arXiv:2512.14966v1 [math.FA] 16 Dec 2025

关于 ℓ_∞^k 与 ℓ_1^k球面之间同胚的一致连续性

BRUNO M. BRAGA、C. GARTLAND、G. LANCIEN、P. MOTAKIS、E. PERNECK´A 和 TH. SCHLUMPRECHT

Abstract. 我们研究这样一个问题：是否存在一列同胚 $(F_k)_k$，将 k维巴拿赫空间ℓ_∞^k 与 ℓ_1^k 的单位球面相互映射，并且这列同胚还是等度一致连续的。我们证明，若这列映射 $(F_k)_k$ 满足以下任一条件，则不可能如此：（1） *does not increase support sizes*（这是一种严格弱于支撑保持的性质）；或（2）是 *steppreserving* （这是一种严格弱于关于典范基置换等变的性质）。我们还给出定量估计，将映射的一致连续模与空间的维数联系起来。这为 W. B. Johnson 提出的问题提供了部分答案，并与 c_0 是否具有 Kasparov 和 Yu 的性质 (H) 这一问题相关。我们的结果也适用于 ℓ_1 以外更一般的空间，例如具有无条件基、且该基不等价于标准c_0 基的空间。最后，我们推导出一种渐近集中不等式，定义在这些单位球面正部上的步保持等度一致连续映射必须满足该不等式。

1. Introduction

2012年，卡斯帕罗夫和余为巴拿赫空间提出了一种新颖且引人入胜的性质：性质 (H)。记巴拿赫空间 Y 的单位球面为 S_Y，如果存在一个一致连续映射 F: $S_X \to S_{\ell_2}$，以及有限维子空间的递增序列 $(X_n)_n$ 和 $(H_n)_n$，使得 $\bigcup_n X_n$ 和 $\bigcup_n H_n$ 分别在 X 和 ℓ_2中稠密，并且 F 限制在每个 S_{X_n} 上都是到 S_{H_n} 的同胚（见[KY12，第1.1]定义），则称巴拿赫空间 X 具有性质 (H)。我们称序列 $(X_n)_n$ 为 X的铺砌。性质 (H) 在几个方面都相当独特。乍看之下，它似乎是一种巴拿赫空间之间的“非线性嵌入／等价性质”，但实际上并非如此，因为限制映射 $F \restriction S_{X_n}$ 的逆映射不一定是等度一致连续的。这种缺乏一致连续性的情况使性质 (H) 处于一个不同寻常的位置：它在某种程度上同时是一种几何性质和拓扑性质，除此之外，还与巴拿赫空间的局部理论有关，因为它必须保持铺砌 $(X_n)_n$ 和 $(H_n)_n$。

Date：2025年12月18日。B. M. Braga 部分受到 FAPERJ 项目（拨款编号 E-26/200.167/2023）、CNPq 项目（拨款编号 303571/2022-5）以及 Serrapilheira 项目（拨款编号 R-2501-51476）的资助。C. Gartland 部分受到 NSF 项目 DMS-2546184 的资助。G. Lancien 部分受到法国国家研究署项目 ANR-24-CE40-0892-01 的资助。P. Motakis 部分受到 NSERC 项目 RGPIN-2021-03639 的资助。Th. Schlumprecht 部分受到 NSF 项目 DMS-2349322 的资助。

由于它与诺维科夫猜想——拓扑学中最重要的未解决问题之一——有关，因此无论如何强调性质 (H) 的重要性都不为过。卡斯帕罗夫和余在 [KY12，定理 1。2] 中证明，如果一个可数离散群 Γ 能够粗嵌入到具有性质 (H) 的巴拿赫空间中，那么诺维科夫猜想对于 Γ成立。特别地，如果存在一个具有性质 (H) 且对所有可数离散群都是粗普适的巴拿赫空间，那么诺维科夫猜想将无条件成立。根据阿哈罗尼的一个著名结果（[Aha74，页码中的定理 288]），每个可分度量空间都可以利普希茨嵌入到 c_0 ——即由收敛于零的序列组成的巴拿赫空间——中，因此卡斯帕罗夫和余提出了 c_0 是否具有性质 (H) 的问题（见 [KY12，第 1861]页）。

问题 1.1 (G. Kasparov 和 G. Yu)。 c_0 具有性质 (H)吗？事实上，所有可分巴拿赫空间都具有性质 (H)吗？

鉴于问题 1.1 若得到肯定回答将产生的重大影响，认为这个问题的答案是否定的似乎是合理的。一方面，至今竟没有已知的不具备性质 (H) 的可分巴拿赫空间实例，这非常令人惊讶；另一方面，目前证明某个空间具有性质 (H) 的方法只有一种。总之，迄今为止，人们对性质 (H) 的理解仍然非常有限。

已知用于证明某些空间具有性质 (H) 的方法依赖于 Mazur 映射。回忆一下，若 $p \in [1,\infty)$，则映射

$$M_p\colon S_{\ell_p} \to S_{\ell_2}$$
$$(x_n)_n \mapsto \left(\operatorname{sign}(x_n)|x_n|^{p/2}\right)_n$$

是在 ℓ_p 和 ℓ_2 的单位球面之间的一个一致同胚（[BL00，定理 9.1]）。将有限维空间 $(\ell_p^k)_k$ 和 $(\ell_2^k)_k$ 分别视为 ℓ_p和 ℓ_2的子空间，这些映射限制为 ℓ_p^k 和 ℓ_2^k的单位球面之间的一致同胚。因此，所有 ℓ_p（ $p \in [1,\infty)$）都具有性质 (H)。更一般地，利用广义马祖尔映射可以得到：每个具有无条件基、且不以有界畸变包含空间 $(\ell_\infty^k)_k$ 的巴拿赫空间 X也具有性质 (H)（参见 [CW18，定理 1]）。这是因为，任何此类空间 X 的单位球面都与 ℓ_2 的单位球面一致同胚；这一“马祖尔型映射”保持由 X 的无条件基和 ℓ_2 的典范基所给出的典范分割（参见 [OS94，定理 2.1] 及其证明）。此外，不包含 $(\ell_\infty^k)_k$ 的巴拿赫格以及 Schatten p类（ $p \in [1,\infty)$）也具有性质 (H)，正如 [KY12，第 1860]页所指出的。

为了说明我们对问题 1.1 的了解有多么有限，我们提到，甚至尚不清楚 c_0 是否不满足其标准分块下的性质 (H) 的要求。具体而言，是否存在一致连续映射 $F\colon S_{c_0} \to S_{\ell_2}$，使得对于某个自然数递增序列 $(n_k)_k$，映射 F 在每个 $\ell_\infty^{n_k}$ 的单位球面上的限制，都以整个 $S_{\ell_2^{n_k}}$为其同胚像？正如 Johnson 在 [Joh11], 中提出的，即使下面这个问题仍然悬而未决：

问题 1.2 (W. B. Johnson)。 是否存在一个同胚序列 $(F_k)_k$，在 ℓ_∞^k 与 ℓ_2^k 的单位球面之间建立同胚，且其利普希茨常数（一致）有界？

对问题1.2 的肯定回答还将意味着诺维科夫猜想无条件成立。事实上，若该问题有肯定答案，那么我们可以

很容易证明，ℓ_2-和（ℓ_∞^k）$_k$ 具有性质（H），并且根据 F. Baudier 和 G. Lancien 的一项结果，该空间对所有局部有限度量空间而言都是利普希茨泛的（参见 [BL08，定理 2。1]）；特别地，它粗嵌入了所有可数离散群。

值得一提的是，众所周知，ℓ_∞^k 和 ℓ_2^k的单位球面不能通过畸变一致有界的映射实现利普希茨等价，也就是说，不存在满足 $\sup_k \mathrm{Lip}(F_k)\mathrm{Lip}(F_k^{-1}) < \infty$ 的映射 $(F_k)_k$。事实上，若情况如此，则拉德马赫定理将推出 $(\ell_\infty^k)_k$ 可有界畸变地同构嵌入到 ℓ_2中，但事实并非如此。

现在我们来说明本文的主要发现。简言之，本文首次给出了部分结果，表明问题 1.2可能应当得到否定答案；这些结果也可视为进一步支持问题 1.1应当得到否定答案的证据。在深入细节之前，有必要说明我们采用的方法：一方面，目前我们还无法对问题1.2 给出明确的否定答案；正如读者将在下文看到的，我们的结果要求映射 $(F_k)_k$满足一些额外条件。另一方面，我们关于映射 $(F_k)_k$ 的结论要强得多，因为我们不仅排除了其利普希茨常数存在统一上界的可能，实际上还证明这些函数不可能是等度一致连续的。此外，我们还给出了空间维数的定量估计。因此，问题 1.1 与 1.2 之间的联系更加紧密。

接下来的两个定理对问题1.2 中的某些映射类给出了有力的否定答案。我们先对这些映射类作出恰当的定义。为此，给定 $k \in \mathbb{N}$和 $x = (x_i)_{i=1}^k \in \mathbb{R}^k$，$\mathrm{supp}(x)$ 表示 $\{i \in \{1,\dots,k\} \mid x_i \neq 0\}$。给定 $F\colon S_{\ell_\infty^k} \to S_{\ell_1^k}$，记作 $F = (F_i)_{i=1}^k$；因此，每个 F_i 都是 F 与从 ℓ_1^k 到其第 i个坐标的典范投影的复合。

> I 我们称映射 $F\colon S_{\ell_\infty^k} \to S_{\ell_1^k}$ 不增加支撑大小，如果对于所有 $x \in S_{\ell_\infty^k}$，$\mathrm{supp}(F(x))$ 的基数都不超过 $\mathrm{supp}(x)$ 的基数。II 如果对于所有 $x = (x_i)_{i=1}^k \in S_{\ell_\infty^k}$ 以及所有i，$j \in \{1,\dots,k\}$，$x_i = x_j$ 都有 $F_i(x) = F_j(x)$，则称 F 为步保持映射。

关于满足这些性质的映射的例子，我们将在第2 节再讨论。现在，我们只指出显而易见的一点：(1) 不增加支撑大小的映射类包含所有支撑保持映射，即满足 $\mathrm{supp}(F(x)) = \mathrm{supp}(x)$ 对所有 $x \in S_{\ell_\infty^k}$都成立的映射；(2) 步保持映射类包含所有关于基置换等变的映射（详见下文第2节）。

对于不增加支撑大小的函数，我们得到以下定理。回顾一下，对于度量空间之间的映射 $F\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$，其一致连续模定义为

$$\omega_F(t) = \sup\{d_Y(F(x), F(y)) \mid x, y \in X,\ d_X(x, y) \le t\},\ \text{for}\ \ t \in [0, \infty).$$

若一列度量空间之间的映射 $(F_k\colon X_k \to Y_k)_k$ 满足以下条件，我们称其为等度一致连续

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ such that } \omega_{F_k}(\delta) < \varepsilon,\ \text{for all } k \in \mathbb{N}.$$

定理 1.3. 设 $d \in \mathbb{N}$。那么对于任意 $k \ge 19^{2d-1} + 1$ 和任意不增大支撑大小的同胚 $F\colon S_{\ell_\infty^k} \to S_{\ell_1^k}$，有 $\omega_F(\frac{1}{d}) \ge \frac{1}{2}$。在 – –

特别地，不存在由等度一致连续且不增大支撑大小的同胚组成的序列 $(F_k : S_{\ell_\infty^k} \to S_{\ell_1^k})_{k=1}^{\infty}$。

定理 1.3 的证明首先要对支撑保持映射得到相同的结论。在这种情况下，映射 F 甚至不需要连续：我们证明，从 ℓ_∞^k 的球面到 ℓ_1^k 的球面的任何支撑保持映射序列都不可能等度一致连续（见定理 4.4）。随后，通过证明若映射 F 进一步假设为同胚，则经过置换算子作用后，实际上是支撑保持的（见引理 4.6），即可得到定理 1.3 。要证明这两个结果，都需要应用一个平均化过程，使映射相对于基置换是等变的，尤其也具有步保持性（详情见第2节和引理4.2）。为此，Brouwer域不变定理及其推论——从 k维空间的球面到球面的连续单射映射是满射——将起关键作用。

我们得到关于步保持函数的以下定理。

定理 1.4. 设 $d \in \mathbb{N}$。那么，对于任意 $k \geq 19^{2d-1}+1$ 以及任意保持阶梯的连续映射 $F: S_{\ell_\infty^k} \to S_{\ell_1^k}$，只要 $F(1,\dots,1) \neq F(-1,\dots,-1)$，便有$\omega_F(\frac{1}{d}) \geq \frac{1}{2}$。特别地，不存在由等度连续的保持阶梯的同胚构成的序列 $(F_k: S_{\ell_\infty^k} \to S_{\ell_1^k})_{k=1}^{\infty}$。

请注意，定理 1.3 和 1.4 讨论的是从 ℓ_∞^k的单位球面到 ℓ_1^k的单位球面的映射，而问题 1.2 讨论的则是取值于 ℓ_2^k 单位球面的映射。不过，这并不构成问题，因为上文介绍的 Mazur 映射给出了 ℓ_1 与 ℓ_2 的单位球面之间的均匀同胚，并且同时具有支撑保持和步保持性质。因此，若在这两个定理的表述中将 ℓ_1^k 替换为 ℓ_2^k ，则它们的第二部分仍然成立。

与定理 1.3 的证明相比，定理1.4 的证明只包含一个极简的拓扑部分，它依赖于介值定理。两个结果所依赖的主要新引理是引理 3.4。

我们的方法还导出一个新的集中不等式。巴拿赫空间非线性几何中的集中不等式研究始于 N. Kalton 引入性质 $\mathcal{Q}$([Kal07，第 4] 节），随后 Kalton 和 N. Randrianarivony 提出了关于汉明图嵌入渐近一致光滑 Banach 空间时的集中现象的定理（[KR08，定理 4.2]）。对这类现象的研究很快成为 Banach 空间几何中的一个重要课题；关于这一不断增长的研究领域——巴拿赫空间上的集中不等式及其与巴拿赫空间非线性几何的关系——可参阅 [KR08、LR18、BLS18、Bra21、BLMS21、Fov25] 。然而，与上述论文不同，我们的集中不等式具有不同的特点：它讨论的不是无限维巴拿赫空间之间的关系，而是维数不断增长的有限维空间的渐近行为。

为了准确陈述我们的集中不等式，我们将定义球面的正部：

$$S^+_{\ell_p^k} = \left\{ (x_i)_{i=1}^k \in S_{\ell_p^k} \mid x_i \geq 0 \text{ for all } i \in \{1,\dots,k\} \right\}, \quad \text{for } p \in \{1,\infty\},$$

并且，对于 $0 = m_0 < m_1 < \ldots < m_d < k$ in $\mathbb{N}$，我们记作 $\bar{m} = (m_1, \ldots, m_d)$ 和

$$z(\bar{m}) = \sum_{s=1}^{d} \left(1 - \frac{s-1}{d}\right) 1_{(m_{s-1}, m_s]} \in S^+_{\ell_\infty^k}.$$

定理 1.5。固定 $d \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon > 0$。设 $Q = \{a^{2j-1}\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$，其中 $a = \lceil 32/\varepsilon + 2 \rceil$。那么，对于所有 $m_1 < \ldots < m_d < k \in Q$ 以及所有步保持映射F: $S^+_{\ell_\infty^k} \to S^+_{\ell_1^k}$，其中 $\omega_F \binom{\urcorner}{d} \leq \frac{\varepsilon}{8}$，我们有

$$\left\| F(z(\bar{m})) - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} e_i \right\|_1 \leq \varepsilon,$$

其中 $(e_i)_{i=1}^k$ 表示ℓ_1^k的标准基。

在第6节中，我们讨论这一集中性质与 Kalton 的性质 $\mathcal{Q}$ 之间的关系。从直观上说，当把我们的集中不等式置于具有无条件基的巴拿赫空间这一更一般的背景下时，可以将其视为某种局部性质 $\mathcal{Q}$ （见定义 6.3），而其否定刻画了 c_0 在所有无条件基中的标准基（见推论6.4）。

最后，我们以关于行文安排的一点说明结束引言。根据 Odell 和 Schlumprecht 的证明 [OS94，定理 21]，定理 1.3、1.4和 1.5 可以改写为将 ℓ_1 替换为任意具有无条件基和非平凡余型的巴拿赫空间 X，不过此时必须相应调整维数估计。我们不依赖这一结果，而是针对范围广得多的一类无条件基证明定理 1.4和1.5：这类无条件基不等价于 c_0的标准基。全文中特别关注目标空间为 ℓ_r 时的情形，其中 $1 \leq r < \infty$。尽管如此，我们仍选择在此处专门针对 ℓ_1 陈述主要结果，因为：（1）在这种情形下，陈述更简洁；（2）这项工作的动机源于问题 1.1 和 1.2。

2. Examples of support and step preserving maps

本节简要举例说明满足定理 1.3、5.2 和6.2 假设的一些映射族，并介绍证明这些结果所需的一些主要思路。

可以说，ℓ_∞^k 和 ℓ_1^k 的球面之间最自然的映射是

$$F_k \colon (x_i)_{i=1}^k \in S_{\ell_\infty^k} \mapsto \left(\frac{x_i}{|x_1| + \ldots + |x_k|} \right)_{i=1}^k \in S_{\ell_1^k}. \tag{2.1}$$

映射族 $(F_k)_k$ 显然既是支撑保持的，也是步保持的。然而，很容易验证它们并非等度一致连续。我们可以如下说明：令 $(e_i)_i$ 表示 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 中的典范单位向量，并且对每个 $k \in \mathbb{N}$ 和 $\delta > 0$，令

$$x(k, \delta) = e_1 + \delta \sum_{i=2}^{k} e_i.$$

因此，将每个 $x(k, \delta)$ 视为 $S_{\ell_\infty^k}$ 中的一个元素，我们有 $\|e_1 - x(k, \delta)\|_\infty = \delta$，对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立，而

$$\|F_k(e_1) - F_k(x(k, \delta))\|_1 \geq \left| 1 - \frac{1}{1 + (k-1)\delta} \right| \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} 1.$$

(2.1) 中的定义可以适用于更复杂的映射。事实上，若$\varphi = (\varphi_i)_i$ 是从 $[-1,1]$ 到 $\mathbb{R}$ 的一列映射，则

$$F_k^{\varphi}\colon (x_i)_{i=1}^k \in S_{\ell_\infty^k} \mapsto \left(\frac{\varphi_i(x_i)}{|\varphi_1(x_1)| + \ldots + |\varphi_k(x_k)|}\right)_{i=1}^k \in S_{\ell_1^k} \tag{2.2}$$

只要对所有x_i，至少有一个 $\varphi_i x_i$不为零，这就是良定义的。如果对所有 $i \in \mathbb{N}$都有 $\varphi_i(0)$，那么映射(F_k^{φ})不会增大支撑。另一方面，如果所有 φ_i都相同，那么(F_k^{φ})是步保持的。虽然(2.1)中的映射显然是球面之间的同胚，但(2.2)并非如此，因此需要对 φ 作额外假设。

最后，也许最有趣的一类 ℓ_∞^k 与 ℓ_1^k 的球面之间的同胚如下所示。给定 $\mathbb{R}$的一个子集 A ，令 1_A 表示其特征函数。于是，对每个 $k \in \mathbb{N}$和每个 $i \in \{1,\ldots,k\}$，令

$$F_{k,i}\left((x_j)_{j=1}^k\right) = \int_0^1 \frac{1_{[r,1]}(x_i)}{\sum_{j=1}^k 1_{[r,1]}(x_j)}dr$$

对所有$(x_j)_{j=1}^k \in S_{\ell_\infty^k}$。然后令

$$F_k(x) = (F_{k,i}(x))_{i=1}^k \quad \text{for all} \quad x \in S_{\ell_\infty^k}.$$

因此，$(F_k)_k$ 也同时具有支撑保持和步保持性质。

显然，每个 F_{k+1} 都延拓为 F_k。这可用于定义一个拓扑同胚 $F\colon S_{c_0}^+ \to S_{\ell_1}^+$，其具体描述如下：对于非递增的 $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in S_{c_0}^+$ 和 $y =(y_n)_{n=1}^\infty \in S_{\ell_1}^+$，

$$F(x) = \left(\sum_{i=j}^\infty \frac{1}{i}(x_i - x_{i+1})\right)_{j=1}^\infty \text{ and } F^{-1}(y) = \left(jy_j + \sum_{i=j+1}^\infty y_i\right)_{j=1}^\infty.$$

由于 F 按定义是置换等变的，对于任意的 $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in S_{c_0}^+$ 和 $y \in S_{\ell_1}^+$，这些公式显然可以作相应修改。据我们所知，文献中尚未出现一个显式的同胚 $F\colon S_{c_0}^+ \to S_{\ell_1}^+$（它以初等方式延拓到球面，甚至延拓到巴拿赫空间 c_0 和 ℓ_1）。对于任意集合 Γ，相同的公式对 $c_0(\Gamma)$ 和 $\ell_1(\Gamma)$ 逐字适用。对这一构造稍作修改，还可得到一个显式的拓扑同胚 $F\colon S_{L_1}^+ \to S_{L_\infty}^+$，其中后者赋予依测度收敛。

这些映射代表有趣同胚这一主张（非正式地）得到了进一步支持，因为从某种意义上说，它们似乎是我们所能做到的、使 ℓ_∞^k 和 ℓ_1^k 的球面之间的同胚达到等度一致连续的最接近情形。这里不作过多细节讨论（这些细节并无太大意义，因为我们的主要结果表明这些映射无论如何都不可能等度一致连续），我们只需指出，这些映射“在许多点附近等度一致连续”。例如，这对形如 1_A、 $A \subseteq \{1,\ldots,k\}$ 的点成立；对于交错元素亦然，即 $S_{\ell_\infty^k}$ 中满足以下条件的元素 $(x_i)_{i=1}^k$ 和 $(y_i)_{i=1}^k$：

$$x_1 \geq y_1 \geq \ldots \geq x_k \geq y_k.$$

然而，考察形如以下的元素时，就能注意到映射 $(F_k)_k$ 并不具备等度一致连续性：

$$\sum_{s=1}^{d}\left(1-\frac{s-1}{d}\right)1_{(m_{s-1},m_s]} \quad \text{and} \quad \sum_{s=1}^{d}\left(1-\frac{s-1}{d}\right)1_{(n_{s-1},n_s]},$$

其中（n_1、……、n_d）和（m_1、……、m_d）是 d元自然数元组，满足 $0=m_0=n_0<m_1<n_1<\ldots<m_d<n_d$，且这些元组“非常分散”。这里我们强调，这种实现实际上是迈向本文主要结果的第一步；正如读者将在下文看到的，这些结果的证明仍与这种方法有相似之处。

3. The key lemma

本节的主要结果是引理3.4。这一引理对于证明所有主要定理都至关重要。

如引言中所述，我们的许多结果适用于从 ℓ_∞^k 的球面到给定 1-无条件基的典范分割的球面的映射。我们将在此一般性下陈述结果：在全文中，$(X,\ \|\cdot\|_X)$ 将是一个带有归一化的 1-无条件基 $(e_i)_i$[1] 的巴拿赫空间，该基不等价于 c_0 的标准基，并且对每个 $k\in\mathbb{N}$，我们令

$$X_k=\operatorname{span}\{e_1,\ldots,e_k\}.$$

只对从 $S_{\ell_\infty^k}$ 到 $S_{\ell_1^k}$ 的函数感兴趣的读者，可以始终假设 $X=\ell_1$，$(e_i)_i$ 是 ℓ_1的典范基，并且对所有 $k\in\mathbb{N}$都有 $X_k=\ell_1^k$。

回顾一下，X 中的序列 $(x_i)_{i=1}^n$ 称为一个块序列（相对于 $(e_i)_i$），如果存在 $s_1<\ldots<s_{n+1}\in\mathbb{N}$ 使得

$$x_i\in\operatorname{span}\{e_j\mid s_i\le j<s_{i+1}\}\ \text{ for all }\ i\in\{1,\ldots,n\}.$$

我们固定两个值 $q\le p\in[1,\infty]$，满足 $q<\infty$，使得 X 在常数为一的块序列上满足下 p 和上 q 估计，即，对于 X中的每个块序列$(x_i)_{i=1}^n$，

$$\Big(\sum_{i=1}^n\|x_i\|_X^p\Big)^{1/p}\le\Big\|\sum_{i=1}^n x_i\Big\|_X\le\Big(\sum_{i=1}^n\|x_i\|_X^q\Big)^{1/q}, \tag{3.1}$$

在 $p=\infty$时作显而易见的修改。尽管对于选择 $q=1$ 和 $p=\infty$，这一假设自动成立，但 p 和 q 的接近程度会影响我们定理中的维数估计。例如，当 $X=\ell_r$ 且 $(e_i)_i$ 为其标准基时，我们有 $p=q=r$，由此得到最强的界。全文中，我们考虑由下式给出的函数 $\psi\colon\mathbb{N}\to[0,\infty)$

$$\psi(k)=\Big\|\sum_{i=1}^k e_i\Big\|_X\quad\text{for all}\quad k\in\mathbb{N}.$$

由 $(e_i)_i$ 的 1-无条件性假设可知，ψ 是一个非递减函数；由 $(e_i)_i$ 不等价于标准 c_0 基的假设可知，$\lim_{k\to\infty}\psi(k)=\infty$。我们通过将基 $(e_i)_{i=1}^\infty$ 映射到 $c_{00}(\mathbb{N})$ 的标准基，将 $\bigcup_k X_k$ 与 $c_{00}(\mathbb{N})$ 线性等同——这里 $c_{00}(\mathbb{N})$ 表示

[1]回顾一下，巴拿赫空间 X的一个（Schauder）基 $(e_i)_i$称为 *normalized*，如果对于所有 $i\in\{1,\ldots,n\}$都有 $\|e_i\|_X=1$；称为 1-*unconditional*，如果对于所有 $n\in\mathbb{N}$以及所有$a_1,\ \ldots\ldots,\ a_n,\ b_1,\ \ldots\ldots,\ b_n\in\mathbb{R}$，都有 $\|\sum_{i=1}^n a_ne_i\|\le\|\sum_{i=1}^n b_ne_i\|$，其中对所有 $i\in\{1,\ldots,n\}$均有 $|a_i|\le|b_i|$。

有限支撑函数空间 $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$。在此等同下， $\psi(k)$ 的公式变为

$$\psi(k) = \|1_{[1,k]}\|_X.$$

现在我们强调一个记号，本文余下部分将一直使用该记号。若 F: $S_{\ell_\infty^k} \to S_{X_k}$ 是任意映射，我们记作 $F = (F_i)_{i=1}^k$，意即每个 F_i都是与实值映射 $x \in S_{X_k} \mapsto x_i \to \mathbb{R}$ 复合后的 F；该实值映射给出 x在其基展开中对应于 e_i 的系数。此外，对每个 $d \in \mathbb{N}$ 以及每个子集$M \subseteq \mathbb{N}$，我们令

$$[M]^d = \left\{(n_1, \dots, n_d) \in M^d \mid n_1 < \dots < n_d\right\}.$$

因此， $[M]^d$ 是由 M 中含有 d 个元素的子集构成的集合，我们将其元素写成按递增顺序排列的d元组。

给定一个子集 $P \subseteq \mathbb{N}$，我们定义函数 $\psi_P \colon \mathbb{N} \to [0, \infty)$，使其满足

$$\psi_P(k) := \min\left\{\|1_{[1,k]\cap P}\|_X, \|1_{[1,k]\cap P^c}\|_X\right\},$$

其中， P^c 表示 $\mathbb{N}$中 P 的补集。注意，由 1-无条件性可知，对所有 $k \in \mathbb{N}$, $\psi_P(k) \leq \psi(k)$。事实上，可以选取 P，使得这些项在以下意义下等价:

引理 3.1. 存在 $P \subseteq \mathbb{N}$，使得对于所有 $k \in \mathbb{N}$,

$$\psi_P(k) \geq \frac{1}{2}(\psi(k) - 1).$$

证明。我们通过算法决定，对于 $k \in \mathbb{N}$， k 是否会被纳入 P或 P^c。起初，我们将 1 纳入 P，将 2 纳入 P^c。假设已对 $1, \dots, k-1$作出决定，若满足以下条件，我们就将 k纳入 P:

$$\|1_{([1,k-1]\cap P)\cup\{k\}}\|_X \leq \|1_{([1,k-1]\cap P^c)\cup\{k\}}\|_X,$$

否则，我们将 k 纳入 P^c。由此完成了对 P 的定义（进而也完成了对 P^c的定义）。

注意,

$$\left|\|1_{[1,k]\cap P}\|_X - \|1_{[1,k]\cap P^c}\|\right| \leq 1 \tag{3.2}$$

对于所有 $k \in \mathbb{N}$均成立。这可由对 k的归纳法得出：若 $k = 1$ 或 $k = 2$，则不等式显然成立。于是，假设该结论对 $k-1$ 成立，并在假设 $k \geq 3$的条件下证明它对 k也成立。若 $k \in P$，则 $k \notin P^c$，并且根据 P的定义以及 $(e_i)_i$ 是归一化的这一事实，可得

$$\|1_{[1,k]\cap P}\|_X - \|1_{[1,k]\cap P^c}\|_X \leq \|1_{([1,k-1]\cap P^c)\cup\{k\}}\|_X - \|1_{[1,k-1]\cap P^c}\|_X \leq \|e_k\|_X = 1.$$

另一方面，由于 $(e_i)_i$ 是 1-无条件的，归纳假设可得

$$\|1_{[1,k]\cap P^c}\|_X - \|1_{[1,k]\cap P}\|_X \leq \|1_{[1,k-1]\cap P^c}\|_X - \|1_{[1,k-1]\cap P}\|_X \leq 1.$$

在 $k \in P^c$ 的情况下，论证类似。

由 $1_{[1,k]\cap P} + 1_{[1,k]\cap P^c} = 1_{[1,k]}$, （3.2）可知

$$\psi(k) \leq \|1_{[1,k]\cap P}\|_X + \|1_{[1,k]\cap P^c}\|_X \leq 2\|1_{[1,k]\cap P}\|_X + 1.$$

So,

$$\|1_{[1,k]\cap P}\|_X \geq \frac{1}{2}(\psi(k) - 1).$$

将 P 替换为 P^c 后，同样的估计仍然成立。 □

引理 3.2。 设 $\varepsilon > 0$ 和 $d \in \mathbb{N}$。设 $P \subseteq \mathbb{N}$ 是一个满足引理 *3.1*结论的子集，并设 $M = \{k_j\}_{j=1}^\infty$ 是 $\mathbb{N}$ 的一个满足增长条件的子集

$$\psi(k_{j+1}) \geq \Big(\frac{8d^{1/q-1/p}}{\varepsilon} + 2\Big)\psi(k_j) + 1. \tag{3.3}$$

于是，对于所有满足 $m_1 < n_1 < \ldots < m_d < n_d$ 的 $\bar{m}$、$\bar{n} \in [M]^d$，以及属于 $\mathbb{R}$的所有$(\lambda_s)_{s=1}^d$，以下蕴含关系成立：对于每个 $Q \in \{P, P^c\}$,

$$\Big\|\sum_{s=1}^d \lambda_s 1_{(n_{s-1},n_s]\cap Q}\Big\|_X \leq 1 \implies \Big\|\sum_{s=1}^d \lambda_s 1_{(n_{s-1},m_s]}\Big\|_X \leq \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\Big\|\sum_{s=1}^d \lambda_s 1_{(m_{s-1},m_s]\cap Q}\Big\|_X \leq 1 \implies \Big\|\sum_{s=1}^d \lambda_s 1_{(m_{s-1},n_{s-1}]}\Big\|_X \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

证明。 首先注意，由引理 3.1 以及 $(\psi(k_j))_{j=1}^\infty$上的增长条件可知，对于所有 $\ell < m < n \in M$,

$$\frac{\psi(m)}{\psi_P(n) - \psi(\ell)} \leq \frac{\psi(m)}{\psi_P(n) - \psi(m)} \leq \frac{2\psi(m)}{\psi(n) - 1 - 2\psi(m)} \leq \frac{\varepsilon}{4d^{1/q-1/p}}.$$

我们只证明第一个蕴含关系；将 $n_{s-1} < m_s < n_s$ 替换为 $m_{s-1} < n_{s-1} < m_s$，即可类似地证明第二个。

利用 $(e_i)_i$ 是 1-无条件的，以及 $(e_i)_i$ 在块序列上的下界 p 和上界 q 估计（见 (3.1)），可得

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum_{s=1}^d \lambda_s 1_{(n_{s-1},m_s]}\Big\|_X &\leq \Big(\sum_{s=1}^d \|\lambda_s 1_{(n_{s-1},n_s]\cap Q}\|_X^q \Big(\frac{\|1_{(n_{s-1},m_s]}\|_X}{\|1_{(n_{s-1},n_s]\cap Q}\|_X}\Big)^q\Big)^{1/q} \\
&\leq \Big(\sum_{s=1}^d \|\lambda_s 1_{(n_{s-1},n_s]\cap Q}\|_X^q \Big(\frac{\psi(m_s)}{\psi_P(n_s) - \psi(n_{s-1})}\Big)^q\Big)^{1/q} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4d^{1/q-1/p}}\Big(\sum_{s=1}^d \|\lambda_s 1_{(n_{s-1},n_s]\cap Q}\|_X^q\Big)^{1/q} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4}\Big(\sum_{s=1}^d \|\lambda_s 1_{(n_{s-1},n_s]\cap Q}\|_X^p\Big)^{1/p} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4}\Big\|\sum_{s=1}^d \lambda_s 1_{(n_{s-1},n_s]\cap Q}\Big\|_X \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4}
\end{aligned}$$

（这里我们用到 $q \leq p$，因此也有 $d^{1/q-1/p} \geq 1$。） □

对于 $d \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon > 0$，我们称子集 $P \subseteq \mathbb{N}$ 和 $M = \{k_j\}_{j=1}^\infty \subseteq \mathbb{N}$满足**假设 *A*(*d*, *ε*)**，如果

(3.4)
- for all $k \in \mathbb{N}$, $\psi_P(k) \geq 1/2(\psi(k) - 1)$,
- $(k_j,\ k_{j+1}] \cap P \neq \emptyset$ 以及 $(k_j,\ k_{j+1}] \cap P^c \neq \emptyset$ 对于所有 $j \geq 1$，以及
- M 满足引理 3.2的增长假设 (3.3):

$$\psi(k_{j+1}) \geq \Big(\frac{8d^{1/q-1/p}}{\varepsilon} + 2\Big)\psi(k_j) + 1.$$

根据引理 P 3.1，这样的集合 M 总是存在，而且这样的集合$_{k\to\infty}\psi(k)=\infty$ 也总是存在，因为 lim P， P^c 是（必然）无限的。

注记 3.3。 注意，如果 $X=\ell_r$、 $1\le r<\infty$具有其标准基，那么$\psi_{2\mathbb{N}}(k)\ge\frac{1}{2}(\psi(k)-1)$。因此，选择 $P=2\mathbb{N}$ 和

$$M=\left\{a^{j-1}\right\}_{j=1}^{\infty},\qquad \text{where } a:=\lceil(8/\varepsilon+3)^r\rceil$$

满足 **假设 $A(d,\varepsilon)$**。

我们引入一些记号来描述 $S_{\ell_\infty^k}$ 的元素，这些元素在我们的论证中起着关键作用。对于 $d\in\mathbb{N}$、 $\varepsilon>0$、 $u=((a_s)_{s=1}^d,(b_s)_{s=1}^d,c)\in S_{\ell_\infty^{2d+1}}$，以及满足**假设 $A(d,\varepsilon)$**的子集$P\subseteq\mathbb{N}$和 $M\subseteq\mathbb{N}$，若 $\bar{m}\in[M]^d$且 $k>m_d$，则定义

$$x(\bar{m},u,k)=\sum_{s=1}^{d}a_s1_{(m_{s-1},m_s]\cap P}+\sum_{s=1}^{d}b_s1_{(m_{s-1},m_s]\cap P^c}+c1_{(m_d,k]}\in S_{\ell_\infty^k}. \tag{3.5}$$

注意， $\|x(\bar{m},u,k)\|_\infty$确实等于 1，因为 $\|u\|_\infty=1$，$(m_{s-1},m_s]\cap P\neq\emptyset$，$(m_{s-1},m_s]\cap P^c\neq\emptyset$对所有 $s\in\{1,\dots d\}$都成立，且$(m_d,k]\neq\emptyset$。此外，记$a_{d+1}=b_{d+1}=c$，容易看出，对于 $\bar{m}$， $\bar{n}\in[\mathbb{N}]^d$且 $m_1<n_1<\cdots<m_d<n_d$，我们有如下距离界

$$\|x(\bar{m},u,k)-x(\bar{n},u,k)\|_\infty\le\max_{1\le s\le d}\max\{|a_s-a_{s+1}|,|b_s-b_{s+1}|\}. \tag{3.6}$$

以下是我们的关键引理。

引理 *3.4.* 设 $d\in\mathbb{N}$ 和 $\varepsilon>0$，并设 $P\subseteq\mathbb{N}$ 和 $M\subseteq\mathbb{N}$ 为满足假设 ***A(d,ε)*** 的子集。设 $\bar{m},\bar{n}\in[M]^d$使得 $m_1<n_1<\ldots<m_d<n_d$，设$k>n_d$，设 $u=((a_s)_{s=1}^d,(b_s)_{s=1}^d,c)\in S_{\ell_\infty^{2d+1}}$，并设 $F=(F_i)_{i=1}^k$：$S_{\ell_\infty^k}\to S_{X_k}$是一个保阶函数，满足对所有 $i\in(m_d,k]$，都有 $F_i(x(\bar{m},u,k))=0$，其中$x(\bar{m},u,k)\in S_{\ell_\infty^k}$由 *(3.5)* 定义。那么

$$\|F(x(\bar{m},u,k))-F(x(\bar{n},u,k))\|_X>1-\varepsilon.$$

证明。 由于 F是步保持的，由 $x(\bar{m},u,k)$ 的定义可知，存在

$$(\alpha_s(\bar{m}))_{s=1}^d,(\beta_s(\bar{m}))_{s=1}^d,(\alpha_s(\bar{n}))_{s=1}^d,(\beta_s(\bar{n}))_{s=1}^d,\gamma(\bar{n})\in[-1,1]^d$$

使得，对于所有 $s\in\{1,\dots d\}$，

(1) 对所有 $i\in(m_{s-1},m_s]\cap P$， $\alpha_s(\bar{m})=F_i(x(\bar{m},u,k))$；(2) 对所有 $i\in(m_{s-1},m_s]\cap P^c$， $\beta_s(\bar{m})=F_i(x(\bar{m},u,k))$；(3) 对所有 $i\in(n_{s-1},n_s]\cap P$， $\alpha_s(\bar{n})=F_i(x(\bar{n},u,k))$；(4) 对所有 $i\in(n_{s-1},n_s]\cap P^c$， $\beta_s(\bar{n})=F_i(x(\bar{n},u,k))$；以及 (5) 对所有 $i\in(n_d,k]$， $\gamma(\bar{n})=F_i(x(\bar{n},u,k))$。

利用上述方程以及 $(e_i)_i$ 的 1-无条件性，我们得到：

$$\begin{aligned}1&=\|F(x(\bar{m},u,k))\|_X\\&\ge\max\left\{\left\|\sum_{s=1}^{d}\alpha_s(\bar{m})1_{(m_{s-1},m_s]\cap P}\right\|_X,\left\|\sum_{s=1}^{d}\beta_s(\bar{m})1_{(m_{s-1},m_s]\cap P^c}\right\|_X\right\}.\end{aligned}$$

$\bar{n}$ 也同样成立：

$$1 \geq \max\left\{\Big\|\sum_{s=1}^{d}\alpha_s(\bar{n})1_{(n_{s-1},n_s]\cap P}\Big\|_X, \Big\|\sum_{s=1}^{d}\beta_s(\bar{n})1_{(n_{s-1},n_s]\cap P^c}\Big\|_X\right\}.$$

因此，由引理 3.2 及 1-无条件性可知，以下量

(i) $\left\|\sum_{s=1}^{d}\alpha_s(\bar{m})1_{(m_{s-1},n_{s-1}]\cap P}\right\|_X$
(ii) $\left\|\sum_{s=1}^{d}\beta_s(\bar{m})1_{(m_{s-1},n_{s-1}]\cap P^c}\right\|_X$
(iii) $\left\|\sum_{s=1}^{d}\alpha_s(\bar{n})1_{(n_{s-1},m_s]\cap P}\right\|_X$, and
(iv) $\left\|\sum_{s=1}^{d}\beta_s(\bar{n})1_{(n_{s-1},m_s]\cap P^c}\right\|_X$

均不超过 $\varepsilon/4$。由于 $\|F(x(\bar{m}, u, k))\|_X = 1$ 以及 $F_i(x(\bar{m}, u, k)) = 0$ 对所有 $i \in (m_d, k]$，由上文的 (i) 和 (ii) 可得

$$\Big\|\sum_{s=1}^{d}\alpha_s(\bar{m})1_{(n_{s-1},m_s]\cap P} + \beta_s(\bar{m})1_{(n_{s-1},m_s]\cap P^c}\Big\|_X \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此，利用 $(e_i)_i$的 1-无条件性，并结合 (iii) 和(iv)，我们得出

$$\begin{aligned}
&\|F(x(\bar{m},u,k)) - F(x(\bar{n},u,k))\|_X \\
&\geq \Big\|\sum_{s=1}^{d}(\alpha_s(\bar{m}) - \alpha_s(\bar{n}))1_{(n_{s-1},m_s]\cap P} + (\beta_s(\bar{m}) - \beta_s(\bar{n}))1_{(n_{s-1},m_s]\cap P^c}\Big\|_X \\
&\geq 1 - \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

将引理 3.4 应用于 $X = \ell_r$，$1 \leq r < \infty$ 及其标准基的情形，可得以下命题，我们将在第 4 节中使用该命题。

命题 3.5. 设 $d \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon > 0$。设 $M = \{k_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$，其中 $k_j := a^{j-1}$且 $a = \lceil(8/\varepsilon + 3)^r\rceil$。设 $\bar{m}, \bar{n} \in [M]^d$满足 $m_1 < n_1 < \ldots < m_d < n_d$，令$k > n_d$，令 $u = ((a_s)_{s=1}^d, (b_s)_{s=1}^d, c) \in S_{\ell_\infty^{2d+1}}$，并令 $F = (F_i)_{i=1}^k : S_{\ell_\infty^k} \to S_{\ell_r^k}$为一个保阶函数，满足对于所有 $i \in (m_d, k]$，都有 $F_i(x(\bar{m}, u, k)) = 0$，其中 $x(\bar{m}, u, k)$ 的定义如 (3.5) 所示。那么

$$\|F(x(\bar{m},u,k)) - F(x(\bar{n},u,k))\|_r > 1 - \varepsilon.$$

证明。这直接由引理 3.4 以及以下事实得出：$P = 2\mathbb{N}$ 和$M = \{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ 满足 **假设 $A(d, \varepsilon)$** 根据注 3.3。□

4. Maps which do not increase support size

我们现在将指出命题 3.5 的一个简单推论，这足以排除存在从$S_{\ell_\infty^k}$ 到 $S_{\ell_1^k}$ 的等度一致连续同胚，并且这些同胚保持支撑不变（定理4.4），或者更一般地，不增加支撑大小（定理1.3）。

现在我们引入一个记号，在这个更简单的情形中，它将发挥与 x（$\bar{m}$、u、k）在（3.5）中相同的作用。给定 $d \in \mathbb{N}$和 $\bar{m} \in [\mathbb{N}]^d$，我们定义

$$z(\bar{m}) = \sum_{s=1}^{d}\left(1 - \frac{s-1}{d}\right)1_{(m_{s-1},m_s]}. \tag{4.1}$$

如果 $k \geq m_d$，我们以规范的方式将 $z(\bar{m})$ 视为 $S_{\ell_\infty^k}$ 的一个元素。在这种情况下，$z(\bar{m})$ 的图就是一条从 1 下降到 0 的阶梯。

我们称函数 $F\colon S_{\ell_\infty^k} \to S_{\ell_1^k}$（定义在向量空间的子集之间）为保持支集，如果

$$\operatorname{supp}(F(x)) = \operatorname{supp}(x) \quad \text{for all } x \in S_{\ell_\infty^k}. \tag{4.2}$$

下一个结果是命题 3.5的一个简单推论，针对 $X = \ell_r$，$1 \leq r < \infty$。

引理 4.1. 设 $d \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon > 0$。设 $M = \{k_j\}_{j=1}^\infty \subseteq \mathbb{N}$，其中 $k_j := a^{j-1}$ 和$a = \lceil (8/\varepsilon + 3)^r \rceil$。设 $\bar{m}, \bar{n} \in [M]^d$ 使得 $m_1 < n_1 < \ldots < m_d < n_d$，并设$k > n_d$。设 $F\colon S_{\ell_\infty^k} \to S_{\ell_r^k}$ 是一个支撑与阶梯保持映射。那么

$$\|F(z(\bar{m})) - F(z(\bar{n}))\|_r > 1 - \varepsilon.$$

证明。 固定 $d \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon > 0$。为了应用命题 3.5，我们令

$$a_s = b_s = 1 - \frac{s-1}{d} \text{ and } c = 0,$$

对所有 $s \in \{1, \ldots, d\}$ 均成立。在这种情况下，对于 $u = ((a_s)_{s=1}^d, (b_s)_{s=1}^d, c)$，$x(\bar{m}, u, k)$ 等于$z(\bar{m})$。由于 F 保持支集，且 $z(\bar{m})$ 在 $(m_d, k]$ 中的坐标均为零，因此对于所有 $i \in (m_d, k]$，都有 $F_i(z(\bar{m})) = 0$。换言之，命题 3.5 关于 $\bar{m}$ 的假设总是自动满足的。由该命题即可得到结论。□

为了能够将引理 4.1 用于支撑保持映射，我们现在说明如何修改支撑保持映射 $S_{\ell_\infty^k} \to S_{\ell_1^k}$，使其同时成为步保持映射，而不改变其连续模。事实上，我们将证明，可以将支撑保持映射 $S_{\ell_\infty^k} \to S_{\ell_1^k}$ 替换为满足更强等变性质的映射。为此，我们需要一些定义。对于每个 $k \in \mathbb{N}$，令 Per_k 表示 $\{1, \ldots, k\}$的置换群。对于每个 $\pi \in \mathrm{Per}_k$，令 $P_\pi\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ 为如下定义的映射：

$$P_\pi\left((x_j)_{j=1}^k\right) = \left(x_{\pi(j)}\right)_{j=1}^k$$

对所有 $(x_j)_{j=1}^k \in \mathbb{R}^k$。我们称映射 $F\colon S_{\ell_\infty^k} \to S_{\ell_1^k}$ 是关于基置换等变的，如果

$$F(P_\pi(x)) = P_\pi(F(x)) \text{ for all } x \in S_{\ell_\infty^k} \text{ and all } \pi \in \mathrm{Per}_k.$$

引理 4.2. 设 $k \in \mathbb{N}$ 和 $F = (F_i)_{i=1}^k\colon S_{\ell_\infty^k} \to S_{\ell_1^k}$ 关于基置换等变。那么 F 是步保持的。

证明。 设 π 是将 i 映到 j 并将所有其他元素映到自身的 $\{1, \ldots, k\}$ 的置换。若 $x_i = x_j$，则

$$F(x) = F(P_\pi(x)) = P_\pi(F(x)),$$

于是结论成立。 □

对于下一个引理，回忆一下，$S_{\ell_1^k}^+$ 表示 $S_{\ell_1^k}$ 的正部。注意，$S_{\ell_1^k}^+$ 是 $S_{\ell_1^k}$ 的凸面。

引理 4.3。 设 $k \in \mathbb{N}$ 和 $F\colon\ S_{\ell_\infty^k} \to S_{\ell_1^k}^+$ 是任意映射。那么，由下式给出的映射 $G\colon\ S_{\ell_\infty^k} \to S_{\ell_1^k}^+$

$$G = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in \mathrm{Per}_k} P_{\pi^{-1}} \circ F \circ P_\pi$$

关于基置换是等变的，并且 G 的一致连续模有上界，且该上界不超过 F的一致连续模，即 $\omega_G \leq \omega_F$。此外，若映射 F 保持支集，则 G也保持支集。

证明。 首先注意到，由于 $S_{\ell_1^k}^+$ 是凸的且在置换下不变，G 的像确实包含于 $S_{\ell_1^k}^+$ 中，即 G 是良定义的。由其构造可直接看出， G 关于基置换是等变的；若假设 F保持支集，也可直接得出 G 保持支集。此外，当视为分别作用于 ℓ_∞^k和 ℓ_1^k上的算子时，对于 $\pi \in \mathrm{Per}_k$，映射 P_π是等距映射，因此显然有 $\omega_G \leq \omega_F$。 □

定理 4.4。 设 $d \in \mathbb{N}$。那么，对于任意 $k \geq 19^{2d-1}+1$ 以及任意保持支集的映射 $F\colon\ S_{\ell_\infty^k} \to S_{\ell_1^k}$，都有 $\omega_F(\frac{1}{d}) \geq \frac{1}{2}$。特别地，不存在由等度一致连续且保持支集的映射构成的序列$(F_k\colon\ S_{\ell_\infty^k} \to S_{\ell_1^k})_{k=1}^\infty$。

证明。 令 $k \geq 19^{2d-1}+1$，并令 $F\colon S_{\ell_\infty^k} \to S_{\ell_1^k}$ 为一个保持支集的映射。由于该映射

$$(x_1, \ldots, x_k) \mapsto (|x_1|, \ldots, |x_k|)$$

是 1-Lipschitz 的，因此函数

$$\tilde{F}(x) = (|F_1(x)|, \ldots, |F_k(x)|),$$

的一致连续模不超过 F 的一致连续模；它像 F 一样保持支集，并且还具有以下性质：$\tilde{F}[S_{\ell_\infty^k}] \subset S_{\ell_1^k}^+$。因此，只需在假设 $F[S_{\ell_\infty^k}] \subset S_{\ell_1^k}^+$ 的情况下证明该定理。

由引理 4.3，我们还可以进一步假设 F 关于基置换是等变的。由引理 4.2，F 是步保持的。应用引理 4.1，取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$，可知存在 $\bar{m}$， $\bar{n} \in [M]^d$，满足 $m_1 < n_1 < \ldots < m_d < n_d$，使得 $n_d < 19^{2d-1}+1 \leq k$ 并且

$$\|F(z(\bar{m})) - F(z(\bar{n}))\|_1 \geq \frac{1}{2}.$$

最后，由（3.6）可得 $\|z(\bar{m}) - z(\bar{n})\|_\infty = \frac{1}{d}$。–证明至此完成。□

请注意，定理 4.4 只要求保持支撑。特别地，它适用于既非单射也非连续的映射。相比之下，对于同维有限维巴拿赫空间的球面之间的映射，仅凭单射性和连续性就足以保证满射性。本文将反复用到这一事实。它由 Brouwer 域不变定理以及 k维欧几里得球面不是零伦这一事实推出。我们在此记录此结论，以供后文参考。

命题 4.5。 设 $k \in \mathbb{N}$。任意两个 k维巴拿赫空间的球面之间的连续单射映射都是满射。□

引理 4.6。设 $k \in \mathbb{N}$ 和 $F\colon S_{\ell_\infty^k} \to S_{\ell_1^k}$ 是一个不会增大支撑大小的单射连续映射。则存在一个 $\pi \in \mathrm{Per}_k$，使得 $F \circ P_\pi$ 保持支集。特别是，这样的 F 会保持支撑大小。

证明。令 $(e_i)_{i=1}^k$ 为 $\mathbb{R}^k$ 的典范基。由于 F 不会增大支撑大小，F 会将支撑基数为 1 的元素映射到具有相同性质的元素。由于 $S_{\ell_\infty^k}$ 和 $S_{\ell_1^k}$ 中这样的元素都只有 $2k$ 个，F 的单射性意味着

$$F(\{\lambda e_i \mid i \le k,\ \lambda \in \{-1,1\}\}) = \{\lambda e_i \mid i \le k,\ \lambda \in \{-1,1\}\}. \tag{4.3}$$

再次利用 F 的单射性，再结合 F 不会增大支撑大小这一事实，可得

$$\forall x \in S_{\ell_\infty^k},\ |\mathrm{supp}(x)| = 2 \ \Rightarrow\ |\mathrm{supp}(F(x))| = 2. \tag{4.4}$$

断言 4.7。对于所有 $i \in \{1,\dots,k\}$、$F(-e_i) = -F(e_i)$。

证明。假设我们的论断不成立，那么根据 (4.3)，我们可以找到 i、j、$l \in \{1,2,\dots k\}$、$i \neq j$ 和 λ、$\lambda' \in \{-1,1\}$，使得 $F(e_i) = \lambda e_l$ 且 $F(\lambda' e_j) = -\lambda e_l$。由于 $i \neq j$，存在一条连续路径 $\varphi\colon [0,1] \to$ 张成空间 $\{e_i, e_j\} \cap S_{\ell_\infty^n}$，从 e_i 到 $\lambda' e_j$，使得对所有 $t \in (0,1)$，$\varphi(t)$ 的支撑恰有两个元素：只需令 φ 为从 e_i 到 $e_i + \lambda' e_j$ 的线段与从 $e_i + \lambda' e_j$ 到 $\lambda' e_j$ 的线段之并。由 (4.4)，$F \circ \varphi$ 是一条连续路径，满足 $F(\varphi(0)) = \lambda e_\ell$、$F(\varphi(1)) = -\lambda e_\ell$，且对所有 $t \in (0,1)$，$|\mathrm{supp}(F(\varphi(t)))| = 2$。由于不可能在 $S_{\ell_1^k}$ 中构造这样一条连续路径，我们得到了矛盾。□

前面的断言与（4.3）表明，存在一个置换 $\pi \in \mathrm{Per}_k$ 以及符号的选择 $(\lambda_i)_{i=1}^k \in \{-1,1\}^k$ 使得

$$F(e_{\pi(i)}) = \lambda_i e_i \text{ and } F(-e_{\pi(i)}) = -\lambda_i e_i \text{ for all } i \le k.$$

令 $G = F \circ P_\pi$，我们有

$$G(e_i) = \lambda_i e_i \text{ and } G(-e_i) = -\lambda_i e_i \ \text{ for all } i \le k. \tag{4.5}$$

换言之，G 保持支撑基数为 1 的元素的支集。显然，G 也不会增大支撑大小。记 $G = (G_i)_{i=1}^k$ 为 G 的坐标函数。

下面证明 G 保持支集。为此，令

$$s = \max\{i \in \{1,\dots,k\} \mid |\mathrm{supp}(x)| \le i \ \text{ implies } \ \mathrm{supp}(G(x)) = \mathrm{supp}(x)\}.$$

由（4.5），s 定义良好，即 $s \ge 1$。只要证明 $s = k$，即可完成证明。反设 $s < k$，并取 $x \in S_{\ell_\infty^k}$，满足 $\mathrm{supp}(x) \not\subset \mathrm{supp}(G(x))$，使得 $|\mathrm{supp}(x)| = s+1$。由于 G 不会增大支撑大小，因此还有 $|\mathrm{supp}(G(x))| \le s+1$。

注意，根据命题 4.5，$|\mathrm{supp}(G(x))| = s+1$。事实上，给定 $I \subseteq \{1,\dots,k\}$ 和 $p \in \{1,\infty\}$，记作

$$S_{\ell_p^k}(I) = \left\{(x_i)_{i=1}^k \in S_{\ell_p^k} \mid x_i = 0 \text{ for all } i \notin I\right\}.$$

因此，$S_{\ell_p^k}(I)$ 同胚于一个 $|I|$ 维空间的球面。根据 s 的定义，对于所有满足 $|I| \le s$ 的 $I \subseteq \{1,\dots,k\}$，我们有

$$F\left[S_{\ell_\infty^k}(I)\right] \subseteq S_{\ell_1^k}(I).$$

由于 F 是单射且连续的，这个包含关系实际上必定是等式。因此，若 $|\mathrm{supp}(G(x))| < s+1$，那么 $G(x)$ 必须是 $S_{\ell_\infty^k}(I)$ 中某个满足 $I = \mathrm{supp}(G(x))$ 的元素的像。然而事实并非如此，因为 $\mathrm{supp}(x) = s+1$，且 F 是单射。我们指出，这里 x 并无特殊之处。我们的论证表明，对于所有满足 $|\mathrm{supp}(z)| = s+1$ 的 z，都有 $|\mathrm{supp}(G(z))| = s+1$。这将在后面的证明中用到。

如果 $s+1 = k$，那么我们别无选择，只能有 $\mathrm{supp}(x)$ 和 $\mathrm{supp}(G(x))$ 都等于$\{1,\dots,k\}$。由于按照我们对 x 的选择，这两个支撑并不重合，$s+1 < k$。由于 $\mathrm{supp}(G(x)) \neq \mathrm{supp}(x)$，$|\mathrm{supp}(x)| = |\mathrm{supp}(G(x))|$ 且 $|\mathrm{supp}(x)| < k$，因此必然存在$i \in \mathrm{supp}(x)$和 $j \notin \mathrm{supp}(x)$，使得

$$G_i(x) = 0 \text{ and } G_j(x) \neq 0. \tag{4.6}$$

由于 x 的支撑至少包含两个元素，取一个不同于i 的 $\ell \in \mathrm{supp}(x)$，并令 $y \in S_{\ell_\infty^k}$ 使得

$$\mathrm{supp}(y) = \mathrm{supp}(x) \setminus \{\ell\}.$$

为便于说明，让我们固定这一对 y 的选择：除非 x 的第 ℓ 个坐标是唯一绝对值为 1 的坐标，否则我们令 y 与 x 相同，只是第 ℓ 个坐标除外，在该坐标中 y 必须为零。如果 x 的第 ℓ 个坐标是唯一绝对值为 1 的坐标，则将 y 选为除坐标 ℓ 和 i 外与 x 相同的向量：令其第 ℓ 个坐标为零，并令其第 i 个坐标等于 x 的第 i 个坐标的符号。由于 $|\mathrm{supp}(y)| = s$，我们对 s 的选择意味着

$$\mathrm{supp}(G(y)) = \mathrm{supp}(y). \tag{4.7}$$

根据上述对 y 的选择，我们可以选取一个连续的 $\varphi\colon [0,1] \to S_{\ell_\infty^k}$，使得

(1) $\varphi(0) = y$ 且 $\varphi(1) = x$，以及 (2) 对所有 $t \in (0,1]$，$\mathrm{supp}(\varphi(t)) = \mathrm{supp}(x)$。

事实上，如果 x 的第 ℓ 个坐标不是 x 中绝对值等于一的唯一坐标，那么 φ 可以取为一条线段；否则，它由两条粘合在一起的线段组成。

断言 4.8。对所有 $t \in (0,1]$，$\mathrm{supp}(G(\varphi(t))) = \mathrm{supp}(G(x))$。

证明。令

$$A = \{t \in (0,1] \mid \mathrm{supp}(G(\varphi(t))) = \mathrm{supp}(G(x))\}.$$

由于 A 非空且 $(0,1]$ 连通，只需证明 A 是 $(0,1]$ 的既开又闭子集。如果 A 不是开集，那么存在 $t_0 \in A$ 和 $(t_n)_{n=1}^\infty \subset (0,1] \setminus A$ 收敛到 t_0；而如果 A 不是闭集，那么存在 $t_0 \in (0,1] \setminus A$ 和 $(t_n)_{n=1}^\infty \subset A$ 收敛到 t_0。在这两种情况下

$$\mathrm{supp}(G(\varphi(t_n))) \neq \mathrm{supp}(G(\varphi(t_0))) \text{ for all } n \in \mathbb{N}. \tag{4.8}$$

由于对所有 $n \geq 0$ 都有 $|\mathrm{supp}(\varphi(t_n))| = |\mathrm{supp}(x)| = s+1$，再次由命题 4.5 可知，对所有 $n \geq 0$ 都有 $|\mathrm{supp}(G(\varphi(t_n)))| = s+1$。接着，(4.8) 使我们能够为每个 $n \in \mathbb{N}$ 选取一个 $i_n \in \mathrm{supp}(G(\varphi(t_0)))$，它不属于 $\mathrm{supp}(G(\varphi(t_n)))$。根据鸽巢原理，必要时取一个子序列后，我们可以假设序列 $(i_n)_n$ 为常数，记作对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $i_0 = i_n$。于是，

$$0 = \lim_n G_{i_0}(\varphi(t_n)) = G_{i_0}(\varphi(t_0)) \neq 0;$$

矛盾。我们已证明，A 在 $(0,1]$ 中既开又闭，这就完成了该命题的证明。□

前一个命题和（4.6）推出

$$G_i(\varphi(t)) = 0 \text{ for all } t \in (0,1].$$

另一方面，由于 $i \in \mathrm{supp}(y)$, (4.7) 可知 $G_i(y) \neq 0$。由于 $\varphi(0) = y$，这与 $G_i \circ \varphi$ 在 0 处的连续性矛盾。□

定理 *1.3* 的证明。设 $k \geq 19^{2d-1}+1$，并设 $F\colon S_{\ell_\infty^k} \to S_{\ell_1^k}$ 是一个不会增大支撑大小的同胚。将引理 4.6 应用于 F，我们还可以假设映射 F 保持支集。结论由定理 4.4 得出。□

5. Step preserving homeomorphisms

本节利用引理3.2 来证明定理1.4。我们采用第3节中的记号和假设。特别地，$(X, \|\cdot\|_X)$是一个具有归一化的 1-无条件基 $(e_i)_{i=1}^\infty$ 的巴拿赫空间，该基与标准 c_0 基不等价，并且每个 X_k 都是 $(e_i)_{i=1}^k$的张成空间。

定理 *5.1.* 设 $d \in \mathbb{N}$，并设 $P \subseteq \mathbb{N}$ 和 $M = \{k_j\}_{j=1}^\infty \subseteq \mathbb{N}$ 是满足假设 $\boldsymbol{A}$（*d, 1 2*）（定义见 *(3.4)*）的子集。那么对于任意 $k > k_{2d}$ 以及任意保持阶梯的连续映射 $F\colon S_{\ell_\infty^k} \to S_{X_k}$，只要 $F(1,\dots,1) \neq F(-1,\dots,-1)$，就有 $\omega_F(\frac{1}{d}) \geq \frac{1}{2}$。特别地，不存在由等度一致连续的步保持同胚组成的序列 $(F_k\colon S_{\ell_\infty^k} \to S_{X_k})_k$。

证明。令 $k > k_{2d}$。那么存在元素 $\bar{m}, \bar{n} \in [M]^d$，使得 $m_1 < n_1 < \ldots < m_d < n_d < k$。在证明的其余部分中，我们固定这样的 $\bar{m}, \bar{n}$。令 $F\colon S_{\ell_\infty^k} \to S_{X_k}$ 为一个步保持映射，满足 $F(1,\dots,1) \neq F(-1,\dots,-1)$。设

$$y(\bar{m}) = \sum_{s=1}^d \Big(1 - \frac{s-1}{d}\Big) 1_{(m_{s-1}, m_s] \cap P} + \sum_{s=1}^d \Big(-1 + \frac{s-1}{d}\Big) 1_{(m_{s-1}, m_s] \cap P^c}.$$

我们将 $y(\bar{m})$ 看作 $S_{\ell_\infty^k}$ 中的一个元素。从直观上看，$y(\bar{m})$ 的图是一个阶梯的并：它在 P 的元素上从 1 下降到 0，并在 P^c 的元素上从 -1 上升到 0。或者，将 $y(\bar{m})$ 看作 $S_{\ell_\infty^k}$ 中的一个元素，我们有

$$y(\bar{m}) = x(\bar{m}, v, k),$$

其中 $v = ((a_s)_{s=1}^d, (b_s)_{s=1}^d, c)$ 由下式给出

$$a_s = 1 - \frac{s-1}{d},\ b_s = -1 + \frac{s-1}{d},\ \text{and } c = 0,$$

对所有 $s \in \{1,\dots,d\}$。

现在令 $\varphi_{\bar{m},\,k}\colon [0,1] \to S_{\ell_\infty^k}$ 为如下分段仿射映射：将两条线段连接而成：一条线段连接 (1，……，1) 与 $y(\bar{m})$，其中 t 从 0 变化到 $1/2$；另一条线段连接 $y(\bar{m})$ 与 $(-1,\dots,-1)$，其中 t 从 $1/2$ 变化到 1。由于这些线段是连接 $S_{\ell_\infty^k}$ 同一面内点的线段之并，$\varphi_{\bar{m},\,k}$ 的像包含于 $S_{\ell_\infty^k}$。此外，注意到对于每个 $t \in [0,1]$，向量 $\varphi_{\bar{m},\,k}(t)$ 在 $\{1,\dots,k\}$ 的以下子集上为常量：

$$(m_{s-1}, m_s] \cap P,\ (m_{s-1}, m_s] \cap P^c,\ \text{and } (m_d, k],$$

对于 $s \in \{1,\dots,d\}$。确实，情况如此，因为这对 (1，……，1)、$y(\bar{m})$ 和 $(-1,\dots,-1)$ 都成立，而且每个 $\varphi_{\bar{m},\,k}(t)$ 都是它们的线性组合（事实上，它是

前两个向量或后两个向量的线性组合），具体取决于 t。

我们回顾一下，$\psi(k) = \|\sum_{i=1}^k e_i\|$。由于 $F\colon S_{\ell_\infty^k} \to S_{X_k}$ 是步保持的，

$$F(1,\dots,1) = \pm\Big(\frac{1}{\psi(k)},\dots,\frac{1}{\psi(k)}\Big) \text{ and } F(-1,\dots,-1) = \pm\Big(-\frac{1}{\psi(k)},\dots,-\frac{1}{\psi(k)}\Big).$$

由于 $F(1,\dots,1) \neq F(-1,\dots,-1)$，必要时将 F 替换为 $-F$，于是我们可以假设

$$F(1,\dots,1) = \Big(\frac{1}{\psi(k)},\dots,\frac{1}{\psi(k)}\Big) \text{ and } F(-1,\dots,-1) = \Big(-\frac{1}{\psi(k)},\dots,-\frac{1}{\psi(k)}\Big).$$

由于 F 是连续的，

$$t \in [0,1] \to F(\varphi_{\bar{m},k}(t)) \in S_{X_k}$$

是一条连续路径，连接一个坐标 $(m_d, k]$ 为正的点与一个坐标 $(m_d, k]$ 为负的点。如上所述，对于任意给定的 $t \in [0,1]$，值 $F_i(\varphi_{\bar{m},k}(t))$ 在所有坐标 $i \in (m_d, k]$ 中都相同。因此，由介值定理，存在 $t_{\bar{m},k} \in [0,1]$ 使得

$$F_i(\varphi_{\bar{m},k}(t_{\bar{m},k})) = 0 \text{ for all } i \in (m_d, k]. \tag{5.1}$$

根据 $y(\bar{m})$ 和 $\varphi_{\bar{m},k}$ 的定义，存在 $(a_s(\bar{m},k))_{s=1}^d$、$(b_s(\bar{m},k))_{s=1}^d \in [-1,1]^d$ 以及 $c(\bar{m},k) \in [-1,1]$，使得

$$\varphi_{\bar{m},k}(t_{\bar{m},k}) = \sum_{s=1}^d a_s(\bar{m},k)1_{(m_{s-1},m_s]\cap P} + \sum_{s=1}^d b_s(\bar{m},k)1_{(m_{s-1},m_s]\cap P^c} + c(\bar{m},k)1_{(m_d,k]}.$$

换言之，$\varphi_{\bar{m},k}(t_{\bar{m},k}) = x(\bar{m},u,k)$，对于 $u = \big((a_s(\bar{m},k))_{s=1}^d, (b_s(\bar{m},k))_{s=1}^d, c(\bar{m},k)\big)$。由 (5.1)，可得

$$F_i(x(\bar{m},u,k)) = 0 \text{ for all } i \in (m_d, k].$$

因此，$\bar{m}$，$\bar{n}$，k，以及 F 满足引理3.4陈述中所要求的性质，而该引理意味着

$$\|F_k(x(\bar{m},u,k)) - F_k(x(\bar{n},u,k))\|_X \geq \frac{1}{2}. \tag{5.2}$$

注意，由（3.6）可得 $\|y(\bar{m}) - y(\bar{n})\|_\infty \leq \frac{1}{d}$。此外，存在 $\lambda \in [0,1]$，使得以下两种情况之一成立：$x(\bar{m},u,k) = \lambda y(\bar{m}) + (1-\lambda)(1,\dots,1)$，且 $x(\bar{n},u,k) = \lambda y(\bar{n}) + (1-\lambda)(1,\dots,1)$；或者 $x(\bar{m},u,k) = \lambda y(\bar{m}) + (1-\lambda)(-1,\dots,-1)$，且 $x(\bar{n},u,k) = \lambda y(\bar{n}) + (1-\lambda)(-1,\dots,-1)$。于是，由三角不等式可直接推出 $\|x(\bar{m},u,k) - x(\bar{n},u,k)\|_\infty \leq \frac{1}{d}$。根据（5.2），我们便证明了

$$\omega_F\Big(\frac{1}{d}\Big) \geq \frac{1}{2}.$$

□

有了定理 5.1 ，我们可以从引言中推导出定理 1.4 的以下更强版本。

定理 5.2. 设 $d \in \mathbb{N}$ 和 $1 \leq r < \infty$。那么，对任意 $k \geq \lceil 19^r \rceil^{2d-1} + 1$以及任意保持阶梯的连续映射 $F\colon S_{\ell_\infty^k} \to S_{\ell_r^k}$，只要满足 $F(1,\dots,1) \neq F(-1,\dots,-1)$，就有 $\omega_F(\frac{1}{d}) \geq \frac{1}{2}$。特别地，不存在由等度一致连续的步保持同胚构成的序列 $(F_k : S_{\ell_\infty^k} \to S_{\ell_r^k})_{k=1}^\infty$。

证明。 该定理由定理 5.1 立即推出；此外，根据注记 3.3，带有其标准基的 ℓ_r 存在集合 $P \subseteq \mathbb{N}$ 和 $M = \{k_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$，使其满足**假设** $\boldsymbol{A(d, 1\,2)}$，其中 $k_{2d} < \lceil 19^r \rceil^{2d-1}$。 □ –

定理 *1.4* 的证明。 这只是定理 5.2 结合 $r = 1$。 □

我们以无条件基中标准 c_0基的非线性刻画结束本节。

推论 5.3。 设 X 是一个具有归一化无条件基$(e_i)_i$的巴拿赫空间，并且对每个 $k \in \mathbb{N}$，令 X_k表示 $\{e_1, \ldots, e_k\}$的线性张成。则$(e_i)_i$与 c_0 的典范基等价，当且仅当存在一个由等度一致连续的步保持同胚组成的序列$(F_k : S_{\ell_\infty^k} \to S_{X_k})_k$。

证明。 首先假设 $(e_i)_i$ 与 c_0 基等价，并令 $F_k : S_{\ell_\infty^k} \to S_{X_k}$定义为

$$F_k(a_1, \ldots, a_k) = \frac{\sum_{i=1}^k a_i e_i}{\| \sum_{i=1}^k a_i e_i \|_X}, \quad (a_1, \ldots, a_k) \in S_{\ell_\infty^k}.$$

于是 $(F_k)_k$ 是从 $S_{\ell_\infty^k}$ 到S_{X_k}上的一列等度双利普希茨步保持映射。

现在假设 $(e_i)_i$ 不与 c_0 基等价。经过重新赋范，我们可以假设 $(e_i)_i$ 是 1-无条件的。然后由定理5.1可得结论。 □

6. A CONCENTRATION INEQUALITY

在深入探讨定理 6.2 的证明之前，我们先将该定理与 Kalton 性质 $\mathcal{Q}$ 联系起来。回顾定理 6.2 中的记号，正如第 4.1 节中一样，我们记作

$$z(\bar{m}) = \sum_{s=1}^{d} \left(1 - \frac{s-1}{d}\right) 1_{(m_{s-1}, m_s]},$$

当 $d \in \mathbb{N}$ 且 $\bar{m} \in [\mathbb{N}]^d$ 时。只要 $k \geq m_d$，我们就将 $z(\bar{m})$ 视为 ℓ_∞^k 中范数为 1 的元素，因此也视为 c_0 中的元素。虽然我们不对性质$\mathcal{Q}$ 作出正式定义——其定义取决于 *Kalton* 交错图——但我们回顾一下， ℓ_1 具有这一性质（见 [Kal07，定理 4.1]），由此立即可得：如果 F: $S_{c_0} \to S_{\ell_1}$ 是一致连续函数，那么对于所有 $\varepsilon > 0$ 都存在 $d_0 \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $d \geq d_0$，存在一个无限 $M \subseteq \mathbb{N}$，使得

$$\|F(z(\bar{m})) - F(z(\bar{n}))\| \leq \varepsilon$$

对所有 $\bar{m}$, $\bar{n} \in [M]^d$。

我们再次采用第3节中的记号和假设。特别地，$(X, \|\cdot\|_X)$ 是一个具有归一化的 1-无条件基 $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ 的巴拿赫空间，该基不等价于标准的 c_0 基，每个 X_k 都是$(e_i)_{i=1}^k$的张成空间，并且$\psi(k) = \|1_{[1,k]}\|_X$。本节中，我们还将考察 X_k的球面的正部：对于每个 $k \in \mathbb{N}$，令

$$S_{X_k}^+ = \Big\{ \sum_{i=1}^k a_i e_i \in S_{X_k} \mid a_1, \ldots, a_k \geq 0 \Big\}.$$

定理 6.1。 固定 $d \in \mathbb{N}$ 和 $0 < \varepsilon \leq 1$。令 $P \subseteq \mathbb{N}$ 和 $M = \{k_j\}_{j=1}^\infty \subseteq \mathbb{N}$为满足 **假设** $\boldsymbol{A(d, \varepsilon/4)}$ （见 (3.4)）的子集。那么对于所有 $\bar{m} \in Q = [\{k_{2j}\}_{j=1}^\infty]^d$、所有满足 $k \in Q$ 的 $k > m_d$以及所有步保持映射 $F\colon\ S_{\ell_\infty^k}^+ \to S_{X_k}^+$满足 $\omega_F(\frac{1}{d}) \leq \frac{\varepsilon}{8}$，均有

$$\Big\| F(z(\bar{m})) - \frac{1}{\psi(k)} \sum_{i=1}^k e_i \Big\|_X \leq \varepsilon.$$

证明。取满足 $m_1 < n_1 < \cdots < m_d < n_d < k$ 的 $\bar{n} \in [M]^d$。我们可以从 $[\{k_{2j+1}\}_{j=1}^\infty]^d \subseteq [M]^d$ 中找到这样的元素 $\bar{n}$。设 $F\colon\ S_{\ell_\infty^k}^+ \to S_{X_k}^+$ 是一个步保持映射，且 $\omega_F(\frac{1}{d}) \leq \frac{\varepsilon}{8}$。注意，我们的数据 $\bar{m}$、$\bar{n}$、k、F 满足引理 3.4 的假设，只有最后一个假设可能不满足：对于所有 $i \in (m_d, k]$，不一定有 $F_i(z(\bar{m})) = 0$。对于 $\bar{p} \in \{\bar{m}, \bar{n}\}$ 和 $s \in \{1, \ldots, d\}$，令

$$\alpha_s(\bar{p}, k) = F_i(z(\bar{p})), \quad \text{for } p_{s-1} < i \leq p_s.$$

接下来我们断言

$$\Big\| \sum_{s=1}^d \alpha_s(\bar{m}, k) 1_{(m_{s-1}, m_s]} \Big\|_X \leq \frac{\varepsilon}{4}. \tag{6.1}$$

事实上，由于 $(e_i)_i$ 是 1-无条件的

$$\Big\| \sum_{s=1}^d \alpha_s(\bar{m}, k) 1_{(m_{s-1}, m_s] \cap P^c} \Big\|_X \leq 1 \quad \text{and} \quad \Big\| \sum_{s=1}^d \alpha_s(\bar{n}, k) 1_{(n_{s-1}, n_s] \cap P} \Big\|_X \leq 1.$$

由引理 3.2 可知

$$\Big\| \sum_{s=1}^d \alpha_s(\bar{m}, k) 1_{(m_{s-1}, n_{s-1}]} \Big\|_X \leq \frac{\varepsilon}{16} \text{ and } \Big\| \sum_{s=1}^d \alpha_s(\bar{n}, k) 1_{(n_{s-1}, m_s]} \Big\|_X \leq \frac{\varepsilon}{16}.$$

因此，由于 $\|z(\bar{n}) - z(\bar{m})\|_\infty \leq \frac{1}{d}$ 根据（3.6），我们得到

$$\begin{aligned}
&\Big\| \sum_{s=1}^d \alpha_s(\bar{m}, k) 1_{(m_{s-1}, m_s]} \Big\|_X \\
&\quad \leq \Big\| \sum_{s=1}^d (\alpha_s(\bar{m}, k) - \alpha_s(\bar{n}, k)) 1_{(n_{s-1}, m_s]} \Big\|_X + \Big\| \sum_{s=1}^d \alpha_s(\bar{m}, k) 1_{(m_{s-1}, n_{s-1}]} \Big\|_X \\
&\quad + \Big\| \sum_{s=1}^d \alpha_s(\bar{n}, k) 1_{(n_{s-1}, m_s]} \Big\|_X \\
&\quad \leq \|F(z(\bar{m})) - F(z(\bar{n}))\|_X + \frac{\varepsilon}{8} \leq \omega_F\Big(\frac{1}{d}\Big) + \frac{\varepsilon}{8} \leq \frac{\varepsilon}{4}.
\end{aligned}$$

这就证明了（6.1）。

记作

$$F(z(\bar{m})) = \sum_{s=1}^d \alpha_s(\bar{m}, k) 1_{(m_{s-1}, m_s]} + \gamma(\bar{m}, k) 1_{(m_d, k]}.$$

由（6.1），且由于 $\|F(z(\bar{m}))\|_X = 1$ 和 $(e_i)_i$ 是 1-无条件的，我们得到

$$\Big(1 - \frac{\varepsilon}{4}\Big) \leq \gamma(\bar{m}, k) \|1_{(m_d, k]}\|_X \leq 1.$$

假设 $\boldsymbol{A(d,\varepsilon/4)}$ 由（3.4）可得 $\psi(q') \geq \frac{32}{\varepsilon}\psi(q)$ 对所有 $q, q' \in M$，其中 $q' > q$。因此，

$$\Big(1-\frac{\varepsilon}{32}\Big)\psi(k) \leq \|1_{(m_d,k]}\|_X \leq \psi(k).$$

Thus

$$\Big(1-\frac{\varepsilon}{4}\Big)\frac{1}{\psi(k)} \leq \gamma(\bar{m},k) \leq \Big(1-\frac{\varepsilon}{32}\Big)^{-1}\frac{1}{\psi(k)} \leq \Big(1+\frac{\varepsilon}{4}\Big)\frac{1}{\psi(k)},$$

and

$$\Big|\gamma(\bar{m},k) - \frac{1}{\psi(k)}\Big| \leq \frac{\varepsilon}{4}\frac{1}{\psi(k)}.$$

还要注意，由于 $m_d < k \in Q$,

$$\|\gamma(\bar{m},k)1_{(0,m_d]}\|_X \leq \Big(1+\frac{\varepsilon}{4}\Big)\frac{\psi(m_d)}{\psi(k)} \leq \Big(1+\frac{\varepsilon}{4}\Big)\frac{\varepsilon}{32} \leq \frac{\varepsilon}{16}.$$

因此，

$$\begin{aligned}
\Big\|F(z(\bar{m})) - \frac{1}{\psi(k)}1_{(0,k]}\Big\|_X \leq& \Big\|\gamma(\bar{m},k)1_{(m_d,k]} - \frac{1}{\psi(k)}1_{(0,k]}\Big\|_X \\
&+ \Big\|\sum_{s=1}^{d}\alpha_s(\bar{m},k)1_{(m_{s-1},m_s]}\Big\|_X \\
\leq& \|\gamma(\bar{m},k)1_{(0,m_d]}\|_X + \Big|\gamma(\bar{m},k) - \frac{1}{\psi(k)}\Big|\psi(k) + \frac{\varepsilon}{4} \\
\leq& \frac{\varepsilon}{16} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \\
<& \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

现在我们可以应用定理6.1来证明定理1.5 在 ℓ_r 一般情形下的一个版本。

定理 6.2。固定 $1 \leq r < \infty$, $d \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon > 0$。设 $Q = \{k_{2j}\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$，其中 $k_j = a^{j-1}$ 和 $a := \lceil (32/\varepsilon + 2)^r \rceil$。那么对于所有 $\bar{m} \in [Q]^d$、所有满足 $k > m_d$ 的 $k \in Q$，以及所有满足 $\omega_F(\frac{1}{d}) \leq \frac{\varepsilon}{8}$ 的步保持映射 $F\colon S_{\ell_\infty^k}^+ \to S_{\ell_r^k}^+$，我们都有

$$\Big\|F(z(\bar{m})) - \frac{1}{k^{1/r}}\sum_{i=1}^{k} e_i\Big\|_r \leq \varepsilon,$$

其中 $(e_i)_{i=1}^k$ 表示 ℓ_r^k 的标准基。

证明。根据备注 3.3，子集 $P = 2\mathbb{N}$和 $M = \{k_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$满足 **假设** $\boldsymbol{A(d,\varepsilon/4)}$（3.4），其中 $k_j := a^{j-1}$ 以及 $a := \lceil (32/\varepsilon + 2)^r \rceil$。因此，定理 6.1 的假设均得到满足。□

定理 *1.5*的证明。 这只需应用定理 6.2 并取 $r = 1$。 □

本文最后介绍 Kalton 的性质 Q 的一个局部版本，并证明它刻画了无条件基何时等价于 c_0 的标准基。

定义 6.3. 设 $(e_i)_i$ 是巴拿赫空间 X 的一个无条件基。若存在常数 $\gamma > 0$，使得对任意 $d \in \mathbb{N}$、$\varepsilon \in$ （0，1），都存在一个无限子集 $Q \subseteq \mathbb{N}$，满足对所有 $\bar{m} \in [Q]^d$、所有满足 $m_d < k$ 的 $k \in Q$，以及所有 F：若 $S^+_{\ell^k_\infty} \to S^+_{X_k}$ 是一个步保持映射，且 $\omega_F(\frac{1}{d}) \leq \gamma\varepsilon$，则有

$$\left\| F(z(\bar{m})) - \frac{\sum_{i=1}^k e_i}{\|\sum_{i=1}^k e_i\|_X} \right\|_X \leq \varepsilon.$$

现在，我们可以用局部性质 $\mathcal{Q}$ 来刻画标准 c_0 基。

推论 6.4。设 $(e_i)_i$ 是巴拿赫空间 $(X, \|\ \|_X)$ 的无条件基。那么，$(e_i)_i$ 具有局部性质 $\mathcal{Q}$，当且仅当它不等价于标准c_0 基。

证明。首先假设 $(e_i)_i$ 等价于标准 c_0 基。那么，$F_k : S^+_{\ell^k_\infty} \to S^+_{X_k}$ 使得

$$F_k(a_1, \ldots, a_k) = \frac{\sum_{i=1}^k a_i e_i}{\|\sum_{i=1}^k a_i e_i\|_X}, \quad (a_1, \ldots, a_k) \in S^+_{\ell^k_\infty},$$

定义了一个等度双利普希茨等价序列。再结合对于 $\bar{m} \in [\mathbb{N}]^d$ 和 $k > m_d$，$\|z(\bar{m}) - \sum_{i=1}^k e_i\|_\infty = 1$这一事实，可知 $(e_i)_i$ 不具有局部性质 $\mathcal{Q}$。

现在假设 $(e_i)_i$ 是 $(X, \|\cdot\|_X)$ 的无条件基，且它不等价于 c_0 基。令 $|\cdot|$ 为 X 上的一个等价范数，使得 $(e_i)_i$ 是 1-无条件的。那么，对于任意 $k \in \mathbb{N}$，$x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ 是从 $S^+(X_k, |\cdot|)$ 到 $S^+(X_k, \|\cdot\|_X)$ 的步保持双利普希茨等价，并将 $\frac{\sum_{i=1}^k e_i}{|\sum_{i=1}^k e_i|}$ 映射到 $\frac{\sum_{i=1}^k e_i}{\|\sum_{i=1}^k e_i\|_X}$。因此，结论由定理 6.1 得出。□

致谢。本文是在美国数学研究所（AIM）SQuaREs 项目的支持下，作为“巴拿赫空间的非线性几何”SQuaRE 项目的一部分完成的。B. M. Braga 感谢 Rufus Willett 向他介绍性质 (H)，也感谢 Quico 教会他球面不需要被磨圆。

References

[啊哈74] I. Aharoni. 每个可分度量空间都与以下空间的某个子集利普希茨等价 c_0^+ *Israel*。，：–．[BL00] Y. Benyamini 和 J. *J. Math.* 19 284 291, 1974 2 Lindenstrauss. *Geometric nonlinear functional analysis. Vol.*，第 卷。美国数学 1 48 *American Mathematical Society Colloquium Publications* 学会，普罗维登斯，罗得岛州，2000年。2[BL08] F. Baudier 和 G. Lancien. 局部有限度量空间到巴拿赫空间的嵌入。 *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136 3 1029 1033, 2008 3 ( ): – . BLMS F. Baudier、G. Lancien、P. Motakis 和 Th. Schlumprecht. 一类新的粗刚性巴拿赫空间。 *J. Inst. Math. Jussieu*, [21] 20 5 1729 1747, 2021 4 ( ): – . BLS F. Baudier、G. Lancien 和 Th. Schlumprecht. Tsirelson 空间的粗几何及其应用。 *J. Amer. Math. Soc.*, [18] 31 3 699 717, 2018 4 ( ): – . Bra B. M. Braga. 关于巴拿赫空间的渐近一致光滑性与非线性几何。 *J. Inst. Math. Jussieu*, [21] 20 1 65 102, 2021 4 ( ): – . CW Q. Cheng 和 Q. Wang. 关于具有 Kasparov 和 Yu 的性质 (H) 的巴拿赫空间。 [18] *J.*，( ): – . *Math. Anal. Appl.* 457 1 200 213, 2018 2

[Fov25] A. Fovelle. 渐近光滑性、巴拿赫空间中的集中性质及其应用。 *J. Funct. Anal.*, 288 4 110763, 14, 2025 4 ( ):论文编号 .
[11] W. B. Johnson. n维空间球面之间的利普希茨同胚, 2011 60426 2011 04 03 2 。网址: https://mathoverflow.net/q/（版本：--）。
[07] N. Kalton. 到自反空间的粗嵌入和一致嵌入。 *Q. J. Math.*, 58 3 393( ): – 414, 2007 4, 18 。
[08] KR N. Kalton 和 N. Randrianarivony. $l_p \oplus l_q$ *Math.* 的粗利普希茨几何。 , ( ): – . *Ann.* 341 1 223 237, 2008 4
[12] KY G. Kasparov 和 G. Yu. 诺维科夫猜想与巴拿赫空间几何。 *Geometry & Topology* 16 3 1859 1880, 2012 1, 2 , ( ): – .
[18] LR G. Lancien 和 M. Raja. 拟自反巴拿赫空间的渐近与粗利普希茨结构。 *Houston J. Math.*, 44 3 927 940, 2018 4 ( ): – .
[94] OS E. Odell 和 Th. Schlumprecht. 畸变问题。 *Acta Math.*, 173 281, 1994 2 259( ): – . 2, 5

(B. M. Braga) IMPA, Estrada Dona Castorina 110, 22460-320, Rio de Janeiro, Brazil *Email address*: demendoncabraga@gmail.com*URL*: https://sites.google.com/site/demendoncabraga(C. Garland) Department of Mathematics and Statistics, University of North Carolina at Charlotte, Charlotte, Noth Carolina, USA*Email address*: cgartla1@charlotte.edu*URL*: https://chrisgartland.wordpress.com/(G. Lancien) Université Marie et Louis Pasteur CNRS LmB (UMR 6623) F-25000 , Besançon France.

, , ,*Email address*: gilles.lancien@univ-fcomte.fr(P.Motakis) Department of Mathematics and Statistics, York University, 4700 KeeleStreet, Toronto, Ontario, M3J 1P3, Canada*Email address*: pmotakis@yorku.ca*URL*: https://pmotakis.mathstats.yorku.ca/(E. Perneck´a) Faculty of Information Technology, Czech Technical University inPrague, Thákurova 9, 160 00, Prague 6, Czech Republic *Email address*: eva.pernecka@fit.cvut.cz(Th. Schlumprecht) Texas A&M University, College Station, TX 77843, USA and Fac-ulty of Electrical Engineering, Czech Technical University in Prague, Zikova 4, 166 27, Prague*Email address*: t-schlumprecht@tamu.edu*URL*: https://people.tamu.edu/~t-schlumprecht/