arXiv:2512.14934v1 [math.MG] 16 Dec 2025

针对不连续函数的最优布劳威尔不动点定理

Henry Adams 和 Florian Frick

摘要。布劳威尔不动点定理指出，从闭合的 n 维球到其自身的任意连续函数都有一个不动点。1961年，Klee 证明，如果这样的函数具有有界的不连续性，那么它有一个接近不动点的点。我们改进了 Klee 在任意有限维欧几里得空间中的结果，并证明我们的界是可能达到的最佳界。

1. 引言

布劳威尔不动点定理 [7] 指出，如果 f 是从闭单位球到其自身的连续函数，那么 f 有一个不动点，即存在一点 x 满足 $f(x) = x$。该定理曾被用于证明纳什均衡的存在性 [12], ，而 [6] 则介绍了布劳威尔不动点定理若干引人入胜的应用和推广。如果 f 不连续，会有什么结论?

设 X 为一个度量空间。若函数 $f\colon X \to X$ 满足：对于每个点 $x \in X$ ，都存在一个邻域 U_x ，使得像 $f(U_x)$的直径至多为 ε，则称其为-连续 。若 $\|x - f(x)\| \le \varepsilon$，则称点 $x \in X$ 为 f 的不动点。在 [10, 定理 3], 中，Klee 证明：若 X 是赋范线性空间的一个凸紧子集，且 $f\colon X \to X$ 是 ε-连续的，那么对于任意 $\varepsilon' > \varepsilon$ ，函数 f 都有一个 ε'不动点。

与此密切相关的是 $f\colon X \to X$ 的不连续模 $\delta(f)$，其定义为

$$\delta(f) = \text{下确界}\{\delta \ge 0 \mid \forall x \in X, \exists \text{ 中满足以下条件的邻域 } U_x\colon \ x \text{ 的直径}(f(U_x)) \le \delta\};$$

例如参见 [8] 和近期论文 [3]。注意，若 f 是 ε-连续的，则 $\delta(f) \le \varepsilon$；反之，若 $\delta(f) \le \varepsilon$ ，则对所有 $\varepsilon' > \varepsilon$， f 都是 ε'-连续的。

我们说明如何在任意有限维欧几里得空间中改进 Klee 的结果，并进一步证明我们的界是最优的。对于 $n \ge 1$，令 $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \le 1\}$ 为 n维欧几里得空间中的单位球。令 $R_n = \sqrt{2(n+1)/n}$ 为 B^n中内接n-单纯形的直径，按欧几里得度量计算。

主定理。若 $f\colon B^n \to B^n$ 是 ε-连续的，则对于任意 $\varepsilon' > \frac{\varepsilon}{R_n}$ ，函数 f 都有一个ε'-不动点。

因此，在 n 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中，主定理相比 [10, 定理 3]提高了 R_n 倍。注意， $R_1 = 2$、 $R_2 = \sqrt{3}$、 $R_3 = \sqrt{8/3}$ 和 R_n 会随着 n 增大并趋近于 ∞ 而单调递减至 $\sqrt{2}$。

*2020*年数学主题分类。 54H25，52A40。HA 获得了西蒙斯基金会数学家旅行资助。FF 获得了美国国家科学基金会职业发展奖 DMS2042428。

以下结果表明，我们的主定理中的界是最优的。由于任意函数 $f\colon B^n \to B^n$ 都是 2-连续的，我们可以将注意力限制在 $0 < \varepsilon \leq 2$ 上。

最优性结果。 设 $0 < \varepsilon \leq 2$。对于任意 $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{R_n}$，存在一个 ε-连续函数$f\colon B^n \to B^n$，它没有 ε'-不动点。

在第2节中，我们给出一维空间（即 1-维空间）中的主定理和最优性结果的简明证明，其中 $n = 1$。我们在第3节证明适用于所有维数的主定理。在第4节中，我们证明最优性结果。

2. 一维情形

注意 $B_1 = [-1, 1]$ 和 $R_1 = 2$。我们将 $[-1, 1]$ 视为一个从左向右递增的水平区间。为了证明主定理在特例 $n = 1$下成立，我们必须证明：若 $f\colon [-1, 1] \to [-1, 1]$ 是 ε-连续的，那么对于任意 $\varepsilon' > \frac{\varepsilon}{2}$，函数 f 都有一个 ε'- 不动点。我们证明其逆否命题。设$\varepsilon' > \frac{\varepsilon}{2}$。我们要证明，如果没有点 x满足 $|x - f(x)| \leq \varepsilon'$，那么$f$ 就不是 ε-连续的。由于 -1 不是一个 ε'-不动点， f 必定将 -1 映射到更靠右的某个点，即 $f(-1) - (-1) > \varepsilon'$。类似地，由于 1 不是一个 ε'-不动点， f 必定将 1 映射到更靠左的某个点，即 $1 - (f(1)) < \varepsilon'$。将区间 $[-1, 1]$ 分解为两个集合，$[-1, 1] = S_R \coprod S_L$，其中 S_R 包含被 f向右映射超过 ε'的点，而 S_L 包含被 f 向左映射超过 ε' 的点：

$$S_R = \{x \in [-1, 1] \mid f(x) - x > \varepsilon'\}$$
$$S_L = \{x \in [-1, 1] \mid x - f(x) > \varepsilon'\}$$

集合 $S_R \ni -1$ 和 $S_L \ni 1$ 非空，且覆盖连通区间 $[-1, 1]$，因此它们的闭包相交。设 y 是这两个闭包交集中的一点。任意一个以 y 为中心的开邻域 U_y，都包含一个任意接近 y 的点 $y_R \in S_R$，以及一个任意接近 y的点 $y_L \in S_L$；就我们的目的而言，只需假设 $|y - y_R|$， $|y - y_L| < \varepsilon' - \frac{\varepsilon}{2}$，从而 $|y_L - y_R| < 2\varepsilon' - \varepsilon$。因此， $f(U_y)$ 的直径至少为

$$\begin{aligned} f(y_R) - f(y_L) &= (f(y_R) - y_R) + (y_L - f(y_L)) - (y_L - y_R) \\ &> \varepsilon' + \varepsilon' - |y_L - y_R| \\ &> 2\varepsilon' - (2\varepsilon' - \varepsilon) \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

所以 f 不是 ε-连续的。

现在，我们证明特例 $n = 1$下的最优性结果。设 $0 < \varepsilon \leq 2$，并设 $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2}$。定义函数 $f\colon [-1, 1] \to [-1, 1]$，使得

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2} & \text{if } x \leq 0 \\ -\frac{\varepsilon}{2} & \text{if } x > 0. \end{cases}$$

为说明函数 f 是 ε-连续的，注意到 f 的像的直径为 ε。函数 f 没有 ε'-不动点这一事实，是由 $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2}$ 得出的。

3. 主定理的证明

我们对一般维数 n 下主定理的证明将依赖两个引理。第一个引理实质上就是荣格定理，它给出了 $\mathbb{R}^n$ 中一组点到其凸包的距离上界。对于子集 $X \subseteq \mathbb{R}^n$，记其凸包为 conv(X)。

引理 1 (荣格定理 [9])。设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有限点集，其直径至多为 ε。那么，凸包$\mathrm{conv}(X)$中的任意点到 $\frac{\varepsilon}{R_n}$ 中某一点的距离都不超过 X。

证明。由 R_n 的单调性，我们不妨假设 $C := \mathrm{conv}(X)$ 是满维的。对于 $y \in C$，定义 $B_C[y; r] = \{z \in C \mid d(z, y) \le r\}$。由于 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ 是直径至多为 ε 的凸集，荣格定理 [9] 表明存在某个点 $y \in C$ 满足 $C \subseteq B_C[y; \frac{\varepsilon}{R_n}]$。因此，集合族 $\{B_C[x; \frac{\varepsilon}{R_n}]\}_{x\in X}$ 中的所有集合都有一个公共点，这意味着该集合族的神经是可缩的。因此，根据神经引理，$\bigcup_{x\in X} B_C[x; \frac{\varepsilon}{R_n}]$ 是可缩的。由维数归纳法，C 的边界包含于$\bigcup_{x\in X} B_C[x; \frac{\varepsilon}{R_n}]$。包含边界的凸集的可缩子集必定是整个凸集。因此，$C \subseteq \bigcup_{x\in X} B_C[x; \frac{\varepsilon}{R_n}]$。□

我们要用到的第二个引理涉及维托里斯–里普斯单纯复形 [15]。对于度量空间 X 和 $r \ge 0$，维托里斯–里普斯单纯复形 VR($X; r$) 的顶点集为 X，并且当 diam(σ) $\le r$ 时，包含有限子集 $\sigma \subseteq X$ 作为单纯形。

这个第二引理与 [2, 引理 7.4], 相同，但有两处细微改动。首先，我们用 ε-连续性替代不连续模，因为如果一个函数是 ε-连续的，那么它的不连续模至多为 ε。其次，虽然在 [2]中断言存在一个参数 α，但其中的证明实际上表明，对每个充分小的 $\alpha > 0$，结论都成立；这正是我们在此所需的一般性。

引理 2。设 $f\colon X \to Y$ 是度量空间之间的一个 ε-连续函数，且 X 紧。那么，对于每个 $\gamma > 0$ 以及每个充分小的 $\alpha > 0$，函数 f 诱导出一个（连续的）单纯映射 $f\colon \mathrm{VR}(X; \alpha) \to \mathrm{VR}(Y; \varepsilon + \gamma)$，其定义为 $f(\{x_0, \ldots, x_m\}) = \{f(x_0), \ldots, f(x_m)\}$。

现在我们证明主定理。

主定理的证明。设 $f\colon B^n \to B^n$ be ε-连续。我们必须证明，对于任意 $\varepsilon' > \frac{\varepsilon}{R_n}$，函数 f 都有一个 ε'-不动点。令 $0 < \gamma < R_n\varepsilon' - \varepsilon$。令 $\alpha > 0$ 满足关于$f\colon B^n \to B^n$的引理 2。必要时，进一步减小 $\alpha > 0$，使其足够小，从而 $\frac{\varepsilon+\gamma}{R_n} + \frac{\alpha}{2} < \varepsilon'$。选取一个足够稠密的子集 $Z \subseteq B^n$，使得以Z中的点为中心、半径为 $\frac{\alpha}{2}$ 的球覆盖 B^n。在这些球上使用单位分解，得到一个连续映射 $\iota\colon B^n \to \mathrm{VR}(Z; \alpha)$。$\varepsilon$-连续的限制函数 $f|_Z\colon Z \to B^n$ 诱导出一个连续映射 $f\colon \mathrm{VR}(Z; \alpha) \to \mathrm{VR}(B^n; \varepsilon+\gamma)$，其中 $f(\{z_0, \ldots, z_m\}) = \{f(z_0), \ldots, f(z_m)\}$，如引理 2 所示。最后，定义连续映射 $\mathrm{avg}\colon \mathrm{VR}(B^n; \varepsilon + \gamma) \to B^n$ 如下。$\mathrm{VR}(B^n; \varepsilon + \gamma)$ 的几何实现中的一个点可以写成形式和 $\sum_{i=0}^m \lambda_i x_i$，其中 $\lambda_i > 0$，其中 $\sum_i \lambda_i = 1$，且 $x_i \in B^n$，并且 diam($\{x_0, \ldots, x_m\}$) $\le \varepsilon + \gamma$。将几何实现中的形式和 $\sum_{i=0}^m \lambda_i x_i$ 重新解释为欧几里得空间 $\sum_{i=0}^m \lambda_i x_i \in B^n$中的向量的加权平均。由引理 1（荣格定理）可知，若 $\mathrm{avg}(\sum_{i=0}^m \lambda_i x_i) = x^*$，则存在某个 x_i 满足 $\|x_i - x^*\| \le \frac{\varepsilon+\gamma}{R_n}$。

定义为 $F := \mathsf{avg} \circ f \circ \iota$ 的复合映射 $F\colon B^n \to B^n$ 是连续的。

$$B^n \xrightarrow{\iota} \mathrm{VR}(Z;\,\alpha) \xrightarrow{\bar{f}} \mathrm{VR}(B^n;\varepsilon+\gamma) \xrightarrow{\mathrm{avg}} B^n$$
$$F$$

因此，根据布劳威尔不动点定理，将其应用于连续函数 F 后，存在一个不动点 $y \in B^n$，使得 $F(y) = y$。令 $\{z_0, \ldots, z_m\}$ 为 $\mathrm{VR}(Z;\,\alpha)$ 中的单纯形，其凸包包含 $\iota(y)$，这意味着每个 z_i 到 y 的距离都不超过 $\frac{\alpha}{2}$。像 $f(\{z_0, \ldots, z_m\}) = \{f(z_0), \ldots, f(z_m)\}$ 是 $\mathrm{VR}(B^n;\,\varepsilon+\gamma)$ 中的一个单纯形，其凸包包含 $f(\iota(y))$。引理 1 给出 $\|f(z_i) - \mathsf{avg}(f(\iota(y)))\| \le \frac{\varepsilon+\gamma}{R_n}$，其中某个 $0 \le i \le m$。但是 $\mathsf{avg}(f(\iota(y))) = F(y) = y$，所以 $\|f(z_i) - y\| \le \frac{\varepsilon+\gamma}{R_n}$。而点 y 到 z_i 的距离不超过 $\frac{\alpha}{2}$，因此根据三角不等式，$\|f(z_i) - z_i\| \le \frac{\varepsilon+\gamma}{R_n} + \frac{\alpha}{2} < \varepsilon'$。因此，$z_i$ 是 f 的一个 ε'-不动点。□

4. Proof of the Optimality Result

我们证明，主定理中的界是最优的。

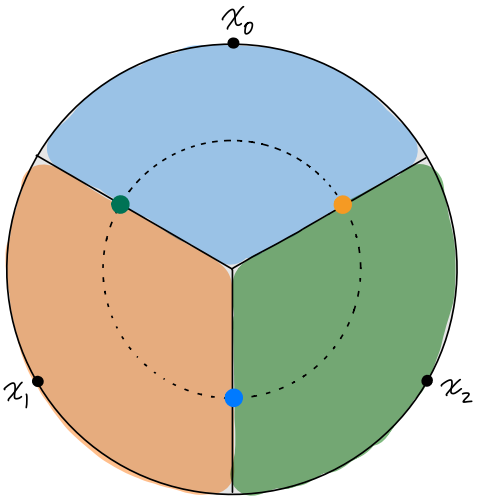


图1. 对 $n = 2$（因此也对 $R_2 = \sqrt{3}$）和 $\varepsilon = 1$ 的最优性结果之证明的示意图。外圆是 B^2 的边界，点状内圆的半径为 $\frac{\varepsilon}{R_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$。$x_i$ 的沃罗诺伊区域 $\mathrm{Vor}(x_i)$ 的内部以蓝色、橙色和绿色绘出，分别对应 $i = 0$，1，2；相同的配色方案也用于它们在 f 下对应的像点 $-\frac{\varepsilon}{R_n} x_i$。相关构造见 [1, 定理5。4], [13], [11,图 7], [5, 第 2 节。5], [4, 备注6。10], 以及 [14]。

最优性结果的证明。令 $0 < \varepsilon \le 2$，并令 $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{R_n}$。我们必须构造一个 ε-连续函数 $f\colon B^n \to B^n$，使其没有 ε'-不动点。

设 $\{x_0, \ldots, x_n\} \subseteq B^n$ 为内接于球面 $S^{n-1} \subseteq B^n$ 的正 n-单纯形的顶点集。注意 $\mathsf{diam}(\{x_0, \ldots, x_{n+1}\}) = R_n$。令

$$\mathrm{Vor}(x_i) := \{y \in B^n \;:\; \|y - x_i\| \le \|y - x_j\| \text{ for all } 0 \le j \le n\}$$

为关于点 x_i 的沃罗诺伊区域。沃罗诺伊区域 $\{\mathrm{Vor}(x_i)\}_{0\leq i\leq n}$ 构成 B^n 的闭覆盖。因此，我们可以选择子集 $V_i \subseteq \mathrm{Vor}(x_i)$（$0 \leq i \leq n$），使其构成 B^n 的一个 划分，即 B^n 的不相交覆盖。定义函数 $f\colon B^n \to B^n$ 为

$$f(x) = -\frac{\varepsilon}{R_n}\, x_i \qquad \text{if } x \in V_i.$$

要证明函数 f 是 ε-连续的，只需注意到 f 的像的直径为 ε。函数 f 没有 ε'-不动点这一事实可由 $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{R_n}$ 得出。□ —

参考文献

[1] Michał Adamaszek、Henry Adams 和 Florian Frick。通过最优传输进行度量重构。SIAM应用代数与几何期刊，2(4):597–619，2018年。[2] Henry Adams、Johnathan Bush、Nate Clause、Florian Frick、Mario Gómez、Michael Harrison、R. Amzi Jeffs、Evgeniya Lagoda、Sunhyuk Lim、Facundo Mémoli、Michael Moy、Nikola Sadovek、Matt Superdock、Daniel Vargas、Qingsong Wang 和 Ling Zhou。格罗莫夫–豪斯多夫距离、博苏克–乌拉姆定理与 Vietoris–Rips 复形。arXiv 预印本 arXiv:2301.00246，2023年。[3] Henry Adams、Florian Frick、Michael Harrison、Sunhyuk Lim、Nikola Sadovek 和 Matt Superdock。量化不连续性。arXiv 预印本 arXiv:2511.07636，2025年。[4] Arseniy Akopyan、Roman Karasev 和 Alexey Volovikov。度量空间上的博苏克–乌拉姆型定理。arXiv 预印本 arXiv:1209.1249，2012年。[5] Alexey Balitskiy。乌雷松宽度的界。博士论文，麻省理工学院，2021年。[6] Anders Björner、Jiří Matoušek 和 Günter M Ziegler。布劳威尔不动点定理的应用。《离散数学之旅：献给 Jiří Matoušek 的致敬》，第221–271页，2017年。[7] Luitzen Egbertus Jan Brouwer。关于流形的映射。《数学年鉴》，71(1):97–115，1911年。[8] Lester Dubins 和 Gideon Schwarz。博苏克–乌拉姆函数的等度不连续性。《太平洋数学杂志》，95(1):51–59，1981年。[9] Heinrich W.E. Jung。关于包含平面图形的最小圆。Journal für die reine und angewandte Mathematik，137:310–313，1910年。[10] Victor Klee。不动点性质的稳定性。载于《数学研讨会》，第1卷，第43–46页，1961年。[11] Sunhyuk Lim、Facundo Mémoli 和 Zane Smith。球面之间的格罗莫夫–豪斯多夫距离。《几何与拓扑》，27:3733–3800，2023年。[12]John F Nash Jr.。 n人博弈中的均衡点。《美国国家科学院院刊》，36(1):48–49，1950年。[13] Rozu。圆盘与圆之间的格罗莫夫–豪斯多夫距离。MathOverflow。https://mathoverflow.net/q/ 308972。[14] Kirill Sitnikov。关于球的圆度。Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Physik Kl. IIa，9:213–215，1958年。[15]Leopold Vietoris。关于紧空间的高阶连通性以及一类保持连通的映射。《数学年鉴》，97(1):454–472，1927年。

(HA)佛罗里达大学数学系，盖恩斯维尔，佛罗里达州 32611，美国电子邮箱地址：henry.adams@ufl.edu

(FF)卡内基梅隆大学数学科学系，匹兹堡，宾夕法尼亚州 15213，美国电子邮箱地址：frick@cmu.edu