arXiv:2512.14970v1 [math.CA] 16 Dec 2025

谨以此文献给***N.M.***
Bogoliubov教授，祝贺他***75***岁寿辰

Painlev´e性质与渐近行为的生成函数

A. V. Kitaev*斯捷克洛夫数学研究所，
丰坦卡27号，圣彼得堡191023，俄罗斯

2025年12月12日

摘要

本文提出了一种对Painlev´e方程进行渐近分析的新方法。该方法基于用两个变量$\sum_{k=0}^{\infty} y^k A_k(x)$的形式级数表示Painlev´e方程的解，其中系数为有理函数 $A_k(x)$。本文将此方法用于第三个退化Painlev´e方程的渐近分析。

2020年数学主题分类. 33E17, 34M30,34M35,34M40,34M55,34M56

缩略标题. Painlev´e 性质与生成函数

关键词。 Painlev´e 性质、Painlev´e 方程、椭圆函数、渐近级数、生成函数

*电子邮件：kitaev@pdmi.ras.ru

1 引言

如果一个常微分方程（ODE）的通解中，除极点以外的奇点位置不依赖于解的初值（积分常数），则称该常微分方程具有 Painlev´e 性质。这个定义将解的奇点区分为可动点（极点）和不可动点（分支点与本性奇点）；在本文中，后者通常分别称为正则奇点和不规则奇点。当我们同时指代这两类奇点，即正则奇点和不规则奇点时，将其称为临界点。

非可动奇点的位置可以通过分析常微分方程的形式来推导；例如，将 Painlev´e 方程的自变量在标准形式中记为 $\tau \in \mathbb{C}$，不难确定，第六个 Painlev´e 方程在 $\tau = 0$、$\tau = 1$ 和 $\tau = \infty$ 处有三个正则（分支）奇点，其他 Painlev´e 方程在 $\tau = \infty$ 处有一个非正则（本性）奇点；此外，第五个和第三个 Painlev´e 方程在 $\tau = 0$ 处还有一个正则奇点。通解中可动极点的位置无法通过任何唯一确定它们的参数（初始数据、单值化数据）显式求出，这正是其超越性的体现。同时，常微分方程的 Painlev´e 性质对其解在非可动奇点邻域中的行为施加了某些条件；与不具有 Painlev´e 性质的常微分方程的奇点附近解的行为相比，这种行为更为简单。

Painlev´e 方程通解在非可动奇点邻域内的渐近行为也已得到研究。Painlev´e 性质的一个重要推论是，它预示着同一解在不同奇点处，或在给定奇点处不同方向上的渐近行为存在连接公式。这些连接公式已借助一种额外的解析结构得以推导；这种结构似乎与 Painlev´e 方程相关，即线性常微分方程的等单值变形理论。可以说，渐近行为的首项连同相应的连接公式——它们描述了通解在给定奇点某个邻域内的行为——构成了该奇点的“表层”结构[1]，，也可以说是奇点的表面。另一方面，考察关于 Painlev´e 方程通解的完整渐近级数的结果 [13, 5, 20, 21, 3, 14]，，我们可以得出结论：Painlev´e 性质为这些级数带来了极其简单的结构：读者可以验证，若随意增添（或改动）Painlev´e 方程中的任意一项，导致其违反 Painlev´e 性质，就会破坏这些级数的结构。后一种结构可称为奇点的“表层之下”结构[2]，也可以说是奇点的根。本文旨在明确阐述我们所说的根结构，开发一种用于研究它的解析工具，并以退化的第三 Painlev´e 方程为例，展示其主要特征。

设 $u(\tau)$ 是一个具有 Painlev´é 性质的方程的解，且 τ_0 是其临界点。记 $\Omega \equiv \Omega_{\tau_0}$ 为复数域 τ 平面中的一个连通区域，使得 τ_0 属于其边界 $\tau_0 \in \partial\Omega$。若满足以下条件，我们称 Ω 为 τ_0 处的适当区域：(1) τ_0 是一个正则奇点，且 Ω 是以 τ_0 为圆心、带有一条割线的开圆盘；如果函数 $u(\tau)$ 有可数个在 τ_0处聚积的极点/零点，那么还需从 Ω 中删去以这些极点/零点为圆心的闭圆盘，其半径随 $\tau \to \tau_0$ 适当缩小（参见例如

[1] 这种结构可以表示为复数域 $\mathbb{C}$中一个奇点的邻域，该邻域被某些射线划分为若干扇形域，对应于通解在各扇形域中的渐近级数首项。通过解的单值化数据对这些渐近公式进行参数化，我们便能描述渐近行为如何在不同扇形域之间变化；这有时称为非线性 Stokes 现象。因此，讨论这种结构时，我们是在“观察表面”。[2] 显然，完整渐近级数包含“过多”的修正项，无法与首项置于同一表面上，因此我们将它们置于表面之下。

[10]中所述的构造），这样，在存在此类极点/零点时，Ω 是一个多重连通域；(2) τ_0 是一个本性奇点，Ω 是一条“胖”射线，即以 τ_0 为原点的射线，并连同某个随 $\tau \to \tau_0$ 缩小的邻域。在存在聚积于 $\tau = \tau_0$ 的极点/零点序列的情况下，适用与第 (1) 项类似的说明。Ω 的确切定义取决于所研究的特定 Painlev´é 性质方程和 $\arg\tau$，并将在下文针对退化的 Painlev´é 方程的解加以说明。作者迄今考察的所有例子都与标准形式的 Painlev´é 方程有关。对于这些方程，正则奇点（若存在）总是位于$\tau_0 = 0$，而本性奇点（若存在）则位于 $\tau_0 = \infty$。如上所述，唯一不具有不规则奇点的 Painlev´é 方程是第六个 Painlev´é 方程；相反，它在 $\tau = \infty$ 处具有一个正则奇点，并在 $\tau = 1$处另有一个正则奇点。

现在，可按如下方式定义不可移动临界点的根结构。设 $u(\tau)$ 是某个 Painlev´e 方程的任意一个解，且 τ_0 是其临界点，则存在一个适当的区域 Ω_{τ_0}，以及在 Ω_{τ_0} 内全纯且独立于 $u(\tau)$ 初始数据的函数 $x = x(\tau)$ 和 $y = y(\tau)$，使得

$$u(\tau) \underset{\substack{\tau\to\tau_0 \\ \tau\in\Omega_{\tau_0}}}{=} \tau^r A(x(\tau), y(\tau)), \tag{1.1}$$

其中，r 是一个有理数，它取决于 Painlev´e 方程和 τ_0；而 $A(x,\ y)$ 是一个形式展开，

$$A(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} y^k A_k(x), \tag{1.2}$$

其中，$A_k(x)$ 是 x 的有理函数。将 $x = x(\tau)$ 和 $y = y(\tau)$ 代入形式展开 (1.2) 后，可得到关于 τ 的渐近级数；必要时，还可指定它们可能具有的参数。

这种结构还应补充以下不那么显然的性质：(1) 函数 $x(\tau)$ 和 $y(\tau)$ 的选取并非唯一；(2) 所有渐近级数都具有某种对称性，可以通过对函数 $x(\tau) \to \tilde{x}(\tau)$ 和 $y(\tau) \to \tilde{y}(\tau)$ 作相应的对称变换，并在方程 (1.2) 中用带波浪号的函数替换 $x(\tau)$ 和$y(\tau)$，来利用这种对称性。这样也能得到一个有效的渐近级数，尤其可以将其与原级数 (1.2) 结合使用，以获得一致渐近展开；(3) 总能适当地选取函数 $x = x(\tau)$ 和 $y = y(\tau)$，使得以下表示成立

$$A(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k B_k(y), \tag{1.3}$$

其中包含一些有理函数 $B_k(y)$；我们将变量 $x(\tau)$ 和 $y(\tau)$ 以及展开式 (1.2) 和 (1.3) 分别称为共轭函数和展开式。(4) 函数 $A_k(x)$ 和 $B_k(y)$ 的极点 $k \in \mathbb{N}$ 分别由函数 $A_0(x)$ 和 $B_0(y)$ 定义。

我们认为，这种根结构适用于所有 Painlev´e 方程在所有临界点处的所有渐近行为。函数 $x(\tau)$ 和 $y(\tau)$，以及形式展开 $A(x,\ y)$，取决于上一句中提到的每个研究对象。

读者注意到，函数 $x(\tau)$ 和 $y(\tau)$ 成对出现，因此可以互换，所以尚不清楚展开式 (1.1) ($A-expansion$) 和 (1.3) ($B-expansion$) 之间是否存在差异？事实上，我们通过参照一个原始渐近展开式来区分这些展开式；对我们而言，这是一个外部对象，由其他作者作为 B-展开（基展开）得到。在迄今研究的通解的所有主要例子中，B-展开是对称的，$y^k B_k(x) = \tilde{y}^k B_k(\tilde{x})$ 和 $B_k(y)$ 是多项式。这些 B-展开为我们提供了函数 $x(\tau)$ 和

$y(\tau)$。这些特征可以从第3节中直接观察到。定义适当的变量 $x(\tau)$ 和 $y(\tau)$ 后，借助正在研究的 Painlev´e 方程，可以得到一个用于确定 A/B-展开的偏微分方程（PDE）。

原则上，熟悉附录 A-C [10]并研读过本文第2节和第3节的读者，应该能够轻松找到变量 $x(\tau)$ 和 $y(\tau)$，从而得到任意 Painlev´é 方程在正则奇点处的“幂”渐近行为和/或“对数”渐近行为，以及在不规则奇点处的“三角”渐近行为和/或“截断”渐近行为，前提是相应渐近行为的首项已知。不规则奇点处的“椭圆”渐近行为则更加复杂，因为我们没有这类渐近行为的完整渐近展开的实例。我们在第4节中对椭圆展开进行了两次试探，结果都不尽成功：在第 4.1 小节中，我们引入变量 $x(\tau)$ 和 $y(\tau)$，使得展开式 (1.2) 成立，但变量 $x(\tau)$ 和 $y(\tau)$ 并非共轭变量；在第 4.3 小节中，我们形式上引入了共轭变量 $x(\tau)$ 和 $y(\tau)$。为避免记号过于繁杂，我们将其中一种展开式称为 B-展开，但在这种情况下，共轭变量似乎是对称的，即 $\tilde{x}(\tau) = y(\tau)$ 和 $\tilde{y}(\tau) = x(\tau)$，因此，这些共轭变量定义的是对称展开，而非共轭展开。 B-展开的主要性质遭到破坏，它并不对称。由此间接导致展开式中出现无限序列的积分常数，而恰当的 B-展开不应含有任何未定系数；我们利用它来确定函数 $A_k(x)$ 的初始条件。[3] 理论上，我们或许可以将此展开式代入 Painlev´é 方程来确定这些常数，但这超出了我们方法的范围：让 Painlev´é 方程本身保持原样。

我们回顾一下，基于等单值变形的现代方法无需预先对 Painlev´e 方程进行渐近分析，就能为研究者提供奇点的“面结构”。决定奇点“根结构”的 A/B-展开的偏微分方程当然基于相应的 Painlev´e 方程，但从方法理念上看，两者有所不同。在标准经典渐近分析中，我们研究 Painlev´e 方程的简化／截断／约化版本，以确定渐近行为的首项；对于一般解，这就是椭圆函数或其退化形式所满足的方程。而在我们的方法中，我们只处理有理解，并避免使用基于简化方程研究的那些工作中出现的任何渐近拟设和展开式。

本文讨论 A/B 展开在研究 Painlev´e 方程渐近行为中的应用，这种应用具有双重性质：(1) 我们证明，有理函数 $A_k(x)$ 和 $B_k(y)$， $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 能够为渐近展开中系数的无限或有限子序列生成显式公式，因此我们称它们为生成函数。我们将形式展开 (1.2) 和 (1.3)（它们分别代表这些生成函数的集合）称为超生成函数；(2) 对函数 $x = x(\tau)$ 和 $y = y(\tau)$ 中的参数作适当选择后， A-和 B-展开所定义的渐近展开互为解析延拓。此外，这些展开在参数空间中具有重叠的有效区域。由此可得：如果通过单值化数据得到了对解 $u(\tau)$ 的某个渐近展开的参数化，那么同样的参数化也适用于另一个渐近展开，因此后者的渐近行为无需再进行额外计算来求得单值化参数化（参见第3节中的示例）。

[3] 乍看之下，计算 B-展开似乎类似于将渐近假设代入 Painlev´e 方程。然而，从计算角度来看，两者有显著区别。将渐近假设代入 Painlev´e 方程时，我们必须先为其中所有带有待定系数的项分配内存，并在内存中存储这些项及相应的代数方程来进行计算，然后依次求解这些方程。与此同时，只有在计算完成后， $B_k(y)$ 函数才会以显式（复数）形式出现，内存用量也会逐步增加。此外， $B_k(y)$ 中隐含系数的计算通过积分完成，而渐近假设中同一组系数的计算则通过微分完成。对于项数很多的渐近级数，使用 B-展开的优势便显而易见。

对于后者的渐近行为，需要进行额外的计算来求出此类单值化参数化（参见第3节中的示例）。

在本文中， $u(\tau)$ 是退化的第三 Painlev´e 方程的一个解

$$u''(\tau)=\frac{(u'(\tau))^2}{u(\tau)}-\frac{u'(\tau)}{\tau}+\frac{1}{\tau}\big(-8\varepsilon(u(\tau))^2+2ab\big)+\frac{b^2}{u(\tau)}, \tag{1.4}$$

其中撇号表示对 τ 求微分， $\varepsilon=\pm1$, $b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 是缩放参数，而 $a\in\mathbb{C}$ 是所谓的形式单值化参数，无法通过任何缩放变换改变。方程 (1.4) 也称为 D_7 型第三 Painlev´e 方程（见 [12]）。选择这个方程，是因为它兼有两类临界点，有一个（非缩放）参数 a，但不像其他具有两类奇点的 Painlev´e 方程那样拥有那么多此类参数；事实上，与其他看起来更加复杂的 Painlev´e 方程相比，它作为渐近研究对象要稍微复杂一些。

最后，让我们讨论一些与临界奇点的根结构相关的进一步问题和展望。(1) 解的渐近式表示 (1.1) 是二阶常微分方程具有 Painlev´e 性质的推论，即二阶常微分方程具有 Painlev´e 性质的必要条件。因此，一个自然的问题是，如何将这些展开式推广到单变量和多变量高阶 Painlev´e 方程?

(2) 二阶常微分方程通解的一个动临界奇点是否可能具有由展开式 (1.1) 描述的根结构?

(3) 如果某些二阶常微分方程具有一些根结构为 (1.1) 的不可移动临界点，同时也具有一些可动临界点，那么这些可动临界点就不能进入不可移动临界点的某些邻域，因为它们会破坏（与之矛盾）结构 (1.1)。因此，根结构为 (1.1) 的不可移动临界点的邻域之并构成了一个对可动临界点具有“排斥性”的区域，也就是说，这是一个不含可动临界点的区域；这个区域可称为 Painlev´e 区域，其补集则是非 Painlev´e 区域，可动临界点在其中移动。因此，这一想法为具有部分 Painlev´e 性质的方程可能存在提供了一种理论解释。 [6] 中考察了这类方程的一个候选方程。这里的主要问题是，尽管根结构 (1.1) 是临界点的局部性质，但它由相应常微分方程的所有项决定。这样的常微分方程既满足不可移动点的结构，又允许某些临界奇点移动，这是否可能?

2 正则奇点：对数渐近

方程 (1.4) 有一个位于 $\tau=0$ 的正则奇点。在论文 [10] 中，我们研究了该方程的单参数解，其渐近展开如下[4]

$$\begin{gathered}u(\tau)=\sum_{k=0}^{+\infty}\tau^{2k-1}\sum_{m=-2\lfloor k/2\rfloor}^{+\infty}\tilde{c}_{2k-1,m}(\ln\tau)^{-m},\\ \tilde{c}_{-1,0}=\tilde{c}_{-1,1}=0,\quad \tilde{c}_{-1,2}=-\frac{1}{4}.\end{gathered} \tag{2.1}$$

展开式 (2.1) 依赖于单个参数 $\tilde{c}_{-1,\,3}\in\mathbb{C}$ 并且在 $\tau=0$ 的邻域内收敛；此外，与 [10], 中一样，我们假设 $|\arg\,\tau|<\pi$，并且

[4] 详情请参阅 [10] 的附录 C。本节为方便读者，保留了 [10], 中采用的记号；特别是在本节中 $\varepsilon=+1$，要得到含有 $\varepsilon=+/-1$ 的公式，只需在所有方程的两部分中分别替换 $u->\varepsilon u$ 和 $b->\varepsilon b$。在含函数 $A(x,\ y)$ 的方程中，应将函数 $A(x,\ y)$ 改为 $\varepsilon A(x,\ y)$。

选取对数函数的主值分支。展开式 (2.1) 对形式单值化参数 $a \in \mathbb{C}$ 的所有取值均有效。我们称系数 $\tilde{c}_{2k-1,\ m}$ 为第 层的系数。与其他类型的渐近展开不同，例如解 $u(\tau)$ 关于 $\tau \to 0$ 的渐近展开，对于 $\tilde{c}_{-1,\ 3} \neq 0$，每一层包含的系数个数是无限的。在 [10], 的附录 C 中，我们构造了超生成函数 $\tilde{A}(x,\ y)$，其中含有 $x = 1/\ln(\tau)$ 和 $y = \tau^2$，借此求得了 ˜ 的所有层 $k = 0$、1、2 和 3 的系数 $\tilde{c}_{2k-1,\ m}$ 的显式公式。利用超生成函数 $A(x,\ y)$，可以继续构造更高层 k 的系数 $\tilde{c}_{2k-1,\ m}$ ；然而，相应的公式很快就会变得相当复杂，尽管如此，仍可推导出系数的一些一般性质。换言之，附录 C.2 中给出的构造表明，对于任意给定的 k ，双重级数 (2.1) 中对应的内层级数不过是一个有理生成函数 ˜(x)。

函数 $x(\tau) = 1/\ln(\tau)$ 和 $y(\tau) = \tau^2$ 的选择不符合引言中所述的适当选择。因为关于变量 x 的共轭展开是一个洛朗（双无限）展开式，不具有形式 (1.3)。下面我们考虑函数对 $x(\tau)$ 和 $y(\tau)$ 的适当选择。

第一个选择是

$$x(\tau) = \tau^2 \ln(\tau), \qquad y(\tau) = 1/\ln(\tau). \tag{2.2}$$

利用变量 (2.2)，展开式 (2.1) 可以用函数 $A(x, y) := \tau u(\tau)$ 表示为展开式 (1.1)，其中

$$A_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_{2n-1,k-n} x^n, \qquad k \geqslant 0. \tag{2.3}$$

在方程 (2.3) 中，我们假设对于 $k = 0$ ，所有对应于奇数 $n \in \mathbb{N}$ 的系数均为零，即 $\tilde{c}_{4l-3,1-2l} = 0$ 对于 $l \in \mathbb{N}$。定义作用于两个变量 x 和 y 的形式幂级数空间中的线性微分算子 D 如下:

$$D = (y+2)x\frac{\partial}{\partial x} - y^2\frac{\partial}{\partial y}; \tag{2.4}$$

那么，函数 $A \equiv A(x, y)$ 满足偏微分方程

$$D^2(\ln A) = -8A + 2a\frac{bxy}{A} + \left(\frac{bxy}{A}\right)^2. \tag{2.5}$$

现在将函数 A 的展开式 (1.1) 代入方程 (2.5)，令系数 y^k 为零，从而得到用于确定生成函数 $A_k(x)$ 的微分方程。对于 $A_0(x)$，我们得到一个仅有有理解的非线性微分方程

$$A_0(x) = \frac{Cx^2}{(1 + Cx^2/4)^2}, \tag{2.6}$$

将 $A_0(x)$展开为泰勒级数，并将结果与展开式 (2.3) 进行比较，可得 $C = \tilde{c}_{3,-2}$ ，而对于 $l \in \mathbb{N}$ ，可得:

$$n = 2l - 1: \qquad \tilde{c}_{4l-3,1-2l} = 0, \qquad l \in \mathbb{N}, \tag{2.7}$$

$$n = 2l: \qquad \tilde{c}_{4l-1,-2l} = \left(-\frac{1}{4}\right)^{l-1} l\tilde{c}_{3,-2}^{l} = -\frac{lb^{2l}(a^2+1)^l}{4^{2l-1}}. \tag{2.8}$$

在 (2.8) 的最后一个方程中，我们使用了 $\tilde{c}_{3,\ -2}$ 该值是在 [10] 中通过将展开式 (2.1) 直接代入方程 (1.4) 计算得到的。其他生成函数 $A_k(x)$,

$k \in \mathbb{N}$，定义为二阶非齐次线性方程的有理解，其齐次部分为退化超几何方程。在这种情况下会出现一个其他迄今为止所讨论情形中不会出现的额外问题，即这是一个共振情形；换言之，定义 $A_k(x)$ 的常微分方程的齐次部分有一个有理解，因此定义 $A_k(x)$ 的有理解并不唯一，我们面临着为每个 k 确定一个初始参数的问题。当然，这个参数可以计算出来，但需要额外的工作。让我们看看 $A_1(x)$ 的情况；

$$\begin{aligned} A_1(x) = &\frac{C_1 x^2 (Cx^2-4)}{(Cx^2+4)^3} \\ &+ \frac{x\big(ab(Cx^2-12)(C^2x^4+56Cx^2-48)+2304Cx\big)}{18(Cx^2+4)^3} \end{aligned} \tag{2.9}$$

方程 (2.9) 中的第一项是齐次常微分方程的一个有理解，它取决于尚待确定的积分常数 C_1；参数 C 则与方程 (2.6) 中的相同，已知其值。将 $A_1(x)$展开成泰勒级数，得到

$$A_1(x) = \frac{ab}{2}x + \left(2C - \frac{C_1}{16}\right)x^2 - abCx^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big). \tag{2.10}$$

比较 $k=1$ 的展开式 (2.3) 与 $n=0$，1，2 和 3 的展开式 (2.10)，可得

$$\tilde{c}_{-1,1} = 0,\ \ \tilde{c}_{1,0} = \frac{ab}{2},\ \ \tilde{c}_{3,-1} = -\frac{C_1}{16} + 2C,\ \ \tilde{c}_{5,-2} = -abC = \frac{ab^3(a^2+1)}{4}, \tag{2.11}$$

系数 $\tilde{c}_{3,\ -1}$ 在 [10], 中已计算

$$\tilde{c}_{3,-1} = -b^2\big((a^2+1)\tilde{c}_{-1,3} - a^2 - 1/2\big) = 4C(\tilde{c}_{-1,3}-1) - b^2/2. \tag{2.12}$$

我们继续使用记号 $C = -b^2(a^2+1)/4$，因为用 C 表示时公式更简单。将方程组 (2.12) 给出的$\tilde{c}_{3,\ -1}$ 的表达式代入方程组 (2.11) 的第三个方程，替换其中的$\tilde{c}_3$，可得

$$C_1 = 8b^2\big(2(a^2+1)\tilde{c}_{-1,3} - 3a^2 - 2\big) = -8(8C\tilde{c}_{-1,3} - 12C - b^2). \tag{2.13}$$

现在，我们可以将 $A_1(x)$ 分解为部分分式：

$$A_1(x) = \frac{ab}{18} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\xi_{k,1}x + \xi_{k,0}}{(1+Cx^2/4)^k}, \tag{2.14}$$

其中

$$\begin{gathered} \xi_{1,1} = \frac{4}{9}ab, \quad \xi_{2,1} = -\frac{32}{9}ab, \quad \xi_{3,1} = \frac{32}{9}ab, \\ \xi_{1,0} = -16\tilde{c}_{-1,3} + \frac{2b^2}{C} + 24, \quad \xi_{2,0} = 48\tilde{c}_{-1,3} - \frac{6b^2}{C} - 64, \\ \xi_{3,0} = -32\tilde{c}_{-1,3} + \frac{4b^2}{C} + 40. \end{gathered}$$

将由部分分式 (2.14) 给出的 $A_1(x)$ 在 $x=0$ 处展开为泰勒级数，并将该展开式的系数与 $k=1$ 的展开式 (2.3) 的系数进行比较，可得以下显式公式：$\tilde{c}_{1,\ 0} = ab/18 + \xi_{1,\ 1} + \xi_{2,\ 1} + \xi_{3,\ 1} = ab/2$以及 $l \in \mathbb{N}$ 的公式：

$$n = 2l+1:\ \tilde{c}_{4l+1,-2l} = \left(\frac{-C}{4}\right)^l \left(\xi_{1,1} + (l+1)\xi_{2,1} + \frac{(l+1)(l+2)}{2}\xi_{3,1}\right), \tag{2.15}$$

$$n = 2l: \qquad \tilde{c}_{4l-1,1-2l} = \left(\frac{-C}{4}\right)^l \left(\xi_{1,0} + (l+1)\xi_{2,0} + \frac{(l+1)(l+2)}{2}\xi_{3,0}\right). \tag{2.16}$$

注意，公式 (2.16) 对 $l = 0$、 $\tilde{c}_{-1,\ 1} = \xi_{1,\ 0} + \xi_{2,\ 0} + \xi_{3,\ 0} = 0$ 也适用。

注 2.1. 对于 $k \geqslant 2$ ，函数 $A_k(x)$ 的确定过程类似，但相应的表达式很快就会变得相当复杂。我使用 MAPLE 计算了 A_2、 A_3 和 A_4 ，并未发现计算时间显著增加，因此我猜想在实际应用中还可以计算更多几个生成函数，但 MAPLE 可能无法显示它们。为了确定函数 $A_k(x)$ 的 C_1 型积分常数（见上文），需要知道第 3 级的相应系数， $\tilde{c}_{3,\ k-2}$；这些系数（对所有 k）均在附录 C 中计算。2 [10] （见 [10] 中的方程 (C.30)）。

函数 $A_k(x)$ 的极点阶数为 $k+2$，因此相应的系数$\tilde{c}_{2n-1,\ k-n} = \mathcal{O}(n^{k+1})$。■

考虑共轭展开式 (1.3)。相应的生成函数 $B_k(y)$ 为:

$$B_k(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_{2k-1,n-k} x^n, \qquad k \geqslant 0. \tag{2.17}$$

将 (2.17) 与 [10], 附录 C.2 中的方程 (C.12) 比较可知，定义 B_k 的系数集˜与 [10],中所讨论的生成函数 A_k 的系数集相同，因此下面的构造应当得出相同的系数显式表达式$\tilde{c}_{2k-1,\ m}$ 即 [10] 附录 C.2 中得到的那些表达式。不过，这一构造很重要，因为它展示了如何选取恰当的函数对 $x(\tau)$ 和 $y(\tau)$，以及引言中讨论的共轭展开的存在性。由于在此情形下，展开式 (1.3) 的构造与 [10], 中所讨论的类似，下面我们只简要概述其主要特点。

$$B_0(y) = -\frac{1}{(1/y - C)^2}, \qquad C = -2\tilde{c}_{-1,3}. \tag{2.18}$$

˜函数 $B_0(y)$ 在作出变换 $y \to x$ 后，与 [10]附录 C.2 中引入的函数 $A_0(x)$ 相同。对于 $k \geqslant$ ，函数 $B_k(y)$ 可通过将展开式 (1.3) 代入方程 (2.5)，并依次令 y^k 的系数为零来确定。与上文讨论的函数 $A_k(x)$的情形类似，为确定函数 $A_k(x)$，需要求解非齐次常微分方程，其非齐次部分是关于 y的有理函数，而齐次部分是一个等价于退化超几何方程的二阶常微分方程。与上文讨论的情形不同，该齐次常微分方程没有有理解，因此确定函数 $B_k(y)$的过程很直接：它就是该非齐次常微分方程唯一的有理解。最终结果为 $B_k(y) = y^k \tilde{A}_k(x)|_{x=y}$，其中 $\tilde{A}_k(x)$ 是 [10]附录 C.2 中确定的函数；这一关系意味着，共轭B-展开式与 [10]附录 C.2 中研究的展开式相同。

(2.1)、 A 和 B 的所有展开式在本节中均为渐近级数。从实际应用的角度来看，级数 (2.1) 难以使用； A 的展开式收敛得非常缓慢； B 的展开式是其中最好的，但函数 $B_k(y)$ $k > 6$ 的公式变得非常复杂（参见 [10] 中附录 C.2 末尾的讨论），因此，即便只是展示其计算结果，也仍需进一步研究。

3 不规则奇点：三角渐近

考虑方程 (1.4) 通解的渐近展开,

$$u(\tau) \underset{\substack{\operatorname{Re}\tau\to+\infty\\ \tau\in\Omega}}{=} \frac{\varepsilon(\varepsilon b)^{2/3}}{2}\tau^{1/3}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\tau^{k/3}}\sum_{j=-k}^{j=k}a_{k,j}w^{j}\right), \tag{3.1}$$

$$\Omega := \{|\operatorname{Im}\theta(\tau)| < \delta,\ \delta > 0\},$$

其中

$$w := \tau^{\frac{2}{3}(\tilde{\nu}+1)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\tau)}, \quad \theta(\tau) := 3^{3/2}(\varepsilon b)^{1/3}\tau^{2/3}, \tag{3.2}$$

$$|\operatorname{Re}\tilde{\nu}+1| < 1/2, \tag{3.3}$$

and

$$a_{1,0} = 0, \qquad a_{1,1}\,a_{1,-1} = -\frac{\mathrm{i}(\tilde{\nu}+1)}{\sqrt{3}(\varepsilon b)^{1/3}}. \tag{3.4}$$

其余系数 $a_{k,\ j}$ 可通过将展开式 (3.1) 代入方程 (1.4)，唯一地表示为 $a_{1,\ 1}$，$a_{1,\ -1}$以及方程系数的函数。在附录 C[9] 中，我们讨论了该展开式的各种性质；特别地，我们猜想了 $a_{k,\ \pm k}$ 和 $a_{k,\ \pm(k-2)}$的显式公式，并提到这些公式可以利用生成函数方法证明，但省略了具体细节。本文给出了相应的构造。这里，我们沿用 [9],中引入的记号

$$\varkappa = \tilde{\nu}+1, \qquad \alpha = 2\mathrm{i}\sqrt{3}\,a. \tag{3.5}$$

记作,

$$x(\tau) = \theta(\tau)^{-1/2}w^{-1}, \quad y(\tau) = w, \qquad \theta(\tau)^{1/2} = 3^{3/4}(\varepsilon b)^{1/6}\tau^{1/3} =: \Theta\tau^{1/3}, \tag{3.6}$$

其中函数 w 在 (3.1) 中定义。

∞3.1 超生成函数 $A(x,\ y)$

∞超生成函数 $A(x,\ y)$ 是两个独立变量 x 和 y的函数,

$$\overset{\infty}{A}(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} y^k \overset{\infty}{A}_k(x), \tag{3.7}$$

其中生成函数

$$\overset{\infty}{A}_k(x) = \sum_{n=\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor}^{\infty} \Theta^n a_{n,k-n}x^n, \qquad k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}, \qquad a_{0,0} = 1. \tag{3.8}$$

假设函数 $\overset{\infty}{A}(x,\ y)$ 已构造完成，则解 $u(\tau)$ 的渐近行为可写成

$$u(\tau) = \frac{\varepsilon(\varepsilon b)^{2/3}}{2}\tau^{1/3}\ \overset{\infty}{A}\ (x(\tau),y(\tau)), \tag{3.9}$$

其中，$x(\tau)$ 和 $y(\tau)$ 在 (3.6) 中定义。在这种情况下，作用于两个变量 x 和 y 的形式幂级数空间中的线性微分算子 D 定义为

$$D = -\frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \left(\varkappa + \frac{\mathrm{i}}{x^2y^2}\right)\left(y\frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial x}\right). \tag{3.10}$$

∞ ∞函数 $A \equiv A(x,\ y)$ 满足以下偏微分方程

$$D^2 \ln \overset{\infty}{A} = -\frac{1}{3x^4y^4}\left(\overset{\infty}{A} - \frac{1}{\left(\overset{\infty}{A}\right)^2}\right) - \frac{\mathrm{i}\alpha}{2x^2y^2\overset{\infty}{A}}. \tag{3.11}$$

将展开式 (3.7) 代入方程 (3.11)，并令 y^k $k = -4$、-3、.....各次幂对应的系数为零，可得到关于生成函数 $A_0(x)$ 的 $k = -4$ 非线性常微分方程,

$$\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2 \ln \overset{\infty}{A}_0(x) = \frac{1}{3}\left(\overset{\infty}{A}_0(x) - \frac{1}{\left(\overset{\infty}{A}_0(x)\right)^2}\right), \tag{3.12}$$

∞以及关于函数 $A_k(x)$、 $k \geqslant 1$ 的二阶线性常微分方程。方程 (3.12) 的通解可以用 $\ln x$ 的魏尔斯特拉斯 $\wp$-function 表示。然而，根据引言中的论述，这个方程应当存在一个有理解,而且确实存在,

$$\overset{\infty}{A}_0(x) = 1 + \frac{b_{1,-1}x}{(1 - b_{1,-1}x/6)^2}, \tag{3.13}$$

∞其中 $b_{1、-1} \in \mathbb{C}$ 为积分常数。将方程 (3.13) 给出的函数 A_0 在 x=0 处展开为泰勒级数,并将结果与 $k = 0$ 的展开式 (3.8) 进行比较，可得到系数 $a_{n、-n}$ 的公式,

$$a_{n,-n} = \frac{n(b_{1,-1}\Theta^{-1})^n}{6^{n-1}} = \frac{na_{1,-1}^n}{6^{n-1}}. \tag{3.14}$$

∞函数 $A_1(x)$ 满足二阶线性齐次常微分方程,

$$\begin{aligned} &x(xb_{1,-1} - 6)(x^2b_{1,-1}^2 + 24xb_{1,-1} + 36)\frac{\mathrm{d}^2\overset{\infty}{A}_1(x)}{\mathrm{d}x^2} \\ &= (x^3b_{1,-1}^3 - 54x^2b_{1,-1}^2 - 540xb_{1,-1} - 216)\frac{\mathrm{d}\overset{\infty}{A}_1(x)}{\mathrm{d}x} \\ &+ 72b_{1,-1}(xb_{1,-1} + 6)\overset{\infty}{A}_1(x). \end{aligned} \tag{3.15}$$

(3.15) 的一个线性无关解是有理函数，另一个解包含 $\ln(x)$，因此

$$\overset{\infty}{A}_1(x) = \frac{C_1x^2(xb_{1,-1} + 6)}{(xb_{1,-1} - 6)^3} = -\frac{C_1}{36}x^2 + \mathcal{O}(x^3), \tag{3.16}$$

其中 C_1 是积分常数。将 $k = 1$ 的展开式 (3.16) 与 a_1 的展开式 (3.8) 进行比较，我们确认 $_0 = 0$，并得到关系式 $-C_1/36 = a_{2,-1}\Theta^2$。在 [9] 中我们发现 $a_{2,\pm1} = 0$，因此 $C_1 = 0$，这进而意味着，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $a_{n,1-n} = 0$ 。函数 $A_2(x)$ 是一个二阶线性非齐次常微分方程的有理解。该解可以写成

$$\begin{aligned} \overset{\infty}{A}_2(x) = &\frac{C_2x^3(xb_{1,-1} + 6)}{(xb_{1,-1} - 6)^3} - \frac{\mathrm{i}x}{12b_{1,-1}(xb_{1,-1} - 6)^3}((\varkappa + 1)b_{1,-1}^5x^5 \\ &+6(\alpha + 9\varkappa + 9)b_{1,-1}^4x^4 - 108(4\alpha + 53\varkappa + 53)b_{1,-1}^3x^3 \\ &-216(6\alpha + 143\varkappa + 151)b_{1,-1}^2x^2 - 1296(\alpha + 9\varkappa)b_{1,-1}x - 7776\varkappa) \end{aligned} \tag{3.17}$$

其中 C_2 是待定的积分常数，可通过在 $x=0$ 处对方程 (3.17) 右端作泰勒级数展开来确定，

$$\begin{aligned}\overset{\infty}{A}_2(x) = &-\frac{3\mathrm{i}\varkappa}{b_{1,-1}}x - \frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha+12\varkappa)x^2 \\ &-\left(\frac{C_2}{36}+\left(\frac{44\mathrm{i}\varkappa}{3}+\frac{3\mathrm{i}\alpha}{4}+\frac{151\mathrm{i}}{12}\right)b_{1,-1}\right)x^3+\mathcal{O}(x^4).\end{aligned} \tag{3.18}$$

将展开式 (3.18) 与 $k=2$ 的展开式 (3.8) 比较，可得

$$\Theta a_{1,1} = -\frac{3\mathrm{i}\varkappa}{b_{1,-1}} = -\frac{3\mathrm{i}\varkappa}{a_{1,-1}\Theta}, \quad \Theta^2 a_{2,0} = -\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha+12\varkappa), \tag{3.19}$$

$$\Theta^3 a_{3,-1} = -\frac{C_2}{36} - \left(\frac{44\mathrm{i}\varkappa}{3}+\frac{3\mathrm{i}\alpha}{4}+\frac{151\mathrm{i}}{12}\right)b_{1,-1}. \tag{3.20}$$

(3.19) 中的第一个方程等价于 (3.4) 中的最后一个方程；对于 $a_{2,\,0}$，第二个方程等价于在 [9] 中得到的该系数表达式（参见 [9] 中 (C.9) 的最后一个方程）。系数 $a_{3,\,-1}$ 也已在 [9] 中计算（见 (C.10) [9] 中的最后一个方程），由此可得

$$C_2 = \frac{3\mathrm{i}}{2}(3\alpha^2+24\alpha\varkappa+30\varkappa^2-6\alpha-272\varkappa-305)b_{1,-1}. \tag{3.21}$$

将此值代入关于 $\overset{\infty}{A}_2(x)$ 的方程 (3.17) 中，并将所得方程分解为部分分式，可得

$$\begin{aligned}\overset{\infty}{A}_2(x) = \frac{\mathrm{i}}{b_{1,-1}^2}\Bigg(&-\frac{\varkappa+1}{12}b_{1,-1}^3x^3-\frac{\alpha+12\varkappa+12}{2}b_{1,-1}^2x^2 \\ &+\frac{3}{2}(\Xi_2-20\varkappa-53)b_{1,-1}x+36(\Xi_2+6\varkappa-23)+\sum_{n=1}^{3}\frac{\eta_n}{(1-b_{1,-1}x/6)^n}\Bigg),\end{aligned} \tag{3.22}$$

其中

$$\Xi_2 = 3(\alpha^2+8\alpha\varkappa+10\varkappa^2+4\alpha), \tag{3.23}$$

$$\eta_1 = -27(3\Xi_2+42\varkappa-47),\ \eta_2 = 9(7\Xi_2+162\varkappa-59),\ \eta_3 = -18(\Xi_2+30\varkappa-5). \tag{3.24}$$

将方程 (3.22) 的右侧在 $x=0$ 处展开为泰勒级数，可重现前三个偏移系数：$a_{1,\,1}$、$a_{2,\,0}$ 和 $a_{3,\,-1}$（参见方程 (3.18) 及下文段落）；再将所得展开式与展开式 (3.8) 比较，便可得到一般公式，

$$a_{n,-(n-2)} = \frac{\mathrm{i}a_{1,-1}^{n-2}}{6^n\Theta^2}\left(\eta_1+(n+1)\eta_2+\frac{(n+1)(n+2)}{2}\eta_3\right), \qquad n\geqslant 4. \tag{3.25}$$

$n=k$ 的公式 (3.25) 等价于 [9] 中提出的猜想公式（对于方程 (C.14) 中符号的较低选择，参见 [9], 的猜想 C.2）。

现在我们将介绍计算生成函数 $A_k(x)$ 的后续步骤。该步骤需要预先知道系数 $a_{k,-1}$, $k\geqslant 4$。系数 $a_{4,-1}=a_{6,-1}=0$ 和 $a_{5,-1}$ 已在 [9] 中计算得出。在此阶段，我们猜想：对所有 $j\in\mathbb{N}$, 函数 $A_{2j-1}(x)\equiv 0$。只要确认 $a_{2j,-1}=0$，就可以通过数学归纳法证明这一结论。实际上，关于 ∞ 函数 A_1 的归纳假设已在上文确立；接下来，假设对于 $i<j$, $A_{2i-1}(x)\equiv 0$，便可证明

∞ $A_{2j-1}(x)$ 是一个二阶线性齐次常微分方程的解，其有理解为：

$$\overset{\infty}{A}_{2j-1}(x) = \frac{C_{2j-1}x^{2j}(xb_{1,-1}+6)}{(xb_{1,-1}-6)^3} = -\frac{C_{2j-1}}{36}x^{2j} + \mathcal{O}(x^{2j+1}), \tag{3.26}$$

其中 C_{2j-1} 是积分常数。将展开式 (3.26) 与 $k = 2j-1$的展开式 (3.8) 进行比较，可得 $-C_{2j-1}/36 = a_{2j,\,-1}\Theta^{2j}$；若能证明 $a_{2j,\,-1}=0$，归纳步骤便告完成。[5]

∞计算 $j \geqslant 2$ 的生成函数 $A_{2j}(x)$ 在技术上更为复杂，但实际上与情形 $j=1$相似。值得庆幸的是， Maple 包含一个用于构造线性常微分方程有理解的算法实现，但随着 j 增大，这些解很快就会变得相当复杂，因此，要让计算机计算的结果变得易于理解，所花的时间远多于构造有理解本身。例如，∞计算 $A_4(x)$ 用时不到 1 秒，但作者花了好几个小时才整理出下文所示的结果表示形式。看来，或许存在更合适的变量和相对简单的代数算法，可帮助∞为一般情形下的 $A_{2j}(x)$ 生成函数写出显式公式。

$$\begin{aligned}
\overset{\infty}{A}_4(x) = \frac{C_4x^5(xb_{1,-1}+6)}{(xb_{1,-1}-6)^3} - \frac{x^2}{864b_{1,-1}^2(xb_{1,-1}-6)^4}\Big(&2(\varkappa+1)^2b_{1,-1}^8x^8\\
&+3(\varkappa+1)(\Xi_2+24\alpha+124\varkappa+91)b_{1,-1}^7x^7\\
&-72(\varkappa+1)(\Xi_2+24\alpha+134\varkappa+101)b_{1,-1}^6x^6\\
&+54(\Xi_2^2+60\varkappa\Xi_2+52\Xi_2+336\alpha(2\varkappa+1)+5068\varkappa^2+5728\varkappa+1539)b_{1,-1}^5x^5\\
&+648(\Xi_2^2+60\varkappa\Xi_2-38\Xi_2-96\alpha(2\varkappa+1)-548\varkappa^2-2588\varkappa-423)b_{1,-1}^4x^4\\
&+93312\varkappa(\Xi_2-24\alpha-74\varkappa-3)b_{1,-1}^2x^2\\
&-139968\varkappa(\Xi_2-24\alpha-64\varkappa-3)+3359232\varkappa^2\Big),
\end{aligned} \tag{3.27}$$

∞其中， Ξ_2 在方程 (3.23) 中定义。将 (3.27) 给出的 $A_4(x)$ 在 $x=0$ 处展开为泰勒级数，可得

$$\begin{aligned}
\overset{\infty}{A}_4(x) &= -\frac{3\varkappa^2}{b_{1,-1}^2}x^2 + \frac{\varkappa}{8b_{1,-1}}(\Xi_2-24\alpha-80\varkappa-3)x^3\\
&-\left(\varkappa\big(3\Xi_2-72\alpha-232\varkappa-9\big)\frac{b_{1,-1}}{144}+\frac{C_4}{36}\right)x^5+\mathcal{O}(x^6).
\end{aligned} \tag{3.28}$$

比较 $k=4$ 的展开式 (3.28) 和 (3.8)，我们发现

$$a_{2,2}\Theta^2 = -\frac{3\varkappa^2}{b_{1,-1}^2} = -\frac{3\varkappa^2}{\Theta^2a_{1,-1}^2},\quad\Rightarrow\quad a_{2,2}=a_{1,1}^2/3,\quad a_{4,0}=0, \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}
a_{3,1}\Theta^3 &= \frac{\varkappa}{8b_{1,-1}}(\Xi_2-24\alpha-80\varkappa-3)\\
&= \frac{\varkappa}{8a_{1,-1}\Theta}(3\alpha^2+24\varkappa\alpha+30\varkappa^2-12\alpha-80\varkappa-3),
\end{aligned} \tag{3.30}$$

$$a_{5,-1}\Theta^5 = -\left(\varkappa\big(3\Xi_2-72\alpha-232\varkappa-9\big)\frac{b_{1,-1}}{144}+\frac{C_4}{36}\right) \tag{3.31}$$

[5] 利用第3.2小节中构造的共轭展开，可以证明 $a_{2j,\,-1}=0$ 并计算 $a_{2j-1,\,-1}$ 对所有 $j\in\mathbb{N}$ 的值；参见注 3.2 和注 3.3。

(3.29) 中系数 $a_{2,2}$ 和 $a_{4,0}$ 的公式与 [9] 中得到的相应公式一致（分别参见 [9], 中的方程 (C.9) 和 (C.11)）。考虑到 $\varkappa = \mathrm{i}a_{1,1}a_{1,-1}\sqrt{3}(\varepsilon b)^{1/3}$（参见 (3.4) 中的最后一个方程和 (3.5) 中的第一个方程，并利用关系式 $\Theta^4 = 3^3(\varepsilon b)^{2/3}$（参见 (3.6) 中的最后一个方程）），可以确认，由方程 (3.30) 给出的 $a_{3,1}$ 的公式与论文 [9]中给出的 $a_{3,1}$ 的公式等价（参见 [9] 中的方程 (C.10), 取上号）。系数$a_{5,-1}$ 也在 [9] 中计算得出（参见取下号时的方程 (C.12)），这使我们能够求出积分常数 C_4,

$$\begin{aligned} C_4 = \frac{b_{1,-1}}{32}\Big(&\Xi_2^2 - 16\alpha\Xi_2 - 72\varkappa\Xi_2 - 14\Xi_2 \\ &+ 48\alpha(4\varkappa - 1) - 2000\varkappa^3 - 1892\varkappa^2 - 168\varkappa + 81\Big). \end{aligned} \tag{3.32}$$

将方程 (3.32) 给出的 C_4 的值代入方程 (3.27)，并将所得的关于 $A_4(x)$ 的公式分-∞解为部分分式，可得

$$\begin{aligned} \overset{\infty}{A}_4(x) = -\frac{1}{b_{1,-1}^4}\Bigg(&\frac{(\varkappa+1)^2}{432}b_{1,-1}^6x^6 + \frac{\varkappa+1}{288}\big(\Xi_2 + 24\alpha + 140\varkappa + 107\big)b_{1,-1}^5x^5 \\ &+ \frac{1}{32}\big(\Xi_2^2 + (16\alpha + 168\varkappa + 94)\Xi_2 + 144\alpha(4\varkappa+1) + 2000\varkappa^3 + 8732\varkappa^2 \\ &+ 5824\varkappa + 493\big)b_{1,-1}^3x^3 + \frac{3}{2}\big(\Xi_2^2 + (8\alpha + 116\varkappa + 30)\Xi_2 + 24\alpha(10\varkappa+3) \\ &+ 1000\varkappa^3 + 4370\varkappa^2 + 2108\varkappa + 247\big)b_{1,-1}x^2 + \frac{81}{8}\big(3\Xi_2^2 + (16\alpha + 292\varkappa + 42)\Xi_2 \\ &+ 48\alpha(10\varkappa+3) + 2000\varkappa^3 + 9444\varkappa^2 + 3484\varkappa + 511\big)b_{1,-1}x + 432\big(\Xi_2^2 \\ &+ (4\alpha + 88\varkappa + 7)\Xi_2 + 12\alpha(10\varkappa+3) + +500\varkappa^3 + 2562\varkappa^2 + 742\varkappa + 133\big) \\ &- \sum_{n=1}^{4}\frac{\nu_n}{(1 - b_{1,-1}x/6)^n}\Bigg), \end{aligned} \tag{3.33}$$

其中

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{135}{4}(25\Xi_2^2 + (80\alpha + 2060\varkappa + 78)\Xi_2 + 240\alpha(10\varkappa+3) \\ &\quad + 10000\varkappa^3 + 55452\varkappa^2 + 12692\varkappa + 2773), \\ \nu_2 &= -\frac{27}{4}(91\Xi_2^2 + (176\alpha + 6692\varkappa - 246)\Xi_2 + 528\alpha(10\varkappa+3) \\ &\quad + 22000\varkappa^3 + 153012\varkappa^2 + 14012\varkappa + 6943), \\ \nu_3 &= 27(9\Xi_2^2 + (8\alpha + 596\varkappa - 62)\Xi_2 + 24\alpha(10\varkappa+3) \\ &\quad + 5(200\varkappa^3 + 2256\varkappa^2 - 188\varkappa + 87)), \\ \nu_4 &= -\frac{81}{2}(\Xi_2 + 30\varkappa - 5)^2. \end{aligned}$$

∞现在将方程 (3.33) 给出的 $A_4(x)$ 在 $x = 0$ 处展开为泰勒级数，可重现方程 (3.29)–(3.31) 中给出的前四个偏移系数；注意，系数 ν_k 满足关系

$$\nu_1 + 5\nu_2 + 15\nu_3 + 35\nu_4 = 0. \tag{3.34}$$

由此可得系数 $a_{4,\,0} = 0$。将泰勒展开式的系数与定义 $A_k(x)$ 的展开式中对应的系数进行比较（见方程 (3.8)

对于 $k=4$，在幂次 x^6 处，我们得到最后一个偏移系数，

$$\begin{aligned} a_{6,-2} = &-\frac{a_{1,-1}^2}{864\Theta^4}\Big(\Xi_2^2-(8\alpha-4\varkappa+26)\Xi_2 \\ &-24\alpha(10\varkappa+3)-1000\varkappa^3-1990\varkappa^2-1408\varkappa-171\Big). \end{aligned} \tag{3.35}$$

公式 (3.35) 与在 [9] 中得到的$a_{6,\,-2}$ 的公式一致（参见符号取较低选项时列表 (C.13) 中最后一个方程） [9] 。对于 $k=4$的展开式 (3.8) 中其余的系数，我们得到一般公式

$$a_{n,4-n} = -\frac{a_{1,-1}^{n-4}}{6^n\Theta^4}\sum_{l=1}^{4}\binom{n+l-1}{n}\nu_l, \qquad n\geqslant 7. \tag{3.36}$$

注3.1。 展开式 (3.1) 由其最先出现的非平凡系数$a_{1,\,1}$ 和 $a_{1,\,-1}$ 以及方程 (1.4) 的系数唯一确定。特别地，这一事实意味着系数 $a_{k,\,j}$具有如下对称性质：系数 $a_{k,\,j}$ 之间的任何关系，在同时将该关系中涉及的所有系数的第二个下标 j 替换为 $-j$，并将符号 i、 α 和 $\varkappa$（若它们出现在该关系中）分别替换为 –i、 $-\alpha$ 和 $-\varkappa$后，仍然成立。例如，将这一对称性应用于方程 (3.14)，可证明

$$a_{n,n} = \frac{na_{1,1}^n}{6^{n-1}}. \tag{3.37}$$

根据上文提出的对称原理，方程 (3.19) 在应用对称变换后保持不变。作为应用这一对称原理的一个不那么初等的例子，我们可以借助方程 (3.30) 得到 $a_{3,\,-1}$ 的显式公式，

$$\begin{aligned} a_{3,-1} &= -\frac{\varkappa}{8a_{1,1}\Theta^4}(3\alpha^2+24\varkappa\alpha+30\varkappa^2+12\alpha+80\varkappa-3) \\ &= -\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}a_{1,-1}}{6^3(\varepsilon b)^{1/3}}(3\alpha^2+24\alpha\varkappa+30\varkappa^2+12\alpha+80\varkappa-3), \end{aligned} \tag{3.38}$$

这与相应的公式 (C.10) [9] 一致。

请注意，可以不用变量 $x(\tau)$ 和 $y(\tau)$（参见方程 (3.6)），而改为定义对称变量 $\tilde{x}(\tau)$ 和 $\tilde{y}(\tau)$，

$$\begin{aligned} \tilde{x}(\tau) &:= \theta(\tau)^{-1/2}\tilde{w}^{-1} = \Theta^{-1}\tau^{-1/3}\tau^{2\varkappa/3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\tau)}, \\ \tilde{y}(\tau) &:= \tilde{w} = w^{-1} = \tau^{-2\varkappa/3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(\tau)}, \end{aligned} \tag{3.39}$$

并对另一个关于系数无限序列 $a_{k,\,j}$ 的超生成函数重复类似的构造，但取 $j\to+\infty$。■

3.2 共轭展开

下面考虑与展开式 (3.7) 共轭的展开式的构造。注意，方程 (3.11) 在依次施加以下两个变换后保持不变：(i) $x\to y$, $\varkappa\to\tilde{\varkappa}-1/2$ 和 (ii) (i $\alpha,\tilde{\varkappa}$) $\to$(–i $-\alpha,-\tilde{\varkappa}$)（见注3.1）。将 $\varkappa$ 平移 $1/2$ 不应令人困惑，因为变量 x 和 y 的定义并不完全对称（定义 (3.6) 中的因子 $\tau^{-1/3}$ ）。因此，若在方程 (3.11) 中将 $\overset{\infty}{A}{}_{\infty}$ $_{\infty}$ 代入展开式 (1.3)，并为 $B_0(y) = A_0(x)|_{x=y}$ 选取一般有理解，那么

∞其余生成函数 $B_k(y)$，$k \geqslant 1$ 将与相应的函数∞$A_k(x)|_{x=y,\varkappa=\tilde{\varkappa}}$ 重合。用此方法为函数 ∞ ∞$B_k(y)$ 构造的超生成函数，等价于超生成函数 $A(x,y)$：参数 $\tilde{\varkappa}$ 的含义与原参数 $\varkappa$ 相同，只是该参数的记号以及代入 $x \leftrightarrow y$ 有所不同。然而，这些超生成函数并不相同，因为∞新的超生成函数是关于 x 的偶函数，而函数 $A(x,y)$ 是关于 y 的偶函数。因此，上述提出的"B-展开式"的构造并不与"A-展开式"共轭。

共轭 ∞展开式由截断有理解构造而成，适用于 $A(x,y)$ ，

$$\overset{\infty}{B}_0(y) = 1. \tag{3.40}$$

对于 $\overset{\infty}{B}_1(y)$，可得到线性常微分方程：$y\frac{\mathrm{d}^2}{y^2}\overset{\infty}{B}_1\mathrm{d}(y) - \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}}{y}\overset{\infty}{B}_1(y) = 0$，因此

$$\overset{\infty}{B}_1(y) = b_{1,1}y^2 + b_{1,-1}, \tag{3.41}$$

其中 $b_{1,\pm1} \in \mathbb{C}$ 与前一小节中引入的相应参数相同。关于 $B_2(y)$ 的方程为

$$2y^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}\overset{\infty}{B}_2(y) - 6y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\overset{\infty}{B}_2(y) + 6\overset{\infty}{B}_2(y) = 2b_{1,1}^2y^4 + (\mathrm{i}\alpha - 4b_{1,1}b_{1,-1})y^2 + 2b_{1,-1}^2, \tag{3.42}$$

因此，通解是一个多项式

$$\overset{\infty}{B}_2(y) = C_4y^3 + C_3y + \frac{b_{1,1}^2}{3}y^4 - \frac{1}{2}(\mathrm{i}\alpha - 4b_{1,1}b_{1,-1})y^2 + \frac{b_{1,-1}^2}{3}, \tag{3.43}$$

其中 $C_3, C_4 \in \mathbb{C}$ 是待确定的积分常数。继续这一∞过程，可得到函数 $B_3(y)$ 满足的线性二阶常微分方程:

$$\begin{gathered}3y^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}\overset{\infty}{B}_3(y) - 15y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\overset{\infty}{B}_3(y) + 24\overset{\infty}{B}_3(y) = \\ 2b_{1,1}^3y^6 + 2(3\mathrm{i}\varkappa + b_{1,1}b_{1,-1})(b_{1,1}y^2 + b_{1,-1})y^2 \\ +2b_{1,-1}^3 + 6(C_4y^2 - C_3)(b_{1,1}y^2 - b_{1,-1})y,\end{gathered}$$

其通解如下，

$$\begin{gathered}\overset{\infty}{B}_3(y) = C_6y^4 + C_5y^2 + \frac{1}{3}(3\mathrm{i}\varkappa + b_{1,1}b_{1,-1})(b_{1,1}y^2 - b_{1,-1})y^2\ln(y) \\ +\frac{b_{1,1}^3}{12}y^6 - \frac{1}{6}(3\mathrm{i}\varkappa + b_{1,1}b_{1,-1})(b_{1,1}y^2 + b_{1,-1})y^2 + \frac{b_{1,-1}^3}{12} \\ +\frac{2C_4b_{1,1}}{3}y^5 + 2(C_4b_{1,-1} + C_3b_{1,1})y^3 + \frac{2C_3b_{1,-1}}{3}y,\end{gathered} \tag{3.44}$$

其中 $C_5, C_6 \in \mathbb{C}$ 是积分常数。有理性条件得出关系式

$$3\mathrm{i}\varkappa + b_{1,1}b_{1,-1} = 0, \tag{3.45}$$

以便

$$\begin{gathered}\overset{\infty}{B}_3(y) = \frac{b_{1,1}^3}{12}y^6 + \frac{2}{3}C_4b_{1,1}y^5 + C_6y^4 \\ +2(C_4b_{1,-1} + C_3b_{1,1})y^3 + C_5y^2 + \frac{2}{3}C_3b_{1,-1}y + \frac{b_{1,-1}^3}{12}.\end{gathered} \tag{3.46}$$

∞此时，函数 $B_2(y)$ 取决于两个复参数， C_3 和 C_4，而∞函数 $B_3(y)$ 取决于四个复参数， C_3、 C_4、 C_5和 C_6。下面说明确定这些参数的算法如何运作。一般而言， $n \geqslant 4$ 对应的∞函数 $B_n(y)$ 的线性常微分方程为

$$\begin{aligned} y^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} \overset{\infty}{B}_n(y) - (2n-1) y \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \overset{\infty}{B}_n(y) + (n^2-1) \overset{\infty}{B}_n(y) \\ = P_{2n}(y; b_{1,-1}, b_{1,1}, C_{2n-5}, C_{2n-4}, C_{2n-3}, C_{2n-2}), \end{aligned} \tag{3.47}$$

其中， $P_{2n}(y;b_{1,-1},b_{1,1},C_{2n-5},C_{2n-4},C_{2n-3},C_{2n-2})$是关于 y 的 $2n$次多项式，是关于两个变量$b_{1,-1}$ 的 n 次多项式，并且是参数 $C_k,k=2n-5,2n-4,2n-3,2n-2$,[6] 的线性函数；这些参数在对相应函数 B_{n-2}和 B_{n-1}的∞ ∞线性常微分方程积分时出现，尚未确定。方程（3.47）的齐次部分的通解 $B_n(y)$为，

$$\overset{\infty}{B}{}_n^{hom} = C_{2n} y^{n+1} + C_{2n-1} y^{n-1}. \tag{3.48}$$

方程（3.47）的通解可写为

$$\begin{aligned} \overset{\infty}{B}{}_n^{gen}(y) = \overset{\infty}{B}{}_n^{hom}(y) &+ Q_{2n}(y; b_{1,-1}, b_{1,1}, C_{2n-5}, C_{2n-4}, C_{2n-3}, C_{2n-2}) \\ &+ L_1(b_{1,-1}, b_{1,1}, C_{2n-5}, C_{2n-4}) y^{n+1} \ln(y) \\ &+ L_2(b_{1,-1}, b_{1,1}, C_{2n-5}, C_{2n-4}) y^{n-1} \ln(y), \end{aligned} \tag{3.49}$$

其中， $Q_{2n}(y;b_{1,\,-1},\ b_{1,\,1},\ C_{2n-5},\ C_{2n-4},\ C_{2n-3},\ C_{2n-2})$是与 $P_{2n}(y;b_{1,\,-1},\ b_{1,\,1},\ C_{2n-5},\ C_{2n-4},\ C_{2n-3},\ C_{2n-2})$同类型的多项式函数，
$L_k(b_{1,\,-1},\ b_{1,\,1},\ C_{2n-5},\ C_{2n-4})$，$k=1,\ 2$，是 C_{2n-5}和 C_{2n-4}的线性函数。为简便起见，我们记 $L_k := L_k(b_{1,\,-1},\ b_{1,\,1},\ C_{2n-5},\ C_{2n-4})$。

对于 $n=2k+2$、 $k\in\mathbb{N}$，可以证明

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{6}\left(2b_{1,1}^2 C_{4k-1} + \big(2b_{1,1}b_{1,-1} - 3\mathrm{i}(2k-1)\big) C_{4k}\right), \\ L_2 &= -\frac{1}{6}\left(2b_{1,-1}^2 C_{4k} + \big(2b_{1,1}b_{1,-1} + 3\mathrm{i}(2k-1)\big) C_{4k-1}\right). \end{aligned} \tag{3.50}$$

对于 $n=2k+3$、 $k\in\mathbb{N}$，可得

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{3}\left(b_{1,1}^2 C_{4k+1} + \big(b_{1,1}b_{1,-1} - 3\mathrm{i}k\big) C_{4k+2}\right) + b_{1,1} F_{2k}^1(\varkappa, \alpha), \\ L_2 &= -\frac{1}{3}\left(b_{1,-1}^2 C_{4k+2} + \big(b_{1,1}b_{1,-1} + 3\mathrm{i}k\big) C_{4k+1}\right) + b_{1,-1} F_{2k}^2(\varkappa, \alpha), \end{aligned} \tag{3.51}$$

其中 $\varkappa$在方程（3.45）中定义，而 $F_{2k}^l(\varkappa,\ \alpha)$、 $l=1,\ 2$是两个变量$\varkappa$ 和 α 的 $2k$次多项式。

∞现在我们可以描述构造多项式 $B_n(y)$ 的算法。函数 $B_n(y)$ 依赖于三对待确定的复参数： C_{2n}, C_{2n-1}, C_{2n-2}, C_{2n-3}, 以及C_{2n-4}, C_{2n-5}。通过令对数项的

[6] 事实上，对于多项式 $P_8(y;\ \ldots)$，这一说法并不成立；相应地，对于多项式$Q_8(y;\ \ldots)$（见下文方程（3.49）中的 $n=4$），这些多项式的 y^6项和 y^2项的系数分别含有关于 C_3^2和 C_4^2的二次依赖关系。这种情况不会给超生成函数的构造带来任何问题。

系数为零（见方程 (3.49)），我们发现，下标最小的一对参数 C_{2n-4}, C_{2n-5} 是两个线性方程组 $L_1 = 0$ 和 $L_2 = 0$ 的解，其行列式非零，因此它们可以被唯一确定。由此，我们得到一个多项式 $B_n(y)$，它依赖于两对未定参数： C_{2n}, C_{2n-1} 以及$\infty C_{2n-2}, C_{2n-3}$。这又意味着，多项式 $B_{n-1}(y)$ 依赖于一对参数 C_{2n-2}, C_{2n-3}，而多项式 $B_{n-2}(y)$ 则完全确定。因此，通过数学归纳法，可以证明多项式序列 $B_n(y)$，$n \in \mathbb{N}$ 的存在唯一性。

∞关于多项式 $B_n(y)$ 的构造，需要作出两点重要说明。

注3.2。 方程 (3.50) 是齐次的，因此 $C_{4k-1} = C_{4k} = 0$ 对于 $k \in \mathbb{N}$，因为这些方程中的非齐次项只能作为以下乘积的∞系数的线性组合出现：由 $B_m(y)$ 多项式的单项式与 $m < n$ 相乘所得的乘积中含有奇数个∞奇数次单项式，但 $B_m(y)$ 多项式中不存在此类单项式，这一点可以通过数学归纳法加以证明。这一观察证实∞了 $A_{2j-1}(x) = 0$ （参见方程 (3.26) 上方的段落）。
■

注释 3.3。

$$a_{n,1} = C_{2n}\Theta^{-n}, \quad a_{n,-1} = C_{2n-1}\Theta^{-n}, \qquad n \geqslant 2. \tag{3.52}$$

因此，由注3.2可知， $a_{2k,\ 1} = a_{2k,\ -1} = 0$ 对于 $k \in \mathbb{N}$。令 $n = 2k - 1$，我们得到系数 $a_{2k+1,\ \pm 1}$，它们是构造生成∞函数 $A_{2k}(x)$ 的关键系数，可通过系数 C_{4k+2} 和 C_{4k+1} 计算得到。
■

3.3 一般解的渐近性应用： $\varkappa \neq 0$

本小节旨在说明，在对参数施加适当限制的条件下，前一小节构造的超生成函数可以作为解 $u(\tau)$ 的渐近展开。当然，我们在第 3.1 小节一开始讨论的是方程 (1.4) 的一般解的渐近展开，而在这里，我们将后者的展开式解析延拓到参数的新取值。

本节考虑第 3.1 小节构造的展开式，但针对的是注3.1中定义的对称变量 $\tilde{x}(\tau)$ 和 $\tilde{y}(\tau)$。经过注3.1所述的对称变换后，前一小节中针对变量 $x(\tau)$ 和 $y(\tau)$ 构造的所有公式，对变量 $\tilde{x}(\tau)$ 和 $\tilde{y}(\tau)$ 仍然成立。我们转而使用对称变量，是因为希望与 [9].[7] 中得到的渐近公式完全对应。

考虑 ∞关于对称的（按注3.1的含义） $A(x,\ y)$超生成函数

$$\overset{\infty}{\tilde{A}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{y}^k \overset{\infty}{\tilde{A}}_k(\tilde{x}), \tag{3.53}$$

并将由方程 (3.39) 定义的 $\tilde{x} = \tilde{x}(\tau)$ 和 $\tilde{y} = \tilde{y}(\tau)$ 代入其中，结果得到一个依赖于 τ 的展开式，我们将把它视为函数 $u(\tau)$ 在与原渐近展开 (3.1) 相同的定义域 Ω 中的渐近展开（见方程 (3.3)）。

[7] 这些公式关于变量 $x(\tau)$和 $y(\tau)$的公式也可用于定义正确的渐近行为，这些渐近行为 is 在一组不同的参数区域内有效（见小节 3.4。）

迄今提出的渐近展开式的首项为

$$\overset{\infty}{\tilde{A}}_0(\tilde{x}(\tau)) = 1 + \frac{b_{1,1}\tilde{x}(\tau)}{\left(1 - b_{1,1}\tilde{x}(\tau)/6\right)^2} = 1 - \frac{3}{2\sin^2(\frac{1}{2}\vartheta(\tau))}, \tag{3.54}$$

$$\vartheta(\tau) = \theta(\tau) - \mathrm{i}(\varkappa - 1/2)\ln\theta(\tau) - \mathrm{i}\ln\left(a_{1,1}/6\right) + \mathrm{i}(\varkappa - 1/2)\ln(\Theta^2), \tag{3.55}$$

其中，我们利用注3.1中定义的对称性处理方程 (3.13)。注意，由对方程 (3.14) 应用对称性可得 $b_{1,1} = \Theta a_{1,1}$，其中 $n = 1$。

公式 (3.54) 和 (3.55) 与文献 [9], 中的相应公式 (C.26) 和 (C.28) 一致（相差单值化数据的参数化方式 $a_{1,1}$）；这些公式给出了区域 $0 < \mathrm{Re}\,(\varkappa) < 1$.[8] 中渐近行为 $u(\tau)$ 的首项。此时，我们对参数 $\varkappa$ 尚无限制；下文将根据展开式 (3.53) 是 $u(\tau)$ 的渐近展开这一要求，确定这些限制。

首先考虑 $\tilde{x}(\tau) \to 0$ （或 $\mathcal{O}(1)$）当 $\tau \to \infty$ 时的情形，则第一个方程∞意味着 Re (3.39) $\varkappa \leqslant 1/2$。若 Re $\varkappa < 1/2$，则当 $\tilde{x} \to 0$ 时，$\tilde{A}_{2k}(\tilde{x}) = \mathcal{O}(\tilde{x}^k)$；对于 $k = 0$、1 和 2，这一事实分别由方程 (3.13)、(3.18) 和 (3.28) 得出。若 Re $\varkappa = 1/2$∞˜($\tilde{x} = \mathcal{O}(1)$)，则方程 (3.13)、(3.22) 和 (3.33) 意味着 $A_{2k}(\tilde{x}(\tau))$、$k = 0$、1、2 是∞在 Ω 中关于 τ 的有界函数。[9,10] 为确认上述关于 $k \in \mathbb{N}$ 时 $\tilde{A}_{2k}(\tilde{x}(\tau))$ 的行为，必须对∞˜序列 $A_{2k}(\tilde{x})$ 的递推关系应用数学归纳法；该递推关系可通过将展开式 (3.7) 代入偏微分方程 (3.11) 得到。现在，我们可以得到一个条件：将 $\tilde{x}(\tau)$ 和 $\tilde{y}(\tau)$ 分别代入 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$ 后，展开式 (3.53) 定义一个渐近级数，

$$\begin{aligned}\frac{(\tilde{y}(\tau))^{2k+2}\,\overset{\infty}{\tilde{A}}_{2k+2}(\tilde{x}(\tau))}{(\tilde{y}(\tau))^{2k}\,\overset{\infty}{\tilde{A}}_{2k}(\tilde{x}(\tau))} &= \mathcal{O}\left((\tilde{y}(\tau))^2\tilde{x}(\tau)\right)\\ &= \mathcal{O}\left(\tau^{-1/3-2\varkappa/3}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}\,\varkappa > -\frac{1}{2}.\end{aligned} \tag{3.56}$$

因此，我们看到，对于 Re $\varkappa \in (-1/2, 1/2]$，$\tilde{x} = \tilde{x}(\tau)$ 和 $\tilde{y} = \tilde{y}(\tau)$ 的展开式 (3.53) 定义了一个渐近级数。我们再施加一项要求，即第二个方程 (3.54) 的分母中含有 $\sin^2\left(\frac{1}{2}\vartheta(\tau)\right)$ 的项是该渐近级数的首项，也就是说，

它应该相对于级数的第二项“显现”出来，即 $(\tilde{y}(\tau))^2$ $\overset{\infty}{\ }A_2(\tilde{x}(\tau))$,

$$(\tilde{y}(\tau))^2\,\overset{\infty}{\tilde{A}}_2(\tilde{x}(\tau)) = o\big(\tilde{x}(\tau)\big) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{O}\big((\tilde{y}(\tau))^2\big) = o(1) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}\,\varkappa > 0. \tag{3.57}$$

考虑 $\tilde{x}(\tau)$ 增大的情形。就参数 $\varkappa$ 而言，这意味着 Re $\varkappa >$∞$1/2$。此时，$\tilde{A}_{2k}(\tilde{x}(\tau)) = \mathcal{O}((x(\tau))^{3k})$。对于 $k = 0$、1 和 2，这分别可由显式公式 (3.13)、(3.22) 和 (3.33) 得出。对于一般的 $k \in \mathbb{N}$，可以通过数学归纳法予以验证；此处将证明留给感兴趣的读者。因此，

[8] 通过单值化数据对 $a_{1,1}$ 进行参数化的公式由 [9] 中的方程 (C.8) 给出。∞[9] 回想一下，$\tilde{A}_{2k-1}(\tilde{x}(\tau)) = 0$, $k =$∈ $\mathbb{N}$，见注3.2。[10]如果 $\varkappa = 1/2$，那么适当选择 $a_{1,1}$ 后，函数 sin 的分母中可能会出现一个零点的无限序列 τ_n，$\vartheta(\tau_n) = 2\pi n$，对应于这些零点的是方程 (3.54)。对于与此选择的 $a_{1,1}$ 相对应的解，必须重新定义定义域 Ω（见方程 (3.3)），令 $\Omega^* = \Omega \setminus \cup C_n(\delta)$, $C_n(\delta) = |\vartheta(\tau) - \vartheta(\tau_n)| < \delta < c$；这种区域有时称为奶酪状区域。

将 $\tilde{x} = \tilde{x}(\tau)$ 和 $\tilde{y} = \tilde{y}(\tau)$ 代入后，要求展开式 (3.53) 定义一个渐近级数，即：

$$\begin{aligned}\frac{(\tilde{y}(\tau))^{2k+2}\overset{\infty}{\tilde{A}}_{2k+2}(\tilde{x}(\tau))}{(\tilde{y}(\tau))^{2k}\overset{\infty}{\tilde{A}}_{2k}(\tilde{x}(\tau))} &= \mathcal{O}\left((\tilde{y}(\tau))^2(\tilde{x}(\tau))^3\right) \\ &= \mathcal{O}\left(\tau^{-1/3+2(\varkappa-1)/3}\right) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Re}\varkappa < \frac{3}{2}.\end{aligned} \tag{3.58}$$

若要使第二个方程 (3.54) 分母中的项 $\sin^2\left(\frac{1}{2}\vartheta(\tau)\right)$ 决定渐近级数的首项，则应加强这一条件；要使该项显著大于渐近级数的第二项，意味着

$$(\tilde{y}(\tau))^2\overset{\infty}{\tilde{A}}_2(\tilde{x}(\tau)) = o\big(1/\tilde{x}(\tau)\big) \quad \Rightarrow \quad (\tilde{y}(\tau))^2(\tilde{x}(\tau))^4 = o(1) \quad \Rightarrow \tag{3.59}$$

$$-\frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\operatorname{Re}\varkappa < 0, \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Re}\varkappa < 1. \tag{3.60}$$

上述研究可总结如下：将 $\tilde{x} = \tilde{x}(\tau)$ 和 $\tilde{y} = \tilde{y}(\tau)$ 代入形式展开 (3.53) 后，当 $\operatorname{Re}\varkappa \in (-1/2,\ 3/2)$ 时，它定义了一个渐近级数。对于 $\operatorname{Re}\varkappa \in (-1/2,\ 1/2)$，该级数（级数 (3.1)）相同，因此对于这些 $\varkappa$ 的取值，两个级数是等价的。从实际角度看，当 $\operatorname{Re}\varkappa \in (-1/6,\ 1/6)$ 时，渐近级数 (3.1) 对解的近似效果优于由展开式 (3.53) 定义的渐近级数；而当 $\operatorname{Re}\varkappa \in (1/6,\ 1/2)$ 时，后一个级数则“表现”得更好。当然，这些区间的长度是约定俗成的，因为它也取决于其他参数的取值。因此，由展开式 (3.53) 定义的渐近级数可视为关于参数 $\varkappa$ 的渐近级数 (3.1) 在带 $\operatorname{Re}\varkappa \in [1/2, 3/2)$ 上的解析延拓。

此外，若 $\operatorname{Re}\varkappa \in (0,1)$，则 $A_0(\tilde{x}(\tau))$ 由方程 (3.54) 给出，是渐近级数中最大的两项之和。在 [8] 中已证明，对于任意给定的 $\varkappa$，只要 $\operatorname{Re}\varkappa \in (0,1)$ 且 $a_{1,1} \in \mathbb{C}$，就存在唯一的解 $u(\tau)$，其渐近行为的首项与 $A_0(\tilde{x}(\tau))$ 的 $\overset{\infty}{\tilde{A}}$ 相同。渐近级数 $A(\tilde{x}(\tau)\ \tilde{y}(\tau))$ 表示该解的完整渐近级数 $\overset{\infty}{\tilde{A}}$，因为将其代入方程 (1.4) 后，所有项都能由 $A_0(\tilde{x}(\tau))$ 唯一确定。

将 $x = x(\tau)$ 和 $y = y(\tau)$ 代入函数 $A(x, y)$ 后，其中函数 $x(\tau)$ 和 $y(\tau)$ 由方程 (3.6) 定义，从而将渐近级数 (3.1) 关于参数 $\varkappa$ 解析延拓至带 $-3/2 < \operatorname{Re}\varkappa \leqslant -1/2$。该渐近级数等价于由 $A(\tilde{x}, \tilde{y})$ 定义的渐近级数；这两个渐近级数定义了方程 (1.4) 的同一个解 $u(\tau)$。

可以基于第 3.2 小节构造的共轭展开定义（两个等价的）渐近级数；这两种渐近行为表示的是同一个渐近级数 (3.1)。

超生成函数 $\overset{\infty}{A}$ 和 $\overset{\infty}{B}$ 允许我们不必针对参数 $\operatorname{Re}\varkappa$ 的不同范围分别定义解 $u(\tau)$ 的三个不同渐近展开式，而是定义一个对 $\operatorname{Re}\varkappa \in (-3/2,\ 3/2)$ 有效的一致渐近展开式，

$$\begin{aligned}u(\tau) = \frac{\varepsilon(\varepsilon b)^{2/3}}{2}\tau^{1/3}\Bigg(&\sum_{k=0}^{N}(y(\tau))^k\overset{\infty}{A}_k(x(\tau)) + (\tilde{y}(\tau))^k\overset{\infty}{\tilde{A}}_k(\tilde{x}(\tau)) \\ &-(x(\tau))^k\overset{\infty}{B}_k(y(\tau)) + \mathcal{O}\Big((x(\tau))^{N+1}\overset{\infty}{B}_{N+1}(y(\tau))\Big)\Bigg),\end{aligned} \tag{3.61}$$

其中，函数 $x(\tau)$ 和 $y(\tau)$ 由方程 (3.6) 定义，函数 $\tilde{x}(\tau)$ 和 $\tilde{y}(\tau)$ 由方程 (3.39) 定义，函数 $A_k(\tilde{x}(\tau))$ 与函数 $A_k(x(\tau))$ 对称（其含义见注3.1），并且项 $(x(\tau))^k B_k(y(\tau))$ 可以替换为 $(\tilde{x}(\tau))^k \tilde{B}_k(\tilde{y}(\tau))$，因为二者相等。注意，如果令 $N \to \infty$，则方程 (3.61) 将与方程 (3.9) 重合，因为 A 和 B-展开式是共轭的。

当参数 $\varkappa$ 事先未知而是通过计算获得时，渐近级数 (3.61) 便于用于计算机计算。

3.4 截断解的渐近行为

所有具有不规则奇点的 Painlev´e 方程都有所谓的截断解；这是一类特殊解，其渐近行为在无穷远点的某些开扇形区域内由超越级数给出。这些超越级数通过以下方式获得。考虑“正则”通解的渐近级数 (3.1)。它可以通过三种不同方式进行截断：(1) $a_{1,1} = a_{1,-1} = 0$；(2) $a_{1,1} = 0$ 以及 $a_{1,-1} \neq 0$；以及 (3) $a_{1,-1} = 0$ 以及 $a_{1,1} \neq 0$。这种截断意味着，在情形 (1) 中，级数 (3.1) 不含指数为 $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta(\tau)}$ 的项；在情形 (2) 中，缺少指数为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\tau)}$ 的项；而在情形 (3) 中，不含与 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(\tau)}$ 成比例的项。注意，在这三种情形中，参数 $\varkappa = 0$，因此这是截断级数/解的一个特征性质。

现在更仔细地考察截断级数。第3.1和第3.2小节中给出的形式展开构造方法同样适用于截断展开。我们来考虑情形（1）。在这种情况下，必须将所有公式 $a_{1,\pm1}\Theta = b_{1,\pm1} = 0$ 和 $\varkappa = \mathrm{i}b_{1,1}b_{1,-1}/3 = 0$ 代入（参见∞ ∞方程（3.45））。此时，展开式 $A(x,y)$和 $B(x,y)$ 相同。在这些展开式的每个系数中，考虑条件 $b_{1,\pm1} = 0$ 后，只剩下一项；具体而言，在生成函数 $\overset{\infty}{A}_k(x)$中，这一项与 x^k成正比；在生成函数 $\overset{\infty}{B}_k(y)$中，则与 y^k成正比。由于这些项以组合 $y^k \overset{\infty}{A}_k(x)$和 $x^k \overset{\infty}{B}_k(y)$及 $x(\tau)y(\tau) = \Theta^{-1}\tau^{-1/3}$的形式出现在相应的展开式中，因此两个展开式应具有相同的渐近展开。当然，通过对通解的展开式作相应的化简来求出截断渐近展开的系数，相当繁琐。利用第3.2小节中介绍的算法从头推导这一展开式要容易得多。注意，在这种情况下，所有生成函数 $\overset{\infty}{B}_{2n-1}(y) \equiv 0$。结果可表示为以下渐近展开

$$\overset{\infty}{A}_{trunc}(x(\tau),y(\tau)) = \overset{\infty}{B}_{trunc}(x(\tau),y(\tau)) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}\Theta^{-2n}\tau^{-2n/3}. \tag{3.62}$$

该渐近级数的前 10 个系数为：

$$\begin{gathered}
b_2 = -\frac{\mathrm{i}\alpha}{2}, \quad b_4 = 0, \quad b_6 = -\frac{\mathrm{i}\alpha(\alpha^2-12)}{24}, \quad b_8 = \frac{\alpha^2(\alpha^2-12)}{48}, \\
b_{10} = \frac{3\mathrm{i}\alpha(\alpha^2-12)}{8}, \quad b_{12} = \frac{\alpha^2(\alpha^2-12)(\alpha^2-66)}{144}, \\
b_{14} = \frac{5\mathrm{i}\alpha(\alpha^2-12)(\alpha^4-12\alpha^2-2160)}{1152}, \quad b_{16} = -\frac{3\alpha^2(\alpha^2-12)(2\alpha^2-99)}{16}, \\
b_{18} = \frac{7\mathrm{i}\alpha(\alpha^2-12)(11\alpha^6-2208\alpha^4+24912\alpha^2+2721600)}{41472}, \\
b_{20} = -\frac{\alpha^2(\alpha^2-12)(13\alpha^6-150\alpha^4-294264\alpha^2+13055904)}{10368}.
\end{gathered} \tag{3.63}$$

结合 Wasow 定理（见 [23]第33章）与等单值变形结果[7]，可以证明，在附加假设 $\tau^{1/3} > 0$ 对 $\tau > 0$成立的条件下，方程 (1.4) 存在唯一一个解，其在扇形域$|\arg(\tau^{2/3})| < \pi$内具有渐近展开式 (3.62)。我们将此解记为 $u_0(\tau)$。利用此解，我们定义解 $u_k(\tau)$：$=-u_0(\tau \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} k})$， $k \in \mathbb{Z}$。[11] 这些解的渐近行为由 (3.9) 给出，其中 $\overset{\infty}{A}(x(\tau)\ y(\tau)) = \overset{\infty}{B}_{trunc}(x(\tau \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} k})\ y(\tau \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} k}))$ 由方程 (3.62) 定义（其中 $\tau \to \tau \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} k}$），且位于扇形域$-\pi - 2\pi k/3 < \arg(\tau^{2/3}) < \pi - 2\pi k/3$内。例如，在正实半轴上（$\arg\ \tau = 0$），恰有三个解：$u_k(\tau)$、$k = 0$、$\pm 1$，它们具有情形 (1) 下的截断展开式。[12] 对于 $a = \mathrm{i}n$ ($\alpha = 2\sqrt{3}n$)、$n \in \mathbb{Z}$，函数 $u_k(\tau) = u_{k+3}(\tau)$ 是 $\tau^{1/3}$ 的有理函数，因此，对于参数 α^- 的这些（且仅这些）取值，级数 (3.62) 收敛。对于 $a = 0$、$\pm \mathrm{i}$ ($\alpha = 0, \mp 2\sqrt{3}$)，可以直接从级数 (3.62) 得到这些解，因为系数 B_{2n} $|n| \geq 2$ 与 $\alpha(\alpha^2 - 12)$ 成正比。对于 $a = \mathrm{i}n$，当 $|n| \in \mathbb{N}$ 时，可以通过对解 $a = \alpha = 0$ 依次应用 $|n|$B¨acklund 变换，得到这些解的显式公式。Gromak [4] 发现了关于 $\tau^{1/3}$ 的有理解及其对应的 B¨acklund 变换。这里需要指出，区分 $\tau^{1/3}$ 的不同分支十分重要，这不仅适用于关于 $\tau^{1/3}$ 的有理解，也适用于一般的截断解，因为这些解具有不同的初始数据（以及单值化数据）（见 [9], 推论 4.1）。缺少这些解，就无法完整描述解在无穷远点的渐近行为。我们称这些解为双重截断解。

注3.1中讨论的对称性将类型（2）和（3）的截断相互映射；对于一般展开式，这种对称性将展开式映射到其自身；而对于截断解，这种对称性则是在两个不同的截断展开式之间建立映射。

对一般渐近级数（3.1）进行类型（2）和（3）的截断后得到的渐近级数，在注3.1中讨论的对称性作用下相互映射；回想一下，对于一般级数，这种对称性将其映射到自身；而对于截断级数，这种对称性则是在两个不同的截断级数之间建立映射。正因如此，我们可以将针对其中一个截断级数得到的任何公式或结果，转换为另一个截断级数对应的公式或结果。因此，我们将详细讨论类型（2）的截断。

首先要注意，类型（2）的截断条件意味着 $a_{k,\ j} = 0$, $k,\ \ j \in \mathbb{N}$。该条件意味着相应的级数依赖于一个参数 $a_{1,\ -1}$，且不含与 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\tau)}$ 成正比的项。因此，若我们施加条件 $\mathrm{Im}\ \theta(\tau) \leq c$, 其中 $c \geq 0$ 为某个值，则该级数是渐近级数。回想一下，一般渐近级数是在粗射线 $|\mathrm{Im}\ \theta(\tau)| \leq c$ 上讨论的。指数 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(\tau)}$ 在复数域 τ 平面中满足条件 $\mathrm{Im}\ \theta(\tau) < 0$ 的扇形域内衰减。该条件在复数域 τ 平面中定义了扇形域 $\Omega_0^- := -\pi < \arg(\tau^{2/3}) < 0$。扇形域 Ω_- 的边界是指数振荡 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(\tau)}$ 的（粗）射线。若我们还要应用 Wasow 理论（ [23] 的第 34 和第 35 节），就必须将原渐近级数（3.1）重排为伸缩级数，即将其重新排列为指数级数，

$$u_0^-(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} v_j^-(\tau) \mathrm{e}^{-j\mathrm{i}\theta(\tau)}, \tag{3.64}$$

在 Wasow 理论中，$v_0^-(\tau) = u_0(\tau)$，其中 $u_0(\tau)$ 是上文引入的解，此处我们考虑(1)型截断；而函数 $v_j^-(\tau)$ 被刻画为无限线性常微分方程组的解。在实践层面，函数 $v_j^-(\tau)$ 是通过以下方式得到的

[11] 变换 $u(\tau) \to -u(-\tau)$ 是方程 (1.4) 的对称性。[12] 在 [7] 及这些作者的所有后续论文中，方程 (1.4) 的解均定义在实正半轴（$\arg\ \tau = 0$）上，随后再进行解析延拓。本文沿用这一约定。

依次表示为关于 $\tau^{-1/3}$ 的幂的渐近级数，即只有在获得所有下标为 $k<j$ 的函数 $v_k^-(\tau)$ 后，我们才能构造函数 $v_j^-(\tau)$ 的级数。遵循这一方法，我们得到解的一种表示，其中指数 $\mathrm{e}^{-ji\theta(\tau)}$ 首次出现在位置 $\omega\cdot j+1$，其中 ω 是与自然数集合相对应的超限序数的标准记号。这种截断解的渐近表示称为 超渐近级数。函数 $v_j^-(\tau)$ 的级数是博雷尔可求和的，因此这些函数可以视为相应博雷尔和的逆博雷尔变换，这构成了超渐近级数的另一种处理方法。现在我们可以利用对称性 [11]，并定义级数 $u_k^-(\tau)=-u_0^-(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k}\tau)$，它具有渐近展开，

$$u_k^-(\tau)=-\sum_{j=0}^{\infty}v_j^-(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi k}\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\theta(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi k}\tau)},\qquad k\in\mathbb{Z},\tag{3.65}$$

在扇形域内

$$\Omega_k^-:=-\frac{3}{2}\pi-\pi k<\arg\,\tau<-\pi k.\tag{3.66}$$

为明确记号，我们注意到，对级数 (3.1) 作类型 (3) 的截断，得到超渐近级数

$$u_k^+(\tau)=-\sum_{j=0}^{\infty}v_j^+(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi k}\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\theta(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi k}\tau)},\qquad k\in\mathbb{Z},\tag{3.67}$$

在扇形域内

$$\Omega_k^+:=-\pi k<\arg\,\tau<-\pi k+\frac{3}{2}\pi.\tag{3.68}$$

此处我们不再赘述构造的更多细节，因为这些内容已在文献 [11], 中讨论过；作者证明，在每个扇形域 $\Omega_k^{\pm}$ 中，方程 (1.4) 都存在唯一一个具有相应渐近行为的解。下文中，我们将（稍微滥用一下记号）用与相应超渐近级数相同的方式记这些解，即 $u_k^{\pm}(\tau)$。

作为这一经典理论的应用示例，我们看到，在正实半轴（$\arg\,\tau=0$）上，恰有两个解，其渐近行为分别由超渐近级数 $u_{-1}^-(\tau)$ 和 $u_{+1}^+(\tau)$ 给出；这些解（以及相应的超渐近级数）分别依赖于一个参数 $a_{1,\,-1}$ 或 $a_{1,\,1}$。在 [22] 中，参数用单值化数据表示。

Painlev´e 方程的截断解有一个特殊性质：可以用截断渐近级数 (3.1) 表示这些解，并且该级数不仅在开扇形区域 $\Omega_k^{\pm}$ 内逼近这些解，也在其闭包 $\bar{\Omega}_k^{\pm}$ 内逼近这些解；在表示扇形域边界的（较宽）射线上，截断解呈振荡状态，而非指数衰减。表征截断解的参数 $a_{1,\,-1}$ 或相应地 $a_{1,\,1}$ 在 $\bar{\Omega}_k^{\pm}$ 中相同。这里我们不讨论／使用这一性质，而是专注于这些解的 A/B-展开式。

应用第 3.2 小节的方案，我首先计算了前 13 个多项式 $B_k(y)$ 在截断情形 (2) 中，$a_{1,\,1}=\Theta^{-1}b_{1,\,1}=0$。截断情形中的多项式比一般解对应的多项式简单得多，因此这项计算大约需要 10 分钟。∞ ∞这些多项式是关于 y 的偶函数，且 $\deg\ B_{2n}(y)\ =\deg\ B_{2n+1}(y)\ =2n$。前八个多项式如下：

$$\begin{aligned}&\overset{\infty}{B}_0(y)=1,\quad \overset{\infty}{B}_1(y)=b_{1,-1},\quad \overset{\infty}{B}_2(y)=-\frac{\mathrm{i}\alpha y^2}{2}+\frac{b_{1,-1}^2}{3},\\&\overset{\infty}{B}_3(y)=-\frac{\mathrm{i}(\alpha^2+4\alpha-1)b_{1,-1}y^2}{8}+\frac{b_{1,-1}^3}{12},\end{aligned}\tag{3.69}$$

$$
\begin{aligned}
\overset{\infty}{B}_4(y) =& -\frac{\mathrm{i}(\alpha^2+4\alpha+1/3)b_{1,-1}^2y^2}{12}+\frac{b_{1,-1}^4}{54},\\
\overset{\infty}{B}_5(y) =& -\frac{(\alpha+3)^2(\alpha-1/3)(\alpha-3)b_{1,-1}y^4}{2^7}-\frac{\mathrm{i}(\alpha^2+4\alpha+1/9)b_{1,-1}^3y^2}{2^5}\\
&+\frac{5b_{1,-1}^5}{6^4},\\
\overset{\infty}{B}_6(y) =& -\frac{\mathrm{i}\alpha(\alpha^2-12)y^6}{24}-\frac{(3\alpha^4+16\alpha^3-10\alpha^2-128\alpha-57)b_{1,-1}^2y^4}{2^53^2}\\
&-\frac{\mathrm{i}(\alpha^2+4\alpha-1/6)b_{1,-1}^4y^2}{2^23^3}+\frac{b_{1,-1}^6}{6^4},\\
\overset{\infty}{B}_7(y) =& \mathrm{i}\big(\alpha^6-4\alpha^5-67\alpha^4-152\alpha^3+579\alpha^2+2076\alpha-225\big)\frac{b_{1,-1}y^6}{2^{10}3}\\
&-\Big(9\alpha^4+56\alpha^3+10\alpha^2-328\alpha-\frac{329}{3}\Big)\frac{b_{1,-1}^3y^4}{2^93}\\
&-\mathrm{i}\Big(25\alpha^2+100\alpha-\frac{29}{3}\Big)\frac{b_{1,-1}^5y^2}{2^73^4}+\frac{7b_{1,-1}^7}{6^6}.
\end{aligned}
$$

∞对于由方程 (3.2) 和 (3.6) 定义的 $B_k(y) = B_k(y)$ 和 $x = x(\tau)$ 以及 $y = y(\tau)$ 的展开式 (1.3)（截断解中取 $\nu+1=\varkappa=0$）： $x(\tau)y(\tau) = \Theta^{-1}\tau^{-1/3}$以及 $x(\tau) = \Theta^{-1}\tau^{-1/3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(\tau)}$，与截断渐近级数 (3.1) 完全一致。

现在来考虑 A-展开式 (3.7)。乍看之下，函数 $y(\tau) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\tau)}$ in$\infty\Omega_0^-$不断增大，因此展开式 (3.7) 仅具有形式上的意义。然而，在截断情形下，函数 $A_k(x)$ 与 x^k 成正比，因此展开式的第 k 项 $y^k\overset{\infty}{A}_k(x)$ 在代入 $x = x(\tau)$ 后， $y = y(\tau)$ 的阶为 $\tau^{-k/3}$，当 $\tau\to\infty, \tau\in\Omega_0^-$ 时成立；由此，展开式 (3.7) 实际上是一个渐近级数。因此，为了构造截断情形下的渐近级数，方便起见，可将展开式 (3.7) 改写如下，

$$
\overset{\infty}{A}_{trunc}(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}(yx)^{2k}\left.\frac{\overset{\infty}{A}_{2k}(x)}{x^{2k}}\right|_{\varkappa=0}. \tag{3.70}
$$

∞回忆一下，函数 $A_{2k+1}(x) = 0$，这一点已在注3.2中证明。下面，我们将重点放在构造渐近级数上。对于希望获得截断 B-展开式系数的显式公式的读者，只需将 $\varkappa = 0$ 代入通解系数的相应公式中；参见方程 (3.37)（不包含 $\varkappa$，参见 $B_n(0), n = 0, \ldots\ldots$，方程 (3.69) 中的 6）、(3.25) 和 (3.36)。

现在来考察展开式 (3.70) 中前几项的显式公式。展开式 (3.70) 的第一项是函数 $A_0(x)$，它不依赖于 $\varkappa$，因此与一般情形一样，由同一个方程 (3.13) 给出。不过，下一项会有所简化，

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\overset{\infty}{A}_2(x)}{x^2}\right|_{\varkappa=0} =& -\frac{\mathrm{i}b_{1,-1}x}{12}-\frac{\mathrm{i}\alpha}{2}-6\mathrm{i}-\frac{\mathrm{i}(3\alpha^2+12\alpha-5)}{2(1-b_{1,-1}x/6)^3}\\
&+\frac{3\mathrm{i}(3\alpha^2+12\alpha-13)}{4(1-b_{1,-1}x/6)^2}-\frac{\mathrm{i}(3\alpha^2+12\alpha-53)}{4(1-b_{1,-1}x/6)},
\end{aligned} \tag{3.71}
$$

$$\left.\frac{\overset{\infty}{A}_4(x)}{x^4}\right|_{\varkappa=0} = -\frac{b_{1,-1}x}{48}\left(\frac{b_{1,-1}x}{9}+\frac{3\alpha^2+36\alpha+107}{6}\right.$$
$$-\frac{9\alpha^4+88\alpha^3+234\alpha^2+152\alpha+165}{4(1-xb_{1,-1}/6)^3}+\frac{9\alpha^4+72\alpha^3+114\alpha^2-120\alpha+25}{4(1-xb_{1,-1}/6)^4} \tag{3.72}$$
$$\left.+\frac{9\alpha^4+120\alpha^3+618\alpha^2+1272\alpha+493}{24(1-xb_{1,-1}/6)^2}\right).$$

$$\left.\frac{\overset{\infty}{A}_6(x)}{x^6}\right|_{\varkappa=0} = \frac{\mathrm{i}b_{1,-1}^3x^3}{2^83^4}+\frac{\mathrm{i}(3\alpha^2+36\alpha+85)b_{1,-1}^2x^2}{2^63^4}$$
$$+\frac{\mathrm{i}(3\alpha^4+56\alpha^3+238\alpha^2-328\alpha-2289)b_{1,-1}x}{2^93^2} \tag{3.73}$$
$$-\frac{\mathrm{i}(\alpha^3+18\alpha^2+60\alpha-30)}{24}+\frac{\mathrm{i}}{192}\sum_{k=1}^{5}\frac{\mu_k}{(1-b_{1,-1}x/6)^k},$$

其中

$$\mu_1=\frac{1}{2^3}(3\alpha^6+84\alpha^5+1041\alpha^4+7240\alpha^3+31141\alpha^2+63204\alpha+15383),$$
$$\mu_2=-\frac{1}{2^3}(45\alpha^6+876\alpha^5+7167\alpha^4+31288\alpha^3+81483\alpha^2+116828\alpha+\frac{111787}{3}),$$
$$\mu_3=\frac{1}{2^2}(75\alpha^6+1188\alpha^5+7257\alpha^4+21576\alpha^3+33865\alpha^2+28996\alpha+\frac{24689}{3}),$$
$$\mu_4=-\frac{1}{2}(45\alpha^6+612\alpha^5+2871\alpha^4+5208\alpha^3+2769\alpha^2+540\alpha-\frac{2875}{3}),$$
$$\mu_5=9\alpha^6+108\alpha^5+387\alpha^4+216\alpha^3-645\alpha^2+300\alpha-\frac{125}{3}.$$

按照第 3.1 小节中的方案计算 $\left.\overset{\infty}{A}_6\left(\frac{x}{x^6}\right)\right|_{\varkappa=0}$ 时，有必要计算为此目的在上文给出的多项式 $B_7(y)$ 的∞首项系数。

结合方程 (3.9)、(3.70) 和 (3.6)，我们得到扇形域 Ω_0^- 中截断解的如下渐近级数：

$$u(\tau)\underset{\substack{\tau\to\infty\\ \tau\in\Omega_0^-}}{=}\frac{\varepsilon(\varepsilon b)^{2/3}}{2}\tau^{1/3}\sum_{k=0}^{\infty}\Theta^{-2k}\tau^{-2k/3}\left.\frac{\overset{\infty}{A}_{2k}(x)}{x^{2k}}\right|_{\varkappa=0}, \tag{3.74}$$
$$x=\Theta^{-1}\tau^{-1/3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta^2\tau^{2/3}},$$

其中，缩放参数为 $\Theta=3^{3/4}(\varepsilon b)^{1/6}>0$。渐近级数 (3.74) 比原始的截断渐近级数 (3.1) 复杂得多；还需要进一步研究，以了解该渐近级数是否能带来任何新的实际优势，例如在 Ω_0^- 扇形域的边界附近更好地近似 $u(\tau)$。

4 不规则奇点：椭圆展开

Painlev´ 方程完整“椭圆”渐近展开的显式形式目前尚不清楚。因此，在这种情形下，确认展开式 (1.1) 和 (1.3) 存在困难。近期，关于第三至第五类 Boutroux 型椭圆渐近的广泛研究

由 S. Shimomura [15, 17, 18, 19] 对 Painlev´ 方程进行了研究。这些结果涉及相应渐近行为的首项，以及对修正项的估计。后者应与本节给出的形式构造进行比较。

为简化本节中的构造，我们现在假设 $a = 0$。我们先定义区域 Ω，在其中构造形式展开。令 $\tau = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}$，其中 $\varphi_0 \neq \pi k/2$, $k \in \mathbb{Z}$ 是复 τ 平面内某个固定角度，且 $r \in \mathbb{C}$。另一方面，我们可以用极坐标表示 τ，即 $\tau = |\tau|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，从而 $\mathrm{Re}(r^{2/3}) = |\tau|^{2/3}\cos(2(\varphi - \varphi_0)/3)$，$\mathrm{Im}(r^{2/3}) = |\tau|^{2/3}\sin(2(\varphi - \varphi_0)/3)$。现在，将区域 Ω 定义为一条从无穷远点出发、角度为 $-\varphi_0$的“粗”射线，更准确地说，

$$\Omega := \{\tau : \ |\mathrm{Im}(r^{2/3})| < \delta_0, |r| > \eta_0, \text{ where } \delta_0 > 0 \text{ and } \eta_0 > 0\}. \tag{4.1}$$

本节将讨论两类与模数为 κ 的椭圆 Jacobi 函数相关的函数对 $(x(\tau)\ y(\tau))$。[13]

4.1 椭圆展开：非共轭变量

在三角函数情形中引入的函数 $x(\tau)$、$y(\tau)$（见方程 (3.2) 和 (3.6)）的第一个直接推广形式为

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \Theta^{-1} r^{-1/3}\,\mathrm{dn}(\vartheta(r)/2, \kappa)^{-1/2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\,\mathrm{am}(\vartheta(r)/2,\kappa)}, \\ y(\tau) &= \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,\mathrm{am}(\vartheta(r)/2,\kappa)}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

其中，Θ 在 (3.6) 中定义，且

$$\vartheta(r) := \Theta^2 P r^{2/3} + \vartheta_0, \qquad P, \vartheta_0 \in \mathbb{C}. \tag{4.3}$$

点 r 满足 $\mathrm{dn}(\vartheta(r)/2, \kappa) = 0$，应从这一构造中排除。不过，我们不特别关注这些点，因为可以用 $\mathrm{dn}(\vartheta(r)/2, \kappa)^{+1/2}$ 进行类似的构造，因此 $\mathrm{dn}(\vartheta(r)/2, \kappa) = 0$ 的零点在函数 $u(\tau)$ 的理论中不起任何作用。

定义微分算子 D，它作用于由两个变量 x 和 y 构成的解析函数空间

$$D := \frac{\mathrm{i}P}{x^2 y}\frac{\partial}{\partial y} - \left(\frac{x}{2} + \frac{\mathrm{i}P}{xy^2}\left(1 + \frac{\kappa^2(y^2-1)}{4(4y + \kappa^2(y-1)^2)}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x}. \tag{4.4}$$

考虑以下偏微分方程

$$D^2 \ln \overset{\infty 1}{A}_e = -\frac{p^2}{3x^4y^4\,(1 + \kappa^2(y-1)^2/(4y))}\left(\overset{\infty 1}{A}_e - \frac{1}{\left(\overset{\infty 1}{A}_e\right)^2}\right), \tag{4.5}$$

其中，D在（4.4）中定义，$p = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi_0/3}$，且 $\overset{\infty 1}{A}_e \equiv \overset{\infty 1}{A}_e(x, y)$。[14]如果方程（1.4）的一个解 $u(\tau)$ 可表示为（1.1）的形式，其中 $A_k(x)$ 为有理函数，更确切地说，在椭圆情形中我们采用以下记号

$$u(\tau) = \frac{\varepsilon(\varepsilon b)^{2/3}}{2}\tau^{1/3}\,\overset{\infty 1}{A}_e(x(\tau), y(\tau)), \tag{4.6}$$

[13] 我们沿用 [2] 中对这些函数所采用的记号。[14] 函数 $\overset{\infty 1}{A}_e(x)$ 的记号中使用上标 1，因为在第 4.3 小节中，我们将考虑生成函数 $A_e(x, y)$，它与一种不同的椭圆变量引入方式有关。此外，用于函数 $A_e(x, y)$ 的类似构造，也适用于本小节中考虑的变量 $x(\tau)$、$y(\tau)$。

其中，函数 x（τ）和 y（τ）在方程（4.2）中定义，并且

$$\overset{\infty 1}{A}_e(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}y^k\overset{\infty 1}{A}_{e,k}(x), \tag{4.7}$$

$\infty 1$其中 $A_{e,k}(x)$，$k=0,1,2,\ldots$ 都是 x 的有理函数。我们的首要目标是证明偏微分方程 (4.5) 存在形式解 (4.7)。

∞考虑构造系数 $A_{e,k}(x)$。将展开式 (4.7) 代入方程 (4.5)，把所得表达式按 y 的幂级数展开，并依次令相应系数等于 0，可得到定义系数 $\infty 1$ $\infty 1 A_{e,k}(x)$ 的常微分方程。令项 y^{-4} 的系数等于 0，可得到定义 $A_{e,0}(x)$ 的第一个方程；这是一个非线性常微分方程，经过简单变换后可写为

$$3x\overset{\infty 1}{A}_{e,0}(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\overset{\infty 1}{A}_{e,0}(x)-3x\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\overset{\infty 1}{A}_{e,0}(x)\right)^2+5\overset{\infty 1}{A}_{e,0}(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\overset{\infty 1}{A}_{e,0}(x)=0. \tag{4.8}$$

方程 (4.8) 的通解为

$$\overset{\infty 1}{A}_{e,0}(x)=q\exp(-3c/(2x^{2/3})),\qquad q\in\mathbb{C}\setminus\{0\},\quad c\in\mathbb{C}. \tag{4.9}$$

(4.8) 的唯一有理解为

$$\overset{\infty 1}{A}_{e,0}(x)=q. \tag{4.10}$$

$\infty 1$其余系数 $A_{e,k}(x)$，$k\in\mathbb{N}$ 对应的常微分方程是线性非齐次二阶常微分方程，其非齐次部分是关于 x^2 的多项式；更确切地说，

$$\begin{aligned}P^{2k}\kappa^{2k}q^{2k-1}\Big(&9x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\overset{\infty 1}{A}_{e,k}(x)-3(8k-5)x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\overset{\infty 1}{A}_{e,k}(x)\\&+8k(2k-1)\overset{\infty 1}{A}_{e,k}(x)\Big)=R_k(x,P,p,q,\kappa),\end{aligned} \tag{4.11}$$

其中，多项式 $R_k\in\mathbb{R}[x,P,p,q,\kappa]$ 是关于 x 的偶函数，且 $\deg_x R_k=2\lfloor\frac{2(k-1)}{3}\rfloor$。[15]让我们考虑前几个方程 (4.11)：

(1) $k=1$,

$$P^2\kappa^2q\left(9x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\overset{\infty 1}{A}_{e,1}(x)-9x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\overset{\infty 1}{A}_{e,1}(x)+8\overset{\infty 1}{A}_{e,1}(x)\right)=\frac{64}{3}p^2(q^3-1). \tag{4.12}$$

方程 (4.12) 只有一个特解，即

$$\overset{\infty 1}{A}_{e,1}(x)=\frac{8p^2(q^3-1)}{3P^2\kappa^2q}; \tag{4.13}$$

(2) $k=2$,

$$P^4\kappa^4q^3\left(9x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\overset{\infty 1}{A}_{e,2}(x)-33x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\overset{\infty 1}{A}_{e,2}(x)+48\overset{\infty 1}{A}_{e,2}(x)\right)=.R_2, \tag{4.14}$$

其中

$$R_2=\frac{256}{9}p^2(q^3-1)(3P^2q^2(\kappa^2-2)+2p^2(4q^3-1)),$$

[15] 记号 $\lfloor r\rfloor$ 表示有理数 r 的整数部分。

方程 (4.14) 的一般有理解为

$$\overset{\infty^1}{A}_{e,2}(x) = q_2 x^2 + R_2/(48P^4\kappa^4 q^3), \quad q_2 \in \mathbb{C}; \tag{4.15}$$

(3) $k = 3$,

$$P^6\kappa^6 q^5 \left(9x^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \overset{\infty^1}{A}_{e,3}(x) - 57x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \overset{\infty^1}{A}_{e,3}(x) + 120 \overset{\infty^1}{A}_{e,3}(x)\right) = R_3, \tag{4.16}$$

其中

$$\begin{gathered} R_3 = R_{3,2}x^2 + R_{3,0}, \\ R_{3,2} = \frac{16}{3}P^3q^3\kappa^4\big(3P^3q^2q_2(2-\kappa^2) + 4Pp^2q_2(4q^3-1) + 8\mathrm{i}p^2q(q^3-1)\big), \\ R_{3,0} = \frac{64}{81}p^2(q^3-1)\big(9P^4q^4(23\kappa^4 - 128\kappa^2 + 128) \\ +240P^2p^2q^2(4q^3\kappa^2 - 8q^3 - \kappa^2 + 2) + 32p^4(34q^6 - 26q^3 + 1)\big). \end{gathered} \tag{4.17}$$

方程 (4.16) 的一般有理解可表示为以下形式

$$\overset{\infty^1}{A}_{e,3}(x) = q_4 x^4 + \frac{R_{3,2}x^2}{24P^6\kappa^6q^5} + \frac{R_{3,0}}{120P^6\kappa^6q^5}, \quad q_4 \in \mathbb{C}; \tag{4.18}$$

∞^1我们看到，对于 $k = 1$，2 和 3，$A_{e,\,k}(x)$ 实际上是关于 x^2 的多项式。由于对于∞^1 函数 R_k，可以得到关于 $A_{e,\,m}(x)$ 且具有 $m < k$ 的递推关系，因此可通过数学归纳法证明以下结论：

$$R_k = \sum_{m=0}^{N} R_{k,2m}x^{2m}, \qquad R_{k,2m} = R_{k,2m}(P,p,q,\kappa), \qquad N = \left\lfloor \frac{2(k-1)}{3} \right\rfloor, \tag{4.19}$$

$$\begin{gathered} \overset{\infty^1}{A}_{e,k}(x) = q_{2(N+1)}x^{2(N+1)} + \frac{1}{P^{2k}\kappa^{2k}q^{2k-1}} \sum_{m=0}^{N} \frac{R_{k,2m}}{D_k(m)}x^{2m}, \\ D_k(m) = 4(2k-3m)(2k-3m-1), \end{gathered} \tag{4.20}$$

其中，如果 $D_k(N+1) \neq 0$ 且 $q_{2(N+1)} \in \mathbb{C}$，则为 $q_{2(N+1)} = 0$；如果 $D_k(N+1) = 0$，则为 $q_{2(N+1)} \in \mathbb{C}$。换言之，$q_{2(N+1)} = 0$ 当 $k = 1 + 3l$ 时为 $l \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，否则为 $q_{2(N+1)} \in \mathbb{C}$。

因此，我们构造出了偏微分方程 (4.5) 的一般有理形式解。为了得到方程 (1.4) 的相应解，我们需要选取参数 P、q、κ 和 q_{2n}、$n \in \mathbb{N}$。下面，在方程 (4.21) 中，我们对形式级数进行运算，记号 $\mathcal{O}(x^2)$ 表示所有与 x^2 成正比的项：[16]

$$\begin{aligned} \overset{\infty^1}{A}_{e}(x,y) &= \sum_{k=0}^{\infty} y^k \big(\overset{\infty^1}{A}_{e,k}(0) + \mathcal{O}(x^2)\big) = \sum_{k=0}^{\infty} y^k \overset{\infty^1}{A}_{e,k}(0) + \mathcal{O}(x^2) \\ &= q + \overset{\infty^1}{A}_{e,1}(0) \sum_{k=1}^{\infty} y^k \frac{\overset{\infty^1}{A}_{e,k}(0)}{\overset{\infty^1}{A}_{e,1}(0)} + \mathcal{O}(x^2) = q + \frac{8p^2(q^3-1)}{3P^2\kappa^2q} \sum_{k=1}^{\infty} ky^k + \mathcal{O}(x^2) \end{aligned} \tag{4.21}$$

$$= q + \frac{8p^2(q^3-1)}{3P^2\kappa^2q} \frac{y}{(1-y)^2} + \mathcal{O}(x^2), \tag{4.22}$$

[16]注意，对于 $\tau \to \infty$ $(x(\tau))^2 = \mathcal{O}(\tau^{-2/3})$。

$_{\infty 1}$其中，在方程 (4.21) 中，我们用其表达式 (4.13) 替换了 $A_{e,\ 1}$(0)，并令

$$\overset{\infty 1}{A}_{e,k}(0)/\overset{\infty 1}{A}_{e,1}(0) = k \quad \text{for} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.23}$$

无穷方程组 (4.23) 对参数施加以下条件：

$$\kappa^2 = \frac{(s-1)(s+3)}{(s+1)(s-3)}, \quad \frac{P^2}{p^2} = \frac{2q}{3}\frac{(s-3)}{(s-1)}, \qquad s^2 = 8q^3 + 1. \tag{4.24}$$

代入方程 (4.22)：(1) 关系式 (4.24)；以及 (2) 对于 x 和 y，分别取由方程 (4.2) 定义的变量 x(τ) 和y(τ)；利用椭圆正弦的定义，经过直接化简，并回顾函数 u(τ) 的定义 (4.6)，可得大-τ 渐近行为首项的以下“候选”表达式：

现在，我们得到了函数 u(τ) 在大-τ 时渐近行为首项的“候选”表达式。为此，利用关系式 (4.24)，我们化简公式 (4.22)，

$$\overset{\infty 1}{A}_{e}(x,y) = q + 4\frac{(s-3)}{(s-1)}\frac{qy}{(1-y)^2} + \mathcal{O}(x^2). \tag{4.25}$$

在方程 (4.21) 中分别将 x和 y 替换为由方程 (4.2) 定义的变量 x(τ) 和 y(τ)，并利用椭圆正弦的定义，我们可得 u(τ)（见方程 (4.6)）的以下渐近行为，

$$u(\tau) \underset{\tau\to\infty,\arg\tau=\varphi_0}{=} \frac{\varepsilon(\varepsilon b)^{2/3}}{2}\tau^{1/3}\left(q - \frac{(s-3)}{(s-1)}\frac{q}{\operatorname{sn}^2(\vartheta(r)/2,\kappa)} + \mathcal{O}\big(\tau^{-2/3}\big)\right), \tag{4.26}$$

其中，ϑ(r) 由方程 (4.3) 定义，且 $\tau = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}$ 与 $r \in \Omega$（见方程 (4.1)）。此外，得到公式 (4.26) 后，应将粗射线 Ω 转变为“奶酪形”区域，方法是挖去椭圆正弦零点周围的圆盘。根据这些圆盘的半径，公式 (4.26) 中的误差估计可能会变差。这里我们不讨论这些标准的渐近问题，因为我们的主要目标是探讨推导 u(τ) 渐近行为首项公式的代数方面。

公式 (4.26) 包含两个参数 P和 ϑ_0，因为根据关系式 (4.24)，κ由 P和 $p = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi_0/3}$表示。乍看之下，这似乎没什么问题，因为我们研究的是二阶常微分方程 (1.4)；然而，实际上这意味着并非所有参数都已确定，因为 Painlev´e 方程沿复平面中固定射线的椭圆渐近，其首项中只包含一个参数。[17] 只有当我们将 ϑ_0 视为关于 φ_0的函数时，第二个参数才会出现。原则上，我们尚未研究作为 x^{2n} 的幂的系数而出现的 y-级数；后一个级数的系数依赖于 P和其他参数 q_2, q_4，.....，因此它们的收敛性可能对 P施加一些额外条件。研究这一问题的方法之一是共轭展开 (1.3)，然而在这种情况下，函数 x(τ) 和 y(τ) 并非共轭，至少对于 P 的一般取值而言如此，因此展开式 (1.3) 的结构尚不明确。

另一方面，S. Shimomura 最近通过等单值变形法得到了退化第三 Painlev´e 方程的 Boutroux 型渐近。在下一小节中，我们将详细考察 Shimomura 得到的渐近行为与渐近公式 (4.26) 之间的对应关系，从而可以用 Shimomura 定义的所谓模函数来确定参数P。

[17] 这最初由 P. Boutroux [1],通过考察第一 Painlev´e 方程的例子证明。

4.2 与 Boutroux 型渐近的比较

在本小节中，我们采用 Shimomura 论文 [18], 中引入的记号 x 和 y 中的下标 s ，因为上一节使用的记号 x 和 y 含义不同。Shimomura 将退化第三 Painlev´e 方程写成如下形式,

$$y_s'' = \frac{(y_s')^2}{y_s} - \frac{y_s'}{x_s} - 2y_s^2 + \frac{3a}{x_s} + \frac{1}{y_s}, \tag{4.27}$$

w这里 $y_s = y_s(x)$ 和 $y_s' = \mathrm{d}y_s(x_s)/\mathrm{d}x_s)$，它由 (1.4) 通过代入得到

$$\varepsilon\tau u(\tau) = (x_s/3)^2 y_s(x_s), \qquad \varepsilon b\tau^2 = 2(x_s/3)^3. \tag{4.28}$$

回想一下，在本节中，为简单起见，我们假设 $a = 0$；后一假设不会影响 $y_s(x_s)$ 渐近行为的首项，除非我们考虑用单值化数据对这种渐近行为进行参数化，并给出相应的渐近连接公式；本文不作此讨论。

在本小节中，我们假设读者熟悉 Weierstrass 椭圆 $\wp$ 函数理论中的标准记号和众所周知的事实；所有必要信息都汇总在 [2] 中，以下将不再引用。 [18] 中得到的渐近公式为

$$y_s(x_s) = \wp\big(\mathrm{i}(x_s - x_0^+) + \mathcal{O}(x_s^{-\delta}); g_2, g_3\big) + \frac{A_\phi}{12}, \tag{4.29}$$

其中 $x_s = t_s \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \to \infty$，满足 $0 < \phi < \pi/3$，且 $t_s \in \mathbb{C}$ 属于 [18] 中定义的“奶酪状”带；$\delta > 0$，相移 x_0 由相关线性常微分方程的单值化数据显式给出，并且

$$g_2 = \frac{(A_\phi)^2}{12}, \qquad g_3 = \frac{(A_\phi)^3}{6^3} - 1. \tag{4.30}$$

复值模函数 A_ϕ 通过椭圆积分的归一化条件以某种方式定义。关于精确定义，请读者参阅论文 [18]。

本小节的主要目标是建立渐近公式 (4.29) 与 (4.25) 之间的对应关系。方程 (4.6) 和 (4.28) 表明

$$\overset{\infty^1}{A}_e(x(\tau), y(\tau)) = 2^{1/3} y_s(x_s). \tag{4.31}$$

∞^1让我们用 Weierstrass $\wp$-函数来改写函数 $A_e(x(\tau)\ y(\tau))$ 的渐近行为,

$$\begin{aligned} \overset{\infty^1}{A}_e(x(\tau), y(\tau)) &= q - \frac{(s-3)}{(s-1)} \frac{q}{\mathrm{sn}^2(\vartheta(r)/2, \kappa)} + \mathcal{O}\big(\tau^{-2/3}\big) \\ &= q - q\frac{(s-3)}{(s-1)} \frac{\wp(\mathrm{i}(\tilde{x} - \tilde{x}_0)) - e_3}{e_1 - e_3} + \mathcal{O}\big(\tau^{-2/3}\big), \end{aligned} \tag{4.32}$$

其中存在 $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$，使得

$$e_1 = (2 - \kappa^2)\mu^2, \qquad e_2 = (2\kappa^2 - 1)\mu^2, \quad e_3 = -(\kappa^2 + 1)\mu^2, \tag{4.33}$$

and

$$\vartheta(r)/2 = (e_1 - e_3)^{1/2} \mathrm{i}(\tilde{x} - \tilde{x_0}) = \sqrt{3}\,\mathrm{i}\mu(\tilde{x} - \tilde{x_0}). \tag{4.34}$$

The 方程 (4.34) 与 $\vartheta(r)$ 的定义（见方程 (4.3)）共同表明 t

$$\tilde{x} = -\frac{\mathrm{i}\Theta^2 P}{2\sqrt{3}\mu} r^{2/3}, \qquad \vartheta_0 = -2\sqrt{3}\,\mathrm{i}\mu\tilde{x}_0. \tag{4.35}$$

利用第二个方程 (4.28)，我们得到

$$x_s = \frac{3}{2^{1/3}}(\varepsilon b)^{1/3}\tau^{2/3} = \frac{\Theta^2}{2^{1/3}\sqrt{3}} r^{2/3} p = t_s \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}, \quad p = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi_0/3} \Rightarrow \phi = 2\varphi_0/3, \tag{4.36}$$

其中，在第二个方程中使用了 Θ 的定义（见方程 (3.6)）。(4.29) 和 (4.32) 中的 Weierstrass $\wp$函数的相容条件为

$$x_s = \tilde{x} \quad \text{and} \quad \tilde{x}_0 = x_0^+; \tag{4.37}$$

由方程 (4.35) 和 (4.36) 可知，它等价于以下关系：

$$\vartheta_0 = -2\sqrt{3}\,\mathrm{i}\mu x_0^+, \qquad \mu = -\frac{\mathrm{i}}{2^{2/3}}\frac{P}{p}. \tag{4.38}$$

现在，第二个方程 (4.24) 可以用椭圆坐标来计算 μ^2 ：

$$\mu^2 = -\frac{q}{2^{1/3}3}\frac{(s-3)}{(s-1)}. \tag{4.39}$$

现在我们继续化简渐近行为 (4.32) 的首项；它可以改写如下：

$$q + q\frac{(s-3)}{(s-1)}\frac{e_3}{e_1-e_3} - q\frac{(s-3)}{(s-1)}\frac{\wp(\mathrm{i}(\tilde{x}-\tilde{x}_0))}{e_1-e_3} = q\left(1 - \frac{(s-3)}{(s-1)}\frac{(\kappa^2+1)}{3}\right) \tag{4.40}$$

$$-\frac{q(s-3)}{3\mu^2(s-1)}\wp(\mathrm{i}(\tilde{x}-\tilde{x}_0)) = \frac{q}{3}\frac{(s^2+3)}{(s^2-1)} + 2^{1/3}\wp(\mathrm{i}(x_s - x_0^+)), \tag{4.41}$$

这里用到了方程 (4.33)、(4.24)、(4.39) 和 (4.37)。现在将方程 (4.31) 两边的函数替换为它们的渐近行为，便得到模函数与参数 q之间的关系：

$$2^{1/3}\frac{A_\phi}{12} = \frac{q}{3}\frac{(s^2+3)}{(s^2-1)} \quad \Rightarrow \quad A_\phi = 2^{2/3}\frac{2q^3+1}{q^2}. \tag{4.42}$$

记 $q = 2^{1/3}z$，可得 $4z^3 - A_\phi z^2 + 1 = 0$，因此参数 $2^{1/3}q$ 可视为椭圆曲线 $w^2 = 4z^3 - A_\phi z^2 + 1 = 0$的一个分支点，Shimomura 用它来定义函数 A_ϕ。由于不变量 g_2 和 g_3 是根 e_1、 e_2和 e_3 的众所周知的对称函数（参见 [2], ），关系 (4.39)、(4.33) 和 (4.42) 便可用于重现方程 (4.30)。

第二个方程 (4.42) 解决了我们的问题，它确定了参数： q、 s ，因此也确定了给定 φ_0 时的 P 和 κ （参见第三个方程 (4.36)），并允许将方程 (4.26) 用作 $u(\tau)$ 的渐近公式；该公式中的误差估计建立在这样的假设之上：可以选取参数 q_2，q_4，.....，使相应的 y 级数在与渐近行为首项所定义的奶酪形区域相同的区域内收敛。由于这些级数尚未得到研究，读者应采用 Shimomura 得出的较宽松的误差估计 (4.29)。

4.3 椭圆展开式：对称性共轭变量

为定义椭圆情形下的共轭变量 $\hat{}x$ 和 $\hat{}y$ ，我们采用与第 4.1 小节相同的记号，但将变量 x 和 y 的定义改为更对称的形式，

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \Theta^{-1} r^{-1/3}\mathrm{dn}^{-1/2}(\vartheta(r)/2,\kappa)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\mathrm{am}(\vartheta(r)/2,\kappa)}, \\ y(\tau) &= \Theta^{-1} r^{-1/3}\mathrm{dn}^{-1/2}(\vartheta(r)/2,\kappa)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{am}(\vartheta(r)/2,\kappa)}. \end{aligned} \tag{4.43}$$

对于函数 $x(\tau)$ 和 $y(\tau)$ 的这种选取，微分算子

$$\begin{aligned} D = &\left(\frac{y}{2} + \frac{\mathrm{i}P}{x}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\kappa^2(y^2-x^2)}{4(4xy+\kappa^2(y-x)^2)}\right)\right)\frac{\partial}{\partial y} \\ &+\left(\frac{x}{2} + \frac{\mathrm{i}P}{y}\left(\frac{1}{2} + \frac{\kappa^2(y^2-x^2)}{4(4xy+\kappa^2(y-x)^2)}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x}, \end{aligned} \tag{4.44}$$

以及定义 A/B-展开式的偏微分方程为

$$D^2 \ln \overset{\infty^2}{A}_e = -\frac{4p^2}{3xy(4xy+\kappa^2(y-x)^2)}\left(\overset{\infty^2}{A}_e - \frac{1}{\left(\overset{\infty^2}{A}_e\right)^2}\right), \tag{4.45}$$

∞^2 ∞^2 ∞^2 ∞^2 ∞^2其中 $A_e = A_e(x,\ y)$ 或 $B_e(x,\ y)$（见下文）。对于函数 $A_e(x,\ y)$ 和 $B_e(x,\ y)$，可以找到两类共轭形式展开：其中一类具有标准形式（1.1）、（1.3），本节将讨论这一类，另一类则留待他处讨论。我们的目标是构造方程（4.45）最一般的形式解，它们由以下展开式定义：

$$\overset{\infty^2}{A}_e(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} y^k \overset{\infty^2}{A}_{e,k}(x), \qquad \overset{\infty^2}{B}_e(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \overset{\infty^2}{B}_{e,k}(y), \tag{4.46}$$

∞^2 ∞^2其中 $A_{e,\ k}(x)$ 和 $B_{e,\ k}(y)$ 分别是 x 和 y 的有理函数。作为关于两个相互独立变量 x 和 y 的级数，形式解 $A_e(x,\ y)$ 与 $B_e(x,\ y)$ 并不相同。然而，它们通过对称性彼此关联；更准确地说，以下陈述成立。

∞^2**命题 4.1**。假设由第一个方程 (4.46) 给出的 $A_e(x)$ 展开式，其∞^2 ∞^2系数为 $A_{e,k}(x) \equiv \overset{\infty^2}{A}_{e,k}(x, P)$，且这些系数是 x 的有理函数，是方程 (4.45) 的形式解。定义函数

$$\overset{\infty^2}{B}_{e,k}(y,P) := \overset{\infty^2}{A}_{e,k}(y,-P), \qquad k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}. \tag{4.47}$$

∞^2 ∞^2那么，由第二个方程 (4.46) 给出的 $B_e(x, y)$ 展开式，其系数为 $B_{e,k}(y) =\infty^2 B_{e,k}(y, P)$，这些系数是 y 的有理函数；该展开式是方程 (4.45) 的形式解，反之亦然。

∞^2考虑展开式 $B_e(x, y)$，并求出前几个有理函数：

$$\overset{\infty^2}{B}_{e,0}(y) = q, \quad q \in \mathbb{C}\setminus\{0\}, \qquad \overset{\infty^2}{B}_{e,1}(y) = c_2 y^3 + c_1 y + \frac{8p^2(q^3-1)}{3\kappa^2 P^2 q y}, \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned} \overset{\infty^2}{B}_{e,2}(y) &= c_4 y^6 + c_3 y^4 \\ &+\frac{3\kappa^2P^2qc_1^2 + 6\mathrm{i}\kappa^2Pq^2c_1 - 12(\kappa^2-2)P^2q^2c_2 + 16p^2(2q^3+1)c_2}{6\kappa^2P^2q^2}\,y^2 \\ &-\frac{2\big(3(\kappa^2-2)P^3q^2c_1 - 4Pp^2(4q^3-1)c_1 + 8\mathrm{i}p^2q(q^3-1)\big)}{9\kappa^2P^3q^2} \\ &+\frac{16p^2(q^3-1)\big(3(\kappa^2-2)P^2q^2 + 2p^2(4q^3-1)\big)}{27\kappa^4P^4q^3y^2}. \end{aligned} \tag{4.49}$$

以下命题可借助基于方程 (4.48) 和 (4.49) 的数学归纳法论证来证明。

命题 4.2。 设偏微分方程 (4.45) 具有参数 P、 p、 $\kappa \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$。
∞^2 ∞^2假设由第二个方程 (4.46)给出的 A_e 是其形式解，其中 $B_{e,\,0}(y) \not\equiv 0\infty^2$，且系数函数 $B_{e,\,k}(y)$ 关于 y 为有理函数。那么

$$\overset{\infty^2}{B}_{e,0}(y) = q \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \text{and} \quad \overset{\infty^2}{B}_{e,k}(y) = \sum_{m=0}^{2k} \overset{\infty^{2,2m-k}}{B}_{e,k} y^{2m-k}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{4.50}$$

其中系数 $\overset{\infty^2}{B}$、$_{e\,k}^{\,2m-k}$、与 y 无关，是 P、 p^2、 κ^2 的有理函数；对于 $k \geqslant 1$，它们是 c_1、c_2、…、c_{2k-1}、$c_{2k} \in \mathbb{C}$ 的多项式。此外，[18]

$$\overset{\infty^{2,3k}}{B}_{e,k} = c_{2k} y^{3k}, \quad \overset{\infty^{2,3k-2}}{B}_{e,k} = c_{2k-1} y^{3k-2}, \quad c_{2k}, c_{2k-1} \in \mathbb{C}, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{4.51}$$

$$\overset{\infty^{2,2m-k}}{B}_{e,k} = \sum_{\substack{\sum j n_j \leqslant m \\ n_j \geqslant 0}} \mathfrak{b}_{k,n_1,\ldots,n_{2k-2}}(\kappa^2, P, p, q) \prod_{j=1}^{2k-2} c_j^{n_j}, \quad m = 0, 1, \ldots, 2k-2, \tag{4.52}$$

其中系数 $\mathfrak{b}_{k;n_1,\ldots..n_{2k-2}}$（$\kappa^2$、 P、 p、 q）是其变量的有理函数。特别地，对于 $k \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} \overset{\infty^{2,-k}}{B}_{e,k} &= \mathfrak{b}_{k;0,\ldots,0}(\kappa^2, P, p, q), \\ \overset{\infty^{2,2-k}}{B}_{e,k} &= \mathfrak{b}_{k;1,\ldots,0}(\kappa^2, P, p, q) c_1 + \mathfrak{b}_{k;0,\ldots,0}(\kappa^2, P, p, q), \end{aligned} \tag{4.53}$$

∞^2反之，设 p、 P、 $\kappa \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 以及 $c_n \in \mathbb{C}$、 $n \in \mathbb{N}$，则存在一个形式解 A_e ∞^2 ∞^2，由第二个方程 (4.46) 给出，其中 $B_{e、-1}(y) \not\equiv 0$ 的系数 $B_{e、k}(y)$ 是 y、 P、 p^2 和 κ^2 的有理函数。这些系数具有表示式 (4.50)。在归一化 (4.51) 下，该解是唯一的。

推论 *4.1.* 在命题 *4.2* 的相同假设下，存在偏微分方程 *(4.45)* 的唯一形式解 ∞^2，由第一式 *(4.46)* 给出，其中 $\overset{\infty^2}{A}_{e、-1}(x) \not\equiv 0$，且系数函数 $\overset{\infty^2}{A}_{e、k}(x)$ 关于 x、 P、 p^2、 κ^2 是有理函数。显式标明系数 $A_{e、k}(x) = A_{e、k}(x;\, P)$ 和 $B_{e、k}(y) = B_{e、k}(y;\, P)$ 对 P 的依赖关系后，可得以下关系：$A_{e、k}(x;\, P) = B_{e、k}(x;\, -P)$。

∞^2现在，考虑展开式 $B_e(x, y)$ 与解 $u(\tau)$ 的 Boutroux 型渐近构造之间的关系。在这种情况下，应将关系 (4.6) 替换为

$$u(\tau) = \frac{\varepsilon(\varepsilon b)^{2/3}}{2} \tau^{1/3} \overset{\infty^2}{B}_e(x(\tau), y(\tau)), \tag{4.54}$$

其中，函数 $x(\tau)$ 和 $y(\tau)$ 由方程 (4.43) 定义。这种构造与第 4.1 小节中用于函数 $A_e(x, y)$ 的构造类似；我们将形式解 $B_e(x, y)$ 中的所有项相加，该形式解在将变量 x 和

[18] 以下假设 $\prod_1^0 = 1$。

y 分别替换为 y 和 $\mathcal{O}$ 后，当 $\tau \to \infty$ 时具有 $\mathcal{O}(1)$ 的行为；

$$\begin{aligned} \overset{\infty}{B}{}^{2}_{e}(x,y) &= q + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{x}{y}\right)^{k} \overset{\infty}{B}{}^{2,-k}_{e,k} + \mathcal{O}\left(\frac{x^k}{y^{k-2}}\right) \right) \\ &= q + \overset{\infty}{B}{}^{2,-1}_{e,1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^{k} \frac{\overset{\infty}{B}{}^{2,-k}_{e,k}}{\overset{\infty}{B}{}^{2,-1}_{e,1}} + \mathcal{O}(x^2) \\ &= q + \frac{8p^2(q^3-1)}{3\kappa^2 P^2 q} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{x}{y}\right)^{k} + \mathcal{O}(x^2) \\ &= q + \frac{8p^2(q^3-1)}{3\kappa^2 P^2 q} \frac{x/y}{(1-x/y)^2} + \mathcal{O}(x^2), \end{aligned} \tag{4.55}$$

其中，在最后一个方程 (4.55) 中，我们假设参数 P 和 κ 的选取使得它们满足以下方程组，

$$\overset{\infty}{B}{}^{2,-k}_{e,k} \Big/ \overset{\infty}{B}{}^{2,-1}_{e,1} = k \quad \text{for} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.56}$$

$\overset{\infty}{B}{}^{2,-k}_{e,k} = A_{e,k}(0)$，该方程组的解与方程组 (4.23) 的解相同，并由相同的方程 (4.24) 给出。**在本小节的其余部分，我们假设参数 P，p，κ^2，以及 q 满足方程 (4.24) 中给出的条件**。现在，我们可以重现渐近行为的首项

$$\begin{aligned} \overset{\infty}{B}{}^{2}_{e}(x(\tau),y(\tau)) &= q + \frac{8p^2(q^3-1)}{3\kappa^2 P^2 q\left(\sqrt{y(\tau)/x(\tau)} - \sqrt{x(\tau)/y(\tau)}\right)^2} + \mathcal{O}\big(\tau^{-2/3}\big) \\ &= q - \frac{(s-3)}{(s-1)} \frac{q}{\operatorname{sn}^2(\vartheta(\mathrm{r})/2,\kappa)} + \mathcal{O}\big(\tau^{-2/3}\big), \end{aligned} \tag{4.57}$$

其中我们使用了条件 (4.24) 以及函数 $x(\tau)$ 和 $y(\tau)$ 的定义 (4.43)。现在，将方程 (4.54) 和 (4.57) 结合起来，再次得到函数 $u(\tau)$ 的渐近行为 (4.26)。

考虑方程 (4.55) 中的修正项，

$$\mathcal{O}\big(x^2\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \overset{\infty}{B}{}^{2,2-k}_{e,k} \frac{x^k}{y^{k-2}} + \mathcal{O}\big(x^4\big), \tag{4.58}$$

其中，记号 $\mathcal{O}\big(x^4\big)$ 表示第二次展开式（4.46）的所有项；代入$y = x$ 后，这些项的阶为 x^4。现在将由方程（4.43）确定的 $x(\tau)$和$y(\tau)$代入方程（4.58），即可得到方程（4.57）中的修正项，其形式为关于振幅函数的单边复傅里叶级数，

$$\begin{aligned} \mathcal{O}\big(\tau^{-2/3}\big) = \Theta^{-2}\tau^{-2/3}\Big(\operatorname{dn}\big(\vartheta(r)/2,\kappa\big)\Big)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} b_{e,k}^{2-k} \mathrm{e}^{-2i(k-1)\operatorname{am}\left(\vartheta(r)/2,\kappa\right)} \\ +\mathcal{O}\big(\tau^{-4/3}\big), \end{aligned} \tag{4.59}$$

其中

$$\tau^{2/3} = pr^{2/3}, \qquad b_{e,k}^{2-k} = p\overset{\infty}{B}{}^{2,2-k}_{e,k}\Big|_{eq.(4.24)}. \tag{4.60}$$

$_{\infty}{}^{2,\ 2-k}$最后这个记号表示，系数 $B_{e,\ k}$ 是针对满足关系式 (4.24) 的参数计算得出的。根据最后一个方程 (4.53)，系数$b_{e\,k}^{2-k}$ ，是 c_1的线性函数。系数可表示如下：

$$b_{e,1}^{1}=c_1p,\quad b_{e,2}^{0}=-4\mathrm{i}\frac{P}{p}+\frac{(3s^2-2s-9)}{(s+3)(s-1)}\,2c_1p, \tag{4.61}$$

其中

$$\frac{P}{p}=\frac{(s^2-1)^{1/6}}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{s-3}}{\sqrt{s-1}},$$

且对于 $k\geqslant 2$

$$\begin{aligned} b_{e,k}^{2-k}&=-4\mathrm{i}\frac{P}{p}\frac{Q_{2k-4}(s)}{(2k-1)!(s+3)^{k-2}(s-1)^{k-2}}\\ &+\frac{(2(k-1)^2+1)(s-3)(s+1)+4s}{(s+3)(s-1)}\,2c_1p, \end{aligned} \tag{4.62}$$

其中 $Q_{2k-4}(s)$ 是关于 s 的多项式，满足 $\deg(Q_{2k-4}(s))=2k-4$，且具有整数系数。前六个多项式 $Q_{2k-4}(s)$ 如下：

$$\begin{aligned} &k=2:\ Q_0(s)=6,\quad k=3:\ Q_2(s)=2^6 3^2(s^2-5),\\ &k=4:\ Q_4(s)=2^4 3(1241s^4+2436s^3-13266s^2-11340s+16065),\\ &k=5:\ Q_6(s)=2^{12}3^3(71s^6+284s^5-585s^4-3264s^3+2037s^2\\ &\qquad +3780s-2835),\\ &k=6:\ Q_8(s)=2^8 3^3(197823s^8+1184920s^7-824620s^6-11736120s^5\\ &\qquad -16680534s^4+47405160s^3+2899764s^2-46153800s+22920975),\\ &k=7:\ Q_{10}(s)=2^{13}3^3(1398679s^{10}+11187384s^9+7677153s^8\\ &\qquad -147117360s^7-79588362s^6+30783168s^5+721058418s^4\\ &\qquad -875438928s^3-222469821s^2+1313512200s-492567075). \end{aligned}$$

由 (4.62) 可知，级数 (4.59) 中与 c_1 成正比的部分很容易求和；然而，级数的其余部分看起来较为复杂，很可能与 Lam´e 型方程的一个解有关。后一个方程以及参数 c_1 的值，可以通过将 $\mathcal{O}\big(\tau^{-2/3}\big)$ 取为方程 (4.59) 所给出的展开式 (4.57) 代入退化的第三 Painlev´e 方程 (1.4) 得到。

如果我们考虑共轭展开式，而不是展开式 (4.54)，

$$u(\tau)=\frac{\varepsilon(\varepsilon b)^{2/3}}{2}\tau^{1/3}\,{}_{\infty}{}^{2}A_e(x(\tau),y(\tau)), \tag{4.63}$$

那么，由于推论 4.1 中所述的对称性，我们得到：参数 P、p、q 和 s 满足相同的约束条件 (4.24)；渐近$_{\infty}{}^{2}$ $_{\infty}{}^{2}$展开式 $A_e(x(\tau)\ y(\tau))$ 的首项公式与 $B_e(x(\tau)\ y(\tau))$ 的完全相同（见第二个方程 (4.57)）；而修正项 $\mathcal{O}\big(\tau^{-2/3}\big)$ 的公式与函数 $B_e(x(\tau)\ y(\tau))$ 的相应公式（见方程 (4.59)）的区别在于，$\vartheta(r)$ 中的 $P\to -P$ 以及所有系数$b_{e\,k}^{2-k}$ 均作了反射变换。在我们的构造中，参数 P 的符号并未固定，因此此阶段不讨论这一问题；它可能与椭圆渐近有效的不同扇形域中修正项的表示有关。

参考文献

[1] Boutroux P.，《关于 M. Painlev´é 超越函数的研究及二阶微分´方程的渐近研究》，《高等师范学校科学年刊》（第 3 辑）30 (1913)，255–375。[2] Erd´élyi A.、Magnus W.、Oberhettinger F.、Tricomi F. G.，《高等超越函数》第 3 卷，麦格劳-希尔图书公司，纽约-多伦多-伦敦，1955 年（部分依据 Harry Bateman 遗留的笔记编写）。[3] Gamayun O.、Iorgov N.、Lisovyy O.，《瞬子组合学如何求解 Painlev´é VI、V 和 III 方程》，物理学杂志 A 46:33 (2013)，335203，共 29 页。[4] Gromak V. I.，《 Painlev´é 第三个方程的解》（俄文），Differencial'nye Uravnenija 9 (1973)，第 11 期，2082–2083。[5] Kimura H.，《具有正则型奇点的哈密顿系统通解的构造及其在 Painlev´é 方程中的应用》，纯粹与应用数学年刊（第 4 辑）134 (1983)，363–392。[6] Kitaev, A. V.，《参数 Painlev´é 方程》，数学科学杂志（纽约）192 (2013)，第 1 期，81–90；译自斯捷克洛夫数学研究所圣彼得堡分部科学研讨会纪要 (POMI) 398 (2012)，《场的量子理论与统计物理问题》22，145–161。[7] Kitaev A. V., Vartanian A. H.，《退化第三 Painlev´é 方程解的渐近行为连接公式：I》，逆问题 20 (2004)，第 4 期，1165–1206。[8] Kitaev A. V., Vartanian A.，《退化第三 Painlev´é 方程解的渐近行为连接公式：II》，逆问题 26 (2010)，105010，共 58 页。[9] Kitaev A. V., Vartanian A.，《形式单值化参数为零时退化第三 Painlev´é 方程的代数型解》，数学分析与应用杂志 532 (2024)，第 1 期，论文编号 127917，共 86 页。[10] Kitaev A. V., Vartanian A.，《退化第三 Painlev´é 方程：正则奇点邻域内解的完整渐近分类》，档案预印本 arXiv:2503.11912 [math.CA]。[11] Lin Y.、Dai D.、Tibboel P.，《第三和第四 Painlev´é 方程的 tronquée 解的存在唯一性》，非线性 27 (2014)，171–186。[12] Ohyama Y.、Kawamuko H.、Sakai H.、Okamoto K.，《Painlev´é 方程研究 V：特殊类型的第三 Painlev´é 方程 $P_{\mathrm{III}}(D_7)$ 和 $P_{\mathrm{III}}(D_8)$》，东京大学数学科学杂志 13 (2006)，第 2 期，145–204。[13] Shimomura Shun，《固定奇点邻域内 Painlev´é 超越函数的级数展开》，Funkcial. Ekvac. 25 (1982)，第 2 期，185–197。[14] Shimomura Shun，《无穷远点附近 Painlev´é 超越函数的级数展开》，Funkcial. Ekvac. 58 (2015)，第 2 期，277–319。[15] Shimomura Shun，《第五 Painlev´é 超越函数的椭圆渐近表示》，Kyushu J. Math. 76 (2022)，第 1 期，43–99。[16] Shimomura Shun，《更正：第五 Painlev´é 超越函数的椭圆渐近表示》，Kyushu J. Math. 77 (2023)，第 1 期，191–202。

[17] Shimomura Shun, 《第五 Painlevé 超越函数椭圆渐近的两种误差界》, *Kyushu J. Math.***78** （2024）, 第 2 期, 487–502 页。[18] Shimomura Shun, 《退化第三 Painlevé 超越函数的 Boutroux拟设》, *Publ.Res. Inst. Math. Sci.* **60** （2024）, 第 4 期, 651–698 页。[19] Shimomura Shun, 《完整第三 Painlevé 超越函数的椭圆渐近》, *Funk-cial. Ekvac.* **68** （2025）, 第 1 期, 69–117 页。[20] Takano Kyoichi, 《无穷远点附近 Painlevé 方程（V）解的二参数族》, *Funkcial. Ekvac.* **26**（1983）, 第 1 期, 79–113 页。[21] Takano Kyoichi, 《第一类固定奇点处 Painlevé 方程的约化》, *Funkcial. Ekvac.* **29**（1986）, 第 1 期, 99–119 页。[22] Vartanian Arthur, 《退化 Painlevé III 方程解的超渐近级数渐近：案例研究》, *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.***21**（2025）, 论文编号 067, 共 135 页。[23] Wasow Wolfgang, 《常微分方程的渐近展开》。1976 年版重印。Dover Publications, Inc., 纽约, 1987。