arXiv:2512.14940v1 [math.DS] 16 Dec 2025

周期强迫下共振的非线性振子

Philip Korman 数学科学系 辛
辛那提大学 辛辛那提 俄亥俄州
45221-0025，以及

Yi Li 数学与统计系 约翰·杰伊刑事司
法学院 纽约州纽约市 10019

摘要

本文统一了 A.C. Lazer 和 P.O.Frederickson[3], A.C. Lazer [6], A.C. Lazer 和 D.E. Leach [7], J.M. Alonso 与 R. Ortega [1], 以及 P. Korman 和 Y. Li [4] 关于周期振荡和无界解的研究结果，这些解对应于线性部分处于共振状态并受到周期强迫的非线性方程。我们给出了周期解存在与不存在的条件，并且在周期解不存在的情况下，对共振非线性振子的动力学进行了相当详细的描述。

关键词：共振、周期振荡、无界解。

美国数学会主题分类：34C25, 34C15.

1 引言

我们关注问题（其中 $x = x(t)$）的 2π 周期解是否存在。

$$x'' + f(x)x' + g(x) + n^2 x = e(t)\,. \tag{1.1}$$

线性部分

$$x'' + n^2 x = e(t)$$

处于共振状态，其零空间由 $\cos nt$ 和 $\sin nt$ 张成。定义 $F(x) = \int_0^x f(z)\,dz$。本文始终假设 $e(t) \in C(R)$ 对所有 t, $f(x)$ $g(x) \in C(R)$ 均满足 $e(t+2\pi) = e(t)$, $n \geq 1$ 为整数；此外，我们假设无穷远处的有限极限 $F(\infty)$、$F(-\infty)$、$g(\infty)$、$g(-\infty)$ 存在，并且

$$F(-\infty) < F(x) < F(\infty), \quad \text{for all } x \in R, \tag{1.2}$$

$$g(-\infty) < g(x) < g(\infty), \quad \text{for all } x \in R. \tag{1.3}$$

定义

$$A_n = \int_0^{2\pi} e(t)\cos nt\,dt, \quad B_n = \int_0^{2\pi} e(t)\sin nt\,dt.$$

当 $f = 0$ 时，方程

$$x'' + g(x) + n^2 x = e(t) \tag{1.4}$$

曾在 A.C. Lazer 和 D.E. Leach 的论文中被研究 [7]，他们证明了以下经典定理。

定理 1.1 *([7])* 条件

$$\sqrt{A_n^2 + B_n^2} < 2\left(g(\infty) - g(-\infty)\right)$$

是方程 *(1.4)* 存在 2π 周期解的充要条件。

当 $g = 0$ 时，对于相应的方程

$$x'' + f(x)x' + n^2 x = e(t) \tag{1.5}$$

有如下结果。

定理 1.2 该条件

$$\sqrt{A_n^2 + B_n^2} < 2n\left(F(\infty) - F(-\infty)\right)$$

是方程 *(1.5)* 存在 2π 周期解的充要条件。

该定理由 A.C. Lazer [6] 针对 $n = 1$ 证明（此前 P.O. Frederickson 和 A.C. Lazer [3]已有相关结果），而对于所有 $n \geq 1$，则由 P. Korman 和 Y. Li [4], 证明；他们对 A.C. Lazer 的证明作了小幅修改。

问题：是否可以将这些定理结合起来用于方程 (1.1)？事实证明，必要条件可以结合，而充分条件无法结合。

命题 1 条件

$$\sqrt{A_n^2+B_n^2}<2n\left(F(\infty)-F(-\infty)\right)+2\left(g(\infty)-g(-\infty)\right) \tag{1.6}$$

是方程 ***(1.1)*** 存在 2π 周期解的必要条件。

命题 2 条件 ***(1.6)*** 并不足以保证方程 ***(1.1)*** 存在 2π周期解。

若 (1.4) 没有 2π 周期解，则由第二个 Massera 定理可知，(1.4) 的所有解均无界（当 $t\to\pm\infty$ 时）；G. Seifert [8] 首先观察到了这一点。后来，J.M. Alonso 和 R. Ortega [1]为这一结果给出了一个初等证明（并提出了更精确的结论，指出解在 C^1 范数下趋于无穷大）。接下来我们指出，[1] 的方法同样适用于方程 (1.1)。

命题 3 除上述假设外，进一步假设 $f(x)$ 有一致下界（即下文的假设 ***(2.10)***）。那么在

$$\sqrt{A_n^2+B_n^2}\geq 2n\left(F(\infty)-F(-\infty)\right)+2\left(g(\infty)-g(-\infty)\right), \tag{1.7}$$

方程 ***(1.1)*** 的所有解都满足 $\lim_{t\to\pm\infty}\left(x^2(t)+x'^2(t)\right)=\infty$。

显然，根据命题 1，本例中不存在 2π 周期解。命题 3 表明，在确定（1.1）的整体动力学时，不存在 2π 周期解比存在 2π 周期解更具决定性。

2 证明

以下初等引理很容易证明。

引理 2.1 考虑一个函数 $\cos(nt-\varphi)$，其中 n 为整数，φ为任意实数。记作 $P_c=\{t\in(0,2\pi)\,|\cos(nt-\varphi)>0\}$和 $N_c=\{t\in(0,2\pi)\,|\cos(nt-\varphi)<0\}$。则

$$\int_{P_c}\cos(nt-\varphi)\,dt=2,\quad \int_{N_c}\cos(nt-\varphi)\,dt=-2\,.$$

引理 2.2 考虑函数 $\sin(nt-\varphi)$，其中 n 为整数，φ为任意实数。记 $P_s=\{t\in(0,\ 2\pi)\,|\sin(nt-\varphi)>0\}$和 $N_s=\{t\in(0,\ 2\pi)\,|\sin(nt-\varphi)<0\}$。则

$$\int_{P_s}\sin(nt-\varphi)\,dt=2,\quad \int_{N_s}\sin(nt-\varphi)\,dt=-2\,.$$

命题 1 的证明。给定任意数 a 和 b，可以找到一个$\delta \in [0, 2\pi)$，使得

$$a\cos nt + b\sin nt = \sqrt{a^2+b^2}\cos(nt-\delta)\,.$$

（其中 $\cos\,\delta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$、$\sin\,\delta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$。）由此可得

$$\frac{A_n}{\sqrt{A_n^2+B_n^2}}\cos nt + \frac{B_n}{\sqrt{A_n^2+B_n^2}}\sin nt = \cos(nt-\delta)\,, \tag{2.1}$$

对于某个 $\delta \in [0, 2\pi)$。将 (1.1) 乘以 $\frac{A_n}{\sqrt{A_n^2+B_n^2}}\cos nt$ 并积分，再将 (1.1) 乘以 $\frac{B_n}{\sqrt{A_n^2+B_n^2}}\sin nt$ 并积分，然后将所得结果相加：

$$\sqrt{A_n^2+B_n^2} = \int_0^{2\pi} F(x(t))'\cos(nt-\delta)\,dt + \int_0^{2\pi} g(x(t))\cos(nt-\delta)\,dt, \tag{2.2}$$

根据 (2.1)，利用 $x(t)$ 是一个 2π 周期解这一事实以及引理 2.2，可得

$$\begin{gathered}\textstyle\int_0^{2\pi} F(x(t))'\cos(nt-\delta)\,dt = n\int_0^{2\pi} F(x(t))\sin(nt-\delta)\,dt \\ = n\textstyle\int_{P_s} F(x(t))\sin(nt-\delta)\,dt + n\int_{N_s} F(x(t))\sin(nt-\delta)\,dt \\ < 2n\left(F(\infty)-F(-\infty)\right)\,.\end{gathered}$$

同理，利用引理 2.1

$$\begin{gathered}\textstyle\int_0^{2\pi} g(x(t))\cos(nt-\delta)\,dt < g(\infty)\int_{P_c}\cos(nt-\delta)\,dt + g(-\infty)\int_{N_c}\cos(nt-\delta)\,dt \\ = 2\left(g(\infty)-g(-\infty)\right)\,.\end{gathered}$$

条件 (1.6) 得证。 ♢

命题 2 的证明。考虑方程

$$x'' + f(x)x' + g(x) + n^2x = E\cos nt, \tag{2.3}$$

带有一个参数 E。计算 $A_n = \int_0^{2\pi} E\cos^2 nt\,dt = E\pi$、$B_n = \int_0^{2\pi} E\cos\,nt\sin nt\,dt = 0$ 和 $\sqrt{A_n^2+B_n^2} = E\pi$。选择 E，使得

$$E\pi = \sqrt{A_n^2+B_n^2} = 2n\left(F(\infty)-F(-\infty)\right) + 2\left(g(\infty)-g(-\infty)\right) - \epsilon, \tag{2.4}$$

其中 $\epsilon > 0$ 较小，具体值待定。条件 (1.6) 对方程 (2.3) 成立。如果这个条件足够，我们就会得到方程 (2.3) 的一个 2π 周期解，因此

$$x'' + F(x)' + n^2x = E\cos nt - g(x) \equiv \bar{e}(t)\,. \tag{2.5}$$

计算 (2.5) 中的系数 A_n, B_n：

$$\bar{A}_n = \int_0^{2\pi} \bar{e}(t)\cos nt\,dt = E\pi - \int_0^{2\pi} g(x)\cos nt\,dt, \tag{2.6}$$
$$\bar{B}_n = \int_0^{2\pi} \bar{e}(t)\sin nt\,dt = -\int_0^{2\pi} g(x)\sin nt\,dt.$$

由于 (2.5) 可解，由定理 1.2 可得

$$\sqrt{\bar{A}_n^2 + \bar{B}_n^2} < 2n\left(F(\infty) - F(-\infty)\right). \tag{2.7}$$

对于任意 $\epsilon > 0$，我们可以选取一个指标 n_0，使得对于 $n \geq n_0$

$$\left|\int_0^{2\pi} g(x)\sin nt\,dt\right| < \epsilon, \tag{2.8}$$

这可由振荡积分的经典结果推出，参见例如 O. Costin 等人 [2]。利用 (2.6)、(2.8)，再结合 (2.4)，可得

$$\begin{aligned}\sqrt{\bar{A}_n^2 + \bar{B}_n^2} &> |\bar{A}_n| > E\pi - \epsilon \\ &= 2n\left(F(\infty) - F(-\infty)\right) + 2\left(g(\infty) - g(-\infty)\right) - 2\epsilon \\ &> 2n\left(F(\infty) - F(-\infty)\right),\end{aligned}$$

若固定 $\epsilon < g(\infty) - g(-\infty)$，便与 (2.7) 矛盾。 ♢

在给出若干预备结果后，我们将证明命题 3 的一个推广。对其证明作显而易见的修改，可得命题 1 的以下推广。

命题 4 假设函数 $F(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上具有有限的下确界和上确界。那么条件

$$\sqrt{A_n^2 + B_n^2} < 2n\left(\sup F - \inf F\right) + 2\left(\sup g - \inf g\right)$$

对于 (*1.1*) 的 2π 周期解的存在是必要的。

我们将使用 J.M. Alonso 和 R. Ortega [1] 中包含的以下结果。

命题 5 *([1])* 设 $G(\zeta,\eta): R^2 \to R^2$ 是一个连续向量函数，且 $V(\zeta,\eta): R^2 \to R$ 是一个连续函数。取 $\xi \equiv (\zeta,\eta)$，考虑一个序列

$$\xi_{n+1} = G\left(\xi_n\right), \quad n \geq 0,$$

以任意向量 ξ_0 为起始。假设

$$V\left(G(\xi)\right) > V(\xi), \quad \forall \xi \in R^2. \tag{2.9}$$

那么 $\lim_{n\to\infty} ||\xi_n|| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\zeta_n^2 + \eta_n^2} = \infty$。

证明： 如果序列 $\{||\xi_n||\}$ 不趋于无穷大，那么 $\{\xi_n\}$ 有一个有限聚点 $\xi^* \in R^2$。设 $\{\xi_{n_k}\}$ 是一个趋于ξ^*的子序列，且 $n_1 < n_2 < \cdots$。由 (2.9)，由于 $V(\xi_{n+1}) = V(G(\xi_n)) > V(\xi_n)$，序列 $V(\xi_n)$ 是递增的。因此有

$$V(G(\xi^*)) = \lim_{k\to\infty} V(G(\xi_{n_k})) = \lim_{k\to\infty} V(\xi_{n_k+1})$$
$$\leq \lim_{k\to\infty} V(\xi_{n_{k+1}}) = V(\xi^*)\,,$$

这与 (2.9) 矛盾。（注意到 $n_k + 1 \leq n_{k+1}$。） ♢

下面的引理指出，对于 (1.1) 的解，$x^2(t) + x'^2(t)$ 在长度为 2π 的区间上不会增长太多。

引理 2.3 假设 $e(t) \in C(R)$ 是 2π 周期的，条件 *(1.3)* 成立，并且进一步假设

$$f(x) \geq \alpha, \quad \textit{for some } \alpha \in R, \textit{ and all } x \in R. \tag{2.10}$$

那么，对于任意初始数据 $(x(0)\ x'(0))$，其中 $c_0 = x^2(0) + n^2x'^2(0)$，存在一个数 $c = c(c_0)$，使得 *(1.1)* 的相应解满足

$$x^2(t) + n^2x'^2(t) \leq c, \quad \textit{for all } t \in [0, 2\pi].$$

证明： 考虑"能量" $E(t) = \frac{1}{2}x'^2(t) + \frac{1}{2}n^2x^2(t)$。由于

$$E'(t) = -f(x)x'^2 - g(x)x' + e(t)x'.$$

由我们的条件可得 $E'(t) \leq c_1E(t) + c_2$，证毕。 ♢

现在我们证明命题 3 的以下推广。

命题 6 假设函数 $F(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上有有限的下确界和上确界。还假设 *(2.10)* 成立。在以下情况下

$$\sqrt{A_n^2 + B_n^2} \geq 2n\,(\sup F - \inf F) + 2\,(\sup g - \inf g)\,,$$

方程 *(1.1)* 的所有解都满足 $\lim_{t\to\pm\infty}\left(x^2(t) + x'^2(t)\right) = \infty$。

证明： 按照 J.M. Alonso 和 R. Ortega 的做法 [1], ，我们将使用命题 5。给定 $\xi = (\zeta,\ \eta) \in R^2$，记满足 $x(0) = \zeta$、$x'(0) = \eta$的 (1.1) 的解为 $x(t,\ \xi)$。定义映射 $R^2 \to R^2$ 为 $G(\xi) = (x(2\pi,\ \xi)\ x'(2\pi,\ \xi))$，并将证明迭代序列

$$\xi_{n+1} = G(\xi_n)\,,\ \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

对任意 ξ_0 都无界。令 δ 如 (2.1) 所定义，并定义函数

$$V(\xi) = \eta\cos\delta - n\zeta\sin\delta + F(\zeta)\cos\delta\,.$$

将 (1.1) 乘以 $\frac{A_n}{\sqrt{A_n^2+B_n^2}}\cos nt$ 并积分，再将 (1.1) 乘以 $\frac{B_n}{\sqrt{A_n^2+B_n^2}}\sin nt$ 并积分，然后将所得结果相加。根据 (2.1)，可如上得到

$$\begin{aligned}(2.11)\qquad &\int_0^{2\pi}(x''+n^2x)\cos(nt-\delta)\,dt + \int_0^{2\pi}F(x(t))'\cos(nt-\delta)\,dt\\ &+\int_0^{2\pi}g(x(t))\cos(nt-\delta)\,dt = \sqrt{A_n^2+B_n^2}\,.\end{aligned}$$

通过分部积分，我们将左侧的第一项表示为

$$\begin{aligned}&[x'(t)\cos(nt-\delta)]\,|_0^{2\pi} + n\,[x(t)\sin(nt-\delta)]\,|_0^{2\pi}\\ &= [x'(2\pi)-\eta]\cos\delta - n\,[x(2\pi)-x(\zeta)]\sin\delta\,,\end{aligned}$$

将第二项表示为

$$[F(x(2\pi))-F(x(0))]\cos\delta + n\int_0^{2\pi}F(x)\sin(nt-\delta)\,dt\,.$$

我们将 (2.11) 中的非积分项合并为 $V(G(\xi))-V(\xi)$。于是，由 (2.11) 得

$$\begin{aligned}V(G(\xi))-V(\xi) &= \sqrt{A_n^2+B_n^2} - n\int_0^{2\pi}F(x(t))\sin(nt-\delta)\,dt\\ &\quad -\int_0^{2\pi}g(x(t))\cos(nt-\delta)\,dt\\ &> \sqrt{A_n^2+B_n^2} - 2n\,(\sup F - \inf F) - 2\,(\sup g - \inf g) \ge 0\,.\end{aligned}$$

（第一个不等式是严格的，因为根据 (1.2) 和 (1.3)，函数 g 和 F 都不是常函数。）因此，条件 (2.9) 成立，命题 5 适用，从而证明了序列 $(x(2n\pi,\xi)$ $x'(2n\pi,\xi))$ 无界。如果存在一个序列 $\{t_k\}\to\infty$，使得有界的 $x'^2(t_k) + x^2(t_k)$，我们将得到与引理 2.3 矛盾的结论。$\diamondsuit$

参考文献

[1] J.M. Alonso 和 R. Ortega，共振处半线性方程的无界解，*Nonlinearity* **9**，第 5 期，1099-1111（1996）。[2] O. Costin、N. Falkner 和 J.D. McNeal，黎曼-勒贝格引理的一些推广，*Amer. Math. Monthly* **123**，第 4 期，387-391（2016）。

[3] P.O. Frederickson 和 A.C. Lazer，二阶振子中阻尼的必要条件与充分条件，微分方程杂志 **5**，262-270（1969）。[4] P. Korman 和 Y. Li，受非线性摩擦力扰动的共振简谐振子，数学科学学报*B*辑英文版**34**，第 4 期，1025-1028（2014）。[5] E.M. Landesman 和 A.C. Lazer，共振处线性椭圆边值问题的非线性扰动，数学与力学杂志 **19**，609-623（1970）。[6] A.C. Lazer，重新审视 Landesman-Lazer 型第一结果。非线性微分方程会议论文集（佛罗里达州科勒尔盖布尔斯，1999），113-119（电子版），电子微分方程会议期刊，第 5 卷，德克萨斯州立大学西南分校，德克萨斯州圣马科斯（2000）。[7] A.C. Lazer 和 D.E. Leach，共振处受迫简谐振子的有界扰动，纯粹与应用数学年刊 **82**（4），49-68（1969）。[8] G. Seifert，周期强迫下无阻尼二阶非线性方程的共振，应用数学季刊**48**，第 3 期，527-530（1990）。