arXiv:2512.14918v1 [math.MG] 16 Dec 2025

双上的度量逆半群是基本的

V. MANUILOV

Abstract. 我们证明，在度量空间的两个副本上，度量等价类构成的逆群是基本的。

在 [2] 中，我们证明了度量空间 X 的两个副本上的度量等价类集合 $M(X)$具有一种刚性的代数结构，即逆半群。这一点本身就出乎意料。现在我们更进一步，证明对于任意度量空间 X，这个逆半群都是基本的。回顾一下，半群 S 是逆半群，当且仅当对于任意 $s \in S$，都存在唯一的伪逆 $t \in S$ （若 $sts = s$ 且 $tst = t$，则称t 是 s 的伪逆）。我们用 s^*表示 s 的伪逆。逆半群 S 通过 $\mu_s(e) = ses^*$, $e \in E$作用于其幂等元集合 $E = E(S)$上。若 $\mu_s \neq \mu_t$ 对于 $s \neq t$成立，则称 S 是基本的。这使我们能够将 S 忠实地表示为 E的自映射子集。关于逆半群理论，我们主要参考 [1]。

设 $X = (X, d_X)$ 是一个度量空间。 X 的双份空间是一个度量空间 $X \times \{0,1\}$，其度量为 d，满足： d 在 $X \times \{0,1\}$ 中 X 的每个副本上的限制都等于 d_X，且 X 的两个副本之间的距离非零。用 $\mathcal{M}(X)$ 表示所有此类度量构成的集合。

我们将 X 与 $X \times \{0\}$ 等同，并用 X' 表示 $X \times \{1\}$。类似地，我们用 x 表示 $(x,0)$，用 x' 表示 $(x,1)$， $x \in X$。注意， X 的双份空间上的度量只有在两点分别位于 X 的不同副本中时才可能不同，因此，要定义 $\mathcal{M}(X)$ 中的度量 d，只需为所有 $x, y \in X$ 定义 $d(x, y')$。假设 $d(X, X') > 0$，这意味着存在 $c > 0$，使得对任意 $x, y \in X$，都有 $d(x, y') \geq c$。

回顾一下， X 的双份空间上的两个度量 d_1、 d_2若粗等价，则存在一个 $[0, \infty$的同胚 ϕ，使得

$$\phi^{-1}(d_1(x, y')) \leq d_2(x, y') \leq \phi(d_1(x, y'))$$

对于任意 x， $y \in X$。此时我们记作 $d_1 \sim d_2$，或 $[d_1] = [d_2]$。商空间$\mathcal{M}(X)/\sim$ 记为 $M(X)$。

公式

$$(d_1 d_2)(x, y') = \inf_{u \in X} [d_1(x, u') + d_2(u, y')], \quad x \in X, z \in Z, \tag{1}$$

定义了一个度量 $d_1 d_2$, $[d_1 d_2] \in \mathcal{M}(X)$，并且 [2] 已证明，配备此乘法运算的 $M(X)$是一个含$\mathbf{0}$和$\mathbf{1}$的逆半群。

回顾一下，逆半群结构在 $M(X)$上定义了一个偏序 $\preceq$。对于 s， $t \in M(X)$，若存在幂等元 $e \in M(X)$使得 $s = et$，则 $s \preceq t$。几何意义上，若 d， $b \in \mathcal{M}(X)$， $s = [d]$， $t = [b]$，则若存在$[0, \infty)$的同胚 ϕ，使得对于任意 x， $y \in X$，均有 $b(x, y') \leq \phi(d(x, y'))$。我们记 $s \prec t$，若 $s \preceq t$且 $s \neq t$。

在度量空间 Z 上的连续 $[0, \infty)$ 值函数代数 $C_+(Z)$ 上，也可以定义类似的偏序。对于 f， $g \in C_+(Z)$，我们称 $f \preceq g$，如果存在一个1

同胚 ϕ，其定义在 $[0,\infty)$ 上，满足对任意 $z\in Z$， $f(z)\geq\phi(g(z))$（注意，函数的序与通常的序相反）。

引理 1. 若 $f\preceq g$ 不成立，则存在一个序列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，属于 Z，且 $C>0$，使得 $\lim_{n\to\infty}g(z_n)=\infty$，并且 $\sup_{n\in\mathbb{N}}f(z_n)<C$。

证明。我们将证明逆否命题：若对于任意序列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，只要 $\lim_{n\to\infty}g(z_n)=\infty$，就有 $\lim_{n\to\infty}f(z_n)=\infty$，那么 $f\geq g$。

令 $Z_n=\{z\in Z\colon n-1\leq g(z)\leq n\}$。则 $Z=\cup_{n\in\mathbb{N}}Z_n$。令 $k_n=\inf_{z\in Z_n}f(z)$。假设序列 $\{k_n\}$ 包含一个由某个 $D>0$ 有界的无限子序列 $\{k_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$。那么对于每个 $i\in\mathbb{N}$，都存在 $z_{n_i}\in Z_{n_i}$，使得 $f(z_{n_i})<D+1$。由于 $g(z_{n_i})>n_i-1$，我们得到矛盾。因此 $\lim_{n\to\infty}k_n=\infty$。令 ϕ 为 $[0,\infty)$ 的一个同胚，使得对于每个 $n\in\mathbb{N}$， $\phi(n)<k_n$。于是，对于 $z\in Z_n$，有$\phi(g(z))\leq\phi(n)<k_n\leq f(z)$，因此 $f\geq g$。□

推论 2. 令 $b,c\in\mathcal{M}(X)$，并且 $c\preceq b$ 不成立。那么存在无界序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$和 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，分别属于 X和 $C>0$，使得 $\lim_{n\to\infty}c(x_n,y_n')=\infty$且$\sup_{n\in\mathbb{N}}b(x_n,y_n')<C$。

证明. 取 $Z=X\times X$。引理 1 给出序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，分别属于 X 和$C>0$，使得 $\lim_{n\to\infty}c(x_n,y_n')=\infty$ 且 $\sup_{n\in\mathbb{N}}b(x_n,y_n')<C$。还需证明它们无界。假设两个序列都有界，即存在 $R>0$，使得 $d_X(x_0,x_n)<R$且 $d_X(x_0,y_n)<R$，其中某个 $x_0\in X$ 对任意 $n\in\mathbb{N}$ 均成立。那么

$$c(x_n,y_n')\leq d_X(x_n,x_0)+c(x_0,x_0')+d_X(x_0,y_n)$$

有界——矛盾。因此，这两个序列中至少有一个无界，不妨设为 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$。假设另一个有界。那么

$$d_X(x_0,y_n)\geq d_X(x_0,x_n)-b(x_n,y_n')\geq d_X(x_0,x_n)-C$$

——矛盾。 □

给定 b， $c\in\mathcal{M}(X)$，使得 $c\preceq b$ 不成立，并令 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$、 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 C 如推论 2 中所述，定义度量 $a\in\mathcal{M}(X)$ 如下：

$$a(x,y')=\inf_{n\in\mathbb{N}}(d_X(x,x_n)+d_X(y_n,y)+C),\quad x,y\in X. \tag{2}$$

引理 3. 有 $aba^*\prec aca^*$。

证明。 根据定义（（1）和（2）），

$$\begin{aligned}(aca^*)(x,y') &= \inf_{u,v\in X}[a(x,u')+1+c(u,v')+1+a^*(v,y')]\\ &= \inf_{u,v\in X}[a(x,u')+a(y,v')+c(u,v')+2]\\ &= \inf_{\substack{u,v\in X,\\ n,m\in\mathbb{N}}}[d_X(x,x_n)+C+d_X(y_n,u)+d_X(y,x_m)+C+d_X(y_m,v)+c(u,v')+2].\end{aligned}$$

同理,

$$(aba^*)(x,y')=\inf_{\substack{u,v\in X,\\ n,m\in\mathbb{N}}}[d_X(x,x_n)+d_X(y_n,u)+d_X(y,x_m)+d_X(y_m,v)+b(u,v')+2C+2].$$

取定 n 和 m，使得 $(aca^*)(x,y')$ 的下确界可以取到。于是有

$$(aca^*)(x,y')=\inf_{u,v\in X}[d_X(x,x_n)+d_X(y_n,u)+d_X(y,x_m)+d_X(y_m,v)+c(u,v')+2C+2];$$

and

$$\begin{aligned}(aba^*)(x,y') &\leq \inf_{u,v\in X}[d_X(x,x_n)+d_X(y_n,u)+d_X(y,x_m)+d_X(y_m,v)+b(u,v')+2C+2]\\ &\leq [d_X(x,x_n)+d_X(y_n,y_n)+d_X(y,x_m)+d_X(y_m,y_m)+b(x_n,y'_m)+2C+2]\\ &= d_X(x,x_n)+d_X(y,x_m)+b(x_n,y'_m)+2C+2\\ &\leq d_X(x,x_n)+d_X(y,x_m)+d_X(x_n,x'_m)+b(x_m,y'_m)+2C+2\\ &\leq d_X(x,x_n)+d_X(y,x_m)+d_X(x_n,x'_m)+3C+2.\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}(aca^*)(x,y') &= \inf_{u,v\in X}[d_X(x,x_n)+d_X(y_n,u)+d_X(y,x_m)+d_X(y_m,v)+c(u,v')+2C+2]\\ &= d_X(x,x_n)+d_X(y,x_m)+3C+2+\inf_{u,v\in X}[d_X(y_n,u)+d_X(y_m,v)+c(u,v')]-C\\ &\geq (aba^*)(x,y')+\inf_{u,v\in X}[d_X(y_n,u)+d_X(y_m,v)+c(u,v')]-C.\end{aligned}$$

由三角不等式可得

$$d_X(x_n,u)+d_X(y_m,v)+c(u,v')\geq c(x_n,y'_m),$$

因此

$$\begin{aligned}(aca^*)(x,y') &\geq (aba^*)(x,y')+\inf_{u,v\in X}[d_X(y_n,u)+d_X(y_m,v)+c(u,v')]-C\\ &\geq (aba^*)(x,y')+c(x_n,y'_m)-C.\end{aligned}$$

由于 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 均无界，且 $c(x_n,y'_n)\to\infty$，取一个子序列后，我们可以假设对所有 $n,m\in\mathbb{N}$，都有 $c(x_n,y'_m)>C$。因此，对任意$x,y\in X$，都有 $(aca^*)(x,y')\geq(aba^*)(x,y')$，所以 $aca^*\preceq aba^*$。

剩下只需证明 $aba^*\neq aca^*$。我们有

$$\begin{aligned}(aba^*)(x_k,x'_k) &\leq \inf_{\substack{u,v\in X,\\ n,m\in\mathbb{N}}}[d_X(x_k,x_n)+d_X(y_n,u)+d_X(x_k,x_m)+d_X(y_m,v)+b(u,v')+2C+2]\\ &\leq \inf_{n,m\in\mathbb{N}}[d_X(x_k,x_n)+d_X(x_k,x_m)+b(x_n,y'_m)+2C+2]\\ &\leq d_X(x_k,x_k)+d_X(x_k,x_k)+b(x_k,y'_k)+2C+2 \ \leq\ 3C+2\end{aligned}$$

对任意 $k\in\mathbb{N}$，因此

$$\sup_{k\mathbb{N}}(aba^*)(x_k,x'_k)<\infty. \tag{3}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}(aca^*)(x_k,x'_k) &= \inf_{\substack{u,v\in X,\\ n,m\in\mathbb{N}}}[d_X(x,x_n)+C+d_X(y_n,u)+d_X(x_k,x_m)+C+d_X(y_m,v)+c(u,v')+2]\\ &\geq \inf_{n,m\in\mathbb{N}}[d_X(x_k,x_n)+d_X(x_k,x_m)+c(x_n,y'_m)+2C+2].\end{aligned}$$

由于 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 无界，我们可以取一个子序列，使其满足 $d_X(x_k,\ \{x_1,\ldots,x_{k-1}\})>2^k$。如果 $n\neq k$ 或 $m\neq k$，那么

$$d_X(x_k,x_n)+d_X(x_k,x_m)+c(x_n,y'_m)>2^k.$$

如果 $n=m=k$，那么

$$d_X(x_k,x_n)+d_X(x_k,x_m)+c(x_n,y'_m)>c(x_k,y'_k).$$

在这两种情况下,

$$\lim_{k\to\infty}(aca^*(x_k,x_k'))=\infty. \tag{4}$$

由 (3) 和 (4) 可知，度量 aba^* 和 aca^* 不等价。 □

定理 4. 逆半群 $M(X)$ 是基本的。

证明。设 $s,t\in M(X)$, $s\neq t$。那么 $s\preceq t$ 和 $t\preceq s$不可能同时成立，因此至少有一个不成立。假设 $s\preceq t$ 不成立。那么，根据引理 3，存在$a\in M(X)$使得 $ata^*\prec asa^*$。

注意，对于逆半群， S蕴含 $x\prec y$ ，进而推出 $xx^*\prec yy^*$。事实上， $x\prec y$蕴含存在 $f\in E(S)$使得 $x=fy$。于是 $xx^*=fyy^*f=fyy^*$，因此$xx^*\preceq yy^*$ （回忆一下，逆半群中的幂等元可交换）。还需证明 $xx^*\neq yy^*$。反设不然，则 $fyy^*=xx^*=yy^*$。从右侧乘以 y ，得到 $fy=fyy^*y=yy^*y=y$ ，这意味着 $x=y$。

取 $x=ata^*$, $y=asa^*$，得到 $ata^*ata^*a\prec asa^*as^*a$。令 $e=a^*a\in E(M(X))$。于是 $atet^*a^*\neq ases^*a^*$。但这与 $tet^*=ses^*$ 矛盾，因此 $tet^*\neq ses^*$，即 $\mu_s(e)\neq\mu_t(e)$。□

References

[1] M. V. Lawson。逆半群。部分对称性理论。世界科学出版社，1998年。[2] V. Manuilov。双份空间上的度量构成逆半群。《几何分析杂志》**31** (2021年), 5721–5739。

Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow State University, Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia电子邮箱: manuilov@mech.math.msu.su