结构化提升工具箱

Krzysztof Kapulkin
Yufeng Li

我们构建了一个处理结构化提升问题的一般框架，并确立了其解的封闭性和唯一性。在后续论文中，我们将运用这些结果为立方型理论的计算规则建立公理化体系。

arXiv:2512.14988v1 [math.CT] 17 Dec 2025

引言

在研究依赖类型论的范畴模型时，人们通常用某类提升问题的解的相容选取来建模模式匹配，典型例子是恒等类型的 J-消去子。在上下文范畴[Car86]和带族范畴 [Dyb96;Awo18],等模型中，这一要求原样成立；而在描述其相应的严格类比时，通常会将其作为较弱模型（如理解范畴） [Jac93]、类型论纤维化范畴 [Shu15], 和部落 [Joy17], 的附加条件。

这类相容的提升族自然出现在代数 弱分解系统[GT06； Gar09] 以及代数模型结构 [Rie11], 的语境中。它们是弱分解系统和模型结构的替代方案：后者只要求分解和提升存在，而前者则要求以适当相容（因而具有代数性）的方式选定它们 [BG16]。因此，代数弱分解系统已被用于为依赖类型论提供模型 [BF22； ACCRS25]。然而，在研究所有模型构成的范畴时，它们的用处有限，因为恒等类型分解通常并非函子性的 [GG08]。换言之，使用代数弱分解系统为模型中已有的结构建立公理化体系时，问题在于弱分解系统中的“分解”部分。

原则上，人们可以尝试在依赖类型论的一个模型上构造新的代数弱分解系统，但会遇到两个问题。首先，构造代数弱分解系统的标准工具——代数小对象论证——要求基范畴具有某些余极限 [Gar09],而一般的类型论模型并不具备这些余极限。其次，即使能够对自反映射的集合运行代数小对象论证，所得的右类通常也无法还原出依赖投影。总而言之，代数弱分解系统作为框架过于强大，不适合用来讨论依赖类型论的模型。

在本文中，我们通过发展结构化提升理论来解决这些问题，而不要求相应的分解要求，并且对基范畴只作最低限度的假设。这与建立代数弱分解系统框架所需的更为“繁重”的条件形成对比：例如，要求两个类分别由基范畴上的某个适当（余）单子所对应的（余）代数给出。

我们证明了这些提升的若干闭包性质，例如它们与基变换、复合以及莱布尼茨转置的相容性。我们进一步考察了这些提升的唯一性性质。所有这些工作都旨在理解一般依赖类型论、尤其是立方型理论的计算规则 [CCHM15； ABCHHL21]。事实上，对于上述三种运算：基变换对应于消去子在代换下的稳定性，而复合和莱布尼茨转置则分别描述填充运算与依赖和及路径类型之间的相容性。唯一性性质确保计算规则以预期的（命题）形式成立。

通过跟踪可指数化对象，我们的所有构造不仅可以在依赖类型论的宇宙范畴模型框架中表述 [Voe17；KL21]，，也可以在 Uemura 的可表示映射范畴框架中表述 [Uem23]。

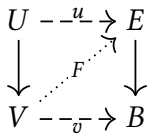
本文结构如下。在第 1 节中，我们介绍提升、结构化提升和受限提升的必要概念。我们还将说明结构化提升与类型论的范畴模型之间的关系，并将其表述为 Uemura 的可表映射范畴。在接下来的四节中，我们考察结构化提升的各种闭包性质。具体而言，在第 2 节中，我们证明结构化提升可以受到限制并进行复合；在第 3 节中，我们证明它们在基变换下封闭；在第 5 节中，我们证明它们在莱布尼茨转置下封闭。作为第 5 节的预备步骤，我们将在第 4 节中设计一种讨论推出积的方法，而无需借助基范畴的任何余完备性。最后，在第 6 节中，我们描述一个用于证明两个提升相关的一般框架，并在模型范畴中具体应用我们的结果。

1 结构化提升

本节将介绍一致提升的概念。概括而言，它们是提升性质的一致版本，其一致性源于乘积的函子性。在本文余下部分中，我们固定一个有限完备范畴 $\mathbb{C}$；若其内部 Hom 存在，则记为 $[-,-]$；若过切片 $\mathbb{C}/c$ 中的内部 Hom 存在，则记为 $[-,-]_C$。我们主要关注的例子是 Uemura 的带可表示映射的范畴（CwR）。

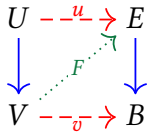
我们首先回顾什么是提升问题及其相应的解。

定义 1.1. $U \to V$相对于 $E \to B$的提升问题是由如下虚线映射 (u, v) 构成的一对，使方形图表交换。提升问题 (u, v) 的解是一个对角填充 F，使整个图表交换。



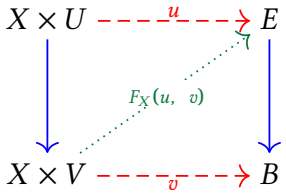
— ♦

为了便于查看，我们用颜色编码表示：提升问题用红色，相互作为提升对象的映射用蓝色，提升解用绿色。因此，我们会将上述提升问题与解这一对表示为

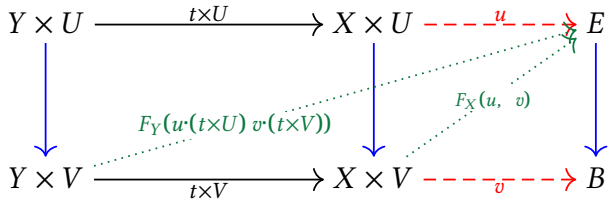


提升解取决于所给定的提升问题。因此，给定一族满足某种相容条件的提升问题，我们可以要求相应的一族提升解也彼此相容。本文关注的是相容条件源自乘积的函子性的情形。

定义 1.2。固定映射 $i\colon U \to V$和 $p\colon E \to B$。提升族是指一种对应，它将每个对象$X \in \mathbb{C}$ 以及 $X \times i$ 相对于 p的提升问题 (u, v) 对应到一个解 $F_X(u, v)$。



若对于任意$t\colon Y \to X$，均有 $F_Y(u\cdot(t\times U)\ v\cdot(t\times V)) = F_X(u,v)\cdot(t\times V)$，则称此提升族 F是一致的。

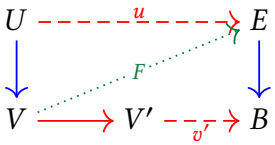


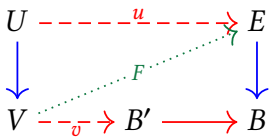
— ♦

在上述定义中，虚线水平映射 u，v 可以是任意的。不过，我们也可以要求它们通过某些特定映射进行分解。这便产生了左受限提升和右受限提升及其一致版本的概念。

定义 1.3。沿着 $V \to V'$，针对 $E \to B$ 左受限的 $U \to V$ 提升问题，是如下所示的一对虚线映射（u，v'），使左侧的方形图表交换。该左受限提升问题（u，v）的解是一个对角填充 F，它填充该方形并使左侧的整个图表交换。

对偶地，沿着 $B' \to B$，针对 $E \to B$ 右受限的 $U \to V$ 提升问题，是如上所示的一对虚线映射（u，v），使右侧的方形图表交换。该右受限提升问题（u，v）的解是一个对角填充 F，它填充该方形并使右侧的整个图表交换。



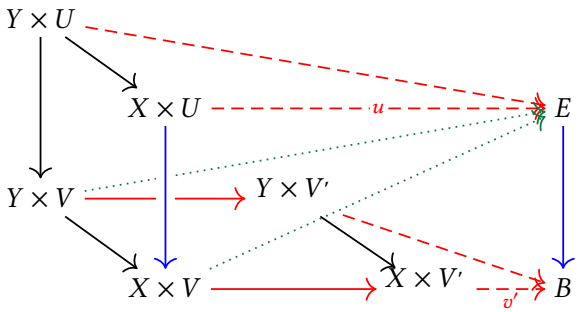


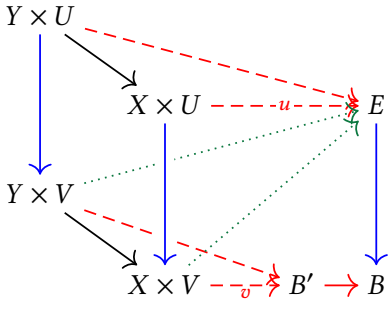
— ♦

以受限提升问题的选择为参数化，我们也可以类似地定义其提升解的族以及相应的一致性条件。

定义 1.4。固定映射 $i\colon U \to V$和 $p\colon E \to B$。

沿 $j\colon V \to V'$ 的左受限 提升族，是一种关联，它将每个对象 $X \in \mathbb{C}$ 以及关于 $X\times i$沿 $X\times j$相对于 p，v'左受限的提升问题 (u)，对应到一个解 $F_X(u,v')$。当对于任意 $t\colon Y \to X$，都有 $F_Y(u\cdot(t\times U)\ v'\cdot(t\times V))$ $= F_X(u,v')\cdot(t\times V)$ 时，这个族 F称为一致 的。





对偶地，沿 $q\colon B' \to B$的右受限 提升族，是一种关联，它将每个对象 $X \in \mathbb{C}$ 以及关于 $X\times i$沿 q相对于 p, v右受限的提升问题 (u)，对应到一个解 $F_X(u,v)$。当对于任意 $t\colon Y \to X$，都有 $F_Y(u\cdot(t\times U)\ v\cdot($ $t\times V)) = F_X(u,v)\cdot(t\times V)$ 时，这个族称为一致 的。

所有此类左、右受限的一致提升族的集合，我们分别称之为提升结构，记作

$$\begin{array}{ccc} U & & E \\ \downarrow & \boxslash & \downarrow \\ V & \longrightarrow & V' \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} U & & E \\ \downarrow & \boxslash & \downarrow \\ V & & B \end{array} \longrightarrow B$$

$-\blacklozenge$

注 1.5。 定义 1.4 中的一致性条件可以用自然性条件来表述。

我们首先考虑左限制一致情形：左侧的映射 $U \to V$ 沿 $V \to V'$ 受到限制，右侧则为 $E \to B$。对于每个 $X \in \mathbb{C}$，可以看到，$X \times U \to X \times V$ 与 $E \to B$ 之间所有非受限提升问题构成箭头范畴 $\mathbb{C}^{\to}(X \times U \to X \times V, E \to B)$ 的 Hom 集。令 X 变化，即可得到参数化提升问题预层。

$$\mathbb{C}^{\to}\left(\begin{array}{c} -\times U \\ \downarrow \\ -\times V \end{array}, \begin{array}{c} E \\ \downarrow \\ B \end{array}\right)$$

类似地，沿 $X \times V \to X \times V'$ 受限的提升问题集合可以看作 Hom 集 $\mathbb{C}^{\to}(X \times U \to X \times V \to X \times V', E \to B)$；令 X 变化，便得到参数化受限提升问题预层。

$$\mathbb{C}^{\to}\left(\begin{array}{ccc} -\times U & & \\ \downarrow & & \\ -\times V & \to & -\times V' \end{array}, \begin{array}{c} E \\ \downarrow \\ B \end{array}\right)$$

给定一个受限提升问题 $(u\colon X \times U \to E, v'\colon X \times V' \to B) \in \mathbb{C}^{\to}(X \times U \to X \times V \to X \times V', E \to B)$，我们总可以忘掉其限制，从而得到一个非受限提升问题 $(u\colon X \times U \to E, v'\colon X \times V' \to B) \in \mathbb{C}^{\to}(X \times U \to X \times V, E \to B)$。可以看到，这一操作在 X 中是自然的，因此再次令 X 变化，便可得到上述两个预层之间的映射。

$$\mathbb{C}^{\to}\left(\begin{array}{ccc} -\times U & & \\ \downarrow & & \\ -\times V & \to & -\times V' \end{array}, \begin{array}{c} E \\ \downarrow \\ B \end{array}\right) \longrightarrow \mathbb{C}^{\to}\left(\begin{array}{c} -\times U \\ \downarrow \\ -\times V \end{array}, \begin{array}{c} E \\ \downarrow \\ B \end{array}\right)$$

另一方面，每个受限提升问题（$u\colon X \times U \to E$，$v'\colon X \times V' \to B$）$\in \mathbb{C}^{\to}(X \times U \to X \times V \to X \times V', E \to B)$ 的解，是某个对角映射 $X \times V \to E$ 的选取。令 X变化，参数化解候选的集合由以下预层给出

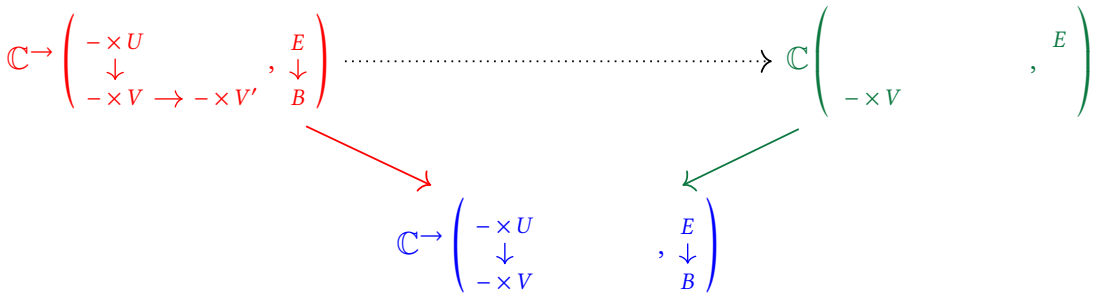
$$\mathbb{C}\left(\begin{array}{c} \\ -\times V \end{array}, E\right)$$

给定这样的对角映射 $X \times V \to E$，我们总能通过先与 $X \times U \to X \times V$ 复合、再与 $E \to B$ 后复合，得到一个从 $X \times U \to X \times V$ 到 $E \to B$ 的映射，从而还原它所解决的提升问题。因此，我们得到一个映射，它将每个提升解候选族映射到其试图解决的相应提升问题族。

$$\mathbb{C}\left(\begin{array}{c} \\ -\times V \end{array}, E\right) \longrightarrow \mathbb{C}^{\to}\left(\begin{array}{c} -\times U \\ \downarrow \\ -\times V \end{array}, \begin{array}{c} E \\ \downarrow \\ B \end{array}\right)$$

因此，要说明某个提升解候选确实解决了分配给它的提升问题，就需要如下所示的水平虚线映射。因此，一致左限制提升的集合就是

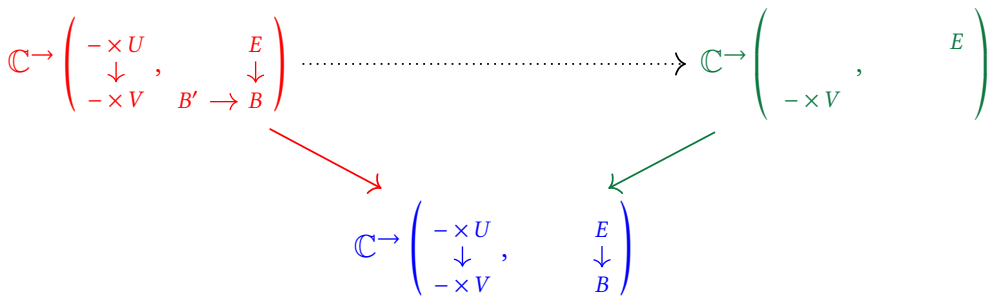
$\widehat{}$以下切片范畴中的自然变换集合 $\mathbb{C}$



对偶地，给定 $B' \to B$，将右受限提升问题族的集合记为预层

$$\mathbb{C}^{\to}\begin{pmatrix} -\times U & E \\ \downarrow & \downarrow \\ -\times V & B' \to B \end{pmatrix} \coloneqq \left(X \mapsto \left\{ \begin{pmatrix} X\times U \xrightarrow{u} E \\ X\times V \xrightarrow{v} B' \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{ccc} X\times U & \xrightarrow{u} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ X\times V & \xrightarrow{v} B' \to & B \end{array} \right\} \right) \in \widehat{\mathbb{C}}$$

那么，沿着 $B' \to B$ 的一致右受限提升集合，是 $\mathbb{C}$中$\widehat{}$以下切片范畴中的自然变换集合。



$-\blacklozenge$

我们注意到，由于 $\mathbb{C}$ 是局部笛卡尔闭的，一致（受限）提升的集合可以通过可表性论证内化，如以下引理 1.6 和 1.8所示。

引理 1.6. 假设存在指数对象之间的映射 $U \to V$、$E \to B$ 和 $V \to V'$。那么，可表性如下：

(1) 受限提升问题。

$$\mathbb{C}(-, [U,E] \times_{[U,B]} [V',B]) \xleftarrow{\cong} \mathbb{C}^{\to}\begin{pmatrix} -\times U & E \\ \downarrow & \downarrow \\ -\times V \to -\times V' & B \end{pmatrix}$$

(2) 非受限提升问题。

$$\mathbb{C}(-, [U,E] \times_{[U,B]} [V,B]) \xleftarrow{\cong} \mathbb{C}^{\to}\begin{pmatrix} -\times U & E \\ \downarrow & \downarrow \\ -\times V & B \end{pmatrix}$$

(3) 提升解。

$$\mathbb{C}(-,[V,E]) \xleftarrow{\cong} \mathbb{C}\begin{pmatrix} & E \\ -\times V & \end{pmatrix}$$

— ♦

证明。由 Yoneda 嵌入的连续性，

$$\begin{aligned}\mathbb{C}(-,[U,E]\times_{[U,B]}[V',B]) &\cong \mathbb{C}(-,[U,E])\times_{\mathbb{C}(-,[U,B])}\mathbb{C}(-,[V',B])\\ &\cong \mathbb{C}(-\times U,E)\times_{\mathbb{C}(-\times U,B)}\mathbb{C}(-\times V',B)\end{aligned}$$

这恰好是从 $-\times U\to -\times V$，到 $E\to B$的交换方块，因此第一项中有同构。类似的论证可得第二项和第三项中的同构。— ■

推论 1.7. 假设有映射 $U\to V$和 $E\to B$和 $V\to V'$，其中 U,V,V'是可指数化对象。那么，左受限一致提升的集合恰好是切片范畴中的 Hom 集。

$$\begin{array}{ccc} U & & E \\ \downarrow & \boxslash & \downarrow \\ V & \to & V' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & E \\ & & \downarrow \\ B' & \to & B \end{array} \cong \mathbb{C}_{/[U,E]\times_{[U,B]}[V,B]}([U,E]\times_{[U,B]}[V',B],[V,E])$$

— ♦

证明。 由引理1.6立即可得。 — ■

对偶地，我们在右侧也有一个内化结果。

引理 1.8. 假设有映射 $U\to V$和 $E\to B$和 $B'\to B$，其中 U,V是可指数化对象。那么，可表性为：

(1) 受限提升问题。

$$\mathbb{C}(-,[U,E]\times_{[U,B]}[V,B']) \xleftarrow{\cong} \mathbb{C}^{\to}\begin{pmatrix} -\times U & E \\ \downarrow & \downarrow \\ -\times V & B'\to B \end{pmatrix}$$

(2) 非受限提升问题。

$$\mathbb{C}(-,[U,E]\times_{[U,B]}[V,B]) \xleftarrow{\cong} \mathbb{C}^{\to}\begin{pmatrix} -\times U & E \\ \downarrow & \downarrow \\ -\times V & B \end{pmatrix}$$

(3) 提升解。

$$\mathbb{C}(-,[V,E]) \xleftarrow{\cong} \mathbb{C}^{\to}\begin{pmatrix} & E \\ -\times V & \end{pmatrix}$$

— ♦

证明。 根据可表性，论证与引理 1.6 中相同。 — ■

推论 1.9. 假设有映射 $U\to V$和 $E\to B$和 $B'\to B$，其中 U， V是可指数化对象。那么，左受限一致提升的集合恰好是切片范畴中的 Hom 集。

$$\begin{array}{ccc} U & & E \\ \downarrow & \boxslash & \downarrow \\ V & \to & B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & E \\ & & \downarrow \\ B' & \to & B \end{array} \cong \mathbb{C}_{/[U,E]\times_{[U,B]}[V,B]}([U,E]\times_{[U,B]}[V,B'],[V,E])$$

— ♦

作为内化的直接推论，我们得到以下关于稳定提升结构存在性的结果。

定理 1.10。设 $\mathbb{C}$ 为一个局部笛卡尔闭模型范畴，其中（平凡余纤维化，纤维化）对或（余纤维化，平凡纤维化）对的拉回幂均存在截面。那么，只要 $(\mathbb{C},)$ 是一个（平凡余纤维化，纤维化）对或（余纤维化，平凡纤维化）对，结构化提升的集合

$$\begin{array}{ccc} U & & E \\ \downarrow & \boxslash & \downarrow \\ V & \longrightarrow & V' \quad B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} U & \boxslash & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ V \quad B' & \longrightarrow & B \end{array}$$

只要 $(U \to V,\ E \to B)$ 是（平凡余纤维化，纤维化）对或（余纤维化，平凡纤维化）对，它们就非空。 — ♦

证明。 由引理1.6 和1.8。 — ■

CwR 中的提升结构

在 Uemura 的可表示映射范畴（CwR）框架中，类型理论被定义为一个 CwR [Uem23，定义 3.2。3]。推论1.7 和1.9 的内化结果现在允许人们自由扩展一个 CwR $\mathbb{T}$，使其带有提升结构。

为了陈述这 s 构造中，我们回顾一下关于 CwR 的预备知识，来自 [Uem23；Jel25] .

定义 1.11 ([Jel25，定义 2.3。1], 参见 [Uem23，定义 3.2。1])。一个 具有可表示映射的范畴（*CwR*）是一个范畴 $\mathbb{C}$，它具有有限极限，并配备了一个由可指数化映射组成的拉回稳定类 $\mathrm{R}_{\mathbb{C}}$ 的饱和宽子范畴，称为 可表示映射。

CwR 的映射是指其底层范畴之间保留有限极限、可表示映射以及沿可表示映射的推前的映射。

记 CwR 为由（小）CwR、CwR 的映射以及在可表示映射处的方形为拉回的自然变换组成的 2-范畴。— ♦

定义 1.12。记 为 $\mathrm{Cat}_{\mathrm{m}}$，即由带标记映射的（小）范畴及方形组成的 2-范畴 s.

也就是说，标记范畴是一个范畴 $\mathbb{C}$，并配备了两个特定的满且充实子范畴 $\mathrm{M}_{\mathbb{C}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ 和 $\mathrm{S}_{\mathbb{C}} \hookrightarrow \mathbb{C}^{\to}$。标记范畴之间的 1-胞恰好是底层范畴之间的函子，它将标记映射和方块映射到标记映射和方块。标记范畴的 1-胞之间的 2-胞是自然变换，其在标记映射处的自然性方块均为拉回。— ♦

CwR 的可表示映射通过将标记映射取为可表示映射、将标记方块取为拉回方块，从而赋予其标记范畴的结构。反过来，根据 Jelínek 的以下结果，每个标记范畴都能自由地产生一个 CwR。

定理 1.13 ([Jel25，推论 3.2.16 和 3.2.17])。 遗忘 2-函子 $|-|\colon \mathrm{CwR} \to \mathrm{Cat}_{\mathrm{m}}$ 有一个左双伴随 $\langle - \rangle\colon \mathrm{Cat}_{\mathrm{m}} \to \mathrm{CwR}$，并且 CwR 具有所有双余极限。— ■

现在我们利用这一结果，为 CwR 自由地扩展出带有提升结构的 CwR，这相当于在切片范畴中的对象之间形式地添入一个映射。

构造 1.14. 设 $\mathbb{C}$ 是一个 CwR。固定两个标记范畴的映射 $\mathbb{I} \to \mathbb{J}$ 和 $\mathbb{I} \to |\mathbb{C}|$。那么，我们将以下 CwR 中的双推出记作 $\mathbb{C} \cup_{\mathbb{I}} \mathbb{J}$：

$$\begin{tikzcd} \langle \mathbb{I} \rangle \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C} \arrow[d] \\ \langle \mathbb{J} \rangle \arrow[r] & \mathbb{C} \cup_{\mathbb{I}} \mathbb{J} \end{tikzcd}$$

其中，顶行中的映射 $\langle \mathbb{I} \rangle \to \mathbb{C}$ 是映射 $(\langle - \rangle \dashv |-|)$ 的转置，而左列中的映射是 $\mathbb{I} \to \mathbb{J}$ 在 $\langle - \rangle$下的像，依据 [Jel25，推论 3.2.16 和 3.2.17]。—— ♦

构造 1.15。 设 $\mathbb{C}$ 是一个 CwR，并固定指数对象之间的映射 $U \to V \to V'$ 和$E \to B$ 中的 $\mathbb{C}$。将通过自由扩展 $\mathbb{C}$ 而得到的 CwR 定义为：添加一个针对 $U \to V$、沿着 $E \to B$限制到 $V \to V'$ 的提升结构所得的如下 CwR，该 CwR 由构造 1.14得到。

$$\mathbb{C}\left[\begin{array}{ccc} U & & E \\ \downarrow & \boxslash & \downarrow \\ V \to V' & & B \end{array}\right] := \mathbb{C} \cup_{\{\bullet \to \bullet \leftarrow \bullet\}} \left\{ \begin{array}{ccc} [U,E] \times_{[U,B]} [V',B] & \to & [V,E] \\ \downarrow & \swarrow & \\ [U,E] \times_{[U,B]} [V,B] & & \end{array} \right\}$$

这个双推出自由地添加一个 映射 $[U,E] \times_{[U,B]} [V',B] \to [V,E]$在 $[U,E] \times_{[U,B]} [V',B]$到 CwR 中的 $\mathbb{C}$.

对偶地，若 $U \to V$是 $\mathbb{C}$ 中可指数化对象之间的映射，并且有映射 $E \to B$ 以及$B' \to B$，那么， $U \to V$相对于 $E \to B$沿 $B' \to B$限制后得到的、带有形式提升结构的 CwR，是通过 CwR 中构造 1.14所得对象的双推出得到的。

$$\mathbb{C}\left[\begin{array}{ccc} U & & E \\ \downarrow & \boxslash & \downarrow \\ V & B' \to & B \end{array}\right] := \mathbb{C} \cup_{\{\bullet \to \bullet \leftarrow \bullet\}} \left\{ \begin{array}{ccc} [U,E] \times_{[U,B]} [V,B'] & \to & [V,E] \\ \downarrow & \swarrow & \\ [U,E] \times_{[U,B]} [V,B] & & \end{array} \right\}$$

— ♦

定理 1.16. 设 $\mathbb{C}$ 是一个 CwR，并固定可表示对象之间的映射 $U \to V \to V'$（即映射到终对象的映射是可表示的对象）以及 $E \to B$ 中的 $\mathbb{C}$。那么，下方左侧所示映射的同构类，与映射 F 的同构类一一对应：$\mathbb{C} \to \mathbb{D} \in$ 带有相对于 $FE \to FB$、沿 $FV \to FV'$ 限制的 $FU \to FV$ 提升结构（任选其一）的 CwR。

$$\mathbb{C}\left[\begin{array}{ccc} U & & E \\ \downarrow & \boxslash & \downarrow \\ V \to V' & & B \end{array}\right] \to \mathbb{D} \in \mathsf{CwR} \qquad \mathbb{C}\left[\begin{array}{ccc} U & & E \\ \downarrow & \boxslash & \downarrow \\ V \to V' & & B \end{array}\right] \to \mathbb{D} \in \mathsf{CwR}$$

对偶地，给定$\mathbb{C}$中的 $B' \to B$，上方右侧所示映射的同构类，与映射 F 的同构类对应： $\mathbb{C} \to \mathbb{D} \in$ 带有相对于$FE \to FB$、沿 $FB' \to FB$ 限制的 $FU \to FV$ 提升结构（任选其一）的 CwR。— ♦

证明。我们证明左受限提升结构的情形。根据双推出的泛性质，映射的同构类

$$\mathbb{C} \cup_{\{\bullet \to \bullet \leftarrow \bullet\}} \left\{ \begin{array}{ccc} [U,E] \times_{[U,B]} [V',B] & \to & [V,E] \\ \downarrow & \swarrow & \\ [U,E] \times_{[U,B]} [V,B] & & \end{array} \right\} \to \mathbb{D} \in \mathsf{CwR}$$

唯一对应于映射的同构类 F： $\mathbb{C} \to \mathbb{D}$ 配备了一个映射的选择$F([U,E] \times_{[U,B]} [V',B]) \to F([V,E])$在 $F([U,E] \times_{[U,B]} [V,B])$之上。但是 F是左正合的，并保留沿可表示映射的所有推前，因此 F 将余跨度映射

$$[U,E] \times_{[U,B]} [V',B] \to [U,E] \times_{[U,B]} [V,B] \leftarrow [V,E] \in \mathbb{C}$$

to

$$[FU, FE] \times_{[FU,FB]} [FV', FB] \to [FU, FE] \times_{[FU,FB]} [FV, FB] \leftarrow [FV, FE] \in \mathbb{D}$$

由于 $F\colon\ \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ 是 CwR 的映射，且 $U \to V \to V'$ 是可表示对象之间的映射，映射 $FU \to FV \to FV'$ 因此仍是可表示对象之间的映射，从而是可指数化对象。因此， $FU \to FV$相对于 $FE \to FB$沿 $FV \to FV'$限制的提升结构，恰好是映射$[FU, FE] \times_{[FU,FB]} [FV', FB] \to [FV, FE]$在 $[FU, FE] \times_{[FU,FB]} [FV, FB]$之上，根据推论 1.7。—— ■

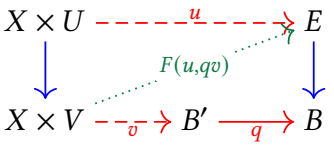
2 限制与复合结构化提升

现在，我们将介绍以多种方式限制提升结构，从已有的提升结构构造新的提升结构。我们先固定左映射，并在构造 2.1 和 2.2 中对右映射施加各种限制。我们还将说明，在构造 2.3 中，针对可复合对中的右映射的结构化提升，会导出针对其复合映射的结构化提升。随后，我们固定右映射，并在构造 2.4和 2.6 中对左映射施加各种限制。

首先，我们证明，对右侧现有的结构化提升加以限制，会得到受限的结构化提升。

构造 2.1 。固定映射 $U \to V$、 $E \to B$ 和 $q\colon\ B' \to B$。我们定义一个映射，如左侧所示

$$\begin{pmatrix} U & E \\ \downarrow & \downarrow \\ V & B \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} U & & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & B' \xrightarrow{q} & B \end{pmatrix}$$



其中，每个 $U \to V$ 关于 $E \to B$ 的 F 结构化提升，都会对应到一个结构化提升；该提升以解 $F(u, qv)$ 解出每个提升问题 $(u,\ v)$。—— ♦

接下来我们注意到，只需对右侧映射作拉回，就可以去掉右侧的限制。

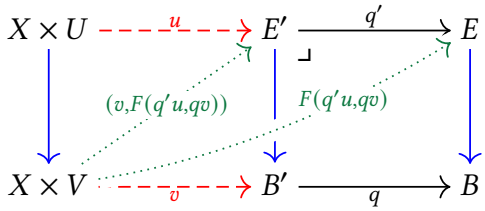
构造 2.2. 设有一个映射 $U \to V$， 以及沿着q对 $E \to B$ 作出的拉回 $E' \to B'\colon\ B' \to B$。

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{q'} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ B' & \xrightarrow{q} & B \end{array}$$

那么，我们定义如下双射

$$\begin{pmatrix} U & & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & B' \xrightarrow{q} & B \end{pmatrix} \xrightarrow{\cong} \begin{pmatrix} U & E' \\ \downarrow & \downarrow \\ V & B' \end{pmatrix}$$

它将每个沿 $B' \to B$ 限制的、针对 $E \to B$ 的 $F$of$U \to V$，映射到解决提升问题（$u,\ v$）的提升结构，其解为（$v,\ F(q'u,\ qv)$）。



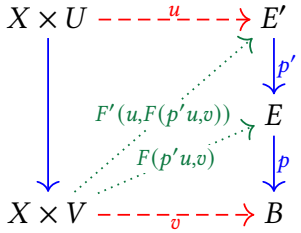
— ♦

在下一个构造中，我们将展示，针对可复合的右映射对的结构化提升如何导出针对其复合映射的结构化提升。

构造 2.3。固定映射 $U \to V$ 和一对可复合映射 $E' \xrightarrow{p'} E \xrightarrow{p} B$。然后，我们定义一个映射

$$\begin{pmatrix} U & E' \\ \downarrow & \downarrow p' \\ V & E \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U & E \\ \downarrow & \downarrow p \\ V & B \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} & E' \\ U & \downarrow p' \\ \downarrow & E \\ V & \downarrow p \\ & B \end{pmatrix}$$

它将一对 $F' \in (U \to V)\ (E' \to E)$ 和 $F \in (U \to V)\ (E \to B)$ 映射到如下提升结构：该结构以连续提升 $F'(u, F(p'u, v))$ 解出提升问题 $(u,\ v)$。

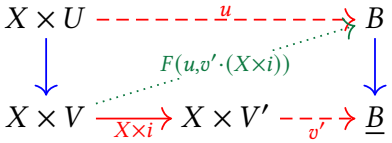


— ♦

现在我们固定右映射，并对左映射施加各种限制。首先，我们证明构造 2.1 的左侧对应形式。

构造 2.4。固定映射 $U \to V$ 和 $i\colon V \to V'$ 和 $E \to B$。我们按左侧所示构造一个映射

$$\begin{pmatrix} U & E \\ \downarrow & \downarrow \\ V & B \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} U & & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \xrightarrow{i} V' & B \end{pmatrix}$$



其中，$F \in (U \to V)\ (E \to B)$ 的像为每个提升问题 $(u,\ v')$ 给出解 $F(u,\ v' \cdot (X \times i))$。

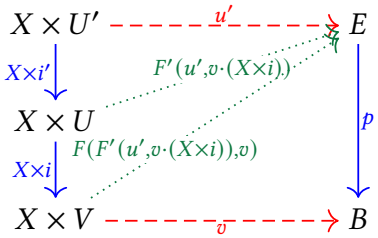
— ♦

我们还有构造的左侧对应形式2.3。

构造 2.5。固定一对可复合的映射 $U' \xrightarrow{i'} U \xrightarrow{i} V$ 以及一个映射 $E \to B$。然后，我们定义一个映射

$$\begin{pmatrix} U' & E \\ i'\downarrow & \downarrow \\ U & B \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U & E \\ i\downarrow & \downarrow \\ V & B \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} U' & \\ i'\downarrow & E \\ U & \downarrow \\ i\downarrow & B \\ V & \end{pmatrix}$$

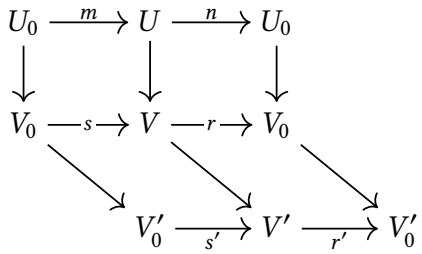
它将一对 $F' \in (U' \to U)\ (E \to B)$ 和 $F \in (U \to V)\ (E \to B)$ 映射到能够解决提升问题 (u', v) 的提升结构，其连续提升为 $F(F'(u', v \cdot (X \times i))\ v)$。



— ♦

接下来，我们将展示这样一个事实的结构化版本：对提升问题具有左映射性质的映射在直缩下封闭。

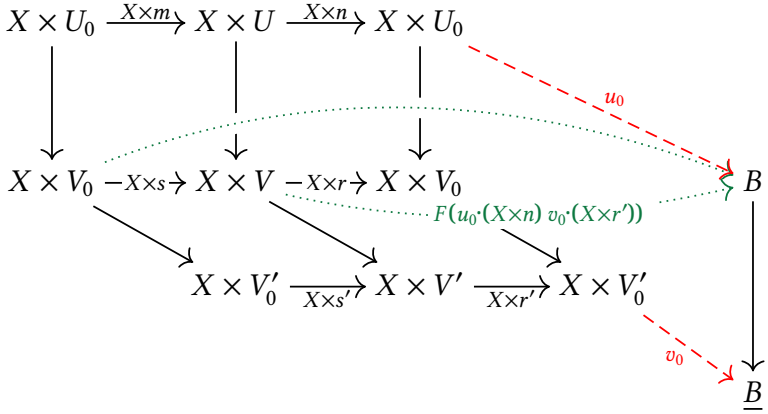
构造 2.6。假设给定一组可复合映射对的直缩。



那么，我们定义一个映射

$$\begin{pmatrix} U & & E \\ \downarrow & \boxslash & \downarrow \\ V & \longrightarrow V' & B \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} U_0 & & E \\ \downarrow & \boxslash & \downarrow \\ V_0 & \longrightarrow V_0' & B \end{pmatrix}$$

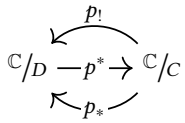
将左侧的每个提升结构 F 映射到这样一种提升结构：它为下方的每个提升问题 $(u_0,\ v_0)$求解，解为 $F(u_0 \cdot (X \times n)\ v_0 \cdot (X \times r')) \cdot (X \times s)$。



— ♦

通过串接构造 2.1 和 2.2，我们可以观察到，若 $U \to V$ 在左侧相对于 $E \to B$ 一致提升，$U \to V$ 那么相对于任意拉回 $E' \to B'$ of $E \to B$也会在左侧一致提升。对偶地，我们可以思考能否在左映射 $U \to V$的拉回上诱导出一致提升结构。

首先，回忆一下，可指数化映射 $p\colon C \to D$ 是这样一种映射：其拉回函子 $p^*\colon \mathbb{C}/_D \to \mathbb{C}/_C$同时存在左伴随和右伴随，分别由后复合和推前给出。



我们还回顾模型范畴中的一个结果：如果纤维化在沿纤维化推前时保持稳定，那么平凡余纤维化在沿纤维化拉回时也保持稳定。通过在结构化情形中重现这一结果，我们给出一种构造，可在左映射的拉回上诱导一致提升结构。

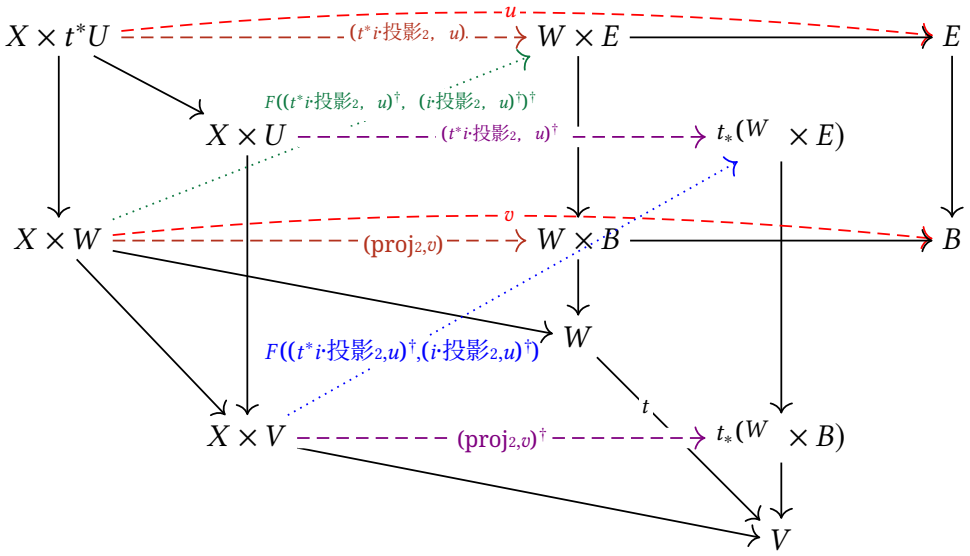
构造 2.7。固定一个泛左映射 $i\colon U \to V$、一个泛右映射 $E \to B$，以及一个可指数化映射 $t\colon W \to V$，并取 $U \to V$ 沿 t 的一个拉回 $t^*i\colon t^*U \to W$。

$$\begin{array}{ccc} t^*U & \longrightarrow & U \\ {\scriptstyle t^*i}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle i} \\ W & \xrightarrow[t]{} & V \end{array}$$

我们证明，当泛左映射 $U \to V$ 相对于由 $E \to B \in \mathbb{C}/_1$ 经 $1 \leftarrow W \to V \to 1$ 的多项式函子作用得到的映射 $t_*(W \times E) \to t_*(W \times B)$ 一致提升时，拉回 $t^*U \to W$ 可相对于泛右映射 $E \to B$ 一致提升。也就是说，我们构造一个映射

$$\begin{pmatrix} U & t_*(W\times E) \\ \downarrow & \downarrow \\ V & t_*(W\times B) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} t^*U & E \\ \downarrow & \downarrow \\ V' & B \end{pmatrix}$$

令 F 为相对于 t_* 的提升结构，作用于 $U \to V (W \times E) \to t_*(W \times B)$。现在假设给定一个提升问题 (u, v)，它是 $X \times t^*U \to X \times W$ 相对于 $E \to B$ 的提升问题，如弯曲的后侧面所示。



然后，我们通过以下过程得到所需的提升解：

(1) 构造由 $((t^*i\cdot \mathrm{proj}2, u), (\mathrm{proj}2, v))$ 给出的提升问题，其中 $X \times t^*U \to X \times W$ 对着 $W \times E \to W \times B$。(2) 由于 $X \times -$ 保持拉回，$X \times U \to X \times V \in \mathbb{C}/_V$ 在 $t\colon W \to V$ 下的拉回是 $X \times t^*U \to X \times W \in \mathbb{C}/_W$。因此，我们可以将 $((t^*i\cdot \mathrm{proj}2, u), (\mathrm{proj}2, v))$ 转置，得到一个提升问题 $((t^*i\cdot \mathrm{proj}2, u)^\dagger, (\mathrm{proj}2, v)^\dagger)$，从而得到一个解。(3) 根据原始解 F，我们得到一个解 $F((t^*i\cdot \mathrm{proj}2, u)^\dagger, (\mathrm{proj}2, v)^\dagger)$。

(4) 将其转置回来，我们得到所需的解 $F((t^*i\cdot 投影_2, u)^\dagger, (投影_2, v)^\dagger)^\dagger$。

由于转置运算具有自然性，F 的一致性结构表明，这确实诱导出一个结构化提升。— ♦

因此，　结合上述各种构造，我们得到如下结果。

定理 2.8. 固定映射 $U \to V \in \mathbb{C}/_C$ 沿映射 $t\colon W \to V \in \mathbb{C}/_C$ 的拉回 $t^*U \to W \in \mathbb{C}/_C$。

$$\begin{array}{ccc} t^*U & \longrightarrow & U \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ W & \xrightarrow[t]{} & V \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} t_*(W \times_C E) & \longrightarrow & E \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ t_*(W \times_C B) & \longrightarrow & B \end{array}$$

如果 $U \to V \in \mathbb{C}$ 相对于映射 $E \to B \in \mathbb{C}$ 一致提升，且推前映射 $t_*(W \times E) \to t_*(W \times B)$ 是 $E \to B$的一个拉回，那么 $t^*U \to W \in \mathbb{C}$也相对于 $E \to B \in \mathbb{C}$一致提升。 — ♦

证明。 根据构造2.1、2.2和2.7。 — ■

3 提升结构的基变

现在，我们在切片范畴中研究提升结构，并证明它们在拉回和后复合基变操作下保持不变。

我 们首先明确在切片范畴中成为提升结构的含义 .

定义 3.1。固定一个对象 $C \in \mathbb{C}$。给定切片 $\mathbb{C}/C$ 中的映射 $U \to V$、 $V \to V'$ 和 $E \to B$， 将 $U \to V$ 沿 $V \to V'$ 在 $E \to B$ 下左侧受限于 $\mathbb{C}/C$ 的结构化提升集合记为下方左侧所示。

$$\begin{array}{ccc} U & & E \\ \downarrow & \swarrow_C & \downarrow \\ V & \longrightarrow V' & B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} U & & E \\ \downarrow & \swarrow_C & \downarrow \\ V & B' \longrightarrow & B \end{array}$$

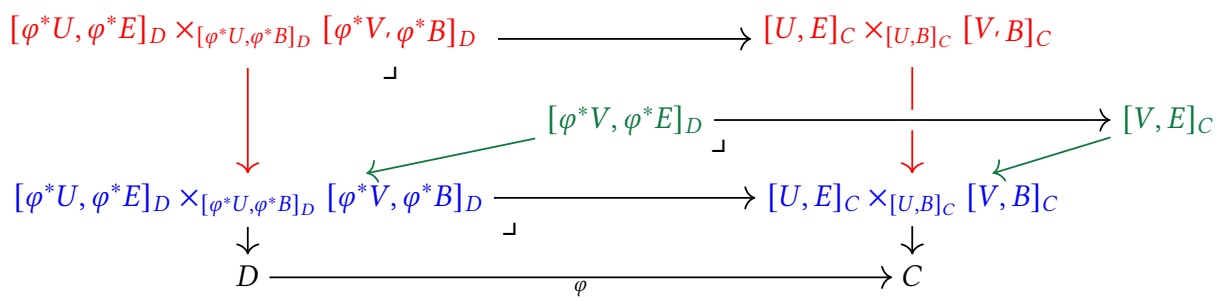
对偶地，给定 $U \to V$和 $B' \to B$以及 $E \to B$在切片 $\mathbb{C}/C$中， $U \to V$沿 $B' \to B$向右限制、相对于 $E \to B$的结构化提升在 $\mathbb{C}/C$中的集合记作右上方所示。—— ♦

由于提升结构本质上是极限性的，或者说是一个“右侧概念”，因此它们在拉回下保持稳定并不令人意外。

构造 3.2。固定一个映射 $\varphi\colon D \to C$，以及映射 $U \to V \to V' \in \mathbb{C}/C$和 $E \to B \in \mathbb{C}/C$，其中 U、 V、 V'是关于 C的切片中的指数对象，因此根据贝克-切瓦利条件，φ^*U、 φ^*V、 φ^*V'是关于 D的切片中的指数对象。我们定义一个映射

$$\begin{pmatrix} U & & E \\ \downarrow & \swarrow_C & \downarrow \\ V & \longrightarrow V' & B \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \varphi^*U & & \varphi^*E \\ \downarrow & \swarrow_D & \downarrow \\ \varphi^*V & \longrightarrow \varphi^*V' & \varphi^*B \end{pmatrix}$$

由于拉回函子 $\varphi^*\colon \mathbb{C}/C \to \mathbb{C}/D$保持极限和指数对象，因此有以下拉回



所需的映射由引理 1.6 给出。

同样，对于映射 $U \to V$和 $B' \to B \leftarrow E$，其中 U， V 是 $\mathbb{C}/C$ 中的可指数化对象，我们可以构造一个映射

$$\begin{pmatrix} U & & E \\ \downarrow & \swarrow_{C} & \downarrow \\ V & B' \to B & \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \varphi^* U & & \varphi^* E \\ \downarrow & \swarrow_{D} & \downarrow \\ \varphi^* V & \varphi^* B' \to \varphi^* B & \end{pmatrix}$$

— ♦

接下来我们将证明，通过后复合进行基变换也会保留某些形式的提升结构。为此，回顾一下，推前既实现了拉回函子的外部左伴随，也实现了内部左伴随，具体来说如下所述。

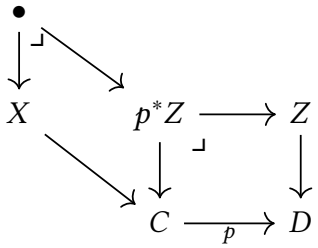
引理 3.3. 固定一个可指数化映射 $p\colon C \to D$. 那么，

(1) 对任意 $X \to C \in \mathbb{C}/C$和 $Z \to D \in \mathbb{C}/D$，有 $p_!(X \times_C p^* Z) \cong p_! X \times_D Z$，其中 $p_!$是拉回函子的左伴随。

(2) 对任意可指数化的 $X \to C \in \mathbb{C}/C$和 $Y \to D \in \mathbb{C}/D$，有 $p_*[X, p^* Y]_C \cong [p_! X, Y]_D$，其中$p_*$ 是沿着 p 的推前（即拉回的右伴随）。

— ♦

证明。 (1) 由拉回引理直接得出：



(2) 现在由 (1) 和可表性得出，因为对于每个 $Z \to D \in \mathbb{C}/D$，都有

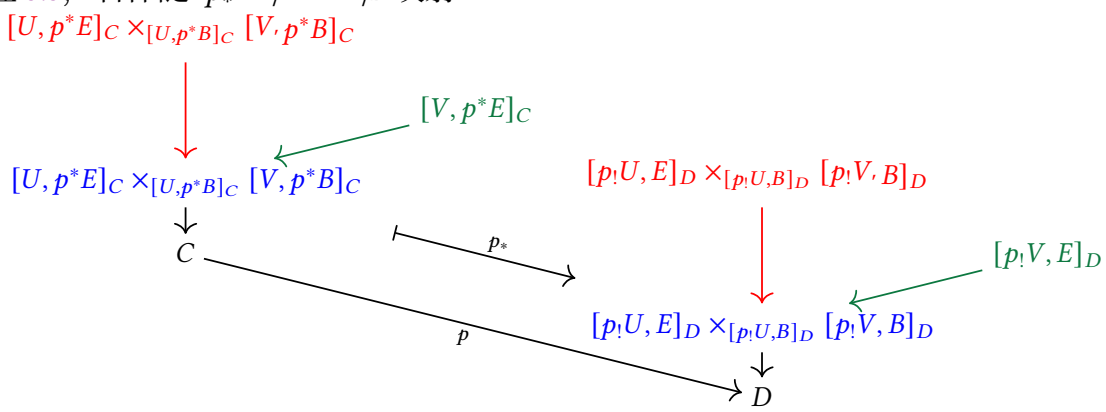
$$\begin{aligned} \mathbb{C}/D(Z, p_*[X, p^* Y]_C) &= \mathbb{C}/C(p^* Z, [X, p^* Y]_C) \\ &= \mathbb{C}/C(p^* Z \times_C X, p^* Y) \\ &= \mathbb{C}/D(p_!(p^* Z \times_C X), Y) \\ &= \mathbb{C}/D(Z \times_D p_! X, Y) \\ \mathbb{C}/D(Z, p_*[X, p^* Y]_C) &= \mathbb{C}/D(Z, [p_! X, Y]_D) \end{aligned}$$

— ■

构造 3.4。固定一个映射 $p\colon C \to D$。设有映射 $U \to V$和 $V \to V'$，它们位于 $\mathbb{C}/C$ 中，另有一个映射 $E \to B \in \mathbb{C}/D$，其中 U, V, V'在 C 上的切片范畴中是可指数化的。我们构造一个映射

$$\begin{pmatrix} U & & p^* E \\ \downarrow & \swarrow_{C} & \downarrow \\ V \to V' & & p^* B \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} p_! U & & E \\ \downarrow & \swarrow_{D} & \downarrow \\ p_! V \to p_! V' & & B \end{pmatrix}$$

根据引理 3.3，右伴随 $p_*\colon {}^{\mathbb{C}}\!/_C \to {}^{\mathbb{C}}\!/_D$ 映射



出于同样的原因，如果在 $U \to V$in ${}^{\mathbb{C}}\!/_C$where U， V 上有映射，且它们在 C 上方的切片范畴中是可指数化的，并且在 ${}^{\mathbb{C}}\!/_D$ 中有映射 $B' \to B$ 和 $E \to B$，那么也有一个映射

$$\begin{pmatrix} U & & p^*E \\ \downarrow & \swarrow_C & \downarrow \\ V & p^*B' & \to & p^*B \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} p_!U & & E \\ \downarrow & \swarrow_D & \downarrow \\ p_!V & B' & \to & B \end{pmatrix}$$

— ♦

我们还给出构造 2.7 的局部版本。由于构造 2.7 涉及推前，我们需要回顾一下：切片范畴中的推前，正是通过环境范畴中的推前来计算的。

引理 3.5。固定 $C \in \mathbb{C}$ 和一个映射 $t\colon U \to V \in {}^{\mathbb{C}}\!/_C$。那么，在 ${}^{\mathbb{C}}\!/_C$ 中沿 t 的推前，就是在环境范畴 $\mathbb{C}$ 中沿 t 的推前。—— ♦

证明。这是因为切片范畴中的拉回恰好就是环境范畴中的拉回。

— ■

因此，我们得到了构造的局部版本2.7。

构造 3.6。固定一个对象 $C \in \mathbb{C}$、一个泛左映射 $i\colon U \to V \in {}^{\mathbb{C}}\!/_C$ 和一个泛右映射 $E \to B \in {}^{\mathbb{C}}\!/_C$，其中 U,V在切片中是可指数化的，此外还有一个可指数化映射 $t\colon W \to V$，以及 $U \to V$ 沿 t 的一个拉回 $t^*U \to W \in {}^{\mathbb{C}}\!/_C$。

然后，我们构造一个映射

$$\begin{pmatrix} U & & t_*(W \times_C E) \\ \downarrow & \swarrow_C & \downarrow \\ V & & t_*(W \times_C B) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} t^*U & & E \\ \downarrow & \swarrow_C & \downarrow \\ V' & & B \end{pmatrix}$$

通过应用构造 2.7 并利用引理 3.5 注意到切片 ${}^{\mathbb{C}}\!/_C$ 中的推前恰好就是 $\mathbb{C}$中的推前。— ♦

因此，我们得到定理的以下局部版本 2.8。

定理 3.7。固定一个对象 $C \in \mathbb{C}$，以及沿着可指数化映射 $t\colon W \to V \in {}^{\mathbb{C}}\!/_C$ 对可指数化对象之间的映射 $U \to V \in {}^{\mathbb{C}}\!/_C$ 取的一个拉回 $t^*U \to W \in {}^{\mathbb{C}}\!/_C$。

$$\begin{array}{ccc} t^*U & \longrightarrow & U \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ W & \xrightarrow[t]{} & V \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} t_*(W \times_C E) & \longrightarrow & E \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ t_*(W \times_C B) & \longrightarrow & B \end{array}$$

如果 $U \to V \in \mathbb{C}/c$ 相对于映射 $E \to B \in \mathbb{C}/c$ 一致提升，并且推前映射 $t_*(W \times_C E) \to t_*(W \times_C B)$ 是 $E \to B$ 的一个拉回，那么 $t^*U \to W \in \mathbb{C}/c$ 相对于 $E \to B \in \mathbb{C}/c$ 也一致提升。 — ♦

证明。 由构造2.1、2.2和3.6。 — ■

CwR 中的提升结构

为了在 CwR 框架中对诸如J-消去之类的模式匹配操作进行范畴论公理化，我们需要构造在切片范畴中自由扩展了形式提升结构的 CwR。其思路与构造1.15相同。

构造 3.8。 设 $\mathbb{C}$ 是一个 CwR，并固定映射 $U \to V \to V'$，它们位于指数对象之间，而$E \to B$ 位于固定对象 $C \in \mathbb{C}$上的切片中。将由 $\mathbb{C}$ 自由扩展而成的 CwR（带有一个提升结构，该结构的 $U \to V$相对于 $E \to B$沿 $V \to V'$ 在 C上的切片中作限制）定义为以下CwR 中的双推出，使用构造 1.14。

$$\mathbb{C}\left[\begin{array}{ccc} U & & E \\ \downarrow & \swarrow_C & \downarrow \\ V & \to V' & B \end{array}\right] \coloneqq \mathbb{C} \cup_{\{\bullet\to\bullet\leftarrow\bullet\}} \left\{\begin{array}{ccc} [U,E]_C \times_{[U,B]_C} [V',B]_C & \to & [V,E]_C \\ \downarrow & \swarrow & \\ [U,E]_C \times_{[U,B]_C} [V,B]_C & & \end{array}\right\}$$

对偶地，若 $U \to V$是 $\mathbb{C}/c$中可指数化对象之间的映射，并且有映射 $E \to B$ 以及$B' \to B$ 位于 $\mathbb{C}/c$中，那么带有形式提升结构的 CwR（该结构的 $U \to V$相对于 $E \to B$沿$B' \to B$ 在 C 上的切片中作限制）可由以下CwR 中的双推出得到，使用构造 1.14。

$$\mathbb{C}\left[\begin{array}{ccc} U & & E \\ \downarrow & \swarrow_C & \downarrow \\ V & B' \to & B \end{array}\right] \coloneqq \mathbb{C} \cup_{\{\bullet\to\bullet\leftarrow\bullet\}} \left\{\begin{array}{ccc} [U,E]_C \times_{[U,B]_C} [V,B']_C & \to & [V,E]_C \\ \downarrow & \swarrow & \\ [U,E]_C \times_{[U,B]_C} [V,B]_C & & \end{array}\right\}$$

— ♦

定理 3.9. 设 $\mathbb{C}$ 为一个 CwR，并固定表示对象之间的映射 $U \to V \to V'$（即映射到终对象的映射可表示的对象），且 $E \to B$ 属于 $\mathbb{C}$。那么，下方左侧所示映射的同构类，与满足以下条件的映射 $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D} \in$ 的同构类一一对应：该 CwR 配备一个提升结构选择，使 $FU \to FV$ 相对于沿 $FV \to FV$ 在切片 FC 上限制的 $FE \to FB$ 具有提升结构。

$$\mathbb{C}\left[\begin{array}{ccc} U & & E \\ \downarrow & \swarrow_C & \downarrow \\ V & \to V' & B \end{array}\right] \to \mathbb{D} \in \mathsf{CwR} \qquad\qquad \mathbb{C}\left[\begin{array}{ccc} U & & E \\ \downarrow & \swarrow_C & \downarrow \\ V & \to V' & B \end{array}\right] \to \mathbb{D} \in \mathsf{CwR}$$

对偶地，给定属于 $\mathbb{C}$ 的 $B' \to B$，上方右侧所示映射的同构类，与满足以下条件的映射 $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D} \in$ 的同构类一一对应：该 CwR 配备一个提升结构选择，使 $FU \to FV$ 相对于沿 $FB' \to FB$ 在切片 FC 上限制的 $FE \to FB$ 具有提升结构。— ♦

证明。 与定理1.16完全相同。 — ■

4 推出积的结构化近似

为下一节中莱布尼茨转置的结构化版本做准备，5我们首先阐释并介绍推出积的一种结构化近似。

作为动机，假设给定两个映射，我们将它们视为“边界包含”，并用边界符号 $\partial V \to V$ 和 $\partial L \to L$ 表示它们的定义域和值域。通常，积 $V \times L$ 的边界 $\partial(V \times L)$ 是通过推出积 $\partial V \times L \cup V \times \partial L \to V \times L$ 构造的。

然而，由于推出积依赖于推出这一左侧概念，而我们只假设论域 $\mathbb{C}$ 是局部笛卡尔闭的，因此这些推出可能根本不存在。因此，我们希望有一种映射概念，其行为足够类似于这种推出积。

通常的积边界 $\partial V \times L \cup V \times \partial L$ 是一个推挤，具有如下泛性质：映射$\partial V \times L \cup V \times \partial L \to E$与一对映射 $\partial V \times L \to E$和 $V \times \partial L \to E$一一对应。但由于在笛卡尔闭范畴中，积是指数对象的左伴随，取积会保留推挤。这意味着对于每个 $X \in \mathbb{C}$，实际上都有 $X \times (\partial V \times L \cup V \times \partial L \to E) \cong X \times \partial V \times L \cup X \times V \times \partial L$。

因此，我们希望这样表述：对象 E 认为对象 $\partial(V \times L)$的行为类似于积边界，当对每个 $X \in \mathbb{C}$，映射 f 与下锥（$f|_{X\times\partial V\times L}$，$f|_{X\times V\times\partial L}$）之间都存在如下自然双射对应。

$$X \times \partial(V \times L) \xrightarrow{f} E$$

$$\begin{array}{ccc} X \times \partial V \times \partial L & \longrightarrow & X \times V \times \partial L \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f|_{X\times V\times\partial L}} \\ X \times \partial V \times L & \xrightarrow[f|_{X\times\partial V\times L}]{} & E \end{array}$$

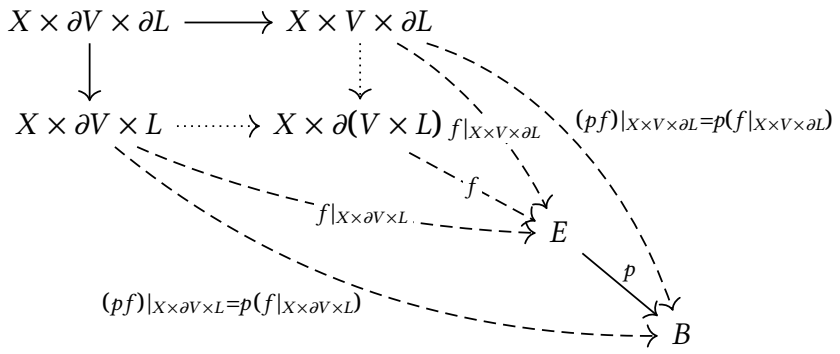
这些参数化信念可以利用笛卡尔亲近性归纳为以下定义。

定义4.1。给定 $\mathbb{C}$ 中可指数化对象之间的映射 $\partial V \to V$ 和 $\partial L \to L$，相对于对象 E，可指数化对象 $\partial(V \times L)$ 上的积边界逼近结构 是一个同构

$$[\partial V \times L, E] \times_{[\partial V\times\partial L, E]} [V \times \partial L, E] \xrightarrow{\cong} [\partial(V \times L), E]$$

— ♦

接下来，假设 E和B都认为 $\partial(V\times L)$ 的行为如同积边界。那么，E认为，每个映射 $f\colon X\times\partial(V\times L) \to E$都完全由两个分量 $f|_{X\times\partial V\times L}$和 $f|_{X\times V\times\partial L}$决定。现在，给定一个映射 $p\colon E \to B$，我们可以后复合得到一个映射 $pf\colon X\times\partial(V\times L) \to E \to B$。于是，$B$也认为 pf完全由两个分量 $(pf)|_{X\times\partial V\times L}$和 $(pf)|_{X\times V\times\partial L}$决定。我们想要表达的是，当对 p 进行复合后，若 B 的幻觉分量限制 $(pf)|_{X\times\partial V\times L}$和 $(pf)|_{X\times V\times\partial L}$分别是由 p 与 E 的幻觉分量限制 $f|_{X\times\partial V\times L}$和 $f|_{X\times V\times\partial L}$复合而得到的，那么复合不会破坏 E和 B对 $\partial(V\times L) \to V\times L$ 抱有的幻觉。



我们再次可以使用内部 Hom 将这类幻觉映射打包起来。

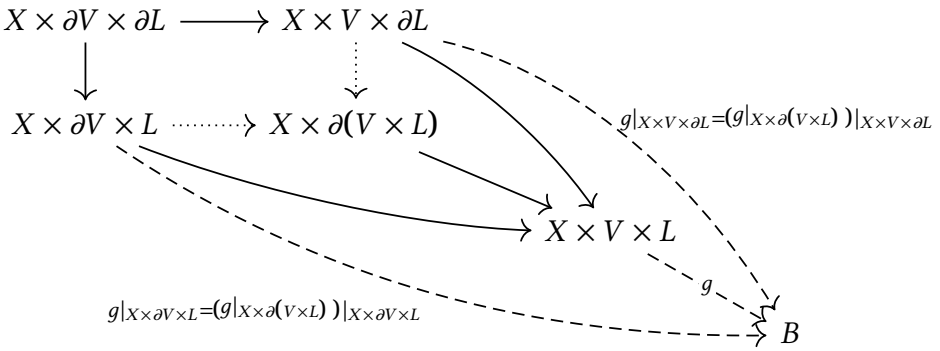
定义 4.2. 设 $\mathbb{C}$ 中的可指数化对象之间有映射 $\partial V \to V$ 和 $\partial L \to L$。假设可指数化对象 $\partial(V \times L)$ 分别相对于 E 和 B 配备了乘积近似结构 s_E 和 s_B。当下图交换时，映射 p 保持边界近似结构

交换。

$$\begin{array}{ccc} [\partial V \times L, E] \times_{[\partial V \times \partial L, E]} [V \times \partial L, E] & \xleftrightarrow{\cong} & [\partial(V \times L), E] \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\partial V \times L, B] \times_{[\partial V \times \partial L, B]} [V \times \partial L, B] & \xleftrightarrow[\cong]{} & [\partial(V \times L), B] \end{array}$$

– ♦

我们现在已经定义了对象 $\partial(V \times L)$ $V \times L$的边界对象时应有的表现。在通常的推出积定义中，这类边界对象 $\partial V \times L \cup V \times \partial L$ 都配有指向实际积对象 $V \times L$的包含映射。我们也可以说，映射 $\partial(V \times L) \to V \times L$ 表现得像一个推出积包含映射，但同样只是相对于某个处于妄想状态的对象 B 而言。给定这样的映射 $\partial(V \times L) \to V \times L$，对于任意映射 $g\colon X \times V \times L \to B$，我们都可以将其限制，得到映射 $g|_{X \times \partial(V \times L)} : X \times \partial(V \times L) \to B$。通过幻觉，$g|_{X \times \partial(V \times L)}$ 完全由它进一步的限制 $(g|_{X \times \partial(V \times L)})|_{X \times \partial V \times L}$ 和 $(g|_{X \times \partial(V \times L)})|_{X \times V \times \partial L}$ 所确定。另一方面，我们本可以利用 $g|_{X \times \partial V \times L}$ 和 $g|_{X \times V \times \partial L}$，一步得到这些限制，而不必经过$X \times \partial(V \times L) \to X \times V \times L$。精心设计的伪造 $\partial(V \times L) \to V \times L$ 应当足以欺骗 B，使其以为这两种限制与粘合的方式是相同的。



再一次，使用 内部 Hom，我们可以非常简洁地定义上述现象 .

定义 4.3。 固定映射 $\partial V \to V$和 $\partial L \to L$，它们位于可指数化对象之间。一个映射 $\partial(V \times L) \to V \times L$，若其位于可指数化对象之间，则实现了积边界结构 $[\partial V \times L, B] \times_{\partial V \times \partial L,\ E} [V \times \partial L, B] \xrightarrow{\cong} [\partial(V \times L)\ B]$ 在 $\partial(V \times L)$ 上， B 相对于 推出积近似结构 ，当以下三角图交换时

$$\begin{array}{ccc} [\partial V \times L, B] \times_{[\partial V \times \partial L, B]} [V \times \partial L, B] & \xrightarrow{\cong} & [\partial(V \times L)\ B] \\ & \nwarrow \quad \nearrow & \\ & [V \times L, B] & \end{array}$$

– ♦

现在，我们可以把所有内容结合起来，说明一个映射在何种情况下会认为另一个映射的行为类似于推出积。

定义 4.4。给定映射 $\partial V \to V$和 $\partial L \to L$和 $E \to B$，其中 $\partial V, V, \partial L, L$是 $\mathbb{C}$ 中的可指数化对象。

一个相对于 $E \to B$ 的、作用于 $\partial(V \times L) \to V \times L$ 上的 $(\partial V \to V) \mathbin{\hat{\times}} (\partial L \to L)$-逼近结构 由对象 $\partial(V \times L)$ 上的积边界逼近结构 s_E 和 s_B 组成；该对象必须是可指数化的，并且相对于 E 和 B，满足

- $E \to B$ 保留乘积边界逼近结构；并且

- $\partial(V \times L) \to V \times L$ 将 s_B 实现为相对于 B的（$\partial V \to V$） $\widehat{\times}(\partial L \to L)$逼近结构。

换言之，需要如下的黑色同构使图表交换。

$$\begin{array}{ccccc}
[\partial V \times L, E] \times_{[\partial V \times \partial L, E]} [V \times \partial L, E] & \xleftarrow{\cong} & [\partial(V \times L), E] \\
\downarrow & & \downarrow \\
[\partial V \times L, B] \times_{[\partial V \times \partial L, B]} [V \times \partial L, B] & \xleftarrow{\cong} & [\partial(V \times L), B] \\
\uparrow & & \uparrow \\
[V \times L, B] & = & [V \times L, B]
\end{array}$$

（推出积近似）

— ♦

在本节余下部分中，我们将建立第 3 节中构造的类似结果。具体而言，我们将像构造 3.2 中那样，构造推出积的结构化近似在拉回下保持稳定的结果。我们还将像构造 3.4 中那样，构造推出积的某些形式的结构化近似在拉回函子的左伴随（即后复合映射）下保持稳定的结果。

我们先来看构造3.2的类似结果。

引理 4.5。固定映射 $\varphi\colon D \to C$，以及映射 $\partial J \to J$、 $\partial V \to V$ 和 $E \to B$，它们都属于 $\mathbb{C}/C$，其中 ∂J， J， ∂V， V是 $\mathbb{C}/C$ 中的可指数化对象。

假设

$$\partial(J \times_C V) \to J \times_C V$$

具有相对于 $E \to B$ 在 $\mathbb{C}/C$ 中的 $(\partial V \to V)$ $\widehat{\times}_C(\partial J \to J)$-逼近结构。那么，拉回

$$\partial(J \times_C V) \to \varphi^* J \times_D \varphi^* V$$

具有相对于重基映射 $\varphi^* E \to \varphi^* B$ 在 $\mathbb{C}/D$ 中的 $(\varphi^*(\partial V) \to \varphi^* V)$ $\widehat{\times}_D(\varphi^*(\partial J) \to \varphi^* J)$-逼近结构。

— ♦

证明。 这源于拉回函子同时保极限和内部 Hom 这一事实，与构造3.2类似。—— ■

我们还有构造3.4的一个类似结果。

引理 4.6。固定映射 $\varphi\colon C \to D$，以及映射 $\partial J \to J$ 在 $\mathbb{C}/C$ 中，映射 $\partial V \to V$ 和 $E \to B$ 在 $\mathbb{C}/D$ 中，其中∂J， J， ∂V， V 在各自的切片范畴中均可指数化。

假设

$$\partial(V \times_C p^* J) \to V \times_C p^* J$$

具有相对于 $p^* E \to p^* B$ 在 $\mathbb{C}/C$ 中的 $(\partial V \to V)$ $\widehat{\times}_C(p^*(\partial J) \to p^* J)$-逼近结构。那么，在 $p_!$ 后复合函子

$$p_!(\partial(V \times_C p^* J)) \to p_!(V \times_C p^* J)$$

具有相对于 $E \to B$ 在 $\mathbb{C}/D$ 中的 $(p_!(\partial V) \to p_! V)$ $\widehat{\times}_D(\partial J \to J)$-逼近结构。 — ♦

证明。与构造 3.4 类似，使用引理 3.3即可。例如，根据假设，有 $[\partial V \times_C p^* J,\ p^* B] \times_{[\partial V \times_C p^*(\partial J)\ p^* B]} [V \times p^*(\partial J)\ p^* B] \cong [\partial(V \times_C p^* J)\ p^* B]$，而此同构在右伴随 $p_*\colon \mathbb{C}/C \to \mathbb{C}/D$ 下的像为 $[p_!(\partial V) \times_D J,\ B] \times_{[p_!(\partial V) \times_D \partial J,\ B]} [p_! V \times \partial J, B] \cong [p_! \partial(V \times_C p^* J)\ B]$。— ■

W最后，我们证明推出积的近似具有结合性 e.

定理 4.7. 假设有三个映射 $\partial U \to U$、 $\partial V \to V$ 和 $\partial W \to W$，它们位于可指数化对象之间；另有两个推出积的近似 $\partial(U \times V) \to U \times V$，它近似于 $(\partial U \to U) \mathbin{\widehat{\times}} (\partial V \to V)$，以及 $\partial(V \times W) \to V \times W$，它近似于 $(\partial V \to V) \mathbin{\widehat{\times}} (\partial W \to W)$，二者均相对于可指数化对象之间的映射 $E \to B$。

映射 $\partial(U \times (V \times W)) \to U \times V \times W$近似推出积

$$(\partial U \to U) \mathbin{\widehat{\times}} (\partial(V \times W) \to V \times W)$$

相对于 $E \to B$，当且仅当它也近似推出积

$$(\partial(U \times V) \to U \times V) \mathbin{\widehat{\times}} (\partial W \to W)$$

相对于 $E \to B$。 $-\blacklozenge$

P证明。 $\Rightarrow$ 和 $\Leftarrow$ 两个方向是对称的。我们证明 $\Rightarrow$ 蕴含关系。

根据假设，存在水平同构

$$\begin{array}{ccccc}
[\partial(U \times V) \times W, E] \times_{[\partial(U\times V)\times\partial W, E]} [U \times V \times \partial W, E] & \leftarrow\cong\rightarrow & [\partial((U \times V) \times W), E] \\
\downarrow & & \downarrow \\
[\partial(U \times V) \times W, B] \times_{[\partial(U\times V)\times\partial W, B]} [U \times V \times \partial W, B] & \leftarrow\cong\rightarrow & [\partial((U \times V) \times W), B] \\
\uparrow & & \uparrow \\
[U \times V \times W, B] & = & [U \times V \times W, B]
\end{array}$$

我们必须证明存在虚线同构

$$\begin{array}{ccccc}
[\partial U \times V \times W, E] \times_{[\partial U\times\partial(V\times W), E]} [U \times \partial(V \times W), E] & \leftarrow\cdot\cong\cdot\rightarrow & [\partial((U \times V) \times W), E] \\
\downarrow & & \downarrow \\
[\partial U \times V \times W, B] \times_{[\partial U\times\partial(V\times W), B]} [U \times \partial(V \times W), B] & \leftarrow\cdot\cong\cdot\rightarrow & [\partial((U \times V) \times W), B] \\
\uparrow & & \uparrow \\
[U \times V \times W, B] & = & [U \times V \times W, B]
\end{array}$$

我们证明，上述两个图表的左列是同构的。由于 $\partial(U \times V) \to U \times V$近似 $(\partial U \to U) \mathbin{\widehat{\times}} (\partial V \to V)$，且 $\partial(V \times W) \to V \times W$近似 $(\partial V \to V) \mathbin{\widehat{\times}} (\partial W \to W)$，相对于 $E \to B$，我们有

$$\begin{aligned}
[\partial(U \times V), B] &\cong [\partial U \times V, B] \times_{[\partial U\times\partial V, B]} [U \times \partial V, B] \\
[\partial(V \times W), B] &\cong [\partial V \times W, B] \times_{[\partial V\times\partial W, B]} [V \times \partial W, B]
\end{aligned}$$

因此，对任意 $X \in \mathbb{C}$ 应用 $[X, -]$，我们有

$$\begin{aligned}
[\partial(U \times V) \times X, B] &\cong [\partial U \times V \times X, B] \times_{[\partial U\times\partial V\times X, B]} [U \times \partial V \times X, B] \\
[X \times \partial(V \times W), B] &\cong [X \times \partial V \times W, B] \times_{[X\times\partial V\times\partial W, B]} [X \times V \times \partial W, B]
\end{aligned}$$

所以，$[\partial U\times V\times W,B]\times_{[\partial U\times\partial(V\times W)\ B]}[U\times\partial(V\times W)\ B]$和 $[\partial(U\times V)\times W,\ \ B]\times_{[\partial(U\times V)\times\partial W,\ B]}[U\times V\times\partial W,B]$都是下图的极限。

$$\begin{array}{ccccc}
[\partial U\times V\times W,B] & \longrightarrow & [\partial U\times V\times\partial W,B] & = & [\partial U\times V\times\partial W,B] \\
\downarrow & & \downarrow & & \| \\
[\partial U\times\partial V\times W,B] & \longrightarrow & [\partial U\times\partial V\times\partial W,B] & \longleftarrow & [\partial U\times V\times\partial W,B] \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
[U\times\partial V\times W,B] & \longrightarrow & [U\times\partial V\times\partial W,B] & \longleftarrow & [U\times V\times\partial W,B]
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
[\partial U\times V\times W,B] \\
\downarrow \\
[\partial U\times\partial(V\times W)\ B] \\
\uparrow \\
[U\times\partial(V\times W)\ B]
\end{array}$$

$$[\partial(U\times V)\times W,B]\longrightarrow[\partial(U\times V)\times\partial W,B]\longleftarrow[U\times V\times\partial W,B]$$

因此 $[\partial U\times V\times W,B]\times_{[\partial U\times\partial(V\times W)\ B]}[U\times\partial(V\times W)\ B]\cong[\partial(U\times V)\times W,\ \ B]\times_{[\partial(U\times V)\times\partial W\,B]}[U\times V\times\partial W,B]$。同样的论证可用于证明所需的同构：将 B 替换为 E。— ■

5 结构化莱布尼茨转置

回顾 Joyal-Tierney 演算中的结果：[JT07，附录] 给定映射 $\partial V\to V$ 和 $\partial L\to L$，推出积 $\partial V\times L\cup V\times\partial L\to V\times L$ 可针对映射 $E\to B$ 提升，当且仅当 $\partial V\times V$ 可针对拉回幂 $[L,E]\to[\partial L,E]\times_{[\partial L,B]}[L,B]$ 提升。

$$\begin{array}{ccc}
\partial V\times L\cup V\times\partial L & \dashrightarrow & E \\
\downarrow & \nearrow & \downarrow \\
V\times L & \dashrightarrow & B
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\partial V & \dashrightarrow & [L,E] \\
\downarrow & \nearrow & \downarrow \\
V & \dashrightarrow & [\partial L,E]\times_{[\partial L,B]}[L,B]
\end{array}$$

在上一节4中，我们定义了推出积的近似这一概念；在第1节中，我们定义了结构化受限提升这一概念。因此，我们希望将这些概念应用于 Joyal-Tierney 演算，用近似 $\partial V\times L\cup V\times\partial L\to V\times L$ 替换推出积 $\partial(V\times L)\to V\times L$，并用结构化受限版本替换上述提升问题。由此得到以下结果。

定理 5.1. 设有映射 $\partial V\to V$、$\partial L\to L$、$E\to E$ 和 $L\to L'$，其中 ∂V、V、∂L、L、L' 均为可指数化对象。

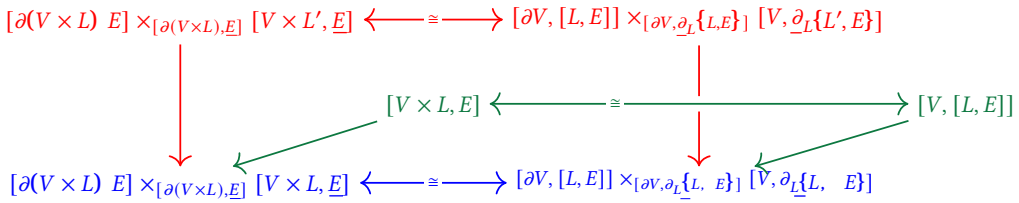
假设 $\partial(V\times L)\to V\times L$ 相对于映射 $E\to E$ 结构上逼近推出积 $(\partial V\to V)\ \widehat{\times}(\partial L\to L)$。那么，我们有一个双射

$$\begin{pmatrix}
\partial(V\times L) & & E \\
\downarrow & \boxslash & \downarrow \\
V\times L & \longrightarrow V\times L' & \underline{E}
\end{pmatrix}
\xrightarrow{\ \cong\ }
\begin{pmatrix}
\partial V & & [L,E] \\
\downarrow & \boxslash & \downarrow \\
V & [\partial L,E]\times_{[\partial L,\underline{E}]}[L',\underline{E}]\longrightarrow & [\partial L,E]\times_{[\partial L,\underline{E}]}[L,\underline{E}]
\end{pmatrix}$$

— ♦

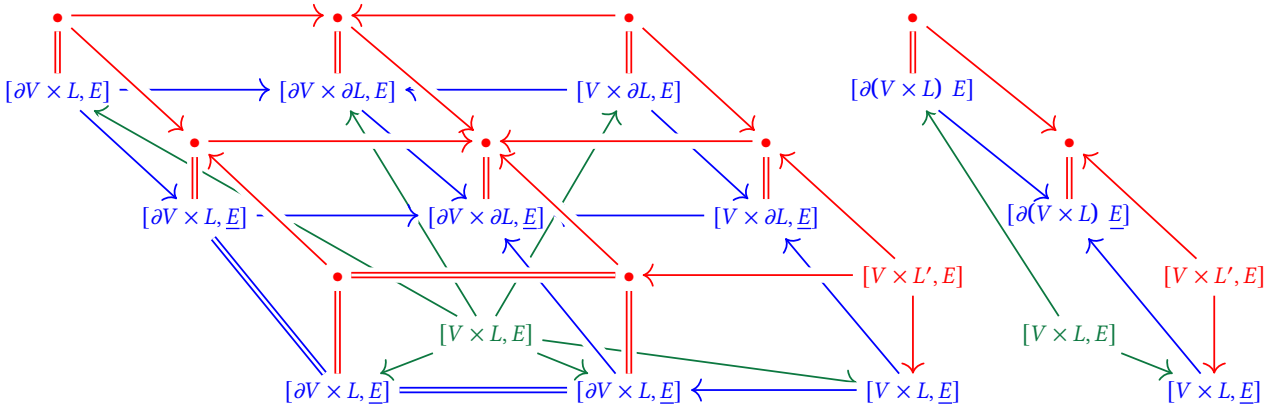
证明。 我们令 $\underline{\partial_L}\{L',\ E\}\to\underline{\partial_L}\{L,\ E\}\leftarrow[L,E]$ 为上方右侧的跨度 $[\partial L,E]\times_{[\partial L,E]}[L',E]\to[\partial L,E]\times_{[\partial L,E]}[L,E]\leftarrow[L,E]$。那么，根据引理 1.6 和 1.8，只需证明我们有如下水平

同构。

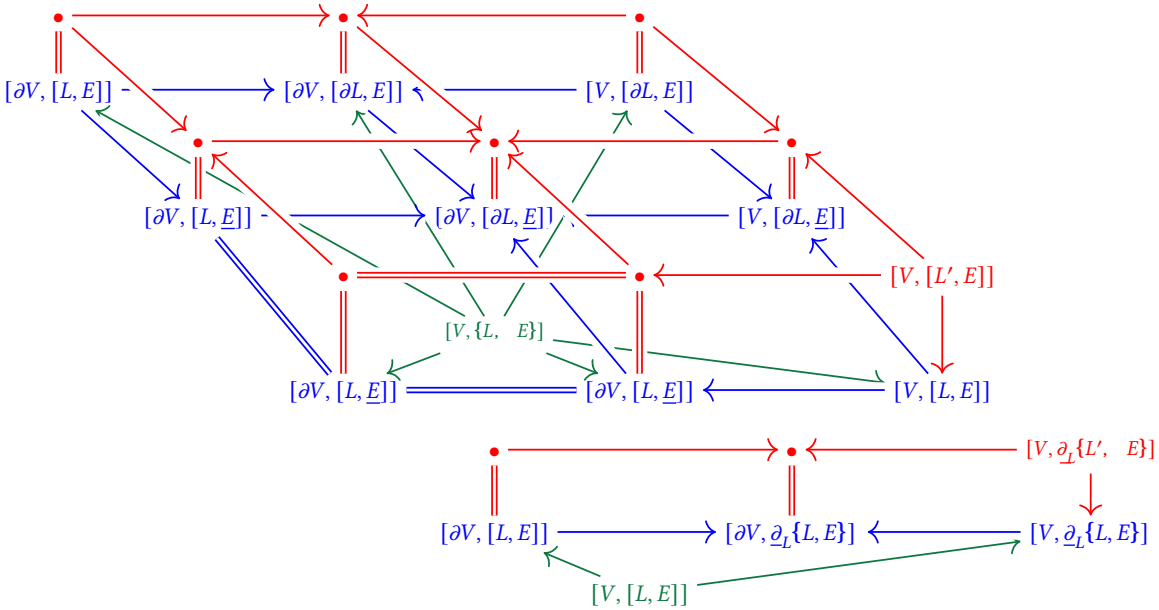


(LTRANS)

根据假设，相对于 $E\to E$，$\partial(V\times L)\to V\times L$ 近似于 $(\partial V\to V)\ \widehat{\times}\,(\partial L\to L)$；在下方的图表中，每一行的极限都同构于对应行右侧的对象；而右侧对象之间的映射由其各自行之间的映射诱导。



对上图中的每个对象应用指数转置后，可以看出上图与下图同构。



但内部 Hom 函子是连续的，因此可以看到，每一列的极限都同构于相应列最前面的对象；而这些最前面对象之间的映射，则由各自列之间的映射所诱导。

因此结论成立，因为前两个图表中粉色、蓝色和橙色对象的极限，恰好就是（LTRANS）中对应颜色的对象。换言之，结论

成立，因为将其视为 $\mathbb{C}^{\bullet\to\bullet\leftarrow\bullet}$（ITRANS）左右两侧的两个粉色-蓝色-橙色余跨，它们都是 $\mathbb{C}^{\bullet\to\bullet\leftarrow\bullet}$ 中同一个 $\begin{pmatrix} \bullet & \succ & \bullet & \prec & \bullet \\ \vee & & \vee & & \vee \\ \bullet & \succ & \bullet & \prec & \bullet \\ \wedge & & \wedge & & \wedge \\ \bullet & \succ & \bullet & \prec & \bullet \end{pmatrix}$ 形图表的极限。



— ■

上述证明给出了转置结构提升的过程。

构造 5.2。 利用可表性，并考察定理 5.1证明中指数转置的使用，我们看到，给定一个结构化提升 $F \in {}^{\partial}(V \times L)$

$$\begin{tikzcd} \downarrow & & \boxslash \; \underset{-}{\overset{E}{\downarrow}} \\ V \times L \arrow[r] & V \times L' & \end{tikzcd}$$

其逐点转置E

结构化提升 $F^\sharp \in \begin{tikzcd} \partial V \arrow[d] \\ V \end{tikzcd} \boxslash \begin{tikzcd} & [L,E] \arrow[d] \\ {[\partial L, E] \times_{[\partial L, \underline{E}]} [L', E]} \arrow[r] & {[\partial L, E] \times_{[\partial L, \underline{E}]} [L, E]} \end{tikzcd}$ 解决一个提升问题

$$\begin{tikzcd} X \times \partial V \arrow[rr, dashed, "f"] \arrow[d] & & {[L,E]} \arrow[d] \\ X \times V \arrow[r, dashed, "(g,h)"'] \arrow[urr, dashed, "F_X^\sharp(f,(g,h))"] & {[\partial L, E] \times_{[\partial L, \underline{E}]} [L', \underline{E}]} \arrow[r] & {[\partial L, E] \times_{[\partial L, \underline{E}]} [L, \underline{E}]} \end{tikzcd}$$

通过以下过程：

(1) 取指数转置 $f_\dagger$： $X \times \partial V \times L \to E$和 $g^\dagger$： $X \times V \times \partial L \to E$以及 $h^\dagger$： $X \times V \times L' \to E$

(2) 因为 E认为 $X \times \partial(V \times L)$ 是积边界 $X \times \partial V \times L \cup X \times V \times \partial L$，所以存在一个公共延拓 $f_\dagger g^\dagger$： $X \times \partial(V \times L) \to E$，它是 $f_\dagger$和 $g^\dagger$ 的公共延拓。

(3) 根据原提升问题的交换性，以及 E也认为 $X \times \partial(V \times L)$ 是$X \times \partial \underline{V} \times L \cup X \times V \times \partial L$这一事实，我们可以构造转置后的提升问题；其交换性源于 $E \to E$ 保留了对积边界逼近的认知。

$$\begin{tikzcd} X \times \partial(V \times L) \arrow[rr, dashed, "\langle f^\dagger, g^\dagger \rangle"] \arrow[d] & & E \arrow[d] \\ X \times V \times L \arrow[r] \arrow[urr, dashed, "F_X(\langle f^\dagger, g^\dagger \rangle, h^\dagger)"] & X \times V \times L' \arrow[r, dashed, "h^\dagger"'] & \underline{E} \end{tikzcd}$$

(4) F给出该提升问题的一个解 $F_X(f_\dagger g^\dagger\ h^\dagger)$： $X \times V \times L \to E$，并将其指数转置视为原提升问题的解。

$$F_X^\sharp(f,(g,h)) \coloneqq F_X(\langle f^\dagger, g^\dagger \rangle, h^\dagger)^\dagger$$

— ♦

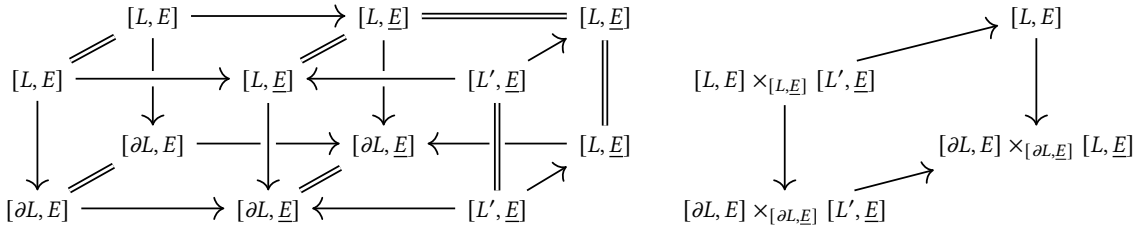
接下来，我们尝试利用构造 2.2 消除定理右侧的限制 5.1。为此，我们需要先计算以下拉回。

引理 5.3. 设有映射 $\partial L \to L \to L'$和 $E \to E$，其中 $\underline{\partial L}$、 L、 L'是可指数化对象。则有以下拉回

$$\begin{tikzcd} {[L,E] \times_{[L,\underline{E}]} [L', \underline{E}]} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & {[L,E]} \arrow[d] \\ {[\partial L, E] \times_{[\partial L, \underline{E}]} [L', \underline{E}]} \arrow[r] & {[\partial L, E] \times_{[\partial L, \underline{E}]} [L, \underline{E}]} \end{tikzcd}$$

— ♦

证明。上述图表中的对象分别是如下余跨度的极限，而上述映射则是由相应余跨度的映射所诱导的极限之间的映射。由极限与极限可交换这一事实，即可得出结论。



— ■

命题 5.4。设有映射 $\partial V \to V$和 $\partial L \to L$和 $E \to E$和 $L \to L'$，其中∂V，V，∂L，L，L'是可指数化对象。

假设 $\partial(V \times L) \to V \times L$相对于 $E \to E$结构上逼近 $(\partial V \to V) \mathbin{\widehat{\times}} (\partial L \to L)$。那么，我们有一个双射

$$\begin{pmatrix} \partial(V \times L) & & E \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ V \times L & \longrightarrow & V \times L' \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \partial V & & [L,E] \times_{[L,\underline{E}]} [L',\underline{E}] \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ V & & [\partial L,E] \times_{[\partial L,\underline{E}]} [L',\underline{E}] \end{pmatrix}$$

— ♦

证明。 应用定理 5.1、构造2.2和引理 5.3。 — ■

推论 5.5。设有映射 $E \to E \in \mathbb{C}$ 和 $\partial L \to L \to L' \in \mathbb{C}$，其中 ∂L，L，L' 是可指数化的。

固定一个对象 $C \in \mathbb{C}$ 以及一个映射 $\partial V \to V \in \mathbb{C}/C$，并假设 $\partial(L \times V) \to L \times V \in \mathbb{C}/C$ 相对于 $E \times C \to E \times C \in \mathbb{C}/C$ 近似 $(\partial V \to V) \mathbin{\widehat{\times}_C} (\partial L \times C \to L \times C) \in \mathbb{C}/C$。那么，

$$\begin{pmatrix} \partial(V \times L) & & E \times C \\ \downarrow & \lrcorner_C & \downarrow \\ V \times L & \longrightarrow & V \times L' \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \partial V & & ([L,E] \times_{[L,\underline{E}]} [L',\underline{E}]) \times C \\ \downarrow & \lrcorner_C & \downarrow \\ V & & ([\partial L,E] \times_{[\partial L,\underline{E}]} [L',\underline{E}]) \times C \end{pmatrix}$$

— ♦

证明。 由命题5.4可知

$$\begin{pmatrix} \partial(V \times L) & & E \times C \\ \downarrow & \lrcorner_C & \downarrow \\ V \times L & \longrightarrow & V \times L' \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \partial V & & [L \times C, E \times C]_C \times_{[L \times C, \underline{E} \times C]_C} [L' \times C, \underline{E} \times C]_C \\ \downarrow & \lrcorner_C & \downarrow \\ V & & [\partial L \times C, E \times C]_C \times_{[\partial L \times C, \underline{E} \times C]_C} [L' \times C, \underline{E} \times C]_C \end{pmatrix}$$

由极限与极限可交换且拉回保持指数对象这一事实，即可得到该结果。

— ■

路径对象的结构化莱布尼茨转置

现在我们聚焦于涉及区间和路径对象的结构化莱布尼茨转置这一特例。在余纤维生成模型结构中，通常会利用区间对象来生成平凡余纤维化。特别地，区间对象 I 是终对象的某种良好圆柱对象，而平凡余纤维化通常以这样的方式生成：区间的推出积

边界包含 $\partial I \hookrightarrow I$ 与平凡余纤维化 $K \to L$ 的推出积仍是平凡余纤维化。然后，通过莱布尼茨转置运算，可以将纤维路径对象构造为拉回幂。

在模型范畴中，纤维化只要求提升解存在，而我们可以使用推出积等余极限概念。然而，在我们的设定中，我们希望利用第 1 节提出的框架，对提升施加某种一致性要求；同时，我们也希望利用第 4节提出的框架，减少对余极限概念的依赖，使其适用于类型论背景。

因此，为了通过莱布尼茨转置以一种适用于类型论应用的结构化方式重现路径对象构造，我们可以利用命题 5.4 及其相关推论 5.5，通过涉及区间对象的莱布尼茨转置来表述路径对象构造的这一结构化版本。其正式表述见推论 5.11。

不过，为了逐步实现这一目标，我们首先需要对由区间对象构造的纤维路径对象进行公理化。

定义 5.6. 设 $\partial I \to I \in \mathbb{C}$ 是可指数化对象之间的一个映射。对于每个 X，我们将其 I-路径对象 记为指数对象 $P^I_{\mathbb{C}}(X) :\equiv [I, X]$，而 I-路径对象 的余边界 记为指数对象$\partial P^I_{\mathbb{C}}(X) :\equiv [\partial I, X]$，从而存在一个端点求值映射 $\mathrm{ev}_\partial\colon P^I_{\mathbb{C}}(X) \to \partial P^I_{\mathbb{C}}(X)$。

给定一个映射 $E \to B \in \mathbb{C}$，我们也将 $\widehat{P}^I_{\mathbb{C}}(E \to B) : P^I_{\mathbb{C}}(E) \to \partial P^I_{\mathbb{C}}(E) \times_{\partial P^I_{\mathbb{C}}(B)} P^I_{\mathbb{C}}(B)$ 记作 $\partial I \to I$ with $E \to B$ 的拉回 Hom。

对于每个 $E \to B \in \mathbb{C}/_C$ 和一个映射 $\partial I \to I \in \mathbb{C}$，我们用 $P^I_C(E)$、$\partial P^I_C(E)$ 和 $\widehat{P}^I_C(E \to B)$ 分别表示切片范畴中的构造 $P^{I\times C}_{\mathbb{C}\ C/}(E)$、$\partial P^{I\times C}_{\mathbb{C}\ C/}(E)$ 和 $\widehat{P}^{I\times C}_{\mathbb{C}\ C/}(E \to B)$。— ♦

我们注意到，在切片中定义 I-路径对象时所用的局部指数对象，是环境范畴中 I-路径对象的拉回。这可由以下更一般的事实推出。

引理 5.7. 对于任意 $E \to B \in \mathbb{C}/_B$，以及一个可指数化的 $A \in \mathbb{C}$，局部指数对象 $[A \times B, E]_B \cong B \times_{[A,B]} [A, E]$ 就是 $\mathbb{C}$ 中 $A \to 1$ 与 $E \to B$ 的拉回 Hom。

$$\begin{array}{ccc} [A \times B, E]_B & \longrightarrow & [A, E] \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ B & \longrightarrow & [A, B] \end{array}$$

— ♦

证明。我们通过可表性进行论证，方法是证明 $[A \times B, E]_B \to B \in \mathbb{C}/_B$ 和 $B \times_{[A,B]} [A, E] \to B \in \mathbb{C}/_B$ 在 $\mathbb{C}/_B$ 上表示同一个预层。

我们注意到，在左侧的图表中，对于每个 $x\colon X \to B \in \mathbb{C}/_B$，局部 Hom 集合 $\mathbb{C}/_B(A \times X,\ E)$ 恰好由这样的映射 $A \times X \to E$组成：它们与 $E \to B$后复合后恰为 $A \times X \xrightarrow{\text{投影}^{2}} X \xrightarrow{x} B$。因此，我们得到右侧所示的拉回。

$$\begin{array}{ccc} A \times X & \to & A \times B \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & B \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} \mathbb{C}/_B(A \times X, E) & \to & \mathbb{C}(X, B \times_{[A,B]} [A, E]) & \to & \mathbb{C}(A \times X, E) & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{C}(X, [A, E]) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ 1 & \xrightarrow[x]{} & \mathbb{C}(X, B) & \longrightarrow & \mathbb{C}(A \times X, B) & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{C}(X, [A, B]) \end{array}$$

但类似地，$\mathbb{C}(X, B \times_{[A,B]} [A, E]) \to \mathbb{C}(X, B)$ 在 x 上的纤维恰好也是 $\mathbb{C}/_B(X, B \times_{[A,B]} [A, E])$。这证明了 $\mathbb{C}/_B(A \times X, E) \cong \mathbb{C}/_B(X, B \times_{[A,B]} [A, E])$，因此 $[A \times B, E]_B \cong B \times_{[A\times B]} [A, E]$。—— ■

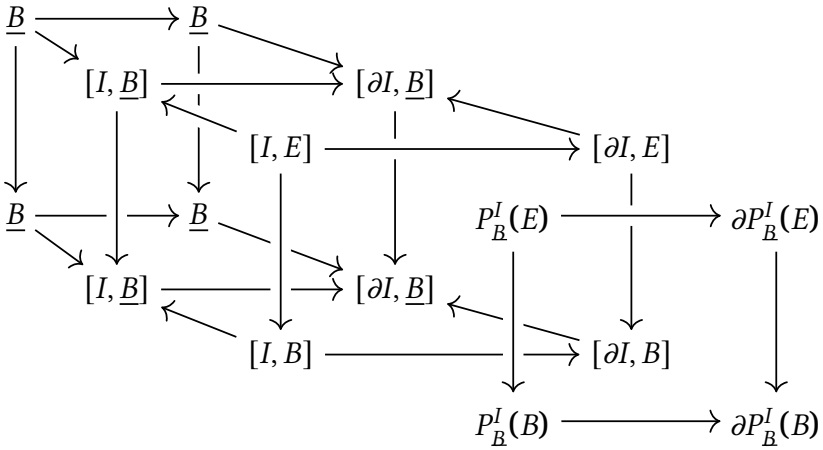
顾名思义，我们希望将 I-路径对象用作切片中的路径对象构造。当 I 取为区间时，它们确实能在模型范畴中实现这一目标。我们借助良好圆柱对象的概念，精确定义区间的概念；现在来回顾一下这一概念。

定义 5.8. 在模型范畴 $\mathbb{C}$ 中，对象 A 的一个良好圆柱对象，是余对角映射 $A \sqcup A \to A$ 的任意分解中间对象 $\mathrm{Cyl}(A)\tilde{}$，该分解将 $A \sqcup A \hookrightarrow \mathrm{Cyl}(A) \to A$ 分解为先是余纤维化$\tilde{}$、再是弱等价。若 $\mathrm{Cyl}(A) \to A$ 是平凡纤维化，则称其为非常良好。— ♦

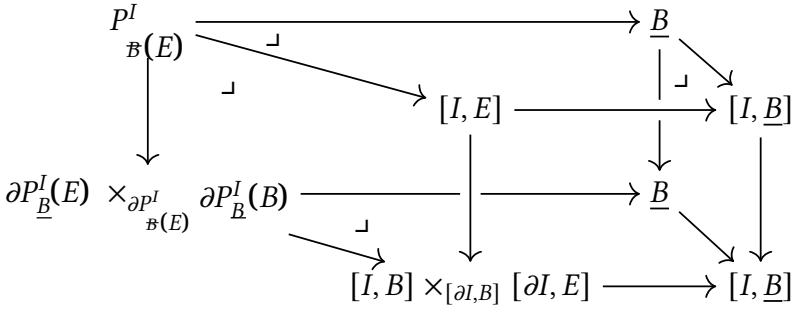
定理 5.9. 设 $\mathbb{C}$ 是局部笛卡尔闭的，并配备了一个模型结构，其中 I 是终对象的一个良好但不一定非常良好的圆柱对象，且余纤维化与纤维化的拉回幂是纤维化。

那么，取 $\partial I := 1 \sqcup 1$，对于任意 $E \twoheadrightarrow B \in \mathbb{C}_{/B}$ 纤维化，拉回 $\mathrm{Hom}\ \widehat{P^I_B}(E \to \underline{B}) : P^I_B(E) \to \partial P^I_B(E) \times_{\partial P^I_B(E)} \partial P^I_B(\underline{B})$ 是纤维化。— ♦

证明。 连续四次应用引理 5.7 ，再进行一次三乘三论证



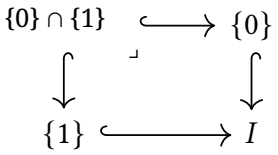
我们看到，前面的面的拉回 $\partial P^I_B(E) \times_{\partial P^I_B(E)} \partial P^I_B(B)$ 可以通过先求每一层 $B \to [I, B] \leftarrow [I, B] \times_{[\partial I, B]} [\partial I, E]$ 的拉回，再取极限来计算。因此，映射 $\widehat{P^I_B}(E \to B) : P^I_B(E) \to \partial P^I_B(E) \times_{\partial P^I_B(E)} \partial P^I_B(B)$ 属于下面这个立方体，其中顶面、底面和右侧面都是拉回。

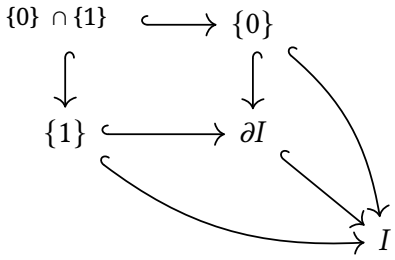


这意味着， $\widehat{P^I_B}(E \to B)$ 是 $[I, E] \to [I, B] \times_{[\partial I, B]} [\partial I, E]$ 的一个拉回。于是结论由拉回幂假设得出。— ■

鉴于定理 5.9，我们现在公理化区间对象的结构，使得定理5.9可以在推论 5.11 中的类型论语境下重现。

定义 5.10. 可指数化对象上的预区间结构由两个点 $\{0\}, \{1\} \rightrightarrows I$以及一个可指数化对象之间的映射 $\partial I \hookrightarrow I$ 组成；对于左侧定义的拉回 $\{0\} \cap \{1\}$，右侧存在一个分解。





对象 I 上的预区间结构在满足以下条件时称为相对于对象集合B 的区间结构：对于每个 $B \in \mathrm{B}$，还满足 $[\{0\} \cap \{1\}\ B] \cong 1$，且 $B \cong [\{0\}\ B] \to [\partial I, B] \leftarrow [\{1\}\ B] \cong B$是一个积跨度（即 $[\partial I, B] \cong B \times B$）。— ♦

推论 5.11。固定一个映射 $E \to B$，以及一个配备了相对于 $\{E,\ B\}$ 的区间结构 $(\{0\},\ \{1\} \rightrightarrows I,\ \partial I \to I)$ 的可指数化对象 I。

再取切片范畴中可指数化对象之间的映射 $\partial V \to V \in \mathbb{C}/c$，以及一个可指数化对象之间的映射 $\partial(V \times I) \to V \times I \in \mathbb{C}/c$，它相对于映射 $E \times C \to B \times C \in \mathbb{C}/c$ 结构上逼近 $(\partial V \to V) \mathbin{\widehat{\times}_C} (\partial I \times C \to I \times C)$。那么，我们有一个双射

$$\begin{pmatrix} \partial(V \times I) & & E \times C \\ \downarrow & \swarrow_C & \downarrow \\ V \times I & \longrightarrow & V \quad B \times C \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \partial V & & P_B^I(E) \times C \\ \downarrow & \swarrow_C & \downarrow \\ V & & (E \times_B E) \times C \end{pmatrix}$$

— ♦

证明。 由推论 5.5 和引理 5.7即可得出。 — ■

鉴于接下来要处理切片范畴，我们先列出区间结构的若干基变换性质。这些性质类似于引理 4.5 和构造 3.2，但针对的是区间和路径对象。

引理 5.12. 设有一个映射 $\varphi\colon D \to C$。那么，可指数化对象 $I \to C \in \mathbb{C}/c$ 上的预区间结构 $(\{0\}, \{1\} \rightrightarrows I,\ \partial I \to I)$ 可在 $\varphi^*I \to D \in \mathbb{C}/c$ 上导出预区间结构 $(\varphi^*\{0\}\ \varphi^*\{1\} \rightrightarrows \varphi^*I,\ \varphi^*(\partial I) \to \varphi^*I)$。

此外，如果 $I \to C$ 上的这个预区间结构相对于对象 $B \to C \in \mathbb{C}/c$ 是区间结构，那么 $\varphi^*I \to D$ 上的预区间结构相对于 $\varphi^*B \to D$ 也同样是区间结构。

同样，对于映射 $E \to B, \partial I \to I \in \mathbb{C}/c$，纤维路径对象、端点评价映射以及由左侧列中的 $\partial I \to I \in \mathbb{C}/c$ 构造的拉回 Hom 在拉回函子 $\varphi^*\colon \mathbb{C}/c \to \mathbb{C}/b$ 下的像，分别同纤维路径对象、端点评价映射

以及右侧列中由区间对象 $\varphi^*(\partial I) \to \varphi^* I \in {}^{\mathbb{C}}/_D$ 构造的拉回 Hom 同构。

$$
\begin{array}{ccc}
{}^{\mathbb{C}}/_C & \xrightarrow{\quad\varphi^*\quad} & {}^{\mathbb{C}}/_D \\
P^I_{\mathbb{C}/C}(E) & \mapsto & P^{\varphi^* I}_{\mathbb{C}/D}(\varphi^* E) \\
P^I_{\mathbb{C}/C}(B) & \mapsto & P^{\varphi^* I}_{\mathbb{C}/D}(\varphi^* B) \\
\left(P^I_{\mathbb{C}/C}(E) \to \partial P^I_{\mathbb{C}/C}(E)\right) & \mapsto & \left(P^{\varphi^* I}_{\mathbb{C}/D}(E) \to \partial P^{\varphi^* I}_{\mathbb{C}/D}(E)\right) \\
\left(P^I_{\mathbb{C}/C}(B) \to \partial P^I_{\mathbb{C}/C}(B)\right) & \mapsto & \left(P^{\varphi^* I}_{\mathbb{C}/D}(B) \to \partial P^{\varphi^* I}_{\mathbb{C}/D}(B)\right) \\
\left(P^I_{\mathbb{C}/C}(B) \xrightarrow{\widehat{P}^I_{\mathbb{C}/C}(E\to B)} \partial P^I_{\mathbb{C}/C}(E) \times_{\partial P^I_{\mathbb{C}/C}(E)} P^I_{\mathbb{C}/C}(B)\right) & \mapsto & \left(P^{\varphi^* I}_{\mathbb{C}/D}(\varphi^* B) \xrightarrow{\widehat{P}^{\varphi^* I}_{\mathbb{C}/C}(\varphi^* E\to \varphi^* B)} \partial P^{\varphi^* I}_{\mathbb{C}/D}(\varphi^* E) \times_{\partial P^{\varphi^* I}_{\mathbb{C}/D}(\varphi^* E)} P^{\varphi^* I}_{\mathbb{C}/D}(\varphi^* B)\right)
\end{array}
$$

— ♦

证明。显然　　这是因为拉回函子保持内部 Hom 和极限　　s.

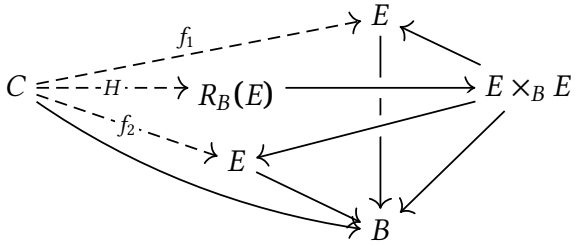
— ■

6 关联提升

在正交分解系统中，提升是唯一的；而在模型范畴中，这些提升是同伦唯一的。换言之，在这些系统中，同一个提升问题的两个提升以某种方式相关：前一种情形中，它们通过相等关系相关；后一种情形中，它们通过同伦等价关系相关。另一方面，在第 1 节中，我们介绍了提升结构的概念，即为满足某些一致性条件的提升问题选取特定的提升。因此，我们希望将关联两个提升的概念与一致选取提升的概念结合起来，以讨论两个一致提升如何彼此一致地相关。特别地，我们将在定理 6.5 中证明，在某些模型范畴中，提升的同伦唯一性所涉及的同伦可以按照适当的一致方式选取。

为此，我们首先抽象出“关系”以及该关系的“见证”，将二元关系内化到切片范畴中。

定义 6.1. 设有一个映射 $E \to B$。纤维逐点关系是一个映射 $R_B(E) \to E \times_B E$。给定 $C \to B$以及两个在 B 上的映射 $f_1, f_2 \colon C \to E$，我们称 H是 与 f_2在关系 $R_B(E)$ 下相符的见证，当且仅当 $H \colon C \to R_B(E)$ 是 (f_1, f_2): $C \to E \times_B E$ 经由 $R_B(E) \to E \times_B E$ 的一个分解。



— ♦

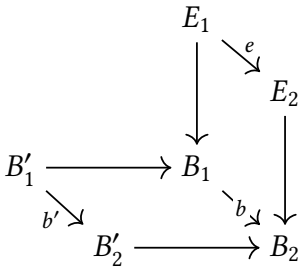
例 6.2. 纤维逐点关系的两个主要来源是那些产生等式和右同伦等价的关系。

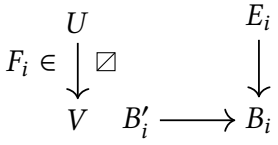
(1) 若将 $R_B(E)$ 取为对角映射，则 $E \hookrightarrow E \times_B E$ 的见证 H 是唯一的，并且 f_1 与 f_2 一致，当且仅当它们完全相等。

(2) 在模型范畴中，若将 $R_B(E)$ 取为 E 在 B 上的切片范畴中的路径对象，那么见证 H 恰好是 f_1 与 f_2 之间的右同伦。

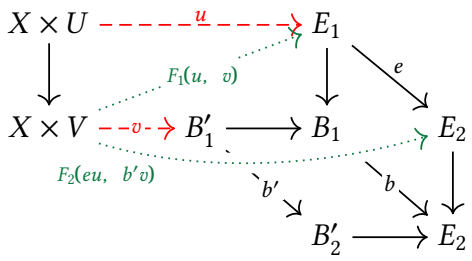
— ♦

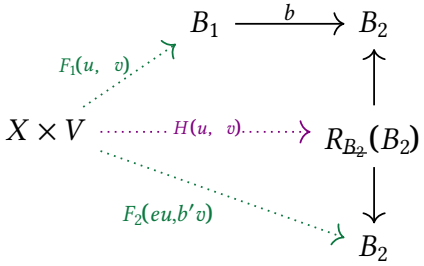
现在我们来说明这些纤维逐点关系如何用于一致地关联各个提升。考虑映射 $U \to V$和跨度映射 $(e,\ b,\ b')$，以及 $i = 1,\ 2$ 的两个提升结构 F_i





于是，固定 $X \in \mathbb{C}$ 后，给定 $X \times U \to X \times V$ 沿 $B_1' \to B_1$ 限制到 $E_1 \to B_1$ 所得的两个提升问题 $(u,\ v)$，如下所示，可以得到一个解 $F_1(u,\ v)$。另一方面，也可以得到一个新的提升问题 $(eu,\ b'v)$，它相对于沿 $B_2' \to B_2$限制的 $E_2 \to B_2$，并得到一个解 $F_2(eu,\ b'v)$。这样便得到两个映射 $u\cdot F_1(u,\ v)\ F_2(eu,\ b'v) : X \times U \rightrightarrows E_2$，它们如左下图所示位于 B_2 之上；其中涉及这些提升与映射 e 的三角形不一定交换。





见证 $H(u,\ v)$ 表明 $u\cdot F_1(u,\ v)$ 与 $F_2(eu,\ b'v)$ 在关系 $R_{B_2}(E_2) \to E_2 \times_{B_2} E_2$下相关，因此是如上方右侧所示的一个分解 H。

代入例 6.2，我们看到，若 $R_{B_2}(E_2) \to E_2 \times_{B_2} E_2$ 是对角映射，则当且仅当 $e\cdot F_1(u,v) = F_2(eu, b'v)$ 时，存在这样的映射$H(u,v)$；若 $R_{B_2}(E_2) \to E_2 \times_{B_2} E_2$是纤维路径对象，则 $H(u,v)$ 是一个右同伦 $H(u,v) : e\cdot F_1(u,v) \simeq F_2(eu, b'v)$，且位于 E_2 之上。作为进一步的特例，若将 (e,b,b') 全部取为恒等映射，则 F_1, F_2 都解同一个提升问题，因此上述两种情况分别归结为： F_1, F_2 产生相同的提升解，或产生右同伦意义下相同的提升解。

现在固定另一个映射 $t\colon Y \to X$，使一致性条件给出

$$F_1(u,v)\cdot(t\times V) = F_1(u\cdot(t\times U), v\cdot(t\times V))$$
$$F_2(eu,b'v)\cdot(t\times V) = F_2(eu\cdot(t\times U), b'v\cdot(t\times V))$$

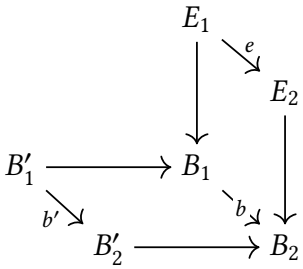
然后，利用 $H(u,\ v)$，可以构造一个见证 $H(u,\ v)\cdot(t\times V)$，表明 $e\cdot F_1(u\cdot(t\times U)\ v\cdot(t\times V))$ 且 $F_2(eu\cdot(t\times U)\ b'v\cdot(t\times V)$.

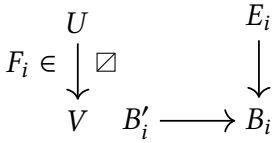
因此，若令 (u,v) 变化，并关联一族见证 $H(u,v)$，一个自然的一致性条件是要求

$$H(u,v)\cdot(t\times V) = H(u\cdot(t\times U), v\cdot(t\times V))$$

鉴于引理 1.8 的内化结果，我们可以看到，见证的一致性条件可以利用局部笛卡尔闭结构形式化如下。

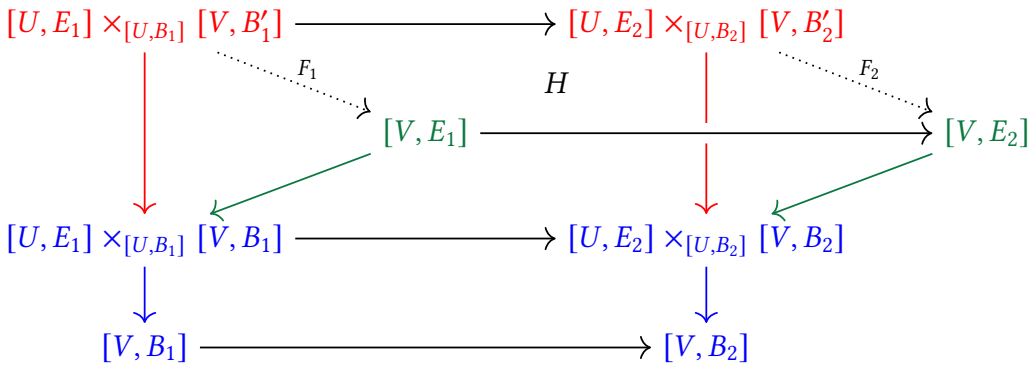
定义 6.3。固定一个映射 $U \to V$，其连接可指数化对象，并令 $(e,\ b,\ b')$ 为一个跨度映射，以及两个提升结构 F_i，用于 $i = 1,\ 2$





令 $R_{B_2}(E_2) \to E_2 \times_{B_2} E_2$ 为一个纤维逐点关系。

从 F_1 到 F_2，经由 $(e,\ b,\ b')$ 的一个结构化 $R_{B_2}(E_2)$-见证 H，是一个见证 H，表明下图中的顶端方形在纤维逐点关系 $[V, R_{B_2}(E_2)] \to [V, E_2 \times_{B_2} E_2] \cong [V, E_2] \times_{[V,B_2]} [V, E_2]$ 下交换。



如果 $(e,\ b,\ b')$ 是恒等映射，那么我们就简单地说 H 是 $R_{B_2}(E_2)$-结构见证，介于 F_1 和 F_2 之间。 — ♦

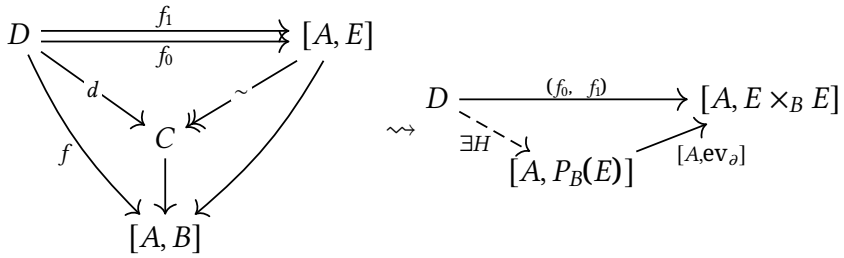
有了这个形式化定义，我们来证明：在模型范畴中，当纤维逐点关系取为纤维路径对象，且结构化提升问题为（余纤维化，纤维化）或（余纤维化，平凡纤维化）时，总存在结构化提升解；此外，任意两个这样的结构化提升解都是结构同伦的。换句话说，我们将在定理 6.5 中证明：只要结构化提升存在，它们就是结构同伦唯一的。不过，为此我们首先需要以下技术引理。

引理 6.4。Let $\mathbb{C}$ 是局部笛卡尔闭的，并且带有一种模型结构，其中 :

- I 是终对象的一个良好但不一定非常良好的圆柱对象。
- 余纤维化在积下保持不变。

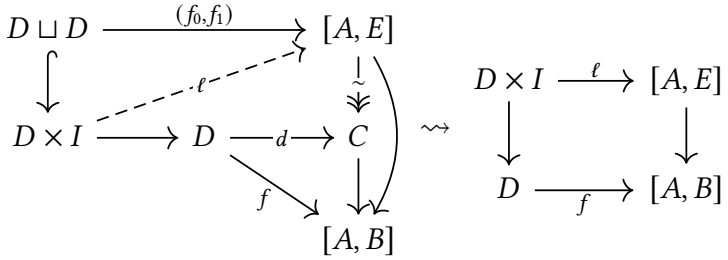
进一步固定一个映射 $E \to B$ 和一个对象 A，并给定 $[A, E] \to [A, B]$ 的一个分解 $[A, E] \twoheadrightarrow C \rightarrowtail [A, B]$，其中第一个~~映射~~是平凡纤维化。取 $P_B^I(E) \coloneqq [I, E] \times_{[I,B]} B$ 为由 I 构造的纤维化 I-路径对象 $E \to B$，使得存在端点求值映射 $\mathrm{ev}_\partial \colon P_B^I(E) \to E \times_B E$。于是，对于任意 $d \colon D \to C$ 以及下面左侧所示、定义在 C 上且满足条件 f_0，$f_1 \colon D \to [A, B]$ 的一对映射

我们有如下右侧所示的分解 H。



— ♦

证明。由于 $\mathbb{C}$ 是笛卡尔闭的，积保持余极限，因此特别地，$1 \sqcup 1$ 被积保持。此外，根据假设，余纤维化被积保持。因此，余纤维化$1 \sqcup 1 \hookrightarrow I$与 D作积后的像是余纤维化 $D \sqcup D \hookrightarrow D \times I$。但又由于假设 $[A, E] \twoheadrightarrow C$是平凡纤维化，我们可以用某个解 ℓ 来解决如下提升问题，如左图所示，从而得到右图中的图表。

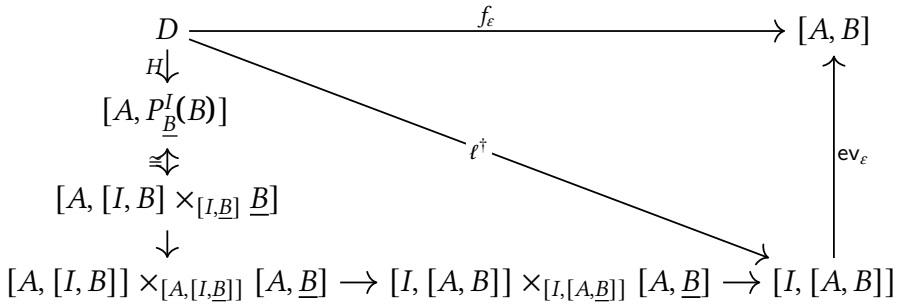


由于 $D \times I \to D$是 $0 \to D$与 $I \to 1$的推出积，对上方右侧图表进行莱布尼茨转置可得

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & [A, E] \\ \downarrow & & \downarrow \\ D & \xrightarrow[(\ell^\dagger, f)]{} & [I, [A, E]] \times_{[I,[A,B]]} [A, B] \end{array}$$

由此可知，可以选择 $H\colon D \to [A, P_B^I(E)]$作为 $H := D \xrightarrow{(\ell^\dagger,\ f)} [I, [A, E]] \times_{[I,[A,B]]} [A, B] \cong [A, [I, E]] \times_{[A,[I,B]]} [A, B] \cong [A, [I, E] \times_{[I,B]} B] \cong [A, P_B^I(E)]$。

最后，我们验证这一对 H确实分解为 $(f_0,\ f_1)\colon D \to [A, E \times_B E]$。这是因为对于 $\varepsilon = 0,\ 1$，有



— ■

准备好这些工具后，我们现在证明：若结构化提升存在，则它们在结构同伦意义下唯一。

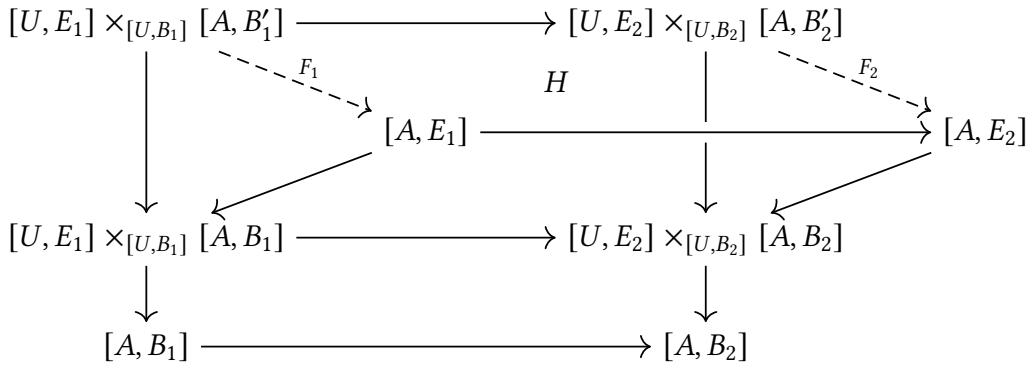
定理 6.5. 设 $\mathbb{C}$为局部笛卡尔闭范畴，并且赋有一个模型结构，满足：

- Ii 是终对象的一个良好但不一定非常良好的圆柱对象 ct.
- 余纤维化在积下保持不变。
- （平凡余纤维化，纤维化）对和（余纤维化，平凡纤维化）对的拉回幂是平凡纤维化。

导入数据$U \to V$以及$(e、\ b、\ b')$和 $F_1、\ F_2$，来自定义 6.3，其中纤维逐点关系 $R_{B_2}(E_2) \to E_2 \times_{B_2} E_2$取为纤维化 I-路径对象 $P^I_{B_2}(E_2) = [B_2 \times I, E_2]_{B_2} \to E_2 \times_{B_2} E_2$的边界求值映射。

假设（$U \to V、\ E_2 \to B_2$）要么是一个（平凡余纤维化，纤维化）对，要么是一个（余纤维化，平凡纤维化）对。那么，存在一个从 F_1 到 F_2、经由（$e、\ b、\ b'$）的结构化 $P^I_{B_2}(E_2)$-见证 H。—— ♦

证明。我们必须证明，下方的顶部方块在纤维逐点同伦关系$P^I_{B_2}(E_2)$意义下交换，并给出某个见证 H。



但$(U \to V,\ E_2 \to B_2)$满足以下任一条件：是（平凡余纤维化，纤维化）对，或（余纤维化，平凡纤维化）对；这保证 $[V, E_2] \twoheadrightarrow [U, E_2] \times_{[U,B_2]} [V, E_2]$是平凡纤维化，因此由引理 6.4 可得结论。— ■

参考文献

[ABCHHL21] Carlo Angiuli、Guillaume Brunerie、Thierry Coquand、Robert Harper、Kuen-Bang Hou (Favonia) 和 Daniel R. Licata。《笛卡尔立方类型论的语法与模型》。载于：《计算机科学中的数学结构》31.4（2021），第 424–468 页。网址：https: // doi.org/10.1017/S0960129521000347。[ACCRS25] Steve Awodey、Evan Cavallo、Thierry Coquand、Emily Riehl 和 Christian Sattler。笛卡尔立方集合上的等变模型结构。2025。arXiv: 2406.18497 [math.AT]。网址：https://arxiv.org/abs/2406.18497。[Awo18] Steve Awodey。《同伦类型论的自然模型》。载于：《计算机科学中的数学结构》28.2（2018），第 241–286 页。网址：https :/ / doi . org / 10 . 1017 / S0960129516000268。[BF22] Benno van den Berg 和 Eric Faber。单纯集合中的有效 Kan 纤维化。第 1 版。数学讲义。Springer International Publishing，2022。网址：https://link. springer.com/book/10.1007/978-3-031-18900-5。[BG16] John Bourke 和 Richard Garner。《代数弱分解系统 I：可达代数弱分解系统》。载于：《纯粹与应用代数杂志》220.1（2016），第 108–147 页。网址：https: // www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002240491500170X。

[Car86] John Cartmell。《广义代数理论与上下文范畴》。载于：《纯粹与应用逻辑年刊》32.3（19986），第 209–243 页。网址：https://doi.org/10.1016/0168- 0072(86)90053-9。[CCHM15] Cyril Cohen、Thierry Coquand、Simon Huber 和 Anders Mörtberg。《立方型理论：单值性公理的构造性解释》。载于：FLAP 4（2015），第 3127–3170 页。网址：https://doi.org/10.4230/LIPIcs.TYPES.2015.5。[Dyb96] Peter Dybjer。《内部类型理论》。载于：《证明与程序的类型》。Springer Berlin Heidelberg，1996，第 120–134 页。网址：https : / / www .cse . chalmers . se / ~peterd / papers / InternalTT.pdf。[Gar09] Richard Garner。《理解小对象论证》。载于：应用范畴结构 17.3（2009），第 247–285 页。网址：https://link.springer.com/article/10.1007/s10485- 008-9137-4。[GG08] Nicola Gambino 和 Richard Garner。《恒等类型弱分解系统》。载于：理论计算机科学 409.1（2008），第 94–109 页。网址：https://www.sciencedirect. com/science/article/pii/S0304397508006063。[GT06] Marco Grandis 和 Walter Tholen。《自然弱分解系统》。载于：数学档案（布尔诺）42（2006），第 397–408 页。网址：https://www.emis.de/journals/AM/06- 4/tholen.pdf。[Jac93] Bart Jacobs。《理解范畴与类型依赖语义》。载于：理论计算机科学 107.2（1993），第 169–207 页。网址：https : / / doi . org / 10 . 1016 / 0304 - 3975(93)90169-T。[Jel25] Vít Jelínek。《类型理论的双余极限表示》。会议报告。国际范畴论会议（马萨里克大学）。2025。网址：https://conference.math.muni.cz/ct2025/data/uploads/abstracts/jelinek.pdf。[Joy17] André Joyal。《氏族与部落笔记》。2017。arXiv：1710.10238 [math.CT]。网址：https: //arxiv.org/abs/1710.10238。[JT07] André Joyal 和 Myles Tierney。《拟范畴与 Segal空间》。载于：当代数学 431（2007），第 277–326 页。网址：https://www.ams.org/books/conm/431/。[KL21] Krzysztof Kapulkin 和 Peter LeFanu Lumsdaine。《单值基础的单纯模型（据 Voevodsky）》。载于：《欧洲数学学会杂志》23.6（2021），第 2071–2126 页。网址：https://ems.press/journals/jems/articles/274693。[Rie11] Emily Riehl。《代数模型结构》。载于：《纽约数学杂志》17（2011），第 173–231 页。网址：https://nyjm.albany.edu/j/2011/17-10p.pdf。[Shu15] Michael Shulman。《逆图的单值性与同伦典范性》。载于：《计算机科学中的数学结构》25.5（2015），第 1203–1277 页。网址：https : //doi.org/10.1017/S0960129514000565。[Uem23] Taichi Uemura。《类型论语义的一般框架》。载于：《计算机科学中的数学结构》33.3（2023），第 134–179 页。网址：https://doi.org/10.1017/ S0960129523000208。[Voe17] Vladimir Voevodsky。《由宇宙范畴定义的 C-系统上的（Π, λ）-结构》。载于：《范畴论及其应用》32.4（2017），第 113–121 页。网址：http: //www.tac.mta.ca/tac/volumes/32/4/32-04abs.html。