arXiv:2512.14852v1 [math.RA] 16 Dec 2025

分次弗罗贝尼乌斯代数的线性代数方法

S. D ˘ASC ˘ALESCU[1], C. N ˘AST ˘ASESCU[2], L. N ˘AST ˘ASESCU[2] 和 P. REBENCIUC[1]

Abstract. 设 A 是一个由群 G分次的有限维代数，且 $\sigma \in G$，我们定义一种与 A 和 σ 相关联的拟群矩阵变体，并用它刻画 A的 σ分次弗罗贝尼乌斯性质。我们讨论这类拟群矩阵的可逆性，然后用它们检验某些分次代数是否具有σ分次弗罗贝尼乌斯性质或（分次）对称性。作为应用，我们揭示量子多项式代数的 Koszul 对偶的（分次）弗罗贝尼乌斯性质和对称性质。我们仅用线性代数方法推导出 σ分次弗罗贝尼乌斯代数的一个结构结果。

2020年数学主题分类：16W50、15A09、16L60、16S36、16S37

关键词：分次代数、分次弗罗贝尼乌斯代数、分次对称代数、拟群矩阵、量子多项式代数、Koszul 对偶、矩阵代数上的良好分次。

1. Introduction and preliminaries

弗罗贝尼乌斯代数是有限维代数中最有趣的一类。它们源于 Frobenius [4], 的研究，曾在代数、拓扑学、纽结理论、霍普夫代数理论、数理物理等领域中出现。Frobenius 最初通过一些称为拟群矩阵的矩阵，对这类代数作出了刻画。

若有限维代数 A 满足 A，且其线性对偶 A^* 与之作为左 A-模同构，则称其为 Frobenius 代数。文献 [3]将 Frobenius 性质的一种形式引入分次代数：若 A 是按群 G分次的有限维代数，且 $\sigma \in G$，则称 A 为 σ分次 Frobenius 代数，若作为分次左 A-模有 $A^* \simeq A(\sigma)$，其中 $A(\sigma)$表示将 A移位 σ；定义见第 3 节。这类对象曾出现在非交换几何中某些代数的分类结果里 [7], ，也用于证明非交换的伯恩斯坦-盖尔范德-盖尔范德对应 [5]。人们尤其关注 ε分次 Frobenius 代数，其中 ε 是 G的单位元；这类代数简称分次 Frobenius 代数，它们正是 G分次向量空间的幺半范畴中的 Frobenius 代数，见 [3]。若满足更强的性质，即作为分次 A- 双模有 $A^* \simeq A$，则称 A 为分次对称代数。

我们的目标是本着 Frobenius 最初的方法，发展一种研究分次弗罗贝尼乌斯代数的线性代数方法。设 G 是一个乘法群，其单位元为ε，并设 $A = \oplus_{g\in G} A_g$ 是域 K上的有限维 G分次代数。对于每个$g \in G$，令 $(e_i)_{i\in J_g}$ 为 A_g的线性基；若 $A_g = 0$，则取 $J_g = \emptyset$。记 J 为所有 $g \in G$对应的 J_g之并集；那么 $(e_i)_{i\in J}$是 A的齐次基。对于任意 $i,\ j \in J$，记$e_i e_j = \sum_{\ell\in J} c_{ij\ell} e_\ell$；标量 $(c_{ij\ell})_{i,\ j,\ \ell\in J}$ 称为 A的结构常数。

固定某个 $\sigma \in G$。对于任意标量族 $\alpha = (\alpha_\ell)_{\ell \in J_\sigma}$，我们考虑矩阵$P(\sigma, \alpha) \in M_J(K)$，其（$i$, j）项对于任意 i, $j \in J$均为 $\sum_{\ell \in J_\sigma} \alpha_\ell c_{ij\ell}$；我们称这样的 $P(\sigma, \alpha)$为与 A相关联的 σ-副乘法矩阵。约定以空集为指标的求和为 0，因此若 $A_\sigma = 0$，则 σ-副乘法矩阵自动为 0。

我们还对每个 $g \in G$ 考虑矩阵 C_g，其行由 $J_{\sigma g^{-1}} \times J_\sigma$ 索引，列由 J_g索引；对于任意$r \in J_{\sigma g^{-1}}$、$\ell \in J_\sigma$ 和 $j \in J_g$，第 r, ℓ 行、第 j 列上的元素为 $c_{rj\ell}$。按照约定，行集或列集为空的矩阵称为空矩阵，它是可逆的，且秩为 0。我们用 $P(\sigma, \alpha)_{F,F'}$ 表示由 F 中的行与 F' 中的列相交得到的 $P(\sigma, \alpha)$ 的子矩阵。我们将在第 2 节给出以下关于 σ-副乘法矩阵可逆性的刻画。

定理 A. 设 $\alpha = (\alpha_\ell)_{\ell \in J_\sigma}$ 是一个标量族。以下条件等价。
(1) $P(\sigma, \alpha)$ 可逆。(2) $|J_\varepsilon| = |J_\sigma|$，$P(\sigma, \alpha)_{J_\varepsilon, J_\sigma}$ 可逆，且对任意 $g \in G$，其秩 $C_g = |J_g|$。(3) 对任意 $g \in G$，我们有 $|J_{\sigma g^{-1}}| = |J_g|$，且 $P(\sigma, \alpha)_{J_{\sigma g^{-1}}, J_g}$ 可逆。

第 3 节利用拟群矩阵证明以下关于 σ-分次 Frobenius 性质的刻画。

命题 B. A 是 σ-分次 *Frobenius*，当且仅当存在一个标量族$\alpha = (\alpha_\ell)_{\ell \in J_\sigma}$，使得 σ-副乘法矩阵 $P(\sigma, \alpha)$ 可逆。

我们还给出了适用于分次对称代数的命题 B 版本。在第 4 节中，我们利用这些结果检验一类如下构造的代数是否具有 σ-分次 Frobenius 性质和（分次）对称性质。设 $n \geq 2$ 为一个整数，并设$\mathbf{q} = (q_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}$ 为一族非零标量。考虑由 n 个不定元生成的量子多项式代数 $K_{\mathbf{q}}[X_1, \ldots, X_n]$；它是自由 K代数$K\langle X_1, \ldots, X_n \rangle$ 在 n 个字母上的商代数，其商理想由所有 $X_j X_i - q_{ij} X_i X_j$生成，其中 $1 \leq i < j \leq n$。接着考虑有限维代数 $A(\mathbf{q}) = K_{\mathbf{q}}[X_1, \ldots, X_n]/(X_1^2, \ldots, X_n^2)$。若对于任意 i, j都有$q_{ij} = -1$，则 $A(\mathbf{q})$ 同构于一个维数为 n的向量空间的外代数。我们将说明，$A(\mathbf{q})$ 是某个量子多项式代数的 Koszul 对偶。

将 $x_1, \ldots, x_n$ 记为 $X_1, \ldots, X_n$ 在 $A(\mathbf{q})$ 中的类，$A(\mathbf{q})$ 的一组基由所有满足 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}$ 的 $x_1^{\varepsilon_1} \ldots x_n^{\varepsilon_n}$ 组成。于是，$A(\mathbf{q})$ 带有一个 $\mathbb{Z}$-分次，其度为 d 的齐次分量是所有满足 $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n = d$ 的 $x_1^{\varepsilon_1} \ldots x_n^{\varepsilon_n}$ 的张成空间，其中 d 可以是任意元素。$A(\mathbf{q})$ 也带有一个 $\mathbb{Z}_2^n$- 分次，使得对任意 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}$，度为 $(\widehat{\varepsilon_1}, \ldots, \widehat{\varepsilon_n})$ 的齐次分量为 $K x_1^{\varepsilon_1} \ldots x_n^{\varepsilon_n}$。我们证明如下结论。

命题 C。(i) $A(\mathbf{q})$ 是一个 *Frobenius* 代数，当且仅当.....时，它是一个对称代数

$$q_{in} = \left(\prod_{1 \leq p < i} q_{pi} \right) \cdot \left(\prod_{i < p \leq n-1} q_{ip}^{-1} \right)$$

对任意 $1 \leq i \leq n-1$ 均成立。(ii) 视为带有 $\mathbb{Z}_2^n$-分次时， $A(\mathbf{q})$ 是$(\hat{}1, \ldots, \hat{}1)$-分次 *Frobenius* 代数，但对于任意 $\sigma \neq (\hat{}1, \ldots, \hat{}1)$，它都不是 σ-分次 *Frobenius* 代数。(iii) 视为带有 $\mathbb{Z}$-分次时， $A(\mathbf{q})$ 是 n-分次 *Frobenius* 代数，但对于任意 $j \neq n$，它都不是 j-分次 *Frobenius* 代数。

我们还使用命题 B 的对称版本来证明，赋予良好分次（即每个通常的矩阵单位都是齐次元素）的满矩阵代数是分次对称的。

最后，在第 5 节中，我们从定理 A 推导出以下关于 σ分次弗罗贝尼乌斯代数的结构结果。

推论 D。 ([3, 定理 4。3])</style有限维 分次代数 是 分次弗罗贝尼乌斯代数，当且仅当它是左 忠实的，并且 $(A_\sigma)^* \simeq A_\varepsilon$ 作为左 A_ε模。

这一结果的原始证明见 [3], ，其中运用了分次环的构造和方法，包括余诱导函子。我们的方法只使用线性代数方法。

关于分次代数的基本事实，请参阅 [8]。

2. Invertible σ-paratrophic matrices

我们沿用引言中所述的设定。因此， G 是一个以 ε为单位元的群， σ 是 G中的一个固定元素， A 是有限维的 G-分次代数，$(e_i)_{i\in J}$是 A 的一组由齐次元素组成的基，其中度为 $g \in G$ 的元素由 J_g索引，而$(c_{ij\ell})_{i,\ j,\ \ell}$ 是相应的结构常数。若 $i \in J_g$ 且 $j \in J_h$，其中 g， $h \in G$，则$e_i e_j$ 的度为 gh，因此对任意 $\ell \notin J_{gh}$，都有 $c_{ij\ell} = 0$ 。

I对于 g， h， $k \in G$和 $i \in J_g$， $j \in J_h$， $p \in J_k$，由 $(e_i e_j)\ e_p = e_i\ (e_j e_p)$ 可得

$$\sum_{\ell \in J_{gh}} c_{ij\ell} c_{\ell pr} = \sum_{\ell \in J_{hk}} c_{i\ell r} c_{jp\ell} \tag{1}$$

对任意 $r \in J$。

定理 A 的证明： 对任意 i， $j \in J$，记 P（σ， α）的第（i， j）个元素为 $p_{ij} = \sum_{\ell \in J_\sigma} \alpha_\ell c_{ij\ell}$。

(1) $\Rightarrow$ **(2)** 划分 $J = \cup_{g\in G} J_g$给出了 $P(\sigma, \alpha)$ 的一种表示，其中可能非零的块为 $P(\sigma, \alpha)_{J_{\sigma g^{-1}}, J_g}$，而其他块均为 $P(\sigma, \alpha)_{J_h, J_g}$ 的形式，且全为零。若 $|J_\varepsilon| \neq |J_\sigma|$，则通过对行 i（其中有$i \in J_\varepsilon$ ）作拉普拉斯展开（当 $|J_\varepsilon| > |J_\sigma|$时），或在 $|J_\varepsilon| < |J_\sigma|$时对列 j（其中有 $j \in J_\sigma$）作拉普拉斯展开，可得 $\det(P(\sigma, \alpha)) = 0$。因此 $|J_\varepsilon| = |J_\sigma|$，而对 J_ε 中的行作拉普拉斯展开可得 $\det(P(\sigma, \alpha)) = M \det(P(\sigma, \alpha)_{J_\varepsilon, J_\sigma})$，其中某个 $M \in K$，故 $\det(P(\sigma, \alpha)_{J_\varepsilon, J_\sigma}) \neq 0$，这表明 $P(\sigma, \alpha)_{J_\varepsilon, J_\sigma}$ 可逆。

现在取 $g \in G$ ，并令 $(y_j)_{j\in J_g} \subset K$ 满足

$$\sum_{j \in J_g} c_{rj\ell} y_j = 0 \tag{2}$$

对任意 $(r,\ell) \in J_{\sigma g^{-1}} \times J_\sigma$ 均成立。固定某个 $r \in J_{\sigma g^{-1}}$。于是

$$\begin{aligned}\sum_{j\in J_g} p_{rj}y_j &= \sum_{j\in J_g}\sum_{\ell\in J_\sigma} \alpha_\ell c_{rj\ell}y_j \\ &= \sum_{\ell\in J_\sigma}\left(\alpha_\ell \sum_{j\in J_g} c_{rj\ell}y_j\right) \\ &= 0 \qquad \text{(by equation (2))}\end{aligned}$$

现在对任意 $y_j = 0$ 定义 $j \in J \setminus J_g$，我们得到 $(y_j)_{j\in J}$ 是齐次方程组的一个解，其矩阵为 $P(\sigma,\ \alpha)$。由于该矩阵可逆，我们得出，对于每个 $j \in J$，$y_j = 0$。我们得出结论，由方程 (2) 组成的方程组，其中 $(r,\ \ell) \in J_{\sigma g^{-1}} \times J_\sigma$，只有零解，因此秩为 $C_g = |J_g|$。

(2) $\Rightarrow$ (3) 令 $g \in G$，并令 $(y_j)_{j\in J_g} \subset K$ 满足

$$\sum_{j\in J_g} p_{rj}y_j = 0 \tag{3}$$

对于任意 $r \in J_{\sigma g^{-1}}$。因此

$$\sum_{j\in J_g}\sum_{\ell\in J_\sigma} \alpha_\ell c_{rj\ell}y_j = 0$$

对每个 $r \in J_{\sigma g^{-1}}$。显然

$$\sum_{r\in J_{\sigma g^{-1}}} c_{qr'r}\left(\sum_{j\in J_g}\sum_{\ell\in J_\sigma} \alpha_\ell c_{rj\ell}y_j\right) = 0$$

对于任意 $r' \in J_{\sigma g^{-1}}$ 和 $q \in J_\varepsilon$。重新整理求和项，得到

$$\sum_{\ell\in J_\sigma}\sum_{j\in J_g}\left(\sum_{r\in J_{\sigma g^{-1}}} c_{qr'r}c_{rj\ell}\right)\alpha_\ell y_j = 0 \tag{4}$$

由 (1) 可得

$$\sum_{r\in J_{\sigma g^{-1}}} c_{qr'r}c_{rj\ell} = \sum_{\ell'\in J_\sigma} c_{q\ell'\ell}c_{r'j\ell'},$$

代入 (4)，得到

$$\sum_{\ell\in J_\sigma}\sum_{j\in J_g}\sum_{\ell'\in J_\sigma} c_{q\ell'\ell}c_{r'j\ell'}\alpha_\ell y_j = 0.$$

这意味着

$$\sum_{\ell'\in J_\sigma} p_{q\ell'}\left(\sum_{j\in J_g} c_{r'j\ell'}y_j\right) = 0$$

对于任意 $q \in J_\varepsilon$。由于 $P(\sigma,\ \alpha)_{J_\varepsilon,\ J_\sigma}$ 可逆，因此我们得到

$$\sum_{j\in J_g} c_{r'j\ell'} y_j = 0$$

对于任意 $\ell' \in J_\sigma$ 和 $r' \in J_{\sigma g^{-1}}$。这是关于 $(y_j)_{j\in J_g}$ 的齐次方程组，其矩阵为 C_g。由于秩为 $C_g = |J_g|$，该方程组只有零解。因此，方程 (3) 所组成的方程组只有零解，这表明秩 $P(\sigma,\ \alpha)_{J_{\sigma g^{-1}},\ J_g} = |J_g|$。特别地

$$|J_g| \le |J_{\sigma g^{-1}}| \tag{5}$$

对于任意 $g \in G$。对所有 $g \in G$ 求和，我们得到 $\sum_{g\in G} |J_g| \le \sum_{g\in G} |J_{\sigma g^{-1}}|$。由于不等式两边都等于 $|J|$，因此对于每个 g，(5) 中的不等式都必须取等号，于是显然，$P(\sigma,\ \alpha)_{J_{\sigma g^{-1}},\ J_g}$ 是可逆的。

(3) $\Rightarrow$ (1) $P(\sigma,\ \alpha)$ 可逆，因为它由可逆的方块矩阵 $P(\sigma,\ \alpha)_{J_{\sigma g^{-1}},\ J_g}$ 组成，其中 $(J_g)_{g\in G}$ 和 $(J_{\sigma g^{-1}})_{g\in G}$ 是 J 的划分。□

3. σ-graded Frobenius algebras and paratrophic matrices

我们需要以下结果，它描述了有限维代数上右模的线性对偶同构于该代数的正则左表示的情形。特别地，当该模恰好是代数的正则右表示时，这就是弗罗贝尼乌斯代数的弗罗贝尼乌斯刻画。若 U 是 K-代数 R 上的右模，则 U 的线性对偶 U^* 是一个左 R-模，其左作用记作 $\rightharpoonup$，由 U 上的左 R-作用诱导。

命题 3.1. 设 R 是一个 K-代数，U 是一个右 R-模，且 维数R =维数 $U = m$。设 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ 是 R 的一组基，$u_1, \ldots, u_m$ 是 U 的一组基，并设 $(c_{ij\ell})_{1\le i,j,\ell\le m} \subset K$ 满足

$$u_i\varepsilon_j = \sum_{1\le \ell\le m} c_{ij\ell} u_\ell \tag{6}$$

对任意 $1 \le i, j \le m$均成立。则 $U^* \simeq R$作为左 R-模同构，当且仅当存在一个满足如下性质的族$(\alpha_\ell)_{1\le\ell\le m} \subset K$

$$(*) \qquad \textit{the matrix } \left(\sum_{1\le\ell\le m} \alpha_\ell c_{ij\ell}\right)_{1\le i,j\le m} \textit{ is invertible}$$

此外，在这种情况下，任意同构 $\varphi\colon R \to U^*$ 都具有形式 $\varphi(r) = r \rightharpoonup u^*$，其中 $u^* \in U^*$ 满足族 $(u^*(u_\ell))_{1\le\ell\le m}$ 具有性质 $(*)$。

证明。任意左 R-模态射 $\varphi\colon R \to U^*$ 对任意$r \in R$均具有形式 $\varphi(r) = r \rightharpoonup u^*$，其中存在某个 $u^* \in U^*$。从维数来看，这样的 φ 是同构，当且仅当它是单射。

令 $r = \sum_{1\le j\le m} y_j\varepsilon_j$。则 $r \in$ 核φ 当且仅当对任意 $1 \le i \le m$，都有 $(r \rightharpoonup u^*)(u_i) = 0$，这可改写为对任意 $1 \le i \le m$，都有 $u^*(\sum_{1\le j\le m} y_j u_i\varepsilon_j) = 0$。利用 (6)，这等价于

$$\sum_{1\le j,\ell\le m} y_j c_{ij\ell} u^*(u_\ell) = 0$$

对任意 $1 \leq i \leq m$。这与

$$\sum_{1\leq j\leq m}\left(\sum_{1\leq \ell\leq m} u^*(u_l)c_{ij\ell}\right)y_j = 0 \quad \text{for any } 1\leq i\leq m \tag{7}$$

我们得出，φ 是单射，当且仅当方程组 (7) 只有解 $y_1 = \ldots = y_m = 0$，这等价于矩阵 $(\sum_{1\leq \ell\leq m} u^*(u_\ell)c_{ij\ell})_{1\leq i,\ j\leq m}$ 可逆。这证明了命题的第一部分，只需取 $\alpha_\ell = u^*(u_\ell)$；同时，这也描述了第二部分中的所有同构 φ。□

在本文余下部分，我们沿用引言中的假设：A是有限维的 G-分次代数，$(e_j)_{j\in J}$ 是 A 的固定齐次基，而 σ 是 G 的固定元素。A 上的分次结构在 A^* 上诱导出一个 A- 模结构，使其成为 G-分次左模，其次数为 g 的齐次分量是

$$(A^*)_g = \{a^* \in A^* \mid a^*(A_h) = 0 \text{ for any } h \neq g^{-1}\}$$

对任意 $g \in G$。我们还考虑 A 的移位 $A(\sigma)$，它就是左 A-模A，其分次定义为 $A(\sigma)_g = A_{g\sigma}$ 对任意 $g \in G$。那么，如果 $A^* \simeq A(\sigma)$ 是分次左 A-模的同构，就称 A 为 σ-分次 Frobenius 代数。

命题 B 的证明： A 是 σ-分次 Frobenius 代数，当且仅当 $A^* \simeq A(\sigma)$，或者等价地，存在分次左 A-模的同构 $\varphi : A \simeq A^*(\sigma^{-1})$。特别地，由于这样的 φ 是从 A 到 A^*的左 A-模同构，根据命题 3.1，φ 具有形式 $\varphi(a) = a \rightharpoonup a^*$，其中存在某个 $a^* \in A^*$，使得矩阵 $(\sum_{\ell\in J}\alpha_\ell c_{ij\ell})_{i,\ j\in J}$可逆，其中对任意 $\ell \in J$，$\alpha_\ell = a^*(e_\ell)$。当且仅当 $a^* = \varphi(1) \in A^*(\sigma^{-1})_\varepsilon = (A^*)_{\sigma^{-1}}$时，这样的 φ 也是从 A 到 $A^*(\sigma^{-1})$的分次左 A-模同构；这意味着，对任意 $\ell \in J \setminus J_\sigma$，$a^*(e_\ell) = 0$。

我们得出，A 是 σ-分次 Frobenius，当且仅当存在一个族 $(\alpha_\ell)_{\ell\in J_\sigma} \subset K$，使得矩阵 $(\sum_{\ell\in J}\alpha_\ell c_{ij\ell})_{i,\ j\in J}$ 可逆。由此证明完毕，因为该矩阵就是 $P(\alpha,\ \sigma)$，其中 $\alpha = (\alpha_\ell)_{\ell\in J_\sigma}$。□

至于分次对称性质，我们有如下结论。

命题 B'。A 是分次对称的，当且仅当存在一个标量族$\alpha = (\alpha_\ell)_{\ell\in J_\varepsilon}$，使得 σ-副乘法矩阵 $P(\varepsilon, \alpha)$ 是对称且可逆的。

证明：沿用命题 B 的证明中关于 $\sigma = \varepsilon$ 的记号，$\varphi : A \to A^*$ 的分次左 A-模同构由一个 $a^* \in (A^*)_\varepsilon$ 给出，即由一个标量族$\alpha = (\alpha_\ell)_{\ell\in J_\varepsilon}$ 给出，其中对任意 $\ell \in J_\varepsilon$，$\alpha_\ell = a^*(e_\ell)$，且 $P(\varepsilon, \alpha)$ 可逆。此外，φ 是 A-双模态射，当且仅当对任意 $i \in J$，$e_i \rightharpoonup a^* = a^* \leftharpoonup e_i$，其中 $\leftharpoonup$ 是 A^* 上通常的右 A-作用。这等价于对任意 $i, j \in J$，有 $a^*(e_j e_i) = a^*(e_i e_j)$；这又等价于对任意 i, j，有 $\sum_{\ell\in J_\sigma} c_{ji\ell}\alpha_\ell = \sum_{\ell\in J_\sigma} c_{ij\ell}\alpha_\ell$，即矩阵 $P(\varepsilon, \alpha)$ 是对称的。□

注 3.2。如果将 A 视为带有平凡 G分次的有限维代数，其中 G 是任意群，那么 A 是 ε-分次 Frobenius（分别为分次对称）当且仅当它是 Frobenius 代数（分别为对称代数）。在此情形下，ε-副乘法矩阵就是通常的拟循环矩阵，而命题 B 和命题

B' 就是对称代数的弗罗贝尼乌斯判据和中山–内斯比特检验，见 [6, 16.82 和练习 28，第 457] 页。

4. Koszul duals of quantum polynomial algebras and matrix algebras with good gradings

我们首先回顾，若代数 A 满足 $A \simeq T(V)/(R)$，则称其为二次代数。其中 $T(V)$ 是有限维空间 V 的张量代数，而 (R) 是由 R 生成的 $T(V)$ 的理想； R 是 $T^2(V) = V \otimes V$ 的子空间。此类 A 的 Koszul 对偶是代数 $A^! = T(V^*)/(R^\perp)$，其中 $R^\perp$ 是 $V^* \otimes V^*$ 中 R 的正交补。

若取 $A = K_{\mathbf{q}}[X_1, \dots, X_n]$，即与 $\mathbf{q} = (q_{ij})_{1 \le i < j \le n}$ 相关联的量子多项式代数，则 $A \simeq T(V)/(R)$，其中 V 是以 $\{v_1, \dots, v_n\}$ 为基的向量空间，而 R 是 $V \otimes V$ 中由所有 $v_j \otimes v_i - q_{ij} v_i \otimes v_j$ 张成的子空间，其中 $1 \le i < j \le n$。

设 $z = \sum_{1 \le k,\ \ell \le n} \alpha_{k\ell} v_k^* \otimes v_\ell^* \in V^* \otimes V^*$。那么对于某个 $1 \le i < j \le n$，我们有 $z(v_j \otimes v_i - q_{ij} v_i \otimes v_j) = \alpha_{ji} - q_{ij}\alpha_{ij}$，因此 $z \in R^\perp$ 当且仅当

$$z = \sum_{1 \le i < j \le n} \alpha_{ij}(v_i^* \otimes v_j^* + q_{ij} v_j^* \otimes v_i^*) + \sum_{1 \le i \le n} \alpha_{ii} v_i^* \otimes v_i^*$$

对于某个 $(\alpha_{ij})_{1 \le i \le j \le n}$。因此， $R^\perp$ 由所有满足 $i < j$ 的 $v_i^* \otimes v_j^* + q_{ij} v_j^* \otimes v_i^*$ 以及所有 $v_i^* \otimes v_i^*$ 张成。我们得出

$$A^! \simeq K\langle X_1, \dots, X_n \rangle / (X_j X_i + q_{ij}^{-1} X_i X_j, X_i^2 | 1 \le i < j \le n),$$

这可以改写为

$$K_{\mathbf{q}}[X_1, \dots, X_n]^! \simeq A(\mathbf{q}'), \text{ where } \mathbf{q}' = (-q_{ij}^{-1})_{1 \le i < j \le n}.$$

本节第一部分通过证明命题 C，考察 $A(\mathbf{q})$ 型代数的 Frobenius 性质。将 $A(\mathbf{q})$ 的基元素用 $\mathbb{Z}_2^n$ 的元素标记是有用的。因此，对于任意 $g = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \mathbb{Z}_2^n$，记作 $e_g = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}$。对于这样的 g，我们还记 $\mathrm{supp}(g) = \{i | \varepsilon_i = \hat{1}\}$ 和 $\underline{g} = (\hat{1} - \varepsilon_1, \dots, \hat{1} - \varepsilon_n)$。

设 $g = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ 和 $h = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ 是 $\mathbb{Z}_2^n$ 的元素。那么 $e_g e_h = 0$ 当且仅当存在 $1 \le i \le n$ 使得 $\varepsilon_i = \mu_i = \hat{1}$，也就是说，若 $\mathrm{supp}(g) \cap \mathrm{supp}(h) \ne \emptyset$。当 $\mathrm{supp}(g) \cap \mathrm{supp}(h) = \emptyset$ 时，我们有

$$\begin{aligned} e_g e_h &= (x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n})(x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n}) \\ &= q_{12}^{\mu_1 \varepsilon_2} \dots q_{1n}^{\mu_1 \varepsilon_n} q_{23}^{\mu_2 \varepsilon_3} \dots q_{2n}^{\mu_2 \varepsilon_n} \dots q_{n-1,n}^{\mu_{n-1} \varepsilon_n} x_1^{\varepsilon_1 + \mu_1} \dots x_n^{\varepsilon_n + \mu_n} \\ &= \prod_{1 \le i < j \le n} q_{ij}^{\mu_i \varepsilon_j} e_{g+h} \end{aligned}$$

因此，与基 $(e_g)_{g \in \mathbb{Z}_2^n}$ 相关联的结构常数为

- $c_{g,h,\ell} = 0$ 对任意满足 $\mathrm{supp}(g) \cap \mathrm{supp}(h) \ne \emptyset$ 的 g, h, ℓ
- $c_{g,h,\ell} = 0$ 对任意满足 $\mathrm{supp}(g) \cap \mathrm{supp}(h) = \emptyset$ 且 $\ell \ne g + h$ 的 g, h, ℓ
- $c_{g,\ h,\ g+h} = \prod_{1 \le i < j \le n} q_{ij}^{\mu_i \varepsilon_j}$ 当 $\mathrm{supp}(g) \cap \mathrm{supp}(h) = \emptyset$。

现在我们证明命题 C (ii)。因此， $A(\mathbf{q})$ 被视为一个 $\mathbb{Z}_2^n$-分次代数，其度数为 $g=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ 的齐次分量是 $Kx_1^{\varepsilon_1}\dots x_n^{\varepsilon_n}$。我们首先证明，对于 $\tau=(\hat{1},\dots,\hat{1})$，$A(\mathbf{q})$ 是 τ-分次 Frobenius。事实上，设 $\alpha=(\alpha_\tau)$ 满足 $\alpha_\tau\in K\setminus\{0\}$，并考虑 τ-副乘法矩阵 $P(\tau,\alpha)$；根据定义，对于任意 g, $h\in\mathbb{Z}_2^n$，其在位置 (g,h) 上的元素为 $c_{g,h,\tau}\alpha_\tau$。考虑到结构常数的取值，对于任意 $g\in\mathbb{Z}_2^n$, P，τ,α 在第 g 行恰有一个非零元素，且该元素位于位置 (g,g)。由于 $g=h$ 当且仅当 $g=h$，我们看到 $P(\tau,\alpha)$ 是可逆的，因此根据命题 B， $A(\mathbf{q})$ 是 τ-分次 Frobenius。

现在取 $\sigma\neq(\hat{1},\dots,\hat{1})$ 和 $\alpha=(\alpha_\sigma)$，其中 $\alpha_\sigma\in K$，并令 $P(\sigma,\alpha)$ 为相应的 $\hat{}$ 副乘法矩阵。由于 σ 至少有一个分量等于 0，因此存在 $g\in\mathbb{Z}_2^n$，使得 $\mathrm{supp}(g)\cap\mathrm{supp}(g+\sigma)\neq\emptyset$；事实上，可以选取一个 g，使其在σ 取 $\hat{0}$ 的位置上为 $\hat{1}$。对于这样的 g， $P(\sigma,\alpha)$ 的第 g 行全为零，因为其 (g,h)-项为 $\alpha_\sigma c_{g,h,\sigma}$；当 $g+h\neq\sigma$ 时该项为 0，而对于 $g+h=\sigma$，即 $h=g+\sigma$，我们有 $\mathrm{supp}(g)\cap\mathrm{supp}(h)\neq\emptyset$，因此 (g,h)-项同样为 0。由此可知， $P(\sigma,\alpha)$ 不可能是可逆的，所以 $A(\mathbf{q})$ 不是 σ-分次 Frobenius。

接下来我们证明命题 C（iii）。对于任意 $0\le k\le n$，我们有 $J_k=\{g\mid|\mathrm{supp}(g)|=k\}$；特别地， $J_n=\{\tau\}$ 和 $J_0=\{0\}$，其中 $\mathbb{Z}_2^n$ 中的元素 $(\hat{0},\dots,\hat{0})$ 记作 0。于是 $A(\mathbf{q})$ 是 n-分次 Frobenius 代数，证明 $A(\mathbf{q})$ 是 τ-分次 Frobenius 代数的方法与上文完全相同。

现在设 $0\le k<n$。如果 $\alpha=(\alpha_\ell)_{\ell\in J_k}$ 是一个标量族，那么定理 A 表明，当 $k>0$ 时， $P(k,\alpha)$ 不可逆，因为 $|J_k|=\binom{n}{k}\neq1=|J_0|$。如果 $k=0$，则 $P(0,\alpha)$ 的 (g,h)-项为 $\alpha_0c_{g,h,0}$，只有在 $g+h=0$（即 $g=h$）时才可能非零，并且 $\mathrm{supp}(g)\cap\mathrm{supp}(h)=\emptyset$，因此仅当 $g=h=0$ 时才可能非零。由于至多只有一个非零项，$P(0,\alpha)$ 不可逆，因此 $A(\mathbf{q})$ 不是 0-分次 Frobenius 代数。我们得出，对于任意 $0\le k<n$， $A(\mathbf{q})$ 都不是 k-分次 Frobenius 代数。此外，对于任意 $k<0$ 或 $k>n$，它也不是 k-分次 Frobenius 代数，因为 $P(k,\alpha)$ 的所有项均为零。

最后，我们证明命题 C (i)。由于 $A\mathbf{q}$ 是 τ-分次的 Frobenius 代数，赋予 $\mathbb{Z}_2^n$-分次后，它显然仍是 Frobenius 代数。为了考察对称性，我们需要进一步研究一个副乘法矩阵 $P(\alpha)$，其中 $\alpha=(\alpha_\ell)_{\ell\in\mathbb{Z}_2^n}$。

首先假设 $A\mathbf{q}$ 是对称的，因此存在一个对称的可逆矩阵$P(\alpha)$。在 $P(\alpha)$ 的第 τ 行中，只有位置 $(\tau,0)$ 处可能存在非零元素，该处的元素为 α_τ。由于 $P(\alpha)$ 是可逆的， α_τ 必须非零。于是，对于任意 $g=(\widehat{\varepsilon_1},\dots,\widehat{\varepsilon_n})\in\mathbb{Z}_2^n$，其中 $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\in\{0,1\}$， $P(\alpha)$ 的 (g,g) 元素为

$$\alpha_\tau\prod_{1\le i<j\le n}q_{ij}^{(1-\varepsilon_i)\varepsilon_j},$$

而 $(g,\ g)$ 项为

$$\alpha_\tau\prod_{1\le i<j\le n}q_{ij}^{\varepsilon_i(1-\varepsilon_j)}.$$

由于 $P(\alpha)$ 是对称的，且 $\alpha_\tau\neq0$，我们得到

$$\prod_{1\le i<j\le n}q_{ij}^{(1-\varepsilon_i)\varepsilon_j}=\prod_{1\le i<j\le n}q_{ij}^{\varepsilon_i(1-\varepsilon_j)},\tag{8}$$

或者，等价地，

$$\prod_{1\le i<j\le n} q_{ij}^{\varepsilon_j-\varepsilon_i}=1. \tag{9}$$

因此，对于任意 $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\in\{0,1\}$，(9) 都成立。若固定一个 $1\le i<n$，并对任意 $j\neq i$ 选取 $\varepsilon_i=1$ and$\varepsilon_j=0$，则 (9) 变为

$$\left(\prod_{1\le p<i} q_{pi}\right)\cdot\left(\prod_{i<p\le n} q_{ip}^{-1}\right)=1,$$

这与下式相同

$$q_{in}=\left(\prod_{1\le p<i} q_{pi}\right)\cdot\left(\prod_{i<p\le n-1} q_{ip}^{-1}\right). \tag{10}$$

反过来，假设对任意 $1\le i<n$，(10) 都成立。我们证明 $A(\mathbf{q})$ 是对称的。若 $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\in\{0,1\}$，则

$$\begin{aligned}\prod_{1\le i<j\le n} q_{ij}^{\varepsilon_j-\varepsilon_i} &= \left(\prod_{1\le i<j\le n-1} q_{ij}^{\varepsilon_j-\varepsilon_i}\right)\cdot\left(\prod_{1\le i\le n-1} q_{in}^{\varepsilon_n-\varepsilon_i}\right)\\ &= \left(\prod_{1\le i<j\le n-1} q_{ij}^{\varepsilon_j-\varepsilon_i}\right)\cdot\left(\prod_{\substack{1\le i\le n-1\\1\le p<i}} q_{pi}^{\varepsilon_n-\varepsilon_i}\right)\cdot\left(\prod_{\substack{1\le i\le n-1\\i<p\le n-1}} q_{ip}^{\varepsilon_i-\varepsilon_n}\right)\\ &= 1.\end{aligned}$$

最后一个等式成立，因为对于每一对满足 $1\le r<s\le n-1$ 的 (r,s)，最后一个乘积的三个因子中 q_{rs} 的指数分别为 $\varepsilon_s-\varepsilon_r$、$\varepsilon_n-\varepsilon_s$ 和 $\varepsilon_r-\varepsilon_n$，它们的和为零。这说明对任意 $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\in\{0,1\}$，(9) 都成立。现在取标量族$\alpha=(\alpha_\ell)_{\ell\in\mathbb{Z}_2^n}$，使得 $\alpha_\tau=1$，且对任意 $\ell\neq\tau$，$\alpha_\ell=0$。那么对于任意 $g,h\in\mathbb{Z}_2^n$，副乘法矩阵 $P(\alpha)$ 的 (g,h) 项为 $c_{g,h,\tau}$，仅当 $g+h=\tau$，即 $h=g$ 时才非零。因此，显然对于满足$g+h\neq\tau$的任意 g,h，(g,h) 项与 (h,g) 项相等。另一方面，对于任意 g，副乘法矩阵 $P(\alpha)$ 的 (g,g)-项与 (g,g) 项相等，因为方程 (9) 和 (8) 等价。因此，$P(\alpha)$ 是对称且显然可逆的，由此我们得出 $A(\mathbf{q})$ 是对称的。

注 4.1. 设 $n\ge 2$，且 V为维数为 n 的向量空间。外代数$\wedge V$同构于 $A(\mathbf{q})$，其中 $\mathbf{q}=(q_{ij})_{1\le i<j\le n}$，且对任意 $1\le i<j\le n$，都有 $q_{ij}=-1$。命题 C 表明，$\wedge V$是一个 Frobenius 代数；事实上，若将其视为具有 $\mathbb{Z}$分次的代数，它甚至是 n-分次 Frobenius 代数；若将其视为 $\mathbb{Z}_2^n$-分次代数，它也是 τ-分次 Frobenius 代数。此外，$\wedge V$是对称的，当且仅当 $-1=(-1)^{n-2}$，也就是说，当且仅当 n 为奇数。

在本节末尾，我们将讨论另一类分次代数：具有良好分次的矩阵代数。令 $A=M_n(K)$，其中 n 是正整数。由任意群 G 给出的 A上的良好分次，是指所有矩阵单位 e_{ij}（$1\le i,\ j\le n$）都是齐次元素的分次。文献 [2, 第 1] 节证明，A 上的良好 G-分次

由 G 中的一族元素 $g_1, \ldots, g_n$ 给出，使得对任意 i, j，e_{ij} 的次数为 $g_i g_j^{-1}$。对于任意 $g \in G$，A 的次数为 g 的齐次分量为 $A_g = \langle e_{ij} \mid g_i g_j^{-1} = g \rangle$。对于这样的分次，我们考虑齐次基 $(e_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$；沿用引言中的记号，相应的指标集为 $J = \{(i,j) \mid 1 \leq i, j \leq n\}$，且对任意 $g \in G$，$J_g = \{(i,j) \mid g_i g_j^{-1} = g\}$；特别地，$J_\varepsilon = \{(i,j) \mid g_i = g_j\}$。由于对任意 i, j, p, q，都有 $e_{ij} e_{pq} = \delta_{jp} e_{iq}$，与此基相关的结构常数为 $c_{(i,j),(p,q),(r,s)} = 1$，若 $j = p$ 且 $(r,s) = (i,q)$；其他情况下则为 $c_{(i,j),(p,q),(r,s)} = 1$。

考虑满足以下条件的族 $\alpha = (\alpha_{k\ell})_{(k,\ell) \in J_\varepsilon}$：对任意 $1 \leq k \leq n$，$\alpha_{kk} = 1$；并且对任意 $(k, \ell) \in J_\varepsilon$（其中 $k \neq \ell$），$\alpha_{k\ell} = 0$。ε-副乘法矩阵的 $((i, j), (p, q))$ 项 $P(\varepsilon, \alpha)$ 为

$$\sum_{(k,\ell) \in J_\varepsilon} \alpha_{k\ell} c_{(i,j),(p,q),(k,\ell)} = \begin{cases} 1, & \text{if } (p,q) = (j,i), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此，$P(\varepsilon, \alpha)$ 的每一行和每一列都恰好有一个非零项，所以它是可逆的，而且还是对称的。这表明 A 是分次对称的，这一事实已在 [3,例 6.4],中通过不同的方法指出。

我们注意到，$M_n(K)$ 上的良好 G-分次在 [1, 推论 2.2] 中由以下作用的轨道分类：对称群 $\mathcal{S}_n$ 通过置换的双作用，以及 G 通过右平移的双作用，作用于集合 G^n。

5. A structure result for σ-graded Frobenius algebras

回顾一下，如果对于任意 $g \in G$ 和任意 $a \in A_g$，只要满足 $A_{\sigma g^{-1}} a = 0$，就必有 $a = 0$，那么称 G-分次代数是左 σ-忠实的。

命题 5.1。 A 是左 σ-忠实的，当且仅当对于任意 $g \in G$，秩 $C_g = |J_g|$。

证明。设 $g \in G$ 和 $a = \sum_{j \in J_g} y_j e_j \in A_g$。对于任意 $r \in J_{\sigma g^{-1}}$，我们有

$$\begin{aligned} e_r a &= \sum_{j \in J_g} y_j e_r e_j \\ &= \sum_{j \in J_g} \sum_{\ell \in J_\sigma} y_j c_{rj\ell} e_\ell \\ &= \sum_{\ell \in J_\sigma} \left(\sum_{j \in J_g} y_j c_{rj\ell} \right) e_\ell \end{aligned}$$

于是，对于任意 $r \in J_{\sigma g^{-1}}$，$A_{\sigma g^{-1}} a = 0$ 当且仅当 $e_r a = 0$；根据上述计算，这等价于对于任意 $r \in J_{\sigma g^{-1}}$ 和 $\ell \in J_\sigma$，$\sum_{j \in J_g} y_j c_{rj\ell} = 0$。但这是关于 $(y_j)_{j \in J_g}$ 的一个线性方程组，其矩阵为 C_g，因此它仅有零解当且仅当秩 $C_g = |J_g|$。由此可知，满足 $A_{\sigma g^{-1}} a = 0$ 的唯一 $a \in A_g$ 是 $a = 0$，当且仅当秩 $C_g = |J_g|$，证明完毕。□

作为命题 3.1 的一个特例，我们有如下结论。

推论 5.2。 $(A_\sigma)^*$ 作为左 A_ε-模同构于 A_ε，当且仅当 $|J_\sigma| = |J_\varepsilon|$且存在一个族 $(\alpha_\ell)_{\ell \in J_\sigma} \subset K$，使得矩阵 $\left(\sum_{\ell \in J_\sigma} \alpha_\ell c_{ij\ell} \right)_{i \in J_\sigma,\ j \in J_\varepsilon}$ 可逆。

推论 D 的证明： 假设 A是分次的 σ-Frobenius。根据命题 B，存在一个族 $\alpha = (\alpha_\ell)_{\ell \in J_\sigma} \subset K$，使得 $P(\alpha, \sigma)$ 可逆。利用定理 A，我们得到 $|J_\varepsilon| = |J_\sigma|$ 且 $P(\sigma, \alpha)_{J_\varepsilon, J_\sigma}$ 可逆，因此根据推论 5.2，$(A_\sigma)^* \simeq A_\varepsilon$ 作为左 A_ε-模同构；并且对于任意 $g \in G$，rank $C_g = |J_g|$，所以根据命题 5.1，A 是左 σ-忠实的。

反之，假设 A 是左 σ-忠实的，且 $(A_\sigma)^* \simeq A_\varepsilon$ 是左 A_ε-模。由推论 5.2 可知 $|J_\sigma| = |J_\varepsilon|$，并且存在一族 $(\alpha_\ell)_{\ell \in J_\sigma} \subset K$，使得矩阵 $(\sum_{\ell \in J_\sigma} \alpha_\ell c_{ij\ell})_{i \in J_\sigma,\ j \in J_\varepsilon}$ 可逆。记 $\alpha = (\alpha_\ell)_{\ell \in J_\sigma}$。那么前面提到的矩阵正是 $P(\sigma, \alpha)_{J_\varepsilon, J_\sigma}$，且它可逆。由命题 5.1 可知，对任意 $g \in G$，秩 $C_g = |J_g|$。现在定理 A 表明 $P(\sigma, \alpha)$ 可逆，因此由命题 B，A 是 σ-分次 Frobenius 代数。□

致谢。第一作者和第四作者获得了 PNRR 项目资助：CF 44/14.11.2022 光滑曲面的上同调霍尔代数及其应用。

References

[1] S. Caenepeel、S. Dˇascˇalescu、C. Nˇastˇasescu，《矩阵代数的分次与下降理论》，《Communications in Algebra》30（2002），5901-5920。[2] S. Dˇascˇalescu、B. Ion、C. Nˇastˇasescu、J. Rios Montes，《全矩阵环上的群分次》，《Journal of Algebra》220（1999），709-728。[3] S. Dˇascˇalescu、C. Nˇastˇasescu 和 L. Nˇastˇasescu，《余表示的弗罗贝尼乌斯代数与群分次向量空间》，《Journal of Algebra》406（2014），226-250。[4] F. G. Frobenius，《超复数理论 I、II》，《柏林科学院报告》1903（1903），504-537，634-645。[5] P. Jørgensen，《非交换 BGG 对应》，《Pacific Journal of Mathematics》218（2005），357-377。[6] T. Y. Lam，《模与环讲义》，GTM 189，施普林格出版社，1999。[7] D.-M. Lu、J. H. Palmieri、Q.-S. Wu 和 J. J. Zhang，《维数为 4 的正则代数及其 A_∞-Ext 代数》，《Duke Mathematical Journal》137（2007），537-584。[8] C. Nˇastˇasescu 和 F. van Oystaeyen，《分次环的方法》，《数学讲义》第 1836 卷（2004），施普林格出版社。

[1] University of Bucharest, Faculty of Mathematics and Computer Science, Str. Academiei14, Bucharest 1, RO-010014, Romania[2] Institute of Mathematics of the Romanian Academy, PO-Box 1-764, RO-014700, Bucharest,Romaniae-mail: sdascal@fmi.unibuc.ro, Constantin nastasescu@yahoo.com, lauranastasescu@gmail

– .com, paul.rebenciuc@s.unibuc.ro