arXiv:2512.15004v1 [math.AT] 17 Dec 2025

经典李群平坦联络空间的同伦类型

安德鲁·戴维斯

Abstract. 设 M 是一个光滑流形。我们运用陈-韦伊理论研究由连续的 $\pi_1(M)$- 表示族构造的主 G- 丛的特征类，其中 G 是一个紧李群。随后，我们将这些族与函子映射联系起来

$$\mathrm{Hom}(\pi_1(M), G) \to \mathrm{Map}_*(M, BG)$$

并利用这种联系研究 $U(n)$、 $O(n)$、 $SO(n)$ 和 $\mathrm{Spin}(n)$ 丛的平坦联络空间的弱同伦类型。

1. Introduction

设 Γ 是一个离散群，且 $B\Gamma$ 具有有限 CW 复形的同伦类型。Baird 和 Ramras [2] 运用微分和同伦论方法研究了函子映射

$$\mathrm{Hom}(\Gamma, GL_n(\mathbb{C})) \xrightarrow{B} \mathrm{Map}_*(B\Gamma, BGL_n(\mathbb{C}))$$

从复表示空间到分类空间之间的基点连续映射空间。此映射与复向量丛上平坦联络的整体密切相关。值得注意的是，Baird 和 Ramras 证明了以下结论：

定理 1.1 ([2] 推论 1.3)。 设 M 是一个维数为 d 的闭光滑渐近空间流形，且 $E \to M$ 是 M 上的一个平坦主 $U(n)$丛。令 $\mathcal{A}_{\mathrm{flat}}(E)$ 表示 E 上的平坦酉联络空间。那么对每个 $A_0 \in \mathcal{A}_{\mathrm{flat}}(E)$ 以及满足 $0 < m \leq 2n - d - 1$的每个 m，都有

$$\mathrm{Rank}(\pi_m(\mathcal{A}_{\mathrm{flat}}(E), A_0)) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{m+2i+1}(M).$$

此外，如果 $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_{2i+1}(M) > 0$ 且 $2n - d - 1 \geq 0$，那么 $\mathcal{A}_{\mathrm{flat}}(E)$ 有无穷多个道路连通分支。

这与曲面上复向量丛的情形形成对比：杨-米尔斯理论表明，平坦联络空间相对于丛的秩而言具有高度连通性（见 [14] 命题 4.9）。

本文通过去除底流形上的渐近性条件，并将研究范围从复

向量丛扩展到实向量丛以及主 $SU(n)$、$SO(n)$ 和 $\mathrm{Spin}(n)$ 丛，从而推广了 Baird 和 Ramras 的结果，并得到了以下下界：

定理 1.2. 设 M 是维数为 d 的闭光滑连通流形，$E \to M$ 是 M 上的一个平坦主 G-丛，其中 G 是$U(n)$ $O(n)$ $SU(n)$ $SO(n)$，或 $Spin(n)$。

- 若 $G = O(n)$、$SO(n)$ 或 $Spin(n)$，则对每个 $A_0 \in \mathcal{A}_{\text{平坦}}(E)$ 以及每个满足 $0 < m \leq n - d - 2$ 的 m，
$$\mathrm{Rank}(\pi_m(\mathcal{A}_{\mathrm{flat}}(E), A_0)) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{3m+4i+1}(M).$$
此外，若 $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_{4i+1}(M) > 0$ 且 $n - d - 2 \geq 0$，则 $\mathcal{A}_{\mathrm{flat}}(E)$有无限多个道路连通分支。
- 若 $G = SU(n)$，则对每个 $A_0 \in \mathcal{A}_{\text{平坦}}(E)$ 以及每个满足 $0 < m \leq 2n - d - 1$的 m，
$$\mathrm{Rank}(\pi_m(\mathcal{A}_{\mathrm{flat}}(E), A_0)) \geq \sum_{i=2}^{\infty} \beta_{m+2i+1}(M).$$
此外，若 $\sum_{i=2}^{\infty} \beta_{2i+1}(M) > 0$ 且 $2n - d - 1 \geq 0$，则 $\mathcal{A}_{\mathrm{flat}}(E)$有无限多个道路连通分支。
- 如果 $G = U(n)$，我们得到与 $G = SU(n)$ 相同的界，只是贝蒂数之和从 $i = 1$ 开始。

为证明这一点，我们使用以下定理：

定理 1.3 (第 3 节)。设 M 是一个维数为 d、基本群为 $\Gamma = \pi_1(M, m_0)$ 的闭连通光滑流形，设 $f\colon M \to B\Gamma$ 是一个将万有覆盖 $M \to M$ 分类的映射，且将基点 m_0 映到 $B\Gamma$ 的典范基点；再设 E 是 M 上的一个平坦主 G 丛，其中 G 是紧李群。那么存在一个弱等价

$$\mathcal{A}_{\mathrm{flat}}(E) \simeq \mathrm{hofib}_{B(\mathcal{H}(A))\circ f}(f^* \circ B)$$

其中，$\mathcal{H}(A) \in \mathrm{Hom}(\pi_1(M)\ G)$ 是整体性映射 $\mathcal{A}_{\mathrm{flat}}(E) \xrightarrow{\mathcal{H}} \mathrm{Hom}(\pi_1(M)\ G)$ 像中的任意一个表示，而 $f^* \circ B$ 是复合映射

$$\mathrm{Hom}(\Gamma, G) \xrightarrow{B} \mathrm{Map}_*(B\Gamma, BG) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Map}_*(M, BG).$$

这使我们能够通过理解 $\mathrm{hofib}^{B(\mathcal{H}(A))\circ f}(f^* \circ B)$ 的弱同伦类型，来研究 G-丛上的平坦联络空间。在第 2 节中，我们将确立由 $f^* \circ B$ 像中的映射分类的 G-丛所满足的特征类限制。随后在第 3–5 节中，我们将证明，对于李群 $U(n)$、$SU(n)$、$O(n)$、$SO(n)$ 和 $\mathrm{Spin}(n)$，这些限制可直接转化为关于同伦纤维的信息。

致谢。作者谨向丹尼尔·拉姆拉斯致以谢意，感谢他慷慨地支持我理解和探索这一主题。

2. Characteristic Classes of Generalized Flat Families

Baird 和 Ramras 观察到，$\pi_*(\mathrm{Map}_*(B\Gamma, BGL_n(\mathbb{C})))$ 中属于以下映像的元素

$$B_*:\pi_*(\mathrm{Hom}(\Gamma, GL_n(\mathbb{C}))) \to \pi_*(\mathrm{Map}_*(B\Gamma, BGL_n(\mathbb{C})))$$

可用于分类由球面表示族构造的丛，并利用陈-韦伊理论证明这些丛的特征类在高次度上有理地消失。在本节中，我们将这些结果推广到一般李群。

首先，我们回顾陈-韦伊理论中的一些重要定义和结果（完整细节见 [4] ）。设 G 为一个李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$，并设 M 为一个光滑流形。注意，我们将交替使用 $d\cdot$ 和 $(\cdot)_*$作为映射微分的记号。

定义 2.1。**</style}主 -丛：** $E \to M$ 上的联络是一个取值于李代数的一形式 $\theta \in \Omega^1(E;\ \mathfrak{g})$，满足：

(1) $\theta_x \circ v_x = id$，其中 $v_x:\ \mathfrak{g} \to T_x(E)$ 是映射$h \mapsto x \cdot h$ 在 $e \in G$处的微分。我们将 v_x 像中的向量称为垂直向量。(2) $R_g^*(\theta) = Ad(g^{-1}) \circ \theta$ 对所有 $g \in G$均成立，其中 $R_g:\ E \to E$ 是 E 上的 G-作用，而 $Ad(g)$ $:\ \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 是映射 $x \mapsto gxg^{-1}$ 在单位元处的微分。

我们将$\ker(\theta)$ 中的向量称为水平向量。

定义 2.2. 联络 θ 的曲率是一个李代数值二形式 $\Omega = d\theta + \frac{1}{2}[\theta,\theta] \in \Omega^2(E;\mathfrak{g})$，其中 $[\theta,\theta]$ 是 $\theta \wedge \theta$ 在映射下的像

$\Omega^2(E;\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}) \to \Omega^2(E;\mathfrak{g})$ 由李括号 $[\ ,\ ]:\ \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$诱导。$\theta$ 称为平坦的，若 $\Omega = 0$。

若考虑平凡丛 $M \times G \to M$，则有一个典范的平坦联络，即 Maurer-Cartan 联络，由 $\theta^{\mathrm{MC}}_{(x,g)} = (L_{g^{-1}} \circ \pi_2)_*$ 给出，其中 $\pi_2:\ M \times G \to G$ 是到第二个坐标的投影，而 $L_{g^{-1}}:\ G \to G$ 是由 g^{-1} 给出的左乘。

引理 2.3 (Dupont 定理 3.21 [4])。**</style}主丛 上的联络 是平坦的，当且仅当对于 中的每一点，其周围都存在一个邻域 和一个平凡化：** $E|_U \to U \times G$，使得 $\theta|_U = (\phi_U)^*\theta^{MC}$。

定理 2.4 (嘉当，参见 Dupont 定理 8.1 [4])。令 $I^*(G)$ 表示 *Dupont* 中定义的 $\mathfrak{g}$ 上的 G-不变齐次多项式代数（参见 [4] 第 *62* 页）。若 G 是紧李群，则由 $\omega(P) = [P(\Omega)] \in H^{2k}(BG)$ 给出的陈-韦尔同态 $\omega:\ I^*(G)$ $\to H^*(BG)$ 是环同构。（这里我们将 BG 视为单纯形条构造 NG 的几何实现，而 NG 是一个单纯形流形。）

定义 2.5。若 X、M 是光滑流形，$E \to X \times M$ 是一个光滑主 G-丛，则称 E 上的联络是逐纤维平坦的，如果它在 $\{x\} \times M$ 上的限制对每个 $x \in X$ 都是平坦联络。

定义 2.6. 给定一个平坦主 G丛 $E \xrightarrow{\pi} M$，其平坦联络为 θ，基点为 $m_0 \in M$，在 $x \in \pi^{-1}(m_0)$处的整体变换表示是映射

$$\pi_1(M, m_0) \xrightarrow{\mathcal{H}} G$$

由 $[\gamma] \to g$定义，其中 g 是满足 $\widetilde{\gamma}(1) \cdot g = \widetilde{\gamma}(0)$的唯一元素；这里 $\widetilde{\gamma}$ 是相对于 θ 的 γ 的唯一水平提升，使得 $\widetilde{\gamma}(0) = x$。

定义 2.7. 若 Γ 是离散群且 G 是李群，则 X表示族是一个连续映射 $\rho\colon X \to \mathrm{Hom}(\Gamma, G)$，其中$\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$带有作为 G^{Γ}子空间所继承的拓扑。若 X 是光滑流形，则称 X表示族是光滑的，如果对每个 $\gamma \in \Gamma$，由$x \mapsto \rho_x(\gamma) := \rho(x)(\gamma)$ 给出的映射 $X \to G$ 都是光滑的。

设 M 是一个连通流形，其万有覆盖为 $\widetilde{M}$。我们可以将 $\widetilde{M}$视为路径 l 的带基点同伦类集合：$[0,1] \to M$，其中 $l(1) = m_0$。若 $\widetilde{m_0}$ 是以 m_0 为起点的常值路径，则由在 0 处取值定义的映射 $q\colon (\widetilde{M}, \widetilde{m_0}) \to (M, m_0)$ 是一个右主 $\pi_1(M, m_0)$-丛，其作用定义为 $[l]\cdot[\alpha] = [l\cdot\alpha]$；其中 $l\cdot\alpha$ 是先沿 l 再沿 α 走过所得到的环路。

现在设 ρ 是一个 X-族，它由 $\pi_1(M, m_0)$ 的表示构成。我们可以构造一个右主 G-丛

$$E_\rho(M) = X \times \widetilde{M} \times G / \pi_1(M, m_0) \xrightarrow{\pi} X \times M$$

其中，我们对由 $(x, \widetilde{m}, g)\cdot\alpha = (x, \widetilde{m}\cdot\alpha, \rho_x(\alpha)^{-1}g)$ 给出的 π_1-作用取商，并定义 $\pi([x, \widetilde{m}, g]) = (x, q(\widetilde{m}))$。若 $\pi\colon X \times M \times G \to E_\rho(M)$ 是对 $\pi_1(M, m_0)$-作用取商所得，则由于 $\pi_1(M, m_0)$-作用光滑、自由且适当不连续，E_ρ 上存在标准的光滑结构，使得 π 是一个正规覆盖映射（[11] 定理 21.13）。本文中我们始终假设 E_ρ 具有这一光滑结构。关于这一丛构造的一些基本性质见 Baird 和 Ramras [2]。

注意，若 X 是一个点，则我们得到一个平坦丛。由定理 2.4 可知，平坦丛的有理特征类是平凡的。关于更一般的代数证明，参见 [8]。

现在我们想证明，存在一种作用于 E_ρ类型丛上的逐纤维平坦联络。首先，我们证明以下引理。

引理 2.8。设 K 为离散群，G 为李群，$\pi\colon E \to B$ 为光滑主 G-丛。假设 E 和 B 具有一个 K-作用，该作用是自由的，与 E上的 G-作用可交换，并诱导覆盖映射 $\psi\colon E \to E/K$ 和 $\psi\colon B \to B/K$。另假设 π 是 K- 等变的。若 $E \to B$

具有一个 K-不变联络 θ，使得对于所有$x \in E$、 $w \in T_x(E)$， θ 满足 $\theta_x(w) = \theta_{x\cdot k}((\cdot k)_* w)$，那么 θ 可下降为 G-丛 $\bar{\pi}: E/K \to B/K$ 上的联络，其 G-作用由 E诱导的作用下降而来。若进一步假设$F \to B$ 是另一个具有此类 K-作用的 G-丛，且 $\phi: E \to F$ 是一个 G-等变映射，同时也是 K-等变的，因此 ϕ可下降为一个 G-等变映射 $\phi: E/K \to F/K$；那么，若 E 上的一个 K-不变联络是 ϕ 从 F上的一个 K-不变联络拉回所得，则 E/K 上的联络是 ϕ 从 F/K 上的联络拉回所得。

证明。 首先注意到映射 $\bar{\pi}: E/K \to B/K$ 是一个主 G-丛。为说明这一点，注意 K-作用与 G-作用交换，因此 E 上的 G-作用下降为商空间上定义良好的 G-作用。对于所需的局部平凡邻域，考虑一个开邻域 $U_\alpha \subset B$，在该邻域上，作为覆盖映射的 ψ 是局部同胚。于是注意到 $\psi(U_\alpha)$ 被均匀覆盖。进一步将 U_α 限制到一个邻域 V_α，在其上 E 是平凡的。随后可以验证， $\psi(V_\alpha)$ 是 π 的一个局部平凡邻域，并且 B/K 中的每一点都包含在这样的邻域中。

设 θ 是 $E \to B$ 上的一个 K-不变联络，并设 $[x] = \psi(x)$。通过 $\theta_{[x]}(\psi_* w) := \theta_x(w)$，定义 E/K 上的一个联络 θ，其中对每个 $x \in E$，注意到 ψ 是一个局部微分同胚，因此 $T_{[x]}(E/K)$ 中的每个向量都可以表示为 $\psi_* w$，其中某个 $w \in T_x E$。由于我们假设 θ 是 K- 不变的，这一定义是良定义的。为说明定义 2.1 的第一个条件得到满足，注意到由于 E 上的 K-作用与 G-作用交换

$$v_{x\cdot k} = (g \mapsto (x\cdot k)\cdot g)_* = (\cdot k)_* \circ (g \mapsto x\cdot g)_* = (\cdot k)_* \circ v_x. \tag{1}$$

由于 G 在 E/K 上的作用定义为 $[x]\cdot g = [x\cdot g]$，因此 $v_{[x]}: \mathfrak{g} \to T_{[x]}(E/K)$ 等于 $\psi_*(v_x)$，所以 $\theta_{[x]}(v_{[x]}) = \theta_x(v_x) = id$。$\theta$ 满足定义 2.1 的第二个条件，因为 K 和 G 在 E 上的作用可交换；根据 G 在 E/K 上的作用定义，微分 $(R_g)_*$ 和 ψ_* 可交换，因此

$$\begin{aligned} R_g^* \bar{\theta}_{[x]}(\psi_* w) &= \bar{\theta}_{[x\cdot g]}((R_g)_* \psi_* w) = \bar{\theta}_{[x\cdot g]}(\psi_*(R_g)_* w) = \theta_{x\cdot g}((R_g)_* w) \\ &= Ad(g^{-1}) \circ \theta_x(w) = Ad(g^{-1}) \circ \bar{\theta}_{[x]}(\psi_* w). \end{aligned}$$

现在，假设我们还给定了上述带有联络的 G-丛 $F \to B$。设 α 和 β 分别是 E 和 F 上的联络，其中 $\alpha = \phi^* \beta$；并设 $\psi_E: E \to E/K$ 和 $\psi_F: F \to F/K$ 分别是对 K 取商得到的商空间。那么

$$\begin{aligned} (\overline{\phi})^* \overline{\beta}_{[x]}((\psi_E)_* v) &= \overline{\beta}_{\overline{\phi}[x]}(\overline{\phi}_*((\psi_E)_* v)) = \overline{\beta}_{\overline{\phi}[x]}((\psi_F)_*(\phi_* v)) = \beta_{\phi(x)}(\phi_* v) \\ &= \alpha_x(v) = \overline{\alpha}_{[x]}((\psi_E)_* v). \end{aligned}$$

□

注记 2.9。 若联络 θ 在 $E \to B$ （引理 2.8 中）是平坦的，则根据定义，下降到 E/K 上的联络是平坦的。

命题 2.10。 若 X 和 M 是光滑流形， G是李群，且$\rho:\ X\to \mathrm{Hom}(\pi_1(M,m_0)\ G)$ 是一个光滑的表示族，则丛 $E_\rho(M)$ 具有一个纤维平坦联络，其在 $\{x\}\times M$上的整体（在 $[x,\widetilde{m_0},e]\in E_\rho(M)$处计算）为 $\rho(x)$。

证明。 令 $U\subseteq M$ 为万有覆盖$\widetilde{M}\xrightarrow{q}M$的一个开邻域，在其上万有覆盖是平凡的。记一个平凡化为 $\widetilde{M}|_U\xrightarrow{\phi_U}U\times\pi_1(M,m_0)$，其中$\phi_U$ 关于右乘 $\pi_1(M,m_0)$-作用是等变的。于是存在一个 G-丛同构

$$E_\rho(M)|_{X\times U}\xrightarrow{\widetilde{\phi_U}}X\times U\times G$$

定义为

$$[x,\widetilde{m},g]\mapsto(x,\phi_U(\widetilde{m})_1,\rho_x(\phi_U(\widetilde{m})_2)g),$$

其中 $\phi_U(\widetilde{m})_1$和 $\phi_U(\widetilde{m})_2$分别表示到第一坐标和第二坐标的投影。注意到 $\phi_U(\widetilde{m})_1=q(\widetilde{m})$。接着，我们通过复合定义一个映射$T(E_\rho(M)|_{X\times U})\xrightarrow{\psi_U}\mathfrak{g}$

$$T_{[x,\widetilde{m},g]}(E_\rho(M))|_{X\times U}\xrightarrow{(\widetilde{\phi_U})_*}T_{\widetilde{\phi_U}([x,\widetilde{m},g])}(X\times U\times G)\cong T_xX\times T_{q(\widetilde{m})}U\times T_gG\xrightarrow{(L_{g^{-1}})_*\circ\pi_3}T_e(G),$$

其中 π_3 是到第三坐标的投影。令 $\{\eta_i\}$ 为从属于 M 的一个可数化覆盖的单位分解，该覆盖由这样的开集 $U_i\subseteq M$~组成，并且在这些开集上 M 是平凡的。在 $E_\rho(M)$上定义 θ 如下：

$$\theta(\vec{v})=\sum_i\eta_i(q(\widetilde{m}))\psi_{U_i}(\vec{v})$$

对于向量 $\vec{v}\in T_{[x,\widetilde{m},g]}(E_\rho(M))$。 容易验证这是一个联络。现在我们证明，将此联络限制在子丛 $E_\rho(M)|_{\{x\}\times M}$ 上时，对每个 $x\in X$都是平坦的。为此，我们将证明它在 $E_\rho(M)|_{\{x\}\times M}$ 上的取值与引理2.8 中由平凡丛上的 Maurer-Cartan 联络下降得到的联络相同

$$\{x\}\times\widetilde{M}\times G\to\{x\}\times\widetilde{M},$$

~其中，我们赋予 $\{x\}\times M\times G$ 以 $\pi_1(M,m_0)$-作用，该作用定义如下：

$$[x,\widetilde{m},g]\cdot\alpha=[x,\widetilde{m}\cdot\alpha,\rho_x(\alpha)^{-1}g].$$

根据注记 2.9，这将带来逐纤维平坦性，并使整体的计算更加简单。

~首先注意，在映射 $(\phi_U)_*$ 下， $E_\rho(M)|_{\{x\}\times U}$ 的切向量映为形如 $(0,\ \vec{v_1},\ \vec{v_2})\in TX\times TU\times TG$ 的切向量。现在我们要证明，若 $m=q(\widetilde{m})\in U\cap V\subseteq M$，则在 $T_{[x,\widetilde{m},g]}(E_\rho(M)|_{\{x\}\times M}$ 中的向量上， $\psi_U=\psi_V$。在点 $x\in U\cap V$ 上，$\phi_V\circ\phi_U^{-1}$：

$U \cap V \times \pi_1(M, m_0) \to U \cap V \times \pi_1(M, m_0)$ 关于 $\pi_1(M, m_0)$ 的右乘作用是等变的，因此 $\phi_V \circ \phi_U^{-1}$ 等价于左乘映射 $\alpha \cdot (x, \beta) = (x, \alpha\beta) \in \{x\} \times \pi_1(M, m_0)$，其中某个$\alpha \in \pi_1(M, m_0)$。由于 $\phi_V \circ \phi_U^{-1}$ 是同胚，而 $\pi_1(M, m_0)$ 是离散的，因此在 $x \in U \cap V$ 的某个开邻域内，每一点对应的这个 α 都相同。接着，若我们在 $X \times M \times \widetilde{G}$ 上定义一个左 $\pi_1(M, m_0)$-作用： $\alpha \cdot (x, m, g) = (x, m, \rho_x(\alpha)g)$，则局部上得到 $\phi_V = \alpha \cdot \phi_U$，因为 ρ_x 是同态。因此，若 $\vec{v} \in T_{[x,\widetilde{m},g]} E_\rho(M)|_{\{x\}\times M}$，那么

$$\psi_V(\vec{v}) = (L_{g^{-1}\rho_x(\phi_U(\widetilde{m})_2)^{-1}\rho_x(\alpha)^{-1}})_* \circ \pi_3 \circ (\alpha\cdot)_* \circ (\widetilde{\phi_U})_*(\vec{v})$$

以及对形如 $(0, \vec{v_1}, \vec{v_2}) \in TX \times TM \times TG$ 的向量，

$$\pi_3 \circ (\alpha\cdot)_* = (L_{\rho_x(\alpha)})_* \circ \pi_3$$

因此，复合可简化为 $\psi_V = \psi_U$。于是，对于$T_{[x,\widetilde{m},g]} E_\rho(M)|_{\{x\}\times M}$上的联络 θ由下式给出： $\theta = \psi_U$对于任意 $U \subseteq M$如上所述且包含 $q(\widetilde{m}$的平凡化。此论证还表明，对于给定的 U，平凡化 ϕ_U 的不同选择给出相同的联络。很容易验证，这与引理2.8定义的联络相同，因此特别是平坦的。

现在证明该联络在 $\{x\}\times M$ 上具有所需的整体。如果 γ 是以 m_0为基点的 $\{x\} \times M$ 中的一个环路，则该环路到$\widetilde{\ }E_\rho(M)$ 的水平提升具有如下形式 $[x, \widetilde{\gamma}, e]$，其中 $\widetilde{\gamma}$是该环路在 M中的提升。这是因为该环路在 $(x, \widetilde{m_0}, e) \in \{x\} \times M \times G$处沿水平路径的提升具有如下形式 $(x, \widetilde{\gamma}, e)$。接下来注意

$$[x, \widetilde{\gamma}(1), e] \cdot \rho_x([\gamma]) = [x, \widetilde{\gamma}(1), \rho_x([\gamma])] = [x, \widetilde{\gamma}(1) \cdot [\gamma], e] = [x, \widetilde{\gamma}(0), e]$$

因此我们得到了所需的整体。 □

定义 2.11。 如果空间 Y对于所有 $j \geq 0$都有 $H_j(Y; \mathbb{Z})$ 是有限生成的，则称其为有限型。

现在我们希望证明本节的主要结果。该定理是 Baird 和 Ramras [2]中定理 3.5 的推广，将其推广到了 G型主 E_ρ 丛，其中 G 为紧李群。

定理 2.12。 设 Z 为路径连通拓扑空间， G为紧李群，并且设

$$\rho : X \to \mathrm{Hom}(\pi_1(Z, z_0), G)$$

它是由空间 X 参数化的表示族，其中 $H^j(X; \mathbb{Q}) = 0$对于 $j > m$ 成立。假设 X 或 Z 具有有限型。则对于 $i > 0$，同态的像

$$H^{2m+2i}(BG; \mathbb{Q}) \to H^{2m+2i}(X \times Z; \mathbb{Q})$$

由 $E_\rho(Z)$ 的分类映射诱导的映射为零。

证明方法类似，因此我们将使用 Baird 和 Ramras 证明的以下结果。

引理 2.13（Baird 和 Ramras 引理 3.4）。设 Y 为一个拓扑空间。则存在一组光滑闭流形 $\{M_k\}_{k\in K}$，以及一个映射 $f\colon M := \coprod_k M_k \to Y$，使得对于每个 $j \geq 0$，

$$f^* : H^j(Y;\mathbb{Q}) \to H^j(M;\mathbb{Q}) \cong \prod_k H^j(M_k;\mathbb{Q})$$

是单射。如果对于 $j > m$ 有 $H^j(Y;\mathbb{Q}) = 0$，则我们可以假设对于所有 k 都有 $\dim(M_k) \leq m$。

引理 2.14（Baird 和 Ramras 定理 2.1）。设 $i\colon X \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ 为一个实代数集，且设 M 为一个光滑流形。假设 X 或 M 是紧的。则对于每个连续映射 $\phi\colon M \to X$，存在一个映射 $\phi'\colon M \to X$，其与 ϕ 同伦，且 $i \circ \phi'$ 是光滑的。

引理 2.14 使我们能够将一个表示族 ρ 替换为一个光滑表示族 ρ'，其与 ρ 同伦。我们注意到，关于此类光滑化问题的更一般方法见 [5] 定理 1.4。现在我们可以将引理2.10 应用于 $E_{\rho'} \cong E_\rho$。为此，我们还需证明：对于某个有限生成群 Γ 和紧李群 G，$\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ 是一个实代数集，并且引理 2.14 中的光滑性能够给出定义 2.7中的光滑性。

断言 2.15。设 Γ 是一个有限生成离散群，G 是一个紧李群。那么 $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ 是一个实代数集。

证明。首先注意到，每个紧李群都是一个实代数集。这是因为每个紧李群都有一个忠实表示（见 [3] 第 3 章定理 4.1），因此该表示的像是某个 n 中的紧子群。根据 Onishchik 和 Vinberg 的定理 3.4.5，[1]我们得到该像是实代数的。要看出 $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ 是实代数的，注意它是 G^s 在限制映射 $\mathrm{Hom}(\Gamma, G) \to G^s$ 下的一个子集，该限制映射由 $\phi \mapsto (\phi(g_1)\ldots,\phi(g_s))$ 给出，其中 $\{g_1,\ldots,g_s\}$ 是 Γ 的生成集。限制映射的像中的元素是 s元组，其元素来自 G，并且其分量满足将 Γ 上的群关系经由某个同态映射到 G 后所得到的关系。由于 G^s 是实代数的，嵌入 $G^s \subseteq \mathbb{R}^{2n^2}$ 从而将 $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ 定义为 $\mathbb{R}^{2n^2}$ 的一个子集，该子集由满足多项式关系的点组成。□

那么，给定一个 X表示族 ρ 到 $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ 中，引理2.14 允许我们将其同伦变形为映射 $X \to \mathrm{Hom}(\Gamma, G)$，使得复合映射

$$X \to \mathrm{Hom}(\Gamma, G) \to G^s \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n^2}$$

是光滑的。由于李群的闭子群可以赋予相容的光滑结构，使其成为嵌入李群，因此将 G^s作为 $\mathbb{R}^{4n^2}$ 的实代数子集进行的嵌入，实际上是一个光滑

子流形嵌入：首先将其嵌入为 GL_n（$\mathbb{C}$）的李子群，然后再将其嵌入为 $\mathbb{R}^{4n^2}$. 的光滑子流形。因此

$$X \to \mathrm{Hom}(\Gamma, G) \to G^s \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n^2}$$

是光滑的，当且仅当复合映射 $X \to G^s$ 是光滑的；由于 Γ 是离散的，这等价于说， ρ通过 X-族表示的同伦与一个光滑的 X-族同伦。

定理的证明 2.12. 首先，按照 Baird 和 Ramras 所用的相同论证，我们将问题化归到 X 和 Z均为闭连通光滑流形的情形。特别要注意，我们已经证明，不失一般性，可以假设 ρ 是一个光滑的 X-族。

引理 2.10 接着保证了存在一个纤维平坦联络 θ，定义在 E_ρ(Z上。选取 $\{x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_p\}$的局部坐标 $X \times Z$，使得每个切片 $\{x\} \times Z$在局部可由将 x_i坐标设为常数来表示。令 $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}$为 $\mathfrak{g}$的一组基。那么，联络 θ 在局部可表示为 $\theta = \omega_1\gamma_1 + \cdots + \omega_k\gamma_k$，其中每个 ω_i都是一个取值于 $\mathbb{R}$的 1-形式，定义在 E_ρ(Z上，它们在局部属于 $\{dx_1, \ldots, dx_m, dz_1, \ldots, dz_p\}$的张成空间。于是局部有

$$\theta \wedge \theta = \sum_{1 \le i \le j \le k} (\omega_i \wedge \omega_j)\gamma_i \otimes \gamma_j$$

so

$$\Omega = d(\omega_1\gamma_1 + \ldots \omega_k\gamma_k) + \frac{1}{2} \sum_{1 \le i \le j \le k} (\omega_i \wedge \omega_j)[\gamma_i, \gamma_j]$$

纤维方向平坦性意味着 Ω 的系数属于由形如 $dx_i \wedge dx_j$ 和 $dx_i \wedge dz_j$ 的 2-形式张成的空间。因此，任何由曲率的 $> m$ 次齐次多项式给出的陈-韦伊形式都必为 0。根据 Cartan 定理（见 [4] 定理 8.1），$E_\rho(Z)$ 的每个特征类都由此类陈-韦伊形式的德拉姆上同调类给出，因此，对于 $i > 0$， $H^{2m+2i}(X \times Z,\ \mathbb{R})$ 中的每个特征类都为零。由此立即可知，有理系数的情形也成立。

□

备注 2.16。 若考虑由 $X \times M$ 的叶 $\{x\} \times M$所构成的叶状结构，那么在 $E_\rho \to X \times M$上、于引理2.10 中构造的纤维平坦联络的水平向量定义了一个平坦部分联络，如[9]中所定义。定理 2.12 的证明由此可见是 [9]推论 4.30 的一个特例。

3. Connectivity of the Space of Flat Unitary Connections

设 M 是一个基本群为 $\Gamma = \pi_1(M,\ m_0)$ 的闭连通光滑流形。设 $f : M \to B\Gamma$ 是一个分类万有覆盖的映射

$\sim M \to M$，它将基点 m_0 映至 $B\Gamma$ 的典范基点。于是我们可以考虑复合映射

$$\mathrm{Hom}(\Gamma, G) \xrightarrow{B} \mathrm{Map}_*(B\Gamma, BG) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Map}_*(M, BG).$$

我们希望应用第 2 节中的特征类限制来研究这一复合映射。

通过研究这一复合映射中的第一个映射，Baird 和 Ramras [2]证明，对于 $U(n$-丛在闭光滑渐近曲率流形$\mathcal{A}_{\mathrm{flat}}(E)$上的空间具有很多道路连通分支。例如，可定向渐近曲率 3-流形上一个平坦 $U(n)$-丛的平坦联络空间 $n \geq 2$有无穷多个道路连通分支。这与 Ramras 的研究形成对比[14]；他的研究表明，曲面上的主 $\mathcal{A}_{\mathrm{flat}}(E)$-丛的平坦联络空间 $U(n)$是高度连通的，其连通程度取决于曲面的亏格和丛的秩。

我们将证明，扩展 Baird 和 Ramras 的论证后，便可去掉底流形的渐近性条件，并将类似结果推广到其他经典李群。

首先注意，映射 $f^* \circ B$ 与我们先前研究过的 E_ρ 丛密切相关：

命题 3.1. 设 G 是一个李群，X 是任意空间。那么，任何形如 $E_\rho \to X \times M$ 的 G-丛都由以下复合映射分类

$$X \times M \xrightarrow{\rho \times f} \mathrm{Hom}(\Gamma, G) \times B\Gamma \xrightarrow{B \times id} \mathrm{Map}_*(B\Gamma, BG) \times B\Gamma \xrightarrow{ev} BG$$

其中 $\Gamma = \pi_1(M, m_0)$，而 $f\colon M \to B\Gamma$ 分类万有覆盖。

证明。 这个证明与 Baird 和 Ramras[2] 中引理 4.1 的证明类似。□

本节的主要定理如下：

定理 3.2. 设 M 是一个维数为 d、基本群为 $\Gamma = \pi_1(M, m_0)$ 的闭连通光滑流形。设 $f\colon M \to B\Gamma$ 是一个映射$\widetilde{\ }$，用于分类万有覆盖 $M \to M$，并将基点 m_0 映到 $B\Gamma$ 的典范基点。设 $\beta_k(M) =$秩$(H^k(M; \mathbb{Q}))$。那么，对于每个$\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, GL_n(\mathbb{C}))$ 以及每个 $m \geq 0$，同伦群上的诱导映射

$$(f^* \circ B)_* : \pi_m(\mathrm{Hom}(\Gamma, GL_n(\mathbb{C})), \rho) \to \pi_m(\mathrm{Map}_*(M, BGL_n(\mathbb{C})), B\rho \circ f)$$

满足秩$(\mathrm{coker}((f^* \circ B)_*)) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{2i+m}(M)$ 当 $n \geq (m+d)/2$。

证明与 Baird 和 Ramras 中定理 1.2 的证明类似 [2]，因此我们不再给出细节。证明的思路是，根据定理 2.12，我们知道存在一些上同调类并非 E_ρ 丛的特征类。如果我们能找到具有这些特征类的丛，

那么我们就能构造出映射 $(f^* \circ B)_*$ 的非平凡余核。为此，我们需要引述 Baird 和 Ramras 的以下引理。关于 $O(n)$ 情形的详细证明，可参见下一节。

引理 *3.3*（*Baird* 和 *Ramras* [2] 引理 *4.2*）。设 X 为有限 *CW* 复形。令 c_i 表示有理上同调中的第 i 个陈类。给定$m > 0$ 和 $x \in H^{2i}(S^m \wedge X; \mathbb{Q})$，存在一个类 $\phi \in K^0(S^m \wedge X)$，使得 $c_i(\phi) = qx$ 对于某个非零有理数 $q \in \mathbb{Q}^*$成立，并且 $c_j(\phi) = 0$对于 $j \neq i$成立。

现在，我们希望将定理 3.2 与酉丛（或更一般地，紧李群 G 的主 G-丛）的平坦联络空间联系起来。设 M 是一个闭、连通、光滑的 d 维流形。设 $E \to M$ 是 M 上的主 G-丛，其选定的基-点 e_0 投影到选定的基点 m_0。我们考虑 E 上 Sobolev 类 L^p_k 的联络，其中固定常数 $p \in \mathbb{R}$、$k \in \mathbb{N}$ 满足 $\min(d/2, 4/3) < p < \infty, k \geq 2$，且 $kp > d$。我们还考虑 E 上 Sobolev 类 L^p_{k+1} 的规范变换。有关这些常数限制的详细信息，可参见 Ramras [14] 第 3.2 节。这些限制使我们能够断言，基点规范群 $\mathcal{G}_0(E)$ 连续作用于平坦联络空间 $\mathcal{A}_{\text{flat}}(E)$，且 $\mathcal{A}_{\text{flat}}(E)/\mathcal{G}_0(E) \cong \text{Hom}(\pi_1(M), G)$。该商空间可与整体变换表示 $\mathcal{H}$ 等同，它将平坦联络映射到该联络在基点e_0处的整体变换表示。

定理的证明 1.3。设 $\Gamma = \pi_1(M, m_0)$。我们将考虑下面的交换图：

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathcal{A}_{\text{flat}}(E) & & \xrightarrow{\qquad\qquad\mathcal{T}\qquad\qquad} & & \text{Map}^G_*(E, EG) \\
\big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{H}} & & & & \big\downarrow{\scriptstyle q} \\
\text{Hom}^E(\Gamma, G) & \xrightarrow{B} & \text{Map}^E_*(B\Gamma, BG) & \xrightarrow{f^*} & \text{Map}^E_*(M, BG)
\end{array}
\tag{2}
$$

这里，$\mathcal{H}$ 是整体变换表示，$\text{Map}^E_*(M, BG)$ 是基点映射空间中由对 E 进行分类的映射组成的路径分支，$\text{Hom}^E(\Gamma, G)$ 是 $f^* \circ B$ 的原像，而 $\text{Map}^E_*(B\Gamma, BG)$ 是 f^* 的原像。为说明复合映射 $f^* \circ B$，注意，若给定一个平坦联络$A \in \mathcal{A}_{\text{flat}}(E)$，则 $\mathcal{H}(A)$：$\Gamma \to G$（在所选基点 e_0（位于 m_0 上）处计算）会在单纯形模型之间诱导一个 G-等变映射 $E\Gamma \xrightarrow{E_{(\mathcal{H}(A))}} EG$，并覆盖函子映射 $B\Gamma \xrightarrow{B_{(\mathcal{H}(A))}} BG$。于是得到一个拉回图

$$\begin{array}{ccccc} E_{\mathcal{H}(A)}(M) & \xrightarrow{\tilde{f}_{\mathcal{H}(A)}} & E_{\mathcal{H}(A)}(B\Gamma) & \xrightarrow{u_{\mathcal{H}(A)}} & EG \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & B\Gamma & \xrightarrow{B(\mathcal{H}(A))} & BG \end{array}$$

~ ~其中 $f_{\mathcal{H}(A)}([\tilde{m}, g]) = [f(\tilde{m})\ g]$ 且 $u_{\mathcal{H}(A)}([e, g]) = E(\mathcal{H}(A))(e) \cdot g$。如引理 2.10 所示，在 $E_{\mathcal{H}(A)}(M)$ 上存在一个典范平坦联络 $A_{\mathcal{H}(A)}$，其在所选基点 $[\tilde{m}_0, e]$ 处的整体为 $\mathcal{H}(A)$。存在一个典范的 G-丛同构 $E \xrightarrow{\phi_A} E_{\mathcal{H}(A)}(M)$，使得 $\phi_A(e_0) = [\tilde{m}_0, e]$ 且 $\phi_A^*(A_{\mathcal{H}(A)}) = A$（关于此同构的详情，参见 Ramras [15] 命题 8.4）。随后我们将 $\mathcal{T}$ 定义为复合映射 $\mathcal{T}(A) = u_{\mathcal{H}(A)} \circ f_{\mathcal{H}(A)} \circ \phi_A$。 $\mathcal{T}$ 的连续性可如 Ramras [15]，中所示得到证明，由此我们证明了图 2 可交换。

现在考虑以下交换图：

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}^E(\Gamma, G) & \xrightarrow{f^* \circ B} & \mathrm{Map}_*^E(M, BG) & \longleftarrow & \{B(\mathcal{H}(A)) \circ f\} \\ \downarrow \mathrm{Id} & & \downarrow \mathrm{Id} & & \downarrow i \\ \mathrm{Hom}^E(\Gamma, G) & \xrightarrow{f^* \circ B} & \mathrm{Map}_*^E(M, BG) & \xleftarrow{q} & \mathrm{Map}_*^G(E, EG) \end{array}$$

~这里 i 将 $B(\mathcal{H}(A)) \circ f$ 映射到 $u_{\mathcal{H}(A)} \circ f_{\mathcal{H}(A)}$。根据 Gottlieb [6] 定理 5.6，$\mathrm{Map}_*^G(E, EG)$ 弱可缩，因此该图中的竖直映射都是弱等价。接着，如 Baird 和 Ramras 的命题 5.4 所示[2], ，这意味着各行的同伦拉回弱等价。顶行的同伦拉回是 $\mathrm{hofib}^{B(\mathcal{H}(A)) \circ f}(f^* \circ B)$，底行则是去掉左上角后的图 2 。因此，只需证明图 2是同伦笛卡尔的。这可由与 Baird 和 Ramras 的定理 5.5 证明末尾所给论证相同的论证得出[2]。

□

注记 3.4。正如 Baird 和 Ramras 的引理1.3所指出的，这也表明，平坦联络空间的弱同伦类型与所选的 Sobolev 类无关L_k^p （只要该类满足关于 p 和 k 的要求，如前所述）。

定理 1.3 推出了以下关于平坦联络空间连通性的推论，它是 Baird 和 Ramras 中推论 1.3 的直接推广 [2]。

推论 3.5。设 M 是一个维数为 d 的闭光滑连通流形，且 $E \to M$ 是 M 上的一个平坦主 $U(n)$ 丛。那么对于每个

$A_0 \in \mathcal{A}_{\text{flat}}(E)$ 以及每个满足 $0 < m \leq 2n - d - 1$ 的 m，都有

$$\text{Rank}(\pi_m(\mathcal{A}_{\text{flat}}(E), A_0)) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{m+2i+1}(M).$$

此外，如果 $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_{2i+1} > 0$ 和 $2n-d-1 \geq 0$，那么 $\mathcal{A}_{\text{flat}}$（$E$）有无限多个道路连通分支。

证明。 证明与 Baird 和 Ram- ras 中推论 1.3 的证明完全相同，[2], 只是改用同伦纤维列的同伦群长正合列

$$\mathcal{A}_{\text{flat}}(E) \to \text{Hom}^E(\Gamma, U(n)) \xrightarrow{f^* \circ B} \text{Map}_*^E(M, BU(n))$$

在定理 1.3中确立。 □

例如，对于 $U(n)$-丛在 S^{2k+1}，$k \geq 1$ 上的平坦联络空间，如果 $n \geq k$，则其有无限多个道路连通分支。

注记 3.6。图（2）可以比较全纯单值化纤维化的同伦长正合列与 $f^* \circ B$的同伦纤维列。选取一个基点 $A_0 \in \mathcal{A}_{\text{flat}}$（$E$）。

首先，注意到图（2）在纤维化 $\mathcal{H}$ 与纤维化 q的长正合列之间诱导出一个交换图，通过该图可以将全纯单值化纤维化的边界映射 $\partial_{\mathcal{H}}$ 与映射（$f^* \circ B$）$_*$ 通过复合对应起来

$$\pi_k(\text{Hom}^E(\Gamma, G)) \xrightarrow{(f^* \circ B)_*} \pi_k(\text{Map}_*^E(M, BG)) \xrightarrow[\cong]{\partial_q} \pi_{k-1}(\text{Map}_*^G(E, G)) \xrightarrow[\cong]{(i_*)^{-1}} \pi_{k-1}(\mathcal{G}_0),$$

其中，i是从 Sobolev 规范群到连续规范群的包含映射，它是一个弱等价（[13] 定理 13.14）。

还可以证明，π_m（$\mathcal{A}_{\text{flat}}$（$E$））中在证明推论3.5 时构造的类，可以识别为来自 π_m（$\mathcal{G}_0$（E））的类。为说明这一点，我们首先构造一个同伦群的长正合列

$$\cdots \to \pi_k(\text{Map}_*^E(M, BG)) \xrightarrow{(\phi)_* \circ (i_*)^{-1} \circ \partial_q} \pi_{k-1}(\mathcal{A}_{\text{flat}}(E)) \xrightarrow{\mathcal{H}_*} \pi_{k-1}(\text{Hom}^E(\Gamma, G)) \xrightarrow{(f^* \circ B)_*} \pi_{k-1}(\text{Map}_*^E(M, BG)) \to \ldots$$

将 [7]第2.2节习题38 中的构造应用于纤维化 $\mathcal{H}$ 和 q 的长正合列所构成的交换图，并回顾 $\text{Map}_*^G(E,\ EG)$ 是弱可缩的。这里，$\mathcal{G}_0 \xrightarrow{\phi} \mathcal{A}_{\text{flat}}(E)$ 是 $\mathcal{H}$ 之纤维的包含映射，而 ∂_q 是 q 的长正合列中的边界映射。通过与同伦纤维列的同伦长正合列进行比较

$$\mathcal{A}_{\text{flat}}(E) \to \text{Hom}^E(\Gamma, G) \xrightarrow{f^* \circ B} \text{Map}_*^E(M, BG) \tag{3}$$

在定理 1.3 的证明中建立，(3) 的边界映射像中的类属于 $(\phi)_* \circ (i_*)^{-1} \circ \partial_q$ 的像，因此特别地，它们是由类在映射 $\pi_*(\mathcal{G}_0) \xrightarrow{\phi_*} \pi_*(\mathcal{A}_{\mathrm{flat}}(E))$ 的像。

4. The Case of $O(n)$-bundles

上述方法可推广到主 $O(n)$-丛的情形，并为实向量丛的平坦联络空间给出连通性结果。

令 $p_i(E) \in H^{4i}(E;\mathbb{Z})$ 表示实向量丛的第 i 个庞特里亚金类，并令 $\mathrm{KO}(X)$ 表示 CW 复形 X 的实 K 理论。

引理 4.1。令 X 为有限 *CW* 复形。给定 $m > 0$ 和 $x \in H^{4i}(S^m \wedge X;\ \mathbb{Q})$，存在一个类 $\phi \in \mathrm{KO}^0(S^m \wedge X)$，使得 $p_i(\phi) = qx$，其中 $q \in \mathbb{Q}^*$为某个非零有理数，并且当 $j \neq i$时有 $p_j(\phi) = 0$。

为证明这一点，我们需要以下结果。许多资料中都概述了这一结果的证明（见 [10]）。详细证明见附录。

命题 4.2. 对于 X 有限 *CW* 复形，存在一个环同构

$$\mathrm{KO}^0(X) \otimes \mathbb{Q} \cong \prod_{i \geq 0} H^{4i}(X;\mathbb{Q})$$

它由复化映射 $\mathrm{KO}^0(X) \to \mathrm{K}^0(X)$ 诱导，再接上陈特征同构。

引理的证明 4.1. 由命题 4.2，存在一个类$\phi \in KO^0(S^m \wedge X)$，使得 $Ch(c(\phi)) = qx$，其中某个 $q \in \mathbb{Q}^*$满足

$$c : \mathrm{KO}^0(X) \to \mathrm{K}^0(X)$$

是复化。注意，Ch是陈类的多项式，但 $H^*(S^m \wedge X;\mathbb{Q})$ 中所有杯积均为零。于是

$$Ch(\phi) = q_1 c_1(\phi) + \cdots + q_k c_k(\phi) + \ldots$$

因此所需结论成立，因为选取 x 时使其处于所需维数。 □

定理 4.3. 设 M 是一个维数为 d、基本群为 $\Gamma = \pi_1(M, m_0)$的闭连通光滑流形。设 $f : M \to B\Gamma$ 是一个映射$\widetilde{\ }$，它分类万有覆盖 $M \to M$，并将基点 m_0 映到 $B\Gamma$ 的典范基点。设 $\beta_k(M) = \text{秩}(H^k(M;\mathbb{Q}))$。那么，对于每个$\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, GL_n(\mathbb{R}))$ 以及每个 $m \geq 0$，诱导的同伦群映射

$$(f^* \circ B)_* : \pi_m(\mathrm{Hom}(\Gamma, GL_n(\mathbb{R})), \rho) \to \pi_m(\mathrm{Map}_*(M, BGL_n(\mathbb{R})), B\rho \circ f)$$

满足 $\text{秩}(\mathrm{coker}((f^* \circ B)_*)) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{3m+4i}(M)$ 当 $n \geq m + d + 1$。

证明。 此证明类似于 Baird 和 Ramras 中定理 1.2 的证明 [2], ，但针对实 K 理论作了以下调整。首先注意，由标准嵌入诱导的映射 $B\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to B\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ 是n-连通的，因为我们现在考虑 Serre 纤维化 $O(n) \to O(n+1) \to S^n$。我们还注意到，界定贝蒂数的条件有所变化秩(coker$((f^* \circ B)_*)$)。这个下界来自 $\widetilde{\mathrm{KO}}^0(S^m \wedge M)$ 中一个不在 $(f^* \circ B)_*$ 的像中的自由阿贝尔子群的秩。我们通过利用命题4.2将上同调类与实 K 理论类关联起来，定义这个子群。由于该命题给出了 $\prod_{i\geq 0} H^{4i}(X;\mathbb{Q})$ 中的上同调类，我们可以选取一个 $\mathbb{Q}$-基

$$\{a_{ij}\}_j \subset H^{3m+4i}(M;\mathbb{Q}) \cong H^{4(m+i)}(S^m \wedge M;\mathbb{Q})$$

这些类可实现为$\widetilde{\mathrm{KO}}^0(S^m \wedge M)$中某个子群内各丛的特征类。随后我们按照 Baird 和 Ramras 的方法证明，根据构造，这个子群不在 $(f^* \circ B)_*$ 的像中。□

推论 4.4。 设 M 是维数为 d 的闭光滑连通流形，且 $E \to M$ 是 M 上的一个平坦主 $O(n)$丛。那么对每个$A_0 \in \mathcal{A}_{\mathrm{flat}}(E)$ 以及每个满足 $0 < m \leq n-d-2$ 的 m，都有

$$\mathrm{Rank}(\pi_m(\mathcal{A}_{\mathrm{flat}}(E), A_0)) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{3m+4i+1}(M).$$

此外，如果 $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_{4i+1} > 0$和 $n-d-2 \geq 0$，那么 $\mathcal{A}_{\mathrm{flat}}(E)$有无穷多个道路连通分支。

证明。 证明与推论3.5的证明完全相同。 □

例 4.5。 </style}任何平坦(n)丛在$\mathbb{RP}^{4k+1}$ 上的平坦联络空间，只要满足 $n \geq 4k+3$, $k > 0$，就有无穷多个道路连通分支。

5. Results for $SU(n)$, $SO(n)$, and Spin(n)

关于 $U(n)$ 和 $O(n$ 的结果可以推广，从而得到关于 $SU(n)$,$SO(n)$, 以及 Spin(n) 的结果；方法是缩减引理 3.3和 4.1中所涉及丛的结构群。回顾以下定义：

定义 5.1。 设 $E \to B$ 是一个主 G-丛，且 H 是G 的一个子群。如果存在一个主 H-丛 F 及一个同构，使得 E 的结构群可缩减为 H，

$$E \cong F \times_H G := (F \times G)/H$$

其中， H通过 $h(f,g) = (fh^{-1}, hg)$ 作用。

推论 5.2 ([16]推论 3.1)。 复向量丛的结构群可以约化为 $SU(n)$，当且仅当第一陈类为零。

这是一个标准事实： $H^*(BSU(n);\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[d_2,\dots,d_n]$，其中 $d_i(ESU(n))$ 是陈类 $c_i(EU(n)) \in H^{2i}(BU(n);\mathbb{Q})$ 在由包含映射 $SU(n) \hookrightarrow U(n)$ 诱导的映射下的拉回。对于一个 $SU(n)$-丛 $E \to X$，定义 $d_i(E) \in H^{2i}(X;\mathbb{Q})$ 为 $d_i(ESU(n))$ 在 E 的分类映射下的拉回。

引理 5.3. 设 X 是一个有限 CW 复形。则给定 $m>0$ 和 $x \in H^{2i}(S^m \wedge X;\mathbb{Q})$，存在一个 $SU(n)$-丛 ϕ，其底空间为 $S^m \wedge X$，且对于某个非零的 $q \in \mathbb{Q}$，有 $d_i(\phi) = qx$，并且对于 $j \neq i$，有 $d_j(\phi) = 0$。

证明。 Baird 和 Ramras 的引理 4。2 [2]构造了具有此类陈类性质的复向量丛。考虑一个第一陈类为零的此类向量丛。根据推论5.2，该丛的分类映射可分解为经由 $BSU(n$。于是，由所选丛的陈类性质即可得到结论。□

由此，我们可以证明与定理 3.2 对于$SU(n)$ 的类似结果：

定理 5.4. 设 M 是一个维数为 d、基本群为 $\Gamma = \pi_1(M, m_0)$ 的闭连通光滑流形。设 $f\colon M \to B\Gamma(M, m_0)$ 是一个分类万有覆盖 $\widetilde{M} \to M$ 的映射，并将基点 m_0 映至 $B\Gamma$ 的典范基点。设 $\beta_k(M) = \text{秩}(H^k(M;\mathbb{Q}))$。那么，对于每个 $\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, SU(n))$ 和每个 $m \geq 0$，其诱导的同伦群映射

$$(f^* \circ B)_* : \pi_m(\mathrm{Hom}(\Gamma, SU(n)), \rho) \to \pi_m(\mathrm{Map}_*(M, BSU(n)), B\rho \circ f)$$

满足 $\text{秩}(\mathrm{coker}((f^* \circ B)_*)) \geq \sum_{i=2}^{\infty} \beta_{2i+m}(M)$ 当 $n \geq (m+d)/2$。

证明。 证明方法与定理 3.2类似。注意，由包含映射 $BSU(n) \to BSU(n+1)$ 诱导的映射仍然是 $(2n+1)$-连通的。唯一显著的区别在于，引理 5.3 要求我们拉回的 $U(n)$-丛的第一陈类为零，因此在此情形下，群 $A = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(\{a_{ij}\}_{i,j}) \subset \tilde{K}^0(S^m \wedge M)$ 的秩等于贝蒂数 $\beta_{2i+m}(M)$ 之和，此处从 $i=2$ 开始。□

于是我们得到一个与推论3.5类似的结论：

推论 5.5。 设 M 是一个维数为 d 的闭光滑连通流形，且 $E \to M$ 是 M 上的一个平坦主 $SU(n)$-丛。那么对于每个$A_0 \in \mathcal{A}_{\mathrm{flat}}(E)$，以及每个满足 $0 < m \leq 2n-d-1$ 的 m，我们有

$$\mathrm{Rank}(\pi_m(\mathcal{A}_{\mathrm{flat}}(E), A_0)) \geq \sum_{i=2}^{\infty} \beta_{m+2i+1}(M).$$

此外，如果 $\sum_{i=2}^{\infty} \beta_{2i+1} > 0$ 和 $2n-d-1 \geq 0$，那么 $\mathcal{A}_{\mathrm{flat}}(E)$ 有无穷多个道路连通分支。

为了分析 $G = SO(n)$ 的情形，我们再次希望将 $O(n)$-丛的结构群约化，并进一步将它们约化为 Spin(n)-丛。一个 $O(n)$-丛 E 可约化为一个 $SO(n)$-丛，当且仅当第一斯蒂费尔–惠特尼类 $w_1(E) \in H^1(X;\mathbb{Z}/2)$ 为零。一个 $SO(n)$- 丛 F 可约化为 Spin(n)- 丛，当且仅当 $w_2(F) = 0$ （见 [16] 推论 5.3 和注 6.11）。

引理 5.6. 设 X 是一个有限 *CW* 复形。给定 $m > 0$ 和 $x \in H^{4i}(S^m \wedge X;\mathbb{Q})$，存在一个类 $\phi \in \mathrm{KO}^0(S^m \wedge X)$ 使得 $p_i(\phi) = qx$，其中 $q \in \mathbb{Q}^*$是一个非零有理数；对于 $j \neq i$，有 $p_j(\phi) = 0$，并且$w_1(\phi) = 0 = w_2(\phi)$。

证明。我们需要证明，引理 4.1 中构造的丛的类可以选取为满足 $w_1(\phi) = 0 = w_2(\phi)$。如果陈特征满足 $Ch(\phi') = q'x$，其中某个选定的类为 $x \in H^{4i}(S^m \wedge X;\mathbb{Q})$，且 $\phi' \in \mathrm{KO}^0(S^m \wedge X)$，那么 $Ch(4\phi') = 4q'x$，因为 Ch 是一个环同态；又由于$w_1(E \oplus F) = w_1(E) + w_1(F)$，所以 $w_1(4\phi') = 0$。由于

$$w_2(E \oplus F) = w_2(E) + w_1(E)w_1(F) + w_2(F)$$

我们还看到 $w_2(4\phi') = 0$。因此令 $\phi = 4\phi'$ 和 $q = 4q'$。 □

现在，我们在平坦联络空间上得到了与 $O(n)$-丛情形相同的结果。请注意，与酉情形不同，我们无需改变秩的下界，即可将问题化归到 $SO(n)$ 或 Spin(n)。

定理 5.7. 定理 *4.3* 和推论 *4.4* 对 $SO(n)$ 和 *Spin(*n*)-* 丛成立。

6. 附录

在本附录中，我们给出命题 4.2 的证明。

命题 4.2 的证明。给定实向量丛 $E \to X$，可以考虑 E 的复化，记为 $E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$。这诱导出映射 $c : \mathrm{KO}^0(X) \to \mathrm{K}^0(X)$。不难验证这是一个环同态。令 $r : \mathrm{K}^0(X) \to \mathrm{KO}^0(X)$ 表示遗忘映射，它将复向量丛映到其底层实向量丛，是一个群同态。令 E 表示复向量丛的共轭丛，其定义为纤维 E_x 是与 E_x 共轭的向量空间的向量丛。这在 $\mathrm{K}^0(X)$ 上诱导出良定义的 $\mathbb{Z}/2$-作用。令 $\mathrm{K}^0_I(X)$ 表示在此作用下不变的元素集合。注意，$\mathrm{Im}(c) \subseteq \mathrm{K}^0_I(X)$，并且可以证明（见命题 2.9）$r' = r|_{\mathrm{K}^0_I(X)}$ 和 c 满足 $r'(c(x)) = 2x$ 以及 $c(r'(y)) = 2y$。因此，$c \otimes 1$ 是环同构 $\mathrm{KO}^0(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/2] \to \mathrm{K}^0_I(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/2]$，其逆映射为 $r' \otimes 1/2$。这可以推广为同构 $\mathrm{KO}^0(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to \mathrm{K}^0_I(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$。

现在我断言，陈特征同构限制为一个同构

$$\mathrm{K}_I^0(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to \prod_{i\geq 0} H^{4i}(X;\mathbb{Q})$$

为说明这一点，考虑 $\mathrm{K}^0(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 上的共轭作用，以及作用在 $\prod_{i\geq 0} H^{2i}(X;\mathbb{Q})$ 上、由各分量定义的 $\mathbb{Z}/2$- 作用

$$\overline{x} \in H^{2i}(X;\mathbb{Q}) = \begin{cases} -x & \text{if i odd} \\ x & \text{if i even} \end{cases}$$

陈特征在向量丛 $E \to X$ 上定义为

$$\mathrm{Ch}(E) = \dim(E) + \sum_{k>0} s_k(c_1(E),\ldots,c_k(E))/k!$$

其中 $c_i(E) \in H^{2i}(X;\mathbb{Z})$ 是第 i 个陈类，而 s_k 是第 k 个牛顿多项式

$$s_k(c_1,\ldots,c_k) = k(-1)^k \sum_{\substack{r_1+2r_2+\cdots+mr_m=m \\ r_1\geq 0,\ldots,r_m\geq 0}} \frac{(r_1+r_2+\cdots+r_m-1)!}{r_1!r_2!\ldots r_m!} \prod_{i=1}^{m}(-c_i)^{r_i}$$

利用 $c_i(E) = (-1)^i c_i(\overline{E})$（见 [12]），很容易验证陈特征相对于上述 $\mathbb{Z}/2$-作用是等变的。因此，Ch 限制在该 $\mathbb{Z}/2$-作用的不动点集上给出一个同构，从而得到我们所需的同构。□

References

[1] A.L.Onishchik 和 E.B. Vinberg。 *Lie Groups and Algebraic Groups*。柏林施普林格出版社，1990年。[2] Thomas Baird 和 Daniel A. Ramras。映入代数集的光滑化映射与平坦联络空间。 *Geometriae Dedicata*，174：359–374，2014年。[3] Theodor Br¨ocker 和 Tammo tom Dieck。 *Representations of Compact Lie Groups*。柏林施普林格出版社，1985年。[4] Johan L. Dupont。 *Curvature and Characteristic Classes*。Springer-Verlag，1978年。[5] Jos´e F. Fernando 和 Riccardo Ghiloni。连续半代数映射的可微逼近。 *Selecta Math. (N.S.)*，25(3)：论文编号46，30页，2019年。[6] Daniel Henry Gottlieb。从映射理论的应用。 *Transactions of the American Mathematical Society* 171 23 50, 1972 ，： −。

[7] Allen Hatcher。 *Algebraic topology*。剑桥大学出版社，剑桥，2000年。[8] F. Kamber 和 Ph. Tondeur。平坦丛的特征同态。 *Topology* 6 153 159, 1967 ，： −。

[9] F. Kamber 和 Ph. Tondeur。 *Foliated Bundles and Characteristic Classes*。柏林施普林格出版社，1975年。[10] Max Karoubi。 *K-theory: An Introduction*。Springer-Verlag，1978年。[11] John M. Lee。 *Introduction to Smooth Manifolds*。纽约施普林格出版社，2012年。[12] John W. Milnor 和 James D. Stasheff。 *Characteristic Classes*。普林斯顿大学出版社，1974年。[13] Richard S. Palais。 *Foundations of Global Non-Linear Analysis*。W.A. Benjamin，1968年。

[14] Daniel A. Ramras。曲面上的杨–米尔斯理论与阿蒂亚–西格尔定理。
Algebraic and Geometric Topology，8：2209–2251，2008年。[15] Daniel A. Ramras。曲面上的平坦联络稳定模空间。*actions of the American Mathematical Society* 363 1061 1100, 2011 *Trans* ，： –。

[16] Robert R Bruner、Michael Catanzaro 和 J Peter May。特征类，2012年。
https://www.math.uchicago.edu/~may/CHAR/charclasses.pdf。