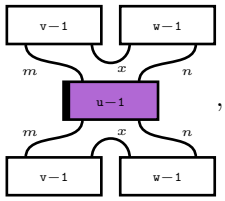
引理 2.9. 设 $v = [a_1, 0]_{p,\ell}$和 $w = [b_1, 0]_{p,\ell}$。我们有

$$\mathbb{T}_{\zeta}(v-1) \otimes \mathbb{T}_{\zeta}(w-1) = \bigoplus_{u} \mathbb{T}_{\zeta}(u-1),$$

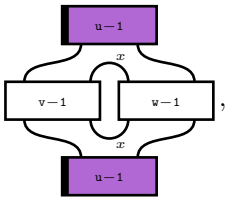
其中求和遍历所有对于 v 和 w 都是 $p^{(2)}$-可容许的 u。

因此，通过与一个或两个 $\mathbb{T}_{\zeta}(1)$ 张量化，即可直接得到一般的融合规则。对我们的目的而言，范畴化融合规则更为相关。关于 Eves 的情形，STWZ23 定理 4.32] 已基本计算出这些规则。由于我们使用的是 ζ 本原四次单位根，因此实际上可以简化他们的公式。Eves 的情形之所以更易处理，是因为对于任意给定的最高权，相应的不可分解倾斜模在两个 eve 的张量积中至多出现一次。在回顾这一结果之前，我们需要先引入一些记号。给定 $v = [a_1, 0]_{p,\ \ell}$, $w = [b_1, 0]_{p,\ \ell}$，且 u为 $p^{(2)}$-可容许的，我们定义：

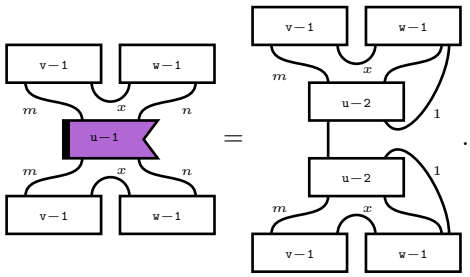
$$\mathrm{EX}^{u-1}_{v-1,w-1} :=$$



$$, \quad \Diamond^{v-1,w-1}_{u-1} :=$$



$$, \tag{12}$$

$$\mathrm{L}^0\mathrm{X}^{u-1}_{v-1,w-1} :=$$  $$=$$. (13)

定理 2.10。 设 $v=[a_1,0]_{p,\ \ell}$ 和 $w=[b_1,0]_{p,\ \ell}$，并设 $u=[c_1,1]$ 满足：$\mathrm{T}\varsigma(u-1)$ 是一个不可分解倾斜模，且作为直和项出现在 $\mathrm{T}\varsigma(v-1)\otimes\mathrm{T}\varsigma(w-1)$中。那么，在 ***Temperley-Lieb*** 范畴中实现到 $\mathrm{T}\varsigma(u-1)$ 的投影所对应的幂等元为

$$\mathsf{d}^{u-1}_{v-1,w-1}\cdot\mathrm{EX}^{u-1}_{v-1,w-1}\quad \textit{with}\quad \mathsf{d}^{u-1}_{v-1,w-1}:=(-1)^{x_1}\frac{\binom{a_1-1}{x_1}\binom{b_1-1}{x_1}}{\binom{c_1+x_1}{x_1}}\in\Bbbk\,,$$

其中 $x=[x_1,0]_{p,\ \ell}=a_1+b_1-c_1-1$。

证明。 上述描述是 [STWZ23，定理 4.32] 的一种细化。就我们的目的而言，采用 [STWZ23，定理 4.27] 的表述略为方便。为了回顾这一结果，我们定义域 $\Bbbk(\mathbb{v})$ 中的元素，其中$\mathbb{v}$ 是一个形式变量。利用量子整数和量子二项式系数，我们按照 [STWZ23 第 4C 节]定义如下

$$\tilde{\mathsf{d}}^{v-1,w-1}_{u-1,\emptyset}:=(-1)^x\frac{\binom{m+n+x+1}{x}_{\mathbb{v}}}{\binom{m+x}{x}_{\mathbb{v}}\binom{n+x}{x}_{\mathbb{v}}}\in\Bbbk(\mathbb{v})\,,$$

$$\tilde{\mathsf{d}}^{v-1,w-1}_{u-1,\{0\}}=(-1)^{x+1}\Big(-\frac{[m+n-1]_{\mathbb{v}}}{[m+n]_{\mathbb{v}}}\frac{\binom{m+n+x+1}{x}_{\mathbb{v}}}{\binom{m+x}{x}_{\mathbb{v}}\binom{n+x}{x}_{\mathbb{v}}}+\big(\frac{[m]_{\mathbb{v}}}{[m+n]_{\mathbb{v}}}\big)^2\frac{\binom{m+n+x}{x}_{\mathbb{v}}}{\binom{m+x}{x+1}_{\mathbb{v}}\binom{n+x}{x+1}_{\mathbb{v}}}\Big)\in\Bbbk(\mathbb{v})\,,$$

其中自然数 m、n 和 x 如方程（12）所示。令 $\mathbb{v}\mapsto\zeta$ 专门化后，元素 $\tilde{\mathsf{d}}^{v-1\ w-1}_{u-1\ \emptyset}{}_{,\ ,}$，$\tilde{\mathsf{d}}^{v-1\ w-1}_{u-1\ \ ,\ ,\ \{0\}}\in\Bbbk(\mathbb{v})$ 专门化为 $\mathsf{d}^{v-1\ w-1}_{u-1\ \emptyset}{}_{,\ ,}$，$\mathsf{d}^{v-1\ w-1}_{u-1\ \ ,\ ,\ \{0\}}\in\Bbbk$。 [STWZ23，定理 4.27] 中证明了

$$\Diamond^{v-1,w-1}_{u-1}=\mathsf{d}^{v-1,w-1}_{u-1,\emptyset}\cdot\mathrm{E}_{u-1}+\mathsf{d}^{v-1,w-1}_{u-1,\{0\}}\cdot\mathrm{L}^0_{u-1}\,.$$

为了证明所需结果，我们需要证明 $\mathsf{d}^{v-1\ w-1}_{u-1\ \ ,,\{0\}}=0$。根据量子二项式系数的定义，我们得到

$$\tilde{\mathsf{d}}^{v-1,w-1}_{u-1,\{0\}}=\Big(\frac{[m+n-1]_{\mathbb{v}}[n]_{\mathbb{v}}[m+n+x+1]_{\mathbb{v}}-[m]_{\mathbb{v}}[m+n+1]_{\mathbb{v}}[x+1]_{\mathbb{v}}}{[m+n]_{\mathbb{v}}[n]_{\mathbb{v}}[m+n+x+1]_{\mathbb{v}}}\Big)\cdot\tilde{\mathsf{d}}^{v-1,w-1}_{u-1,\emptyset}\,.$$

上述表达式的优势在于，我们知道，只要 u 是 $p^{(2)}$-可容许的，$\tilde{\mathsf{d}}^{v-1\ w-1}_{u-1\ \emptyset}{}_{,,}$ 就会特化为 $\mathsf{d}^{v-1\ w-1}_{u-1\ \ \emptyset}{}_{,,}\neq 0$，这是由 [STWZ23，命题 4.26] 得出的。特别地，为了证明 $\tilde{\mathsf{d}}^{v-1\ w-1}_{u-1\ \ ,,\{0\}}$ 在特化后消失，只需证明以下情形也成立：

$$\tilde{\delta}^{v-1,w-1}_{u-1,\{0\}}:=\frac{[m+n-1]_{\mathbb{v}}[n]_{\mathbb{v}}[m+n+x+1]_{\mathbb{v}}-[m]_{\mathbb{v}}[m+n+1]_{\mathbb{v}}[x+1]_{\mathbb{v}}}{[m+n]_{\mathbb{v}}[n]_{\mathbb{v}}[m+n+x+1]_{\mathbb{v}}}.$$

为了证明最后这个结论，请注意

$$[m+n+1]_{\mathbb{v}}[x+1]_{\mathbb{v}}=[m+n+x+1]_{\mathbb{v}}+[x]_{\mathbb{v}}[m+n]_{\mathbb{v}}\,. \tag{14}$$

这个等式由 [MV94 引理 3] 得出，也可以直接验证。于是我们得到

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}^{v-1,w-1}_{u-1,\{0\}} &= \frac{[m+n-1]_{\mathbb{v}}[n]_{\mathbb{v}}[m+n+x+1]_{\mathbb{v}} - [m]_{\mathbb{v}}[m+n+x+1]_{\mathbb{v}} - [m]_{\mathbb{v}}[m+n]_{\mathbb{v}}[x]_{\mathbb{v}}}{[m+n]_{\mathbb{v}}[n]_{\mathbb{v}}[m+n+x+1]_{\mathbb{v}}},\\ &= \frac{[m+n-1]_{\mathbb{v}}[n]_{\mathbb{v}} - [m]_{\mathbb{v}}}{[m+n]_{\mathbb{v}}[n]_{\mathbb{v}}} - \frac{[m]_{\mathbb{v}}[x]_{\mathbb{v}}}{[n]_{\mathbb{v}}[m+n+x+1]_{\mathbb{v}}}\\ &= \frac{[n-1]_{\mathbb{v}}}{[n]_{\mathbb{v}}} - \frac{[m]_{\mathbb{v}}[x]_{\mathbb{v}}}{[n]_{\mathbb{v}}[m+n+x+1]_{\mathbb{v}}}.\end{aligned}$$

第三个等式使用了

$$[m+n-1]_{\mathbb{v}}[n]_{\mathbb{v}} = [m+n]_{\mathbb{v}}[n-1]_{\mathbb{v}} + [m]_{\mathbb{v}}\,.$$

特别地，由于 x和 $n-1$为偶数，而 n和 $m+n+x+1$为奇数，我们发现，将 $\mathbb{v}$ 设为本原四次单位根 ζ后， $\tilde{\delta}^{v-1}{}_{,u-1}{}^{w-1}{}_{,\{0\}}$特化为 0。特别地，可得

$$\Diamond^{v-1,w-1}_{u-1} = \mathsf{d}^{v-1,w-1}_{u-1,\emptyset}\cdot \mathrm{E}_{u-1}\,,$$

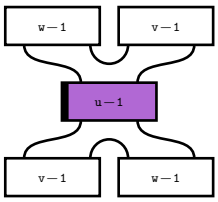
由此容易推出，自同态 $(\mathsf{d}^{v-1\ w-1}_{u-1\ \emptyset}{}_{,,})^{-1}\cdot \mathrm{X}^{u-1}_{v-1,w-1}$ （作用于 $\mathrm{T}\zeta(v-1)\otimes\mathrm{T}\zeta(w-1)$）实现了到不可分解直和项 $\mathbb{T}_\zeta(u-1)$ 上的投影。最后，等式

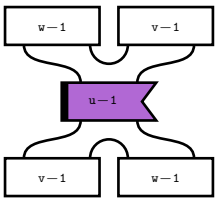
$$\mathsf{d}^{u-1}_{v-1,w-1} := (\mathsf{d}^{v-1,w-1}_{u-1,\emptyset})^{-1} = (-1)^{x_1}\frac{\binom{a_1-1}{x_1}\binom{b_1-1}{x_1}}{\binom{c_1+x_1}{x_1}}$$

由 [STWZ23，命题 2.8] 中给出的量子 Lucas 定理可得。 □

2.7 更多双重编织

设 $v=[a_1,0]_{p,\ell}$和 $w=[b_1,0]_{p,\ell}$。我们给出 $\mathbb{T}_\zeta(v-1)$ 和 $\mathbb{T}_\zeta(w-1)$ 的双重编织与单编织公式。为了给出单编织公式，对于任意 $p^{(2)}$-可容许u，我们引入态射

$\mathrm{E\check{X}}^{u-1}_{v-1,w-1} :=$ 

， $\mathrm{L}^0\check{\mathrm{X}}^{u-1}_{v-1,w-1} :=$ 

.

这些是上一节定义的态射 $\mathrm{EX}^{u-1}_{v-1,w-1}$ 和 $\mathrm{L}^0\mathrm{X}^{u-1}_{v-1,w-1}$ 的变体，其中源和目标的阶有所不同。

命题 2.11。 设 $v=[a_1,0]_{p,\ell}$和 $w=[b_1,0]_{p,\ell}$。那么，我们有

$$\beta^2_{v-1,w-1} = \quad = \sum_u \zeta^{1-2a_1^2-2b_1^2}\cdot \mathsf{d}^{u-1}_{v-1,w-1}\cdot\left(\mathrm{EX}^{u-1}_{v-1,w-1} + 2\zeta^{-1}\cdot\mathrm{L}^0\mathrm{X}^{u-1}_{v-1,w-1}\right),$$

$$\beta_{v-1,w-1} = \quad = \sum_u \lambda^{u-1}_{v-1,w-1}\cdot \mathsf{d}^{u-1}_{v-1,w-1}\cdot\left(\mathrm{E\check{X}}^{u-1}_{v-1,w-1} + \zeta^{-1}\cdot\mathrm{L}^0\check{\mathrm{X}}^{u-1}_{v-1,w-1}\right),$$

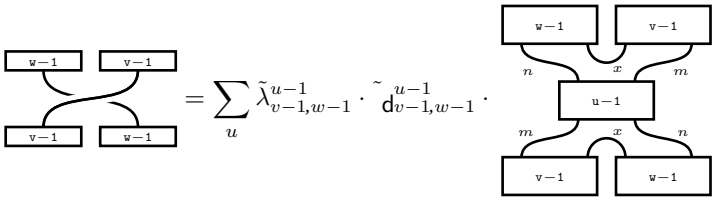
$$\lambda^{u-1}_{v-1,w-1} := \zeta^{\left((u+v-w-1)(u+w-v-1)-(v+w-u-1)(u+v+w+1)\right)/8} = \zeta^{(u^2-v^2-w^2+1)/4},$$

其中求和遍历所有对于 v 和 w可容许的 $p^{(2)}$- u。

证明。 第一个等式由命题 2.7 得出，因为

$$\beta^2_{v-1,w-1}\circ(\theta_{v-1}\otimes\theta_{w-1})=\sum_u \theta_{u-1}.$$

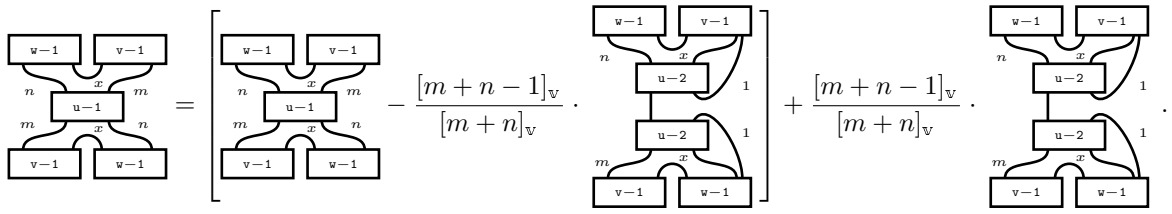
第二个等式可通过将 Temperley-Lieb 范畴中一般参数下的编织公式作特化得到。更确切地说，由 [MV94, 定理 3] 可知，在一般参数 $\mathbb{v}$下，我们有



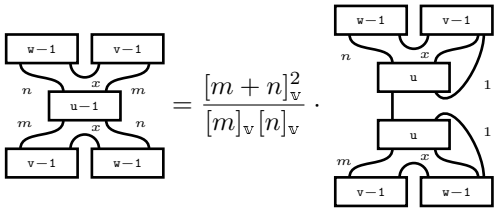
$$\tilde{\mathsf{d}}^{u-1}_{v-1,w-1}=(\tilde{\mathsf{d}}^{v-1,w-1}_{u-1,\emptyset})^{-1}=(-1)^x\frac{\binom{m+x}{x}_{\mathbb{v}}\binom{n+x}{x}_{\mathbb{v}}}{\binom{m+n+x+1}{x}_{\mathbb{v}}},\quad \tilde{\lambda}^{u-1}_{v-1,w-1}=(-1)^x\,\mathbb{v}^{\left(mn-x(m+n+x+2)\right)/2},$$

求和遍历所有在一般意义下对 v 和 w 可容许的 u，也就是说，$0\le x\le \min(v-1,w-1)$ 可以是任意值。

一方面，如果 u 对 v 和 w是 $p^{(2)}$-可容许的，那么在一般参数下我们有



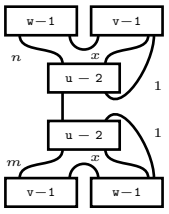
此外，根据构造 [STWZ23, 第 3B 节], ，我们有，括号中的项在$\mathbb{v}\mapsto\zeta$下特化为 $\mathsf{E}\check{\mathsf{X}}^{u-1}_{v-1,w-1}$。另一方面，如果 $u\le p^{(2)}-1$对 v和 w不是 $p^{(2)}$-可容许的，那么我们得到



通过对右侧应用两次 [STWZ23，引理 4.30] 。

合并相同项后，只需分析在特化下

$$\Big(\frac{[m+n-1]_{\mathbb{v}}}{[m+n]_{\mathbb{v}}}\cdot\tilde{\lambda}^{u-1}_{v-1,w-1}\cdot\tilde{\mathsf{d}}^{u-1}_{v-1,w-1}+\frac{[m+n]^2_{\mathbb{v}}}{[m]_{\mathbb{v}}[n]_{\mathbb{v}}}\cdot\tilde{\lambda}^{u-3}_{v-1,w-1}\cdot\tilde{\mathsf{d}}^{u-3}_{v-1,w-1}\Big)\cdot$$



对于任意 $p^{(2)}$-可容许的 u。上面的最后一个一般 Temperley-Lieb 图特化为 $\mathsf{L}^0\check{\mathsf{X}}^{u-1}_{v-1,\ w-1}$，因此我们只需论证该系数也相应地特化。这个系数可以改写为

$$\Big(\frac{[m+n-1]_{\mathbb{v}}}{[m+n]_{\mathbb{v}}}+\mathbb{v}^{-(m+n)}\cdot\frac{[m+n+1]_{\mathbb{v}}[x+1]_{\mathbb{v}}}{[m+n]_{\mathbb{v}}[m+n+x+1]_{\mathbb{v}}}\Big)\cdot\tilde{\lambda}^{u-1}_{v-1,w-1}\cdot\tilde{\mathsf{d}}^{u-1}_{v-1,w-1}\cdot$$

但是，我们有

$$\frac{[m+n-1]_{\mathbb{v}}}{[m+n]_{\mathbb{v}}} + \mathbb{v}^{-(m+n)} \cdot \frac{[m+n+1]_{\mathbb{v}}[x+1]_{\mathbb{v}}}{[m+n]_{\mathbb{v}}[m+n+x+1]_{\mathbb{v}}} =$$
$$= \frac{[m+n-1]_{\mathbb{v}} + \mathbb{v}^{-(m+n)}}{[m+n]_{\mathbb{v}}} + \mathbb{v}^{-(m+n)} \cdot \frac{[x]_{\mathbb{v}}}{[m+n+x+1]_{\mathbb{v}}}$$
$$= \mathbb{v}^{-1} + \mathbb{v}^{-(m+n)} \cdot \frac{[x]_{\mathbb{v}}}{[m+n+x+1]_{\mathbb{v}}}.$$

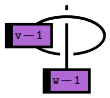
由于 u 对 v 和 w 是 $p^{(2)}$-可容许的，因此 x 为偶数且 $m+n+x+1$ 为奇数，最后一个等式中的第二项在特化时消失，从而得到所需公式。 □

2.8 环绕

对于任意不可分解射影对象 $\mathbb{T}_\zeta(w-1)$，我们考虑如下自同态：用标记为 $\mathbb{T}_\zeta(v-1)$ 的圆环绕 $\mathbb{T}_\zeta(w-1)$ 上的恒等态射。换言之，这是对双重编织 $\beta^2_{w-1,\ v-1}$ 取右偏迹 pTr^R_{v-1} 所得到的自同态。

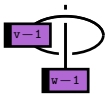
引理 2.12。 设 $v=[a_1,0]_{p,\ \ell}$ 和 $w=[b_1,b_0]_{p,\ \ell}$，其中 a_1、$b_1 \geq 1$。

1. 若 $b_0=0$，则有



$$= \mathsf{pTr}^R_{v-1}(\beta^2_{w-1,v-1}) = v(-1)^{b_1-1} \cdot \mathrm{E}_{w-1}.$$

2. 若 $b_0=1$，则有



$$= \mathsf{pTr}^R_{v-1}(\beta^2_{w-1,v-1}) = 2v(-1)^{(a_1-1)+(b_1-1)} \cdot \mathrm{L}^0_{w-1}.$$

证明。 若 $b_0=0$，我们对 a_1 使用归纳法。对于 $a_1=1$，即 $v-1=1$，我们正在用生成元 $\mathbb{T}_\zeta(1)$进行包围，因此可以使用命题 2.6，从而得到：

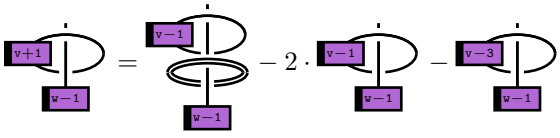


$$= \mathsf{pTr}^R_1(\zeta^{w-1} \cdot \mathrm{E}_w + 2\zeta^{w-2} \cdot \mathrm{L}^0_w) = 2\zeta^{w-2}\mathrm{E}_{w-1} = v(-1)^{b_1-1} \cdot \mathrm{E}_{w-1}\ .$$

注意到这也可直接由 [STWZ23，引理 5.10] 得出。现在，利用

$$\mathbb{T}_\zeta(v-1) \otimes \mathbb{T}_\zeta(1) \otimes \mathbb{T}_\zeta(1) \simeq \mathbb{T}_\zeta(v+1) \oplus \mathbb{T}_\zeta(v-1) \oplus \mathbb{T}_\zeta(v-1) \oplus \mathbb{T}_\zeta(v-3)\,,$$

其中最后一个 项在 $v=2$ 时省略，第一个项在 $v=2p-2$时省略，我们得到以下等式：

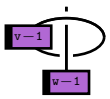


根据归纳法，右端等于

$$(-1)^{b_1-1}(2\cdot 2\cdot v - 2\cdot v - (v-2)) \cdot \mathrm{E}_{w-1} = (-1)^{b_1-1}(v+2) \cdot \mathrm{E}_{w-1}\ .$$

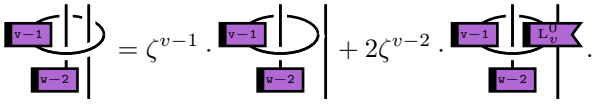
注意，最后一项 $(-1)^{b_1-1}(v-2)$ 在 $v=2$ 时已经为零，因此我们无需单独处理。

若 $b_0 = 1$，记

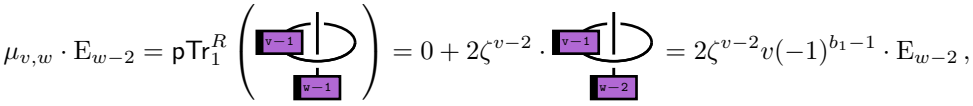


$= \lambda_{v,w} \cdot \mathrm{E}_{w-1} + \mu_{v,w} \cdot \mathrm{L}^0_{w-1}\,,$

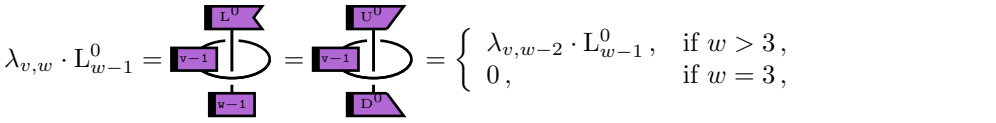
对于某些标量 $\lambda_{v,\,w}$ 和 $\mu_{v,\,w}$。结合命题 2.6，我们可以利用 $\mathbb{T}_\zeta(w-1) = \mathbb{T}_\zeta(w-2) \otimes \mathbb{T}_\zeta(1)$，从而得到



特别地，为了确定 $\mu_{v,\,w}$，只需计算



在最后一个等式中使用前面讨论过的情形 $b_0 = 0$。由此可得 $\mu_{v,\,w} = 2v(-1)^{(a_1-1)+(b_1-1)}$。最后，为了计算 $\lambda_{v,\,w}$，我们注意到

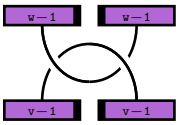


由归纳法可得 $\lambda_{v,\,w} = 0$，如所述。 □

2.9 Hopf 配对

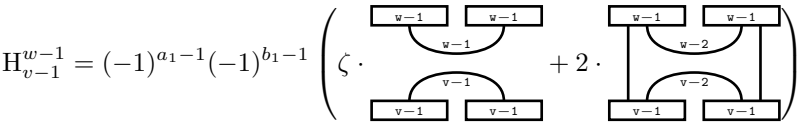
为了实际计算不变量的值，显式给出某些态射的公式很有用，我们将这些态射称为 Hopf 配对。

定义 2.13. 设 $v = [a_1, a_0]_{p,\,\ell}$ 和 $w = [b_1, b_0]_{p,\,\ell}$，$\mathbb{T}_\zeta(v-1)$ 与 $\mathbb{T}_\zeta(w-1)$ 上的 Hopf 配对是如下态射

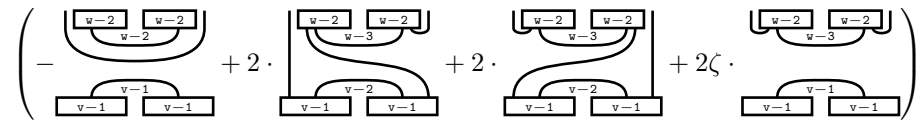


定理 2.14. 设 $v = [a_1, a_0]_{p,\,\ell}$ 和 $w = [b_1, b_0]_{p,\,\ell}$，则 $\mathbb{T}_\zeta(v-1)$ 与 $\mathbb{T}_\zeta(w-1)$ 的 *Hopf* 配对可分解如下：

1. 若 $a_0 = 0$ 且 $b_0 = 0$，则 $\mathbb{T}_\zeta(v-1)$ 与 $\mathbb{T}_\zeta(w-1)$ 的 *Hopf* 配对由下式给出



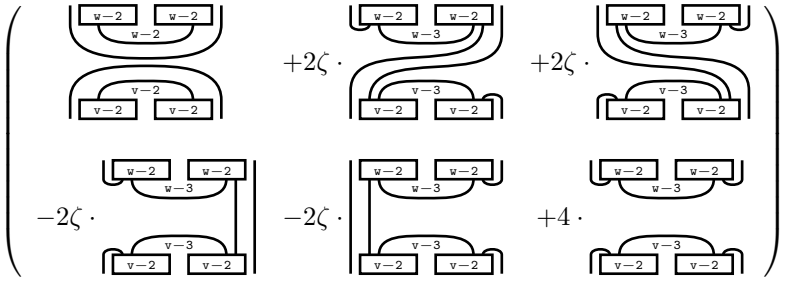
2. 如果 $a_0 = 0$ 和 $b_0 = 1$，则 $\mathbb{T}_\zeta(v-1)$ 与 $\mathbb{T}_\zeta(w-1)$ 的 *Hopf* 配对为



3. 如果 $a_0 = 1$ 和 $b_0 = 0$，则 $\mathbb{T}_\zeta(v-1)$ 与 $\mathbb{T}_\zeta(w-1)$ 的 *Hopf* 配对可通过将上面的表达式旋转 *180* 度，并将符号改为 $(-1)^{a_1-1}$ 得到。

4. 若 $a_0 = 1$ 和 $b_0 = 1$，$\mathbb{T}_\zeta(v-1)$ 与 $\mathbb{T}_\zeta(w-1)$ 的 *Hopf* 配对由下式给出

$$\mathrm{H}_{v-1}^{w-1} = \left(\quad + 2\zeta \cdot \quad + 2\zeta \cdot \quad - 2\zeta \cdot \quad - 2\zeta \cdot \quad + 4 \cdot \quad \right).$$



特别地，*Hopf* 配对总是通过零股或两股分解。

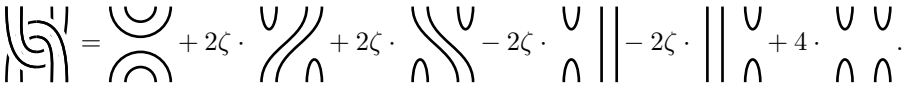
证明将采用归纳法，我们首先需要计算最初几种情形。

引理 2.15。对于 v、$w \le 3$，*Hopf* 配对由下式给出

$$\mathrm{H}_1^1 = \quad = \zeta \cdot \quad + 2 \cdot \quad ,$$

$$\mathrm{H}_2^1 = \quad = - \quad + 2 \cdot \quad + 2 \cdot \quad + 2\zeta \cdot \quad ,$$

$$\mathrm{H}_2^2 = \quad = \quad + 2\zeta \cdot \quad + 2\zeta \cdot \quad - 2\zeta \cdot \quad - 2\zeta \cdot \quad + 4 \cdot \quad .$$

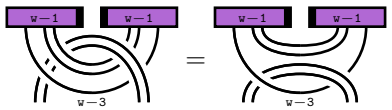


证明。第一个等式可通过消解两个交叉直接计算得出。第二个等式可由前一个等式应用两次，并消解两个交叉得到。最后一个等式也可通过将第二个等式应用两次，并消解由此产生的交叉得到。 □

这些初步计算的主要结论是，$\mathbb{T}_\zeta(2)$ 与自身的 Hopf 配对等于无链接求值和余单位之和，再加上涉及 $\mathbb{T}_\zeta(2)$ 中一个小杯或帽的若干项。

定理 *2.14* 的证明：先考虑 $v = 3$ 的情形，此时我们与 $\mathbb{T}_\zeta(2)$ 配对。对于$w = [1,0]_{p,\ell}$和 $w = [1,1]_{p,\ell}$，结论即为引理 2.15。现在假设 $w = [b_1, b_0]_{p,\ell}$ 且 $b_1 \ge 2$，因此 $\mathbb{T}_\zeta(w-1)$ 至少有三股。我们可以将 $\mathbb{T}_\zeta(w-1)$ 与$\mathbb{T}_\zeta(2)$ 的 Hopf 配对分解为依次将 $\mathbb{T}_\zeta(2)$ 和 $\mathbb{T}_\zeta(w-3)$ 与 $\mathbb{T}_\zeta(2)$ 配对。图示如下：

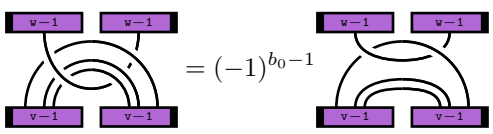
$$\mathrm{H}_2^{w-1} = \quad = \quad .$$



第二个等式由引理 2.15 和公式 (8) 得出。因此，关于 H_2^{w-1} 的结论可通过归纳法得到。

一般情形可通过类似的论证得出。设 $v = [a_1, a_0]_{p,\ell}$ 且 $a_1 \ge 2$。我们可以将 $\mathbb{T}_\zeta(w-1)$ 与 $\mathbb{T}_\zeta(v-1)$ 的 Hopf 配对依次写成 $\mathbb{T}_\zeta(w-1)$ 与 $\mathbb{T}_\zeta(2)$ 以及 $\mathbb{T}_\zeta(v-3)$ 的配对。图示如下：

$$\mathrm{H}_{v-1}^{w-1} = \quad = (-1)^{b_0-1} \quad .$$



上面的第二个等式由归纳法和公式 (8) 得出。至此，结果的证明完成。

□

3 相关拓扑不变量

现在我们将前两节的内容结合起来。更确切地说，我们说明如何计算 [CGHP23] 所对应的四维 2-手柄体的不变量，其中涉及具有本原四次单位根的混合 Verlinde 范畴 $\mathrm{Ver}_{p^{(2)}}^{\zeta^{1/2}}$ with ζ。

3.1 修正迹，或 4-柄

根据 [STWZ23，定理 4.7]，已证明投射对象理想 $\mathrm{Proj} \subseteq \mathrm{Ver}_{p^{(2)}}^{\zeta^{1/2}}$ 上存在一个非退化修正迹 t，其不可分解对象为 $\mathbb{T}_\zeta(1)$ ...，$\mathbb{T}_\zeta(p^{(2)}-2)$。偏迹 t 由其在 E_1, 作用于 $\mathbb{T}_\zeta(1)$的恒等态射上的取值唯一确定，我们将其设为

$$\mathsf{t}(\mathrm{E}_1) = +1\,.$$

为便于下文使用，我们现在确定修正迹在投射对象的所有自同态上的取值。特别地，回顾一下，若 $v = [a_1, 0]_{p,\ \ell}$，则 $\mathbb{T}_\zeta(v-1)$ 是单对象，且其自同态代数由 E_{v-1}张成。另一方面，若 $v = [a_1, 1]_{p,\ \ell}$，则 $\mathbb{T}_\zeta(v-1)$ 的自同态代数由 E_{v-1} 以及幂零自同态 L_{v-1}张成，见第 2.2 节。

命题 3.1。 设 $v = [a_1, a_0]_{p,\ \ell}$。

1. 若 $a_0 = 0$，则有

$$\mathsf{t}(\mathrm{E}_{v-1}) = (-1)^v [a_1]_{\zeta^2} = (-1)^{a_1-1} a_1\ . \tag{15}$$

2. 若 $a_0 = 1$，则有

$$\mathsf{t}(\mathrm{E}_{v-1}) = 0\ , \qquad \mathsf{t}(\mathrm{L}^0_{v-1}) = \mathsf{t}(\mathrm{E}_{v-2}) = (-1)^{a_1-1} a_1\ . \tag{16}$$

证明。 第一个等式由 [STWZ23 中的公式 5.7] 推出；回顾 STWZ23 的约定（例 2.10], ），并注意到 $\zeta^2 = -1$。接着，当 $a_0 = 1$ 时，等式 $\mathsf{t}(\mathrm{E}_{v-1}) = 0$ 由命题 2.3 的第一部分，以及修正迹与方程（1）中的右偏迹相容这一事实推出。最后一个等式可类似地推出。

□

我们在上文第 1.2 节回顾过，修正迹 t 通过剪开一条射影线股并对诱导自同态取修正迹，给出 S^3 中闭可容许缠结的一个不变量 $\tilde{\mathsf{t}}$。特别地，我们有

$$\tilde{\mathsf{t}}\left(\mathbb{T}_\zeta(1)\bigcirc\right) = \mathsf{t}\left(\mathrm{E}_1\right) = 1 \in \Bbbk\,,$$

尽管

$$\mathbb{T}_\zeta(1)\bigcirc = -[2]_\zeta = 0 \in \mathrm{End}(\mathbb{1}) \cong \Bbbk\,.$$

3.2 切割态射，或 3-柄

按照第 1.2 节回顾的步骤，我们现在需要计算切割态射（见定义 1.5）。这是计算三柄的值所必需的。为此，记 $G := \oplus_{v=2}^{2p-1} \mathbb{T}_\zeta(v-1)$ 为 $\mathrm{Ver}_{p^{(2)}}^{\zeta^{1/2}}$ 中不可分解射影对象的直和。对于每个

不可分解射影对象 V，修正迹 t 在 Hom($\mathbb{1}, V\otimes G^*$) 和 Hom($V\otimes G^*,\mathbb{1}$) 之间诱导出一个非退化配对。我们将切割态射

$$\Lambda_{V\otimes G^*}=\sum_i x_i\circ x^i : V\otimes G^*\to V\otimes G^*,$$

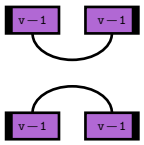
其中，$\{x_i\}$ 和 $\{x^i\}$ 分别是 Hom($\mathbb{1}$，$V\otimes G^*$) 和 Hom($V\otimes G^*$，$\mathbb{1}$) 的对偶基。

按照约定，E_{v-1} 的对偶由其左右镜像 E^*_{v-1} =(E_{v-1})$^{\leftrightarrow}$ 给出。一方面，该操作不会影响 E_{v-1}（当 $v=[a_1,0]_{p\text{时},\ \ell}$）。另一方面，当 $v=[a_1,1]_{p\text{时},\ \ell}$，它会将自由线股从右侧切换到左侧。

引理 3.2。令 $v=[a_1,a_0]_{p,\ \ell}$。

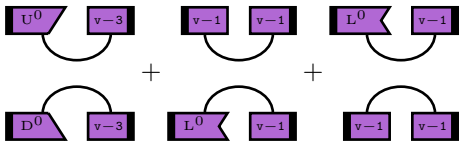
1. 如果 $a_0=0$，则有

$$\Lambda_{\mathbb{T}_\zeta(v-1)\otimes G^*}=\frac{(-1)^{a_1-1}}{a_1}\cdot$$

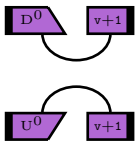


2. 如果 $a_0=1$，则有

$$\Lambda_{\mathbb{T}_\zeta(v-1)\otimes G^*}=\frac{(-1)^{a_1-1}}{a_1}\cdot\Bigg($$



$$-\frac{a_1}{a_1+1}\cdot$$



$\Bigg)$，

其中，当 $v=[1,1]_{p,\ell}=3$ 时，省略标记为 $v-3$ 的态射；当 $v=[p-2,1]_{p,\ell}=2p-3$ 时，省略标记为 $v+1$ 的态射，从而不会出现除以零的情况。

证明。在 $a_0=0$ 的条件下，对于不可分解射影对象 W，我们有 Hom($\mathbb{T}_\zeta(v-1)\otimes W^*,\mathbb{1}$) $\neq 0$ 当且仅当 $W=\mathbb{T}_\zeta(v-1)$。在 $a_0=1$ 的条件下，对于不可分解射影对象 W，我们有 Hom($\mathbb{T}_\zeta(v-1)\otimes W^*,\mathbb{1}$) $\neq 0$ 当且仅当 $W=\mathbb{T}_\zeta(v-3)$、$\mathbb{T}_\zeta(v-1)$ 或 $\mathbb{T}_\zeta(v+1)$。因此，只需计算相应的 $\Lambda_{\mathbb{T}_\zeta(v-1)\otimes W}$ 值。

我们先考虑 $a_0=0$ 的情形。态射空间 Hom($\mathbb{T}_\zeta(v-1)\otimes\mathbb{T}_\zeta(v-1)^*$，$\mathbb{1}$) 由求值态射 ev_{v-1} 张成。态射空间 Hom($\mathbb{1}$，$\mathbb{T}_\zeta(v-1)\otimes\mathbb{T}_\zeta(v-1)^*$) 由余求值态射 coev_{v-1} 张成。利用方程（1）和方程（15）中回顾的修正迹与偏迹的相容性，我们得到

$$\mathsf{t}(\mathrm{coev}_{v-1}\circ\mathrm{ev}_{v-1})=\mathsf{t}(\mathrm{E}_{v-1})=(-1)^{a_1-1}a_1\,.$$

由此得到所声称的 $\Lambda_{\mathbb{T}_\zeta(v-1)\otimes G^*}$ 在 $a_0=0$ 时的描述。

现在我们转向 $a_0=1$ 的情形。因此，不可分解射影对象 W 可能是 $\mathbb{T}_\zeta(v-3)$、$\mathbb{T}_\zeta(v-1)$ 或 $\mathbb{T}_\zeta(v+1)$ 之一。我们先考虑 $W=\mathbb{T}_\zeta(v-1)$。态射空间 Hom($\mathbb{T}_\zeta(v-1)\otimes\mathbb{T}_\zeta(v-1)^*$，$\mathbb{1}$) 由

$$\mathrm{ev}_{v-1}\,,\quad \mathrm{ev}_{v-1}\circ(\mathrm{L}^0_{v-1}\otimes\mathrm{E}_{v-1})\,.$$

类似地，态射空间 Hom($\mathbb{1},\mathbb{T}_\zeta(v-1)\otimes\mathbb{T}_\zeta(v-1)^*$) 由以下元素张成

$$\mathrm{coev}_{v-1}\,,\quad (\mathrm{L}^0_{v-1}\otimes\mathrm{E}_{v-1})\circ\mathrm{coev}_{v-1}\,.$$

利用修正迹与偏迹的相容性，我们计算得

$$\mathsf{t}(\mathrm{coev}_{v-1}\circ\mathrm{ev}_{v-1})=0\,,$$

$$\mathsf{t}(\mathrm{coev}_{v-1}\circ\mathrm{ev}_{v-1}\circ(\mathrm{L}^0_{v-1}\otimes\mathrm{E}_{v-1}))=\mathsf{t}(\mathrm{L}^0_{v-1})=\mathsf{t}(\mathrm{E}_{v-2})=(-1)^{a_1-1}a_1\,,$$

$$\mathsf{t}((\mathrm{L}^0_{v-1}\otimes \mathrm{E}_{v-1})\circ \mathrm{coev}_{v-1}\circ \mathrm{ev}_{v-1}) = (-1)^{a_1-1}a_1\,,$$
$$\mathsf{t}((\mathrm{L}^0_{v-1}\otimes \mathrm{E}_{v-1})\circ \mathrm{coev}_{v-1}\circ \mathrm{ev}_{v-1}\circ(\mathrm{L}^0_{v-1}\otimes \mathrm{E}_{v-1})) = 0\,.$$

第二个和第三个等式用到了公式（16）。由此得到

$$\begin{aligned}\Lambda_{\mathbb{T}_\zeta(v-1)\otimes\mathbb{T}_\zeta(v-1)^*} = &\frac{(-1)^{a_1-1}}{a_1}\cdot(\mathrm{L}^0_{v-1}\otimes \mathrm{E}_{v-1})\circ \mathrm{coev}_{v-1}\circ \mathrm{ev}_{v-1}\\ &+\frac{(-1)^{a_1-1}}{a_1}\cdot \mathrm{coev}_{v-1}\circ \mathrm{ev}_{v-1}\circ(\mathrm{L}^0_{v-1}\otimes \mathrm{E}_{v-1}).\end{aligned}$$

现在考虑 $W=\mathbb{T}_\zeta(v-3)$ 的情形。态射空间 $\mathrm{Hom}(\mathbb{T}_\zeta(v-1)\otimes\mathbb{T}_\zeta(v-3)^*,\mathbb{1})$ 和 $\mathrm{Hom}(\mathbb{1},\mathbb{T}_\zeta(v-1)\otimes\mathbb{T}_\zeta(v-3)^*)$ 由以下元素张成

$$\mathrm{ev}_{v-3}\circ(\mathrm{D}^0_{v-1}\otimes \mathrm{E}_{v-3})\,,\quad (\mathrm{U}^0_{v-3}\otimes \mathrm{E}_{v-3})\circ \mathrm{coev}_{v-3}\,.$$

我们计算

$$\mathsf{t}((\mathrm{U}^0_{v-3}\otimes \mathrm{E}_{v-3})\circ \mathrm{coev}_{v-3}\circ \mathrm{ev}_{v-3}\circ(\mathrm{D}^0_{v-1}\otimes \mathrm{E}_{v-3})) = \mathsf{t}(\mathrm{L}^0_{v-1}) = (-1)^{a_1-1}a_1.$$

最后，使用类似的论证即可得到 $W=\mathbb{T}_\zeta(v+1)$ 的情形。特别地，我们有

$$\mathsf{t}((\mathrm{D}^0\otimes \mathrm{E}_{v+1})\circ \mathrm{coev}_{v+1}\circ \mathrm{ev}_{v+1}\circ(\mathrm{U}^0\otimes \mathrm{E}_{v+1})) = \mathsf{t}(\mathrm{D}^0\circ \mathrm{U}^0) = \mathsf{t}\left(\right) = \mathsf{t}(\mathrm{E}_v) = (-1)^{a_1}(a_1+1)\,,$$

其中，第一个和第三个等式利用了修正迹与偏迹的相容性。关于 $\Lambda_{\mathbb{T}_\zeta(v-1)\otimes\mathbb{T}_\zeta(v-3)^*}$ 和 $\Lambda_{\mathbb{T}_\zeta(v-1)\otimes\mathbb{T}_\zeta(v+1)^*}$ 的所述描述由上述计算得出，因此证明完成。

□

例 3.3. 公式（6）中引入的纽结图 Γ_0 可以简化为：

$$\Gamma_0 = \quad = \quad . \tag{17}$$

3.3 色度态射，或 2-手柄

第 1.2 节的下一步要求我们展示一个色度态射。这将使我们能够对 2-手柄进行求值。更确切地说，我们按照上述定义 1.7 构造一个基于 $\mathbb{T}_\zeta(1)$ 的色度态射，即一个态射

$$\mathsf{c}: G\otimes\mathbb{T}_\zeta(1)\to G\otimes\mathbb{T}_\zeta(1)\,,\quad G:=\oplus_{v=2}^{2p-1}\mathbb{T}_\zeta(v-1)\,,$$

满足公式（4）。为此，我们将使用公式（10）中定义的态射 Z^0_v。

命题 3.4。 对于 $v=[a_1,a_0]_{p,\ \ell}$，令

$$\mathsf{c}_{v-1}:\mathbb{T}_\zeta(v-1)\otimes\mathbb{T}_\zeta(1)\to\mathbb{T}_\zeta(v-1)\otimes\mathbb{T}_\zeta(1)$$

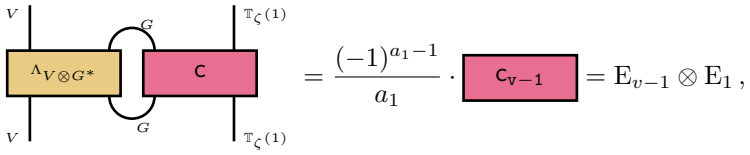
定义为

$$\mathsf{c}_{v-1}=\begin{cases}(-1)^{a_1-1}a_1\cdot \mathrm{E}_{v-1}\otimes \mathrm{E}_1\,, & \text{if } a_0=0\,,\\ (-1)^{a_1-1}a_1\cdot \mathrm{Z}^0_v\,, & \text{if } a_0=1\,.\end{cases}$$

那么 $\mathsf{c}:=\oplus_{v=2}^{2p-1}\mathsf{c}_{v-1}:\ G\otimes\mathbb{T}_\zeta(1)\to G\otimes\mathbb{T}_\zeta(1)$ 是一个以 $\mathbb{T}_\zeta(1)$ 为基点的色度态射。

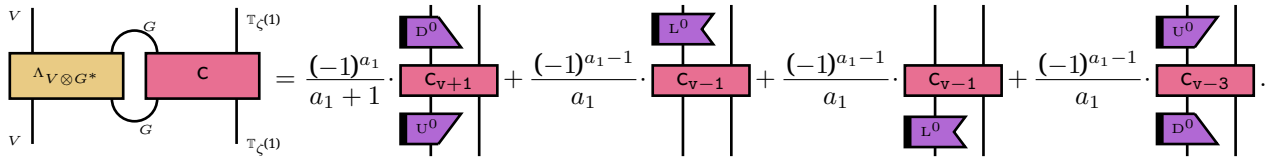
证明。 我们需要验证公式（4）对 $V = \mathbb{T}_\zeta(v-1)$ 在 $v \in \{2, \dots, 2p-1\}$. 下成立

若 $a_0 = 0$，由引理 3.2 可知，切割态射只有一项，其中涉及 G^* 的直和项 $\mathbb{T}_\zeta(v-1)^*$。因此我们得到



因此，公式（4）如预期成立。

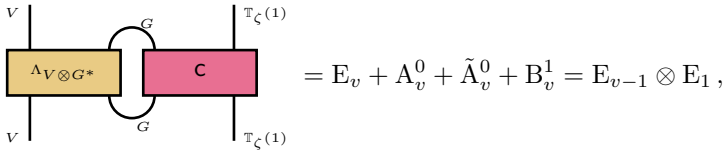
若 $a_0 = 1$，由引理 3.2 可知，切割态射有四项，涉及 G 的直和项 $\mathbb{T}_\zeta(v-1)$、$\mathbb{T}_\zeta(v-3)$ 和 $\mathbb{T}_\zeta(v+1)$。于是可得



使用 g　　在公式（11）中给出的 raphical 定义，我们可以验证以下等式:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{D}^0 \otimes \mathrm{E}_1) \circ \mathrm{Z}^0_{v+2} \circ (\mathrm{U}^0 \otimes \mathrm{E}_1) &= \mathrm{E}_v\,, \\
(\mathrm{L}^0_{v-1} \otimes \mathrm{E}_1) \circ \mathrm{Z}^0_v = \mathrm{Y}^0_v \circ \mathrm{Z}^0_v &= \mathrm{A}^0_v\,, \\
\mathrm{Z}^0_v \circ (\mathrm{L}^0_{v-1} \otimes \mathrm{E}_1) = \mathrm{Z}^0_v \circ \mathrm{Y}^0_v &= \tilde{\mathrm{A}}^0_v\,, \\
(\mathrm{U}^0 \otimes \mathrm{E}_1) \circ \mathrm{Z}^0_{v-2} \circ (\mathrm{D}^0 \otimes \mathrm{E}_1) &= -\frac{a_1}{a_1-1} \cdot \mathrm{B}^1_v\,.
\end{aligned}
$$

因此，利用命题 2.3，我们得到

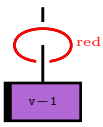


因此公式（4）在此情形下也成立，从而完成证明。 □

3.4 无1-手柄

借助上述计算，我们可以计算定理 1.9 所给出的部分定义的四维拓扑量子场论$\mathcal{S}^{\zeta^{1/2}}_{p^{(2)}}$:$\mathbf{HD}^{2\ 3\ 4}_4 \to$,,Vec。在 [CGHP23], 中已证明，只要输入的有限辫带张量范畴按照定义 1.8 的意义是色度非退化的，这个拓扑量子场论就可以扩展到$\mathbf{HD}^{1,2,3,4}_4$。现在我们将考察 $\mathrm{Ver}^{\zeta^{1/2}}_{p^{(2)}}$ 中的有限辫带张量范畴何时是色度非退化的。为此，我们必须计算定义 1.8 中提到的态射 $\Delta_0^{P_1}$。更一般地，我们将确定由下式定义的自同态 Δ_0^{v-1}

$$
\Delta_0^{v-1} = \Delta_0^{\mathbb{T}_\zeta(v-1)} = \quad \in \mathrm{End}(\mathbb{T}_\zeta(v-1))\,,
$$



可通过使用方程（5）将红色圆变为蓝色来计算。

定理 3.5。 有限带状张量范畴 $\mathrm{Ver}_{p^{(2)}}^{\zeta^{1/2}}$ 色度非退化，当且仅当 $p=3$。

证明。 这是下面命题 3.6 的情形 $v=3$ 。 □

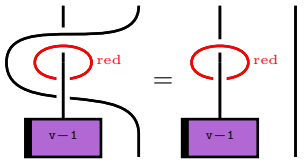
命题 3.6。 设 $v=[a_1,a_0]_{p,\ell}$。

1. 若 $a_0=0$，则有 $\Delta_0^{v-1}=0$。
2. 若 $a_0=1$，则有

$$\Delta_0^{v-1}=2(1+(-1)^{a_1-1})\frac{(p-1)p(2p+1)}{3}\cdot \mathrm{L}_{v-1}.$$

特别地，当 $p>3$ 时，对所有 v，态射 Δ_0^{v-1} 都为零。

证明。 根据 [CGHP23 引理 2.4], 中关于红色圆圈的滑动性质，态射 Δ_0^{v-1}满足



或者，从代数上说，

$$(\Delta_0^{v-1}\otimes \mathrm{E}_1)\circ\beta^2_{v-1,1}=\Delta_0^{v-1}\otimes \mathrm{E}_1\ .$$

如果 $a_0=0$，我们可以将 $\Delta_0^{v-1}=\lambda\cdot \mathrm{E}_{v-1}$ 写成某个标量 λ。然后，利用命题 2.6 的第一种情况，我们得到

$$\lambda(\zeta^{v-1}\cdot \mathrm{E}_v+2\zeta^{v-2}\cdot \mathrm{L}_v^0)=\lambda\cdot \mathrm{E}_v\,,$$

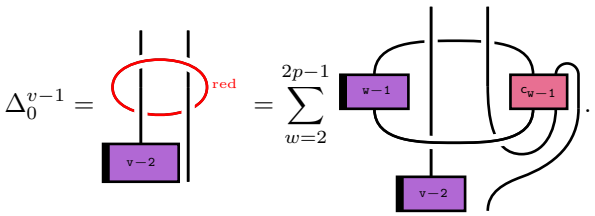
这意味着 $\lambda=0$。

如果 $a_0=1$，我们可以将 $\Delta_0^{v-1}=\lambda\cdot \mathrm{E}_{v-1}+\mu\cdot \mathrm{L}_{v-1}^0$ 写成某些标量 λ 和 μ。然后，类似地利用命题 2.6 的第二种情况，我们得到

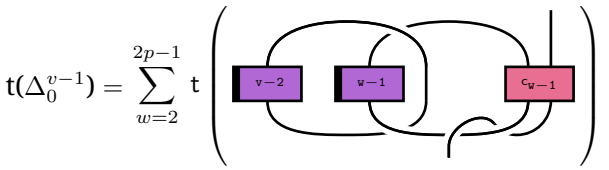
$$\lambda=0\,,\qquad \text{and}\qquad \zeta^{v-3}\mu=\mu\ .$$

如果 a_1 为偶数，这意味着 $\mu=0$，从而 $\Delta_0^{v-1}=0$。

因此，只需计算 $a_0=1$ 和 a_1 为奇数时的 $\Delta_0^{v-1}=\mu\cdot \mathrm{L}_{v-1}^0$。为此，只需计算修正迹 $\mathsf{t}(\Delta_0^{v-1})=\mu(-1)^{a_1-1}a_1$。现在，回忆根据方程（5），我们有：



利用修正迹与左偏迹的相容性以及其循环性，我们得到



记作 $w=[b_1,b_0]_{p,\ \ell}$。一方面，若 $b_0=0$，则色度态射 $\mathsf{c}_{\mathtt{w}-1}$ 是 $(-1)^{b_1-1}b_1$ 倍的恒等映射。因此，可以两次利用引理 2.12 的第一部分来化简上式最后一个和中的相应项，从而得到

$$(v-1)(-1)^{b_1-1}\cdot w(-1)^{1-1}\cdot(-1)^{b_1-1}b_1=2(v-1)b_1^2\ .$$

另一方面，若 $b_0=1$，则利用引理 2.12 和命题 2.6 的第二部分，可以将相应项化简为

$$\begin{aligned}2(v-1)b_1(-1)^{-(a_1-1)}\cdot\mathsf{t}(\mathsf{pTr}^L_{w-1}(\mathrm{Z}^0_w\circ\beta^{-2}_{w-1,1}\circ\mathrm{Y}^0_w))=&\\ =2(v-1)b_1(-1)^{-(a_1-1)}\zeta^{-(w-3)}\cdot\mathsf{t}(\mathsf{pTr}^L_{w-1}(\tilde{\mathrm{A}}^0_w))&\\ =2(v-1)b_1^2(-1)^{(b_1-1)-(a_1-1)}\zeta^{-(w-3)}&\\ =2(v-1)b_1^2(-1)^{-(a_1-1)},&\end{aligned}$$

根据引理 2.5，有 $\mathrm{L}^0_{w-1}\otimes\mathrm{E}_1=\mathrm{Y}^0_w$，且 $\mathsf{t}(\mathsf{pTr}^L_{w-1}(\tilde{\ }\mathrm{A}^0_w))=\mathsf{t}(\mathrm{E}_{w-2})=(-1)^{b_1-1}b_1$。因此我们得到

$$\Delta_0^{v-1}=(-1)^{a_1-1}2(v-1)\sum_{b_1=1}^{p-1}(b_1^2+(-1)^{a_1-1}b_1^2)=2(1+(-1)^{a_1-1})\frac{(p-1)p(2p+1)}{3}\ .$$

□

推论 3.7. 若 $p>3$，则函子 $\mathcal{S}^{\zeta^{1/2}}_{p^{(2)}}:\mathbf{HD}_4^{2\ 3\ 4}\to{}_{,,}\mathrm{Vec}$ 不能延拓到 $\mathbf{HD}_4^{1,2,3,4}{}_{,,}$，也就是说，不存在为 *1*-把手赋值的一致方法。

证明. 假设 $\tilde{\mathcal{S}}:\mathbf{HD}_4^{1\ 2\ 3\ 4}\to{}_{,,,}\mathrm{Vec}$ 延拓为 $\mathcal{S}^{\zeta^{1/2}}_{p^{(2)}}:\mathbf{HD}_4^{2\ 3\ 4}\to{}_{,,}\mathrm{Vec}$。考虑配边$W_1\colon S^3\to S^2\times S^1$，它由在 S^3 中的两个圆盘上附加一个 1-把手得到，其腰球面为 $S^2\times\{*\}$；再考虑配边 $W_2\colon S^2\times S^1\to S^3$，它由沿 $\{*\}\times S^1$ 附加一个 2-手柄得到。这两个把手附着相互抵消，因为腰球面与粘附球面横截地相交于一点，因此$\tilde{\mathcal{S}}(W_2)\circ\tilde{\mathcal{S}}(W_1)$ 是一个同构。这显然荒谬，因为根据命题 3.6，$\tilde{\mathcal{S}}(W_2)=\mathcal{S}^{\zeta^{1/2}}_{p^{(2)}}(W_2)=0$。

□

4 Co四维 2-柄体不变量的计算

上一节的结果使我们能够显式计算在 2-等价下四维 2-手柄体的不变量 $\dot{\mathcal{S}}^{\zeta^{1/2}}_{p^{(2)}}$。我们已在上文第 1.3 节回顾了如何根据手柄分解计算这一不变量。关键步骤总结于图1。特别地，按照约定，我们有 $\dot{\mathcal{S}}^{\zeta^{1/2}}_{p^{(2)}}(D^4)=1$，其中 D^4 指的是只有一个 4-柄的 2-手柄体。四维流形 D^4 可能存在其他作为四维 2-手柄体的表示 [Gom91], ，因此我们用 D^4 指代一个 2-手柄体，在某种程度上是滥用了记号。同样，以下我们将用 $\mathbb{C}P^2$和 $S^2\times S^2$ 指代这些四维流形的特定手柄分解。事实上，$\mathbb{C}P^2$ 和$S^2\times S^2$ 甚至不是 2-手柄体，因为它们的手柄分解同时包含一个 0-柄和一个 4-柄。只需省略 0-柄即可轻松解决这一问题。此外，我们还计算了 Mazur流形上的不变量，其上可能装饰有纽结图。

4.1 复射影平面

我们现对其柯比图采用黑板框架的两个 2-手柄体计算不变量 $\dot{\mathcal{S}}^{\zeta^{1/2}}_{p^{(2)}}$

 and .

滥用记号，我们将这两个 2-手柄体分别记为 $\mathbb{CP}^2$ 和 $\mathbb{CP}^2$。沿用 [CGHP23] 的记号，我们用 $\Delta_+ := \dot{\mathcal{S}}^{\zeta^{1/2}}_{p^{(2)}}(\mathbb{CP}^2)$ 和 $\Delta_- := \dot{\mathcal{S}}^{\zeta^{1/2}}_{p^{(2)}}(\overline{\mathbb{CP}}^2)$ 表示不变量 $\dot{\mathcal{S}}^{\zeta^{1/2}}_{p^{(2)}}$ 在 $\mathbb{CP}^2$ 和 $\overline{\mathbb{CP}}^2$ 上的取值。根据第 1.3 节的规定，并回顾我们在公式（17）中对纽结图 Γ_0 的标识，标量 $\Delta_\pm$ 可明确写为

$$\Delta_\pm = \mathsf{t}\left(\boxed{\theta^{\pm 1}} \,\middle|^{\mathbb{T}_{\zeta^{(1)}}} \right) = \sum_{v=2}^{p\ell-1} \mathsf{t}\big((\theta^{\pm}_{v-1} \otimes \mathrm{E}_1) \circ \mathsf{c}_{v-1}\big)\,.$$

定理 4.1。我们有

$$\Delta_\pm = \frac{(p-1)p(2p-1)}{3} \cdot \zeta^{\mp 1}\,.$$

特别地，$\mathrm{Ver}^{\zeta^{1/2}}_{p^{(2)}}$ 是扭转非退化的，当且仅当 $p = 3$。

证明。若 $v = [a_1, 0]_{p,\ \ell}$，则我们有

$$\mathsf{t}\big((\theta^{\pm}_{v-1} \otimes \mathrm{E}_1) \circ \mathsf{c}_{v-1}\big) = (-1)^{a_1-1} a_1 \cdot \mathsf{t}\big((\theta^{\pm}_{v-1} \otimes \mathrm{E}_1)\big) = 0\,,$$

由命题 3.4 以及修正迹与偏迹的相容性（如方程（1）所示）可得。

现在令 $v = [a_1, 1]_{p,\ \ell}$。结合命题 2.7、引理 2.5 以及恒等映射 $\mathrm{Y}^0_v \mathrm{Z}^0_v = \mathrm{A}^0_v$，我们得到

$$(\theta_{v-1} \otimes \mathrm{E}_1) \circ \mathsf{c}_{v-1} = a_1(-1)^{a_1-1} \cdot \mathrm{Z}^0_v + 2a_1(-1)^{a_1-1}\zeta^{-1} \cdot \mathrm{A}^0_v\,.$$

利用修正迹的循环性，我们继而得到

$$\mathsf{t}\big((\theta_{v-1} \otimes \mathrm{E}_1) \circ \mathsf{c}_{v-1}\big) = a_1(-1)^{a_1-1} \cdot 0 + 2a_1(-1)^{a_1-1}\zeta^{-1} \cdot \mathsf{t}(\mathrm{E}_{v-1}) = 2a_1^2\zeta^{-1}\,.$$

综上，我们得到

$$\Delta_+ = \sum_{a_1=1}^{p-1} 2a_1^2\zeta^{-1} = 2\zeta^{-1} \sum_{a_1=1}^{p-1} a_1^2 = \frac{(p-1)p(2p-1)}{3} \cdot \zeta^{-1}\,.$$

剩下的就是确定 Δ_-。对于 $v = [a_1, 1]_{p,\ \ell}$，不难验证

$$\theta^{-1}_{v-1} = \mathrm{E}_{v-1} + 2\zeta \cdot \mathrm{L}^0_{v-1}\,.$$

稍作调整上述论证，即可得出 $\Delta_- = (p-1)p(2p-1)/3 \cdot \zeta$。 □

注 4.2。 我们可以计算具有任意框架 $k \in \mathbb{Z}$ 的平凡结所对应的不变量。一方面，若 $v = [a_1, 0]_{p,\ \ell}$，则有

$$\mathsf{t}\big((\theta^k_{v-1} \otimes \mathrm{E}_1) \circ \mathsf{c}_{v-1}\big) = 0\,.$$

另一方面，若 $v = [a_1, 1]_{p,\ \ell}$，则通过调整上述定理 4.1 证明中使用的论证，可得

$$\mathsf{t}\big((\theta^k_{v-1} \otimes \mathrm{E}_1) \circ \mathsf{c}_{v-1}\big) = 2ka_1^2\zeta^{-1}\,.$$

总而言之，我们发现

$$\dot{\mathcal{S}}^{\zeta^{1/2}}_{p^{(2)}}\left(\bigcirc^{\,k} \right) = k\frac{(p-1)p(2p-1)}{3} \cdot \zeta^{-1}\,.$$

4.2 两个 2-球面的乘积

计算我们的不变量在 $S^2 \times S^2$ 上的取值很重要。具体而言，Gompf[Gom84] 的一项经典结果指出，任意两个同胚的 4-流形，在与足够多个 $S^2 \times S^2$ 作连通和后便会微分同胚。换言之， $S^2 \times S^2$-稳定化会消除奇异现象。因此，像 $\dot{\mathcal{S}}^{\zeta^{1/2}}_{p^{(2)}}$ 这样在连通和下具有乘法性的一个不变量，如果在 $S^2 \times S^2$ 上的取值非零，就无法检测奇异光滑结构。[4] 因此，我们的不变量在 $S^2 \times S^2$ 上取值为零，着实令人安心。

定理4.3. 若 $p \neq 3$，则有

$$\dot{\mathcal{S}}^{\zeta^{1/2}}_{p^{(2)}}\left(\quad\right) = 0\,.$$

若 $p = 3$，则有 $\dot{\mathcal{S}}^{\zeta^{1/2}}_{p^{(2)}}\ (S^2 \times S^2)\ = 1$。

证明. 根据定义，这个不变量是通过将 Hopf链环的两个分支都染成红色，然后使用色度态射将它们都变成蓝色来计算的，也就是使用方程（5）。为了进行这项计算，逐个将它们变成蓝色会更方便。这样做后，我们得到

$$\dot{\mathcal{S}}\left(\quad\right) = \mathsf{t}\left(\quad\right) = \sum_{v=2}^{2p-1} \mathsf{t}\left(\quad\right) = \sum_{v=2}^{2p-1} \mathsf{t}\left(\quad\right) = 0\,.$$

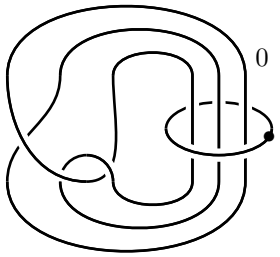
最后一个求和结果为零，因为根据命题 3.6，每个态射 Δ^0_{v-1} 在 $p > 3$ 时都消失。

□

4.3 马祖尔流形

我们最后来关注由以下对象表示的四维 2-手柄体：

$\mathrm{M} :=$



.

在上图中，整数 0 表示 2-手柄的框架，因此我们需要在黑板框架上添加三个正扭曲。

相应的四维流形是一个 Mazur流形，也就是说，它由一个 1-把手和一个 2-手柄构成，两者在代数上相互抵消。特别地，它与 4-圆盘同伦等价。值得注意的是，Akbulut 在 [Akb91] 中证明，M 是一个相对奇异流形：存在一个 M 的微分同胚 f ∂，它可以延拓为 M 的同胚，但不能延拓为微分同胚。

这一论证中最 微妙的部分是找到一个障碍，以阻止该微分同胚延拓
f 边界的 ary ∂M 到整个四维流形 M 的微分同胚。纽结图理论的四维 1

[4]这里的情况略显复杂，因为我们实际上定义的并非 $S^2 \times S^2$ 的不变量，而是将 $S^2 \times S^2$ 去掉一个球后视为 2-手柄体所得表示的不变量，并且该表示是按 2-等价来考虑的。

拓扑量子场论尤其适合这一目的。事实上，如果我们找到任意一个纽结图 $T \subset \partial \mathrm{M}$，使得不变量 $\mathcal{S}$ 能够将 T 与其在 f 下的像区分开来，即：

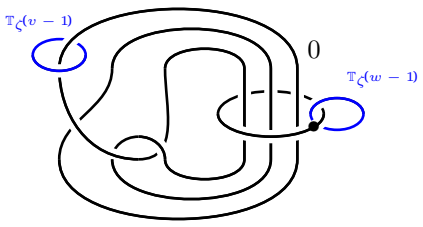
$$\mathcal{S}(-\mathrm{M})(T) \neq \mathcal{S}(-\mathrm{M})(f(T))\,,$$

那么便可立即得出结论： f 无法延拓为 M 的微分同胚。请注意，在上述论证中，如果 $\mathcal{S}$ 仅是在二等价下的四维 2-手柄体的不变量，则存在一个微妙之处。

对于 Mazur流形 M，边界上的微分同胚 f 是通过交换带点分支和不带点分支得到的。特别地，它将其中一个分支的子午线映到另一个分支的子午线。因此，如果我们能为带点分支和不带点分支的子午线选取颜色，使得交换它们时得到不同的不变量，就能证明 f 无法延拓到 M。现在我们来考察不变量 $\mathcal{S}^{\zeta^{1/2}}_{p^{(2)}}$ 能否提供这样的障碍。

定义4.4。 对于 $v = [a_1, a_0]_{p,\ \ell}$ 和 $w = [b_1, b_0]_{p,\ \ell}$，我们将 $\mathrm{M}_{v-1,\ w-1} \in \Bbbk$ 记作 Mazur流形的不变量，其中不带点分支的子午线取颜色 $\mathbb{T}_\zeta(v-1)$，带点圆的子午线取颜色 $\mathbb{T}_\zeta(w-1)$。[5] 图示如下

$$\mathrm{M}_{v-1,w-1} := \mathcal{S}^{\zeta^{1/2}}_{p^{(2)}}\left(\right.$$



$$\left.\right)\,.$$

我们也分别用 $\mathrm{M}_{0,w-1}$ 和 $\mathrm{M}_{v-1,0}$ 表示相应的不变量，即在 M 的无点圆点分量和有点圆点分量周围各绕一条子午线。我们还写作 $\mathrm{M}_{0,0} = \dot{\mathcal{S}}^{\zeta^{1/2}}_{p^{(2)}}(\mathrm{M})$，按定义，这对应于 M 的无子午线不变量，但其中包含纽结图 Γ_0。

在高度 $n = 2$ 且 ζ 为本原四次单位根时，混合维尔林德范畴 $\mathrm{Ver}^{\zeta^{1/2}}_{p^{(2)}}$ 不会给出能够检测将 f 扩展到 M 的所有部分时所遇障碍的不变量 $\mathcal{S}^{\zeta^{1/2}}_{p^{(2)}}$。

命题 4.5。 设 $v = [a_1, a_0]_{p,\ell}$ 和 $w = [b_1, b_0]_{p,\ell}$，则有

$$\mathrm{M}_{v-1,w-1} = \begin{cases} -14\, a_1 b_1\,, & \text{if } a_0 = 0 \text{ and } b_0 = 0\,, \\ 4(-1)^{b_1-1} a_1 b_1\,, & \text{if } a_0 = 1 \text{ and } b_0 = 0\,, \\ 4(-1)^{a_1-1} a_1 b_1\,, & \text{if } a_0 = 0 \text{ and } b_0 = 1\,, \\ 0\,, & \text{if } a_0 = 1 \text{ and } b_0 = 1\,, \end{cases}$$

$$\mathrm{M}_{v-1,0} = \begin{cases} (-1)^{a_1-1} a_1\,, & \text{if } a_0 = 0\,, \\ 0\,, & \text{if } a_0 = 1\,, \end{cases} \qquad \mathrm{M}_{0,w-1} = \begin{cases} (-1)^{b_1-1} b_1\,, & \text{if } b_0 = 0\,, \\ 0\,, & \text{if } b_0 = 1\,, \end{cases} \qquad \mathrm{M}_{0,0} = 1\,.$$

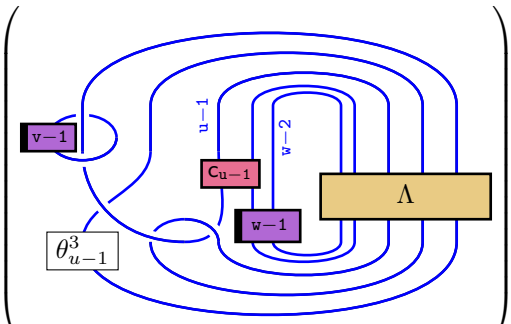
特别地，对于所有 $1 \leq v$、 $w \leq 2p-1$，我们有 $\mathrm{M}_{v-1,w-1} = \mathrm{M}_{w-1,v-1}$。

证明。 要给出一种适用于上述所有情形的统一计算方法颇具挑战。这是因为根据出现的编织不同，我们必须以不同方式调用方程（5）。

[5] 我们无需规定子午线的定向，因为所有对象 $\mathbb{T}_\zeta(v-1)$ 都是自对偶的。

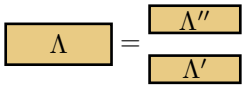
情形 1： $w-1$ **为奇数。** 在这种情形下，必有 $b_0=0$，因此我们知道 $w-1\neq 0$。于是，我们可以对由 $\mathbb{T}_\zeta(w-1)$ 着色的线股使用方程（5）。我们得到

$$\mathrm{M}_{v-1,\ w-1}=\sum_{u=[c_1,c_0]_{p,\ell}}\tilde{\mathrm{t}}\left(\right.$$



$$\left.\right).$$

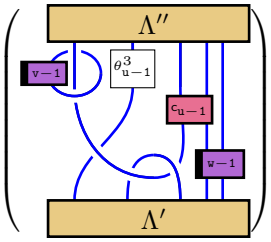
现在回想一下，切割态射 Λ 经过单位对象分解，即它是从输入股到单位对象的态射与从单位对象到输出股的态射的复合态射的线性组合。为简化图示，我们将明确写出这一分解：



并省略求和符号。

注意，我们切割的是 $3(u-1)+(w-1)$ 股，因此当 $u-1$ 和 $w-1$ 奇偶性不同时，切割态射 Λ 为零。鉴于我们假设 $b_0=0$，求和将缩减为形如 $u=[c_1,0]_{p,\ \ell}$ 的项，因此 $\mathbb{T}_\zeta(u-1)$ 是单对象。于是，上述求和变为

$$\mathrm{M}_{v-1,\ w-1}=\sum_{u=[c_1,0]_{p,\ell}}\tilde{\mathrm{t}}\left(\right.$$



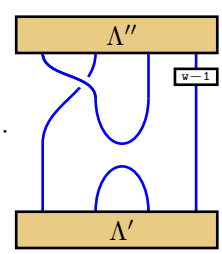
$$\left.\right).$$

我们已经确定了上述图示中的大部分组成部分。具体而言，根据命题 3.4，色度态射为 $\mathrm{c}_{u-1}=(-1)^{c_1-1}c_1\cdot(\mathrm{E}_{u-1}\otimes\mathrm{E}_1)$。根据命题 2.7，扭曲为 $\theta^3_{u-1}=(-1)^{c_1}\zeta^{\frac{9}{2}}\cdot\mathrm{E}_{u-1}$。此外，用 $\mathbb{T}_\zeta(v-1)$ 环绕可得到 $e_{u,\ v}\cdot\mathrm{E}_{u-1}$，其中 $e_{u,\ v}$ 是由下式给出的标量

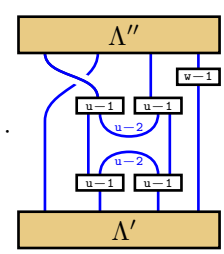
$$e_{u,v}=\begin{cases} v(-1)^{c_1-1}\,, & \text{if}\ \ a_0=0\,,\\ 2(v-1)\,, & \text{if}\ \ a_0=1\,,\\ 1\,, & \text{if}\ \ v-1=0\,.\end{cases}\tag{18}$$

这由引理 2.12 得出；在 $a_0=1$ 的情形下，需要应用两次，并利用本情形中 $\mathbb{T}_\zeta(v-1)=\mathbb{T}_\zeta(v-2)\otimes\mathbb{T}_\zeta(1)$。若 $v-1=0$，注意到我们环绕时没有线股。最后，我们可以调用定理 2.14 的第一部分来确定 Hopf 配对。于是得到

$$\mathrm{M}_{v-1,\ w-1}=\sum_{u=[c_1,0]_{p,\ell}}{}^{-c_1\zeta^{\frac{1}{2}}e_{u,v}\cdot\tilde{\mathrm{t}}}\left(\zeta\cdot\right.$$



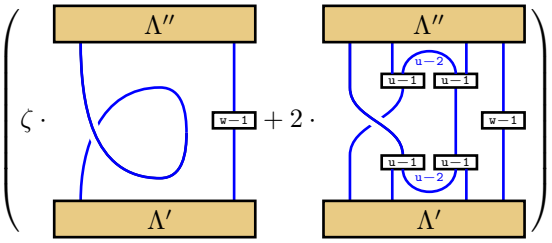
$$+\,2\cdot$$



$$\left.\right).$$

由切割态射 [CGHP23 的自然性，Lemma 1.1(2)]，可知，我们可以将任意态射滑过。因此，得到

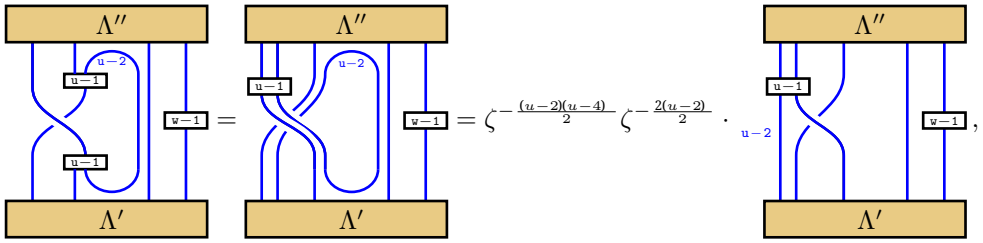
$$\mathrm{M}_{v-1,\ w-1} = \sum_{u=[c_1,0]_{p,\ \ell}} -c_1\zeta^{\frac{1}{2}}e_{u,\ v}\cdot\tilde{\mathrm{t}}$$



对于第一项，我们利用命题 2.7 来确定扭曲，因此只剩下以下计算，可由引理 1.6 完成：

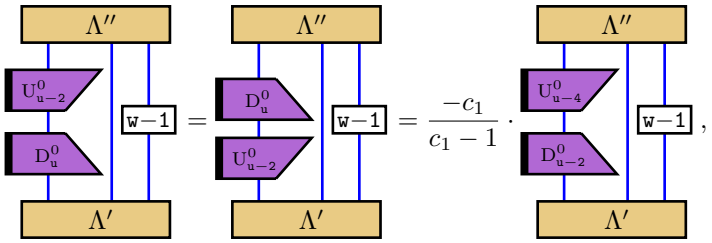
$$\tilde{\mathrm{t}}\left(\begin{array}{c}\Lambda''\\ \mathrm{u-1}\quad \mathrm{w-1}\\ \Lambda'\end{array}\right) = \dim\,\mathrm{Hom}(\mathbb{T}_\zeta(u-1),\mathbb{T}_\zeta(w-1)) = \delta_{u,w}\,.$$

对于第二项，我们可以利用引理 2.5 去掉右侧的两个幂等元 E_{u-1}。因此可得



其中，第一个等式源于切割态射的自然性。从图示上看，这相当于将标记为 E_{u-1} 的纽结图块滑过切割态射。第二个等式通过反复使用公式 (8)，并计算每次消去的交叉数得出。

最后，我们消解最后一个剩余的交叉，从而产生两项。一方面，非恒等项为零。也就是说，如果 $c_1 = 1$，这由切割态射的自然性得出。一般情形可以使用下式归约到该情形



(19)

其中，第一个等式源于切割态射的自然性，而第二个等式则是公式（9）。另一方面，恒等项可以使用引理 1.6 进行计算，从而得到

$$\tilde{\mathrm{t}}\left(\begin{array}{c}\Lambda''\\ \mathrm{u-1}\quad \mathrm{w-1}\\ \Lambda'\end{array}\right) = \dim\,\mathrm{Hom}(\mathbb{T}_\zeta(u),\mathbb{T}_\zeta(w)) = \delta_{u,w-2} + 2\delta_{u,w} + \delta_{u,w+2}\,.$$

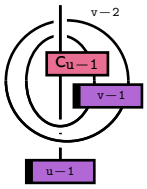
当 $b_1 = 1$ 和 $b_1 = p-1$时，分别省略首项和末项。注意，在这些情况下，c_1 会等于 0 或 p，因此这些项在 $\Bbbk$ 中会自动消失。

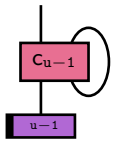
综合以上讨论，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_{v-1,w-1} &= \sum_{u=[c_1,0]_{p,\ell}} -c_1\zeta^{\frac{1}{2}} e_{u,v}\cdot\left(\zeta\cdot(-1)^{c_1}\zeta^{-\frac{3}{2}}\cdot\delta_{u,w}+2\cdot\zeta^{\frac{(u-2)^2}{2}}\cdot\zeta^{-\frac{1}{2}}\cdot(\delta_{u,w-2}+2\delta_{u,w}+\delta_{u,w+2})\right)\\ &= \sum_{u=[c_1,0]_{p,\ell}} -c_1\, e_{u,v}\cdot\left((-1)^{c_1}\delta_{u,w}+2(-1)^{c_1-1}\cdot(\delta_{u,w-2}+2\delta_{u,w}+\delta_{u,w+2})\right)\\ &= (-1)^{b_1-1}2(b_1-1)e_{w-2,v}+(-1)^{b_1}b_1 e_{w,v}(-1+4)+(-1)^{b_1+1}2(b_1+1)e_{w+2,v}\,.\end{aligned}$$

至此，情形 $b_0=0$ 的讨论结束，因为我们已在式（18 中确定了标量 $e_{u,\ v}$ ）.

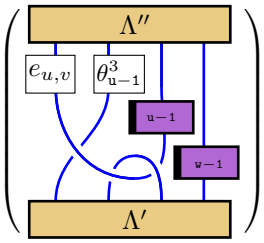
情形2： $w-1$ **为偶数**。在这种情况下，我们有 $w-1=0$ 或 $w=[b_1,1]_{p,\ \ell}$。我们进一步假设，要么 $v-1\neq 0$，要么 $v-1=w-1=0$。若 $v-1\neq 0$，我们将在标记为 $\mathbb{T}_\zeta(v-1)$ 的纽结图上使用方程（5）；若 $v-1=w-1=0$，则在标记为 $\mathbb{T}_\zeta(1)$ 的纽结图 Γ_0 上使用方程（5）。沿着这个方向，我们设

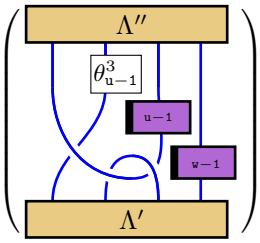
$e_{u,v}=$ 

若 $v-1\neq 0$ or $e_{u,v}=$ 

若 $v-1=w-1=0$.

因此我们有

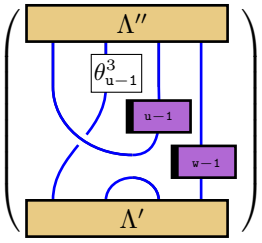
$\mathrm{M}_{v-1,\ w-1}=\sum_{u=[c_1,1]_{p,\ell}}\tilde{\mathrm{t}}$ 

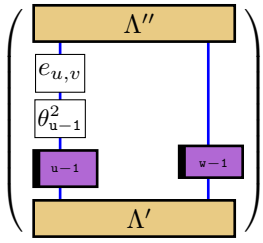
$=\sum_{u=[c_1,1]_{p,\ell}}\lambda_{u,v}\cdot\tilde{\mathrm{t}}$ 

.

首先，注意到该和只包含形如 $u=[c_1,1]_{p,\ell}$ 的项。这是因为我们正在穿过 $3(u-1)+(w-1)$ 股，因此如果 $u-1$ 和 $w-1$ 的奇偶性不同，切割态射 Λ 就会消失。第二个等式可通过观察得到：自同态 $e_{u,v}$ 可写为$e_{u,v}=\lambda_{u,v}\cdot\mathrm{E}_{u-1}+\mu_{u,v}\cdot\mathrm{L}^0_{u-1}$，其中 $\lambda_{u,v}$ 和 $\mu_{u,v}$ 是某些标量。根据方程（19）附近给出的论证，L^0_{u-1} 项没有贡献。

现在，根据定理 2.14 的第四部分，$\mathbb{T}_\zeta(u-1)$ 与自身的 Hopf 配对具有非常特殊的形式。首项由一个未链接的帽和杯组成，而所有附加项都至少包含一对态射 U^0_{u-1} 和 D^0_{u-1}。借助式 (19) 附近所给论证的一个变体，我们注意到附加项不会产生贡献。因此我们有

$\mathrm{M}_{v-1,\ w-1}=\sum_{u=[c_1,1]_{p,\ell}}\lambda_{u,v}\cdot\tilde{\mathrm{t}}$ 

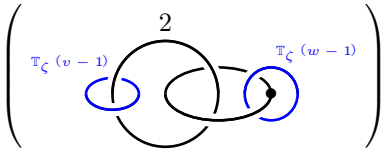
$=\sum_{u=[c_1,1]_{p,\ell}}\tilde{\mathrm{t}}$ 

.

第二个等式由 $e_{u,\ v} = \lambda_{u,\ v} \cdot \mathrm{E}_{u-1} + \mu_{u,\ v} \cdot \mathrm{L}^{0}_{u-1}$ 以及上述论证得出。

此时，只需确定态射 $e_{u,\ v_0}$。我们不直接求出它，而是注意到，上文得到的 $\mathrm{M}_{v-1,\ w-1}$ 的最后一个表达式，对应于另一个四维 2-手柄体的不变量：它由一个带点分支与一个框架为 2 的不带点分支构成的 Hopf链环给出。图示如下：

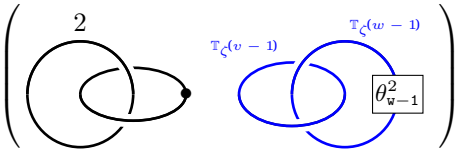
$$\mathrm{M}_{v-1,\ w-1} = \mathcal{S}^{\zeta^{1/2}}_{p^{(2)}} \left(\right.$$



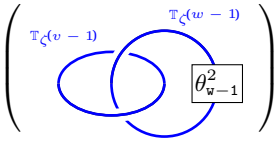
$$\left. \right) .$$

这两个手柄相互抵消，因此这个 2-手柄体就是 4-圆盘。利用滑动关系将纽结图从手柄中解开，我们得到

$$\mathrm{M}_{v-1,\ w-1} = \mathcal{S} \left(\right.$$



$$\left. \right) = \tilde{\mathrm{t}} \left(\right.$$



$$\left. \right) .$$

右侧可利用引理 2.12 和命题 2.7 计算，从而完成我们的计算。

最后，$v-1=0$，且 $w-1$ 为非零偶数的情形也可通过类似的论证得出。证明至此结束。

□

参考文献

[AK79] Selman Akbulut 和 Robion Kirby。Mazur 流形。《密歇根数学杂志》，26(3):259–284，1979。[AK92] Henning H. Andersen 和 Wu Kexin。量子代数的表示：混合情形。《纯粹与应用数学杂志》，427:35–50，1992。[Akb91] Selman Akbulut。一个假紧致可缩四维流形。《微分几何杂志》，33(2):335–356，1991。[BD95] John Baez 和 James Dolan。高维代数与拓扑量子场论。《数学物理杂志》，36(11):6073–6105，1995。arXiv:q-alg/9503002。[BDR24] Anna Beliakova 和 Marco De Renzi。四维 2-手柄体上的 Kerler–Lyubashenko 函子。《国际数学研究通知》，2024(13):10005–10080，2024。arXiv:2105.02789。[BEO23] Dave Benson、Pavel Etingof 和 Victor Ostrik。正特征下的新不可压缩对称张量范畴。《杜克数学杂志》，172(1):105–200，2023。arXiv:2003.10499。[BHMV92] Christian Blanchet、Nathan Habegger、Gregor Masbaum 和 Pierre Vogel。由 Kauffman 括号导出的三维流形不变量。《拓扑学》，31(4):685–699，1992。[BHMV95] Christian Blanchet、Nathan Habegger、Gregor Masbaum 和 Pierre Vogel。由 Kauffman 括号导出的拓扑量子场论。《拓扑学》，34(4):883–927，1995。[BJS21] Adrien Brochier、David Jordan 和 Noah Snyder。关于编织张量范畴的可对偶性。《数学汇刊》，3:435–483，2021。arXiv:1804.07538。[CGHP23] Francesco Costantino、Nathan Geer、Benjamin Ha¨ıoun 和 Bertrand Patureau-Mirand。来自非半单辫带范畴的 skein $(3{+}1)$-拓扑量子场论，2023。arXiv:2306.03225。

[CGP23] Francesco Costantino、Nathan Geer 和 Bertrand Patureau-Mirand。可容许 skein 模，2023。arXiv:2302.04493。[CKY97] Louis Crane、Louis Kauffman 和 David Yetter。四维流形的态和不变量。《纽结理论及其分支》，6(2):177–234，1997。arXiv:hep-th/9409167。[Cou21] Kevin Coulembier。幺半阿贝尔包络。《数学汇刊》，157(7):1584–1609，2021。arXiv:2003.10105。[CY93] Louis Crane 和 David Yetter。四维拓扑量子场论的范畴论构造。载于《量子拓扑》，《纽结与一切》丛书，第3卷，第120–130页。World Sci. Publ.，1993。[D´ec24] Thibault D. D´ecoppet。高阶 Verlinde 范畴：混合情形，2024。arXiv:2407.20211。[D´ec25] Thibault D. D´ecoppet。有限编织张量范畴的相对可逆性与完全可对偶性，2025。arXiv:2506.16241。[DGG+22] Marco De Renzi、Azat M. Gainutdinov、Nathan Geer、Bertrand Patureau-Mirand 和 Ingo Runkel。来自非半单模范畴的三维拓扑量子场论。《Selecta Math.》（新辑），28:42，2022。arXiv:1912.02063。[EGNO15] Pavel Etingof、Shlomo Gelaki、Dmitri Nikshych 和 Victor Ostrik。张量范畴。《数学调查与专著》。AMS，2015。[FM24] Quentin Faes 和 Maksymilian Manko。非因子化带状 Hopf 代数，2024。arXiv:2503.19532。[GKP11] Nathan Geer、Jonathan Kujawa 和 Bertrand Patureau-Mirand。带状范畴上的广义迹与修正维数函数。《Selecta Math.》（新辑），17(2):453–504，2011。arXiv:1001.0985。[GKP22] Nathan Geer、Johnathan Kujawa 和 Bertrand Patureau-Mirand。在（非幺模）本质范畴中的 M-迹。《代数与表示论》，25:759–776，2022。arXiv:1809.00499。[Gom84] Robert E. Gompf。紧致4维流形的稳定微分同胚。《拓扑学》，18:115–120，1984。[Gom91] Robert E. Gompf。消灭 Akbulut-Kirby 4球面，并论及 Andrews-Curtis 问题和 Schoenflies 问题。《拓扑学应用》，30(1):97–115，1991。[Haï24a] Banjamin Haïoun。通过把手附着定义扩展拓扑量子场论，2024。arXiv:2412.14649。[Haï24b] Benjamin Haïoun。非半单量子不变量的高阶代数方法。博士论文，图卢兹大学，2024。[Haï25a] Benjamin Haïoun。Crane-Yetter 边界处的非半单 WRT，2025。arXiv:2503.20905。[Haï25b] Benjamin Haïoun。编织张量范畴中的单位嵌入与（非紧致）相对拓扑量子场论。《几何与拓扑》，29(4):2175–2216，2025。arXiv:2304.12167。[JS17] Theo Johnson-Freyd 和 Claudia Scheimbauer。（余）松自然变换、扭曲量子场论与“更高层次”的 Morita 范畴。《数学进展》，307:147–223，2017。arXiv:1502.06526。

[Juh18] Andr´as Juh´asz. 通过手术定义并分类拓扑量子场论。Quantum Top., 18:229–321, 2018. arXiv:1408.0668.[KL94] Louis H. Kauffman and S´ostenes L. Lins. Temperley–Lieb 重耦合理论与三维流形不变量。《数学年刊研究》。普林斯顿大学出版社，1994.[KM91] Robion Kirby and Paul Melvin. sl(2, C) 的 Witten 和 Reshetikhin-Turaev 三维流形不变量。Invent. Math., 105:473–545, 1991.[Lic91a] W. B. Raymond Lickorish. 基于 Jones 多项式组合学的三维流形不变量。Pacific J. Math., 149(2):337–347, 1991.[Lic91b] W. B. Raymond Lickorish. 三维流形与 Temperley-Lieb 代数。Math. Ann., 290:657–670, 1991.[Lic92] W. B. Raymond Lickorish. 运用 Temperley-Lieb 代数进行计算。Comment. Math. Helvetici, 67:571–591, 1992.[Lur10] Jacob Lurie. 拓扑场论的分类。Curr. Dev. Math., 1:129–280, 2010.[Man] Maksymilian Manko. 非因子化带状 Hopf 代数的表示论。arXiv:2510.24263.[Mil65] John Milnor. h-配边定理讲义。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1965。笔记由 L. Siebenmann 和 J. Sondow 整理。[MV94] Gregor Masbaum and Pierre Vogel. 三价图与 Kauffman 括号。Pacific J. Math., 164(1):361–381, 1994.[Reu23] David Reutter. 半单四维拓扑场论无法探测奇异光滑结构。J. Topology, 16(2):542–566, 2023. arXiv:2001.02288.[RS25] David Reutter and Christopher Schommer-Pries. 半单场论能够探测稳定微分同胚。Advances Math., 482(B):110598, 2025. arXiv:2206.10031.[RT91] Nicolai Reshetikhin and Vladimir G. Turaev. 通过链环多项式和量子群得到的三维流形不变量。Invent. Math., 103(1):547–597, 1991.[RW24] Qiuyu Ren and Michael Willis. Khovanov 同调与奇异四维流形，2024。arXiv:2402.10452.[STWZ23] Louise Sutton, Daniel Tubbenhauer, Paul Wedrich, and Jieru Zhu. SL_2 混合情形下的倾斜模。Selecta Math. (N.S.), 29(3):39, 2023. arXiv:2105.07724.[Tur92] Vladimir G. Turaev. 模范畴与三维流形不变量。Int. J. Mod. Phys. B, 6(11n12):1807–1824, 1992.[Tur94] Vladimir G. Turaev. 纽结与三维流形的量子不变量，数学研究丛书第18卷。Walter de Gruyter，1994.[Wit89] Edward Witten. 量子场论与 Jones 多项式。Commun. Math. Phys., 121:351–399, 1989.