arXiv:2512.15050v1 [math.SP] 17 Dec 2025

重特征值与宽度

QIXUAN HU

摘要。我们证明了边界位于 $\mathbb{R}^n$ 内的凸“薄”区域以及具有非负里奇曲率的紧致“薄”流形上的第一诺伊曼特征值是简单的。对于 $\mathbb{R}^2$中的凸“薄”区域，我们证明了前k 个纽曼特征值是简单的。数目k 取决于相应宽度与区域直径之比。对于$\mathbb{R}^n$中的凸“薄”区域，我们得到了与塌缩线段的特征值比较。

数学主题分类：35K15，53C44

目录

1. 引言 节.1

第 1 部分。 Neumann 特征值的重数 4

2. 凸平面域的重特征值.43. 凸域的第一个 Neumann 特征值 .64. 流形上的特征值的单重性 .9

第 2 部分。 The Neumann 特征值的比较 12

5. 特征值界 .126. 垂直导数估计 .177. L^∞ 纽曼特征函数估计.218. 二维情形下第一特征值的比较.229. N .27附录 A. Dirichlet-Neumann 热核的估计 .29参考文献.31

1. 引言

基于细长矩形（它是带边界的凸域）和细管（它是无边界的凸曲面）的前几个纽曼特征值的简单性，我们研究带边界的凸“薄”域在 $\mathbb{R}^n$ 以及具有非负 Ricci 曲率的紧致“薄”流形上的纽曼特征值的简单性。

日期：2025年12月18日。Q. Hu 获得了 SRIG NTF25026T 的部分资助。

1976 年，Cheng [Che76] 证明，对于亏格为 g 的紧黎曼曲面 M^2 ，$\mu_i(M^2)$ 的重数为 $\leq (2g+i+1)(2g+i+2)$ 2。后来，Besson [~~Bes80]将这一~~二次上界改进为线性上界 $4g + 2i + 1$。在 [Nad87], Nadirashvili 进一步改进了 Besson 的结果。进一步讨论另见 [HOHON99] 和 [HOMN99] 。在 [S´ev02] S´evennec 证明，若 $\chi(M) < 0$，则第一特征值的重数至多为 $5 - \chi(M)$。

Nadirashvili 还 [Nad87] 证明了μ_1 的重数至多为 2。众所周知，在 $\mathbb{R}^2$中，圆球或正方形的第一诺伊曼特征值的重数为 2。

一个自然的问题是：对区域施加何种限制，才能使第一特征值为单重?

注 1.1。关于通过限制流形拓扑来界定特征值重数的讨论主要聚焦于二维情形；由于 *Colin de Verdi`ere* 的以下定理，我们不能期待高维情形有类似结果。

定理 1.2。 [CdV87] 设 M 是一个维数为 $\geq$ 3的紧流形。那么，对于任意有限序列 $0 = a_0 < a_1 \leq \cdots \leq a_n$，存在 M 上的一个 C^∞ 度量 g，使得该序列是拉普拉斯算子在(M, g)上的前 n 个特征值。

定义 1.3。 设$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为有界凸域，令 $\mathcal{D}(\Omega)$ 表示Ω 在 $\mathbb{R}^n$中的直径，我们将 $\mathcal{W}(\Omega)$的宽度定义为 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 如下：

$$\mathscr{P}_v(\Omega) := \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot v = 0, x = y + s \cdot v \text{ for some } y \in \Omega, s \in \mathbb{R}\}, \quad \forall v \in \mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n;$$
$$\mathcal{W}(\Omega) = \min_{v \in \mathbb{S}^{n-1}} \mathcal{D}(\mathscr{P}_v(\Omega)).$$

Ba˜nuelos 和 Burdzy [BB99] 证明了以下结果：

定理 1.4。 [BB99] 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为凸域。如果Ω的宽度与直径之比足够小，

$$\frac{\mathcal{W}(\Omega)}{\mathcal{D}(\Omega)} \leq \frac{\pi}{4j_{0,1}},$$

其中 $j_{0,1}$ 是零阶贝塞尔函数 $J_0(x)$的第一个零点。则Ω的第一诺伊曼特征值μ_1 是单的。

他们使用概率方法进行了证明。他们还提出了以下猜想：

猜想 1.5。 如果$\mu_1(\Omega)$ 对于某个凸域$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$具有重数 = 2 ，则

$$\frac{\mathcal{W}(\Omega)}{\mathcal{D}(\Omega)} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

本文给出了一个解析证明，将 Ba˜nuelos 和 Burdzy 的结果推广到高维和更高阶的特征值。

在本文的第一部分，我们证明以下结论：

定理 1.6. 对于任意正整数 k，都存在一个常数 $\epsilon_k = {}_4{}^{\pi}{}_{(j_{0,1}+k_2^{-1}\pi)}$，~~使得对~~于任意具有 C^1 光滑边界的凸域$\Omega \subset \mathbb{R}^2$，若 ${}^{\mathcal{W}}{}_{(\Omega)\,\mathcal{D}(\Omega)} < \epsilon_k$，则~~$\Omega$的~~第一个 k 个纽曼特征值是单重的。

定理 *1.7.* 对于任意正整数 n，都存在一个常数 $\delta_n = \sqrt{C}\sqrt{8}\ \sqrt[n]{j}\ n_{2}^{-2},1$，其中 $C_n = -\Gamma(\frac{n}{2})($ ^{2} $x_m)\ n^{-2}\int n_{2^{-2}}(x_m)$，且 x_m 是 $t^{-}n^{-2}\int n_{2^{-2}}(t)$ 的第一个极小点。使得对于任意具有 C^1 光滑边界的凸域 $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$，若 $^{W}(\Omega)\ \mathcal{D}(\Omega) < \delta_n$，则 Ω 的第一诺伊曼特征值是单重的。

定理 1.8。 设 M 是一个紧致完备n维黎曼流形，且 $Rc \geq 0$。令 $A,B \in M$，使得 $d(A,B) = \mathcal{D}(M)$，令 l 为 M 中连接 A,B 的一条线段。假设 M 位于 l 的 ϵ邻域内。若 M 的第一特征值μ 不是单特征值，则有

$$\mu \geq \frac{C(n)}{\epsilon^2},$$

其中 $C(n) = c_{\frac{n}{18}}$，其中 C_n 由定理 *1.7*定义。

在本文的第二部分，我们比较区域 Ω 的特征值与塌缩线段的特征值。

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为一个凸域，且 $\mathcal{D}(\Omega) = 1, \mathcal{W}(\Omega) = \epsilon$。
假设 $\Omega^t = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : (t,y) \in \Omega\}$ 且 $\Omega = \{(t,y) : t \in [0,1], y \in \Omega^t\}$。我们定义

$$H(x) := \frac{\mathcal{H}^{n-1}(\Omega^x)}{\int_0^1 \mathcal{H}^{n-1}(\Omega^t)dt},$$

其中，$\mathcal{H}^{n-1}$ 是$n-1$维豪斯多夫测度。
令$d\mu(x) = H(x)dx$，并令N 为线段 $[0,1]$，其测度为$d\mu$。
对于 $\mathbb{R}^2$中的凸域，Wang and Xu[WX24] 证明了以下结果:

定理 1.9。 [WX24] 存在一个普适常数 $C_1, C_2 > 0$，使得对于任意的$\Omega \subset \mathbb{R}^2$，若其为直径为 $\mathcal{D}(\Omega) = 1$、宽度为 $\mathcal{W}(\Omega) = \epsilon \in (0, C_1)$的凸域，则有

$$\mu_1(\Omega) \geq \pi^2 + C_2\epsilon^2.$$

此外，Wang and Xu [WX24][命题 6。3] 表明存在一个普适常数$C > 0$，使得对于凸域$\Omega \subset \mathbb{R}^n$，有

$$\mu_1(N) - C\epsilon \leq \mu_1(\Omega) \leq \mu_1(N).$$

该结果由 [Jer95] 在$n = 2$维情形下证明，[CJK09] 则证明了$n \geq 2$维情形。这里，我们给出一种不同的证明，该证明也适用于高阶特征值。

定理 1.10。 设$\mu_k(N), \mu_k(\Omega)$ 是 N,Ω的第 k 个 *Neumann* 特征值。我们有如下比较:

$$(1 - 2\epsilon(1 + \mu_k(N))) \cdot \mu_k(N) \leq \mu_k(\Omega) \leq \mu_k(N).$$

使用与 [WX24], 中类似的论证，我们可以改进定理 1.10 在 Ω 是 $\mathbb{R}^2$中的凸域，且 $k = 1$的情形下的不等式，得到如下比较:

定理 1.11。 存在普适常数 $C > 0$，对于任意 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为凸域，有

$$\mu_1(N) - C\epsilon^2 \leq \mu_1(\Omega) \leq \mu_1(N).$$

第1. 部分：Neumann 特征值的重数

2. 凸平面域的重特征值

本节假设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中具有C^1 光滑边界的凸域，宽度 $\mathcal{W}(\Omega) = \mathcal{D}(\mathscr{P}_{v_0}(\Omega)) = \epsilon$，其中 $v_0 = (1, 0)$。

引理2.1。 取 $z_L = (z_L^1, z_L^2)$，$z_R = (z_R^1, z_R^2) \in \overline{\Omega}$使得

$$z_L^1 = \min\{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in \Omega\}, \qquad z_R^1 = \max\{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in \Omega\}.$$

则 z_L 和 z_R 将 $\partial\Omega$ 分成两部分 Γ_1 和 Γ_2，使得

$$\vec{n}\big|_{\Gamma_1} \cdot \vec{e}_2 \geq 0, \qquad \vec{n}\big|_{\Gamma_2} \cdot \vec{e}_2 \leq 0,$$

其中 $\vec{e}_1 = (1, 0)$和 $\vec{e}_2 = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$，$\vec{n}\big|_{\Gamma_i}$是$\Omega$ 在 Γ_i上的外法向量，其中 $i = 1, 2$。

证明： 由于 Ω 是凸集，我们得到线段$z_L z_R$ 将$\overline{\Omega}$ 分成两部分 $D_1, D_2, ,$ 其中

$$D_1 = \{z \in \Omega, \text{the ratio of line } z_L z \text{ is larger than the ratio of line } z_L z_R\}$$

and

$$D_2 = \{z \in \Omega, \text{the ratio of line } z_L z \text{ is smaller than the ratio of line } z_L z_R\}$$

设 $\Gamma_1 = \partial\Omega \cap \overline{D_1,}$以及 $\Gamma_2 = \partial\Omega \cap \overline{D_2,}$

对于任意 $p = (x, y) \in \Gamma_1$，若 $x = z_L^1$，由 Ω 的凸性以及 $z_L^1 = \min\{x \in \mathbb{R}$ 可知：$(x, y) \in \Omega\}$，我们得到线段 $z_L p \subset \Gamma_1$ 和 $\vec{n}\big|_p = (-1, 0)$，因此 $\vec{n} \cdot \vec{e}_2 = 0$ 在 p 处。类似地，若 $x = z_R^1$，我们得到 $\vec{n}\big|_p = (1, 0)$，以及 $\vec{n} \cdot \vec{e}_2 = 0$ 在 p 处。

若 $x \in (z_L^1, z_R^1)$，令 $\vec{t} = e^{i\theta}$为点 p 处 Ω 的单位切向量，其中 $\theta \in (-\pi, \pi)$ 使得$\vec{n} = \vec{t} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$。由 Ω 的凸性可知，$\tan\theta$是 x 的递减函数，且 $\lim_{x \to z_L^1} \theta(x) = \frac{\pi}{2}$，$\lim_{x \to z_R^1} \theta(x) = -\frac{\pi}{2}$，因此当 $x \in (z_L^1, z_R^1)$ 时，$\theta(x) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，且 $\vec{n} \cdot \vec{e}_2 = \vec{t} \cdot \vec{e}_1 = \cos\theta > 0$。

对 Γ_2 作类似论证可得 $\vec{n} \cdot \vec{e}_2 \leq 0$ 于 Γ_2。 □

定理 2.2. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个具有 C^1 光滑边界的凸域，且宽度为 $\mathcal{W}(\Omega) = \epsilon$。假设 μ 是 Ω 的一个重 *Neumann* 特征值，则 $\mu \geq \frac{\pi^2}{4\epsilon^2}$。 —

证明： **步骤（1）**。经旋转，不妨设 $\mathcal{W}(\Omega) = \mathcal{D}(\mathscr{P}_{v_0}(\Omega)) = \epsilon$，其中 $v_0 = (1, 0)$。

设 u_1, u_2 是 Ω 关于特征值 μ 的两个线性无关特征函数。

若 $u_1(z_L) = 0$，则令 $u = u_1$，；否则，令 $u = u_1(z_L)u_2 - u_2(z_L)u_1$。我们有 u 也是 Ω 关于 μ 的特征函数，且 $u(z_L) = 0$。令 $\Sigma = u^{-1}(0)$。

根据 Courant-Cheng 节点域定理，我们有 $\Omega \setminus \Sigma = \cup_{i=1}^{s} \Omega^i$，其中$s$ 为有限的，并且 Ω^1、$\cdots$、Ω^s 是u的所有节点域。

注意， Σ 除 Ω 中一个零维子集外是一维流形，因此 $\Omega \setminus \Sigma$ 在 Ω 中稠密。因此我们得到

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{s} \bar{\Omega^i}, \qquad \partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{s} \partial\Omega^i.$$

步骤（2）。对于 $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \Gamma_1$ ，满足 $\lim_{k\to\infty} z_k = z_L$，我们断言存在 $N > 0$ 和唯一的 $i \in \{1, \cdots, s\}$，使得当 $k > N$ 时，$z_k \in \partial\Omega^i$。

否则，我们可以找到 $z^{k_1}, \cdots, z^{k_4}$，它们在 $\Gamma_1 \subset \partial\Omega$ 上按顺时针方向排列，并且存在 $\alpha, \beta \in \{1, \cdots, s\}$，使得 $\alpha \neq \beta$，且 z^{k_1}、$z_{k_3} \in \partial\Omega^\alpha$ 以及 z^{k_2}、$z_{k_4} \in \partial\Omega^\beta$。

在 Ω^α 中选取连接 z^{k_1}、z^{k_3} 的简单曲线 γ_1，并选取连接 z^{k_2}、z^{k_4} 的简单曲线 γ_2。根据 4 个点 $z^{k_1}, \cdots, z^{k_4}$ 在 $\partial\Omega$ 上的排列，我们得到 $\gamma_1 \cap \gamma_2 \neq \emptyset$，这就是矛盾。

不失一般性，存在 $\delta > 0$，使得

$$\left[B_{z_L}(\delta) \cap \Gamma_1\right] \subset \partial\Omega^1, \qquad \left[B_{z_L}(\delta) \cap \Gamma_1\right] \cap \partial\Omega^k = \emptyset, \qquad \forall k \neq 1. \tag{2.1}$$

对于 Γ_2，我们也有类似的结论。

现在我们假设，对于某个 $j \in \{1, \cdots, s\}$，

$$[B_{z_L}(\delta) \cap \Gamma_1] \subset \partial\Omega^1, \qquad [B_{z_L}(\delta) \cap \Gamma_2] \subset \partial\Omega^j.$$

不失一般性，左边只有以下两种情况：

$$[B_{z_L}(\delta) \cap \Gamma_2] \subset \partial\Omega^2 \quad \text{or} \quad [B_{z_L}(\delta) \cap \Gamma_2] \subset \partial\Omega^1.$$

步骤（3）。若 $[B_{z_L}(\delta) \cap \Gamma_2] \subset \partial\Omega^2$,，我们断言

$$(\partial\Omega^1 \cap \partial\Omega) \subset \Gamma_1 \quad \text{or} \quad (\partial\Omega^2 \cap \partial\Omega) \subset \Gamma_2.$$

若 $(\partial\Omega^1 \cap \partial\Omega) \subset \Gamma_1$ 不成立，则我们可以找到 $P \in B_{z_L}(\delta) \cap \Gamma_1$ 以及 $Q \in \partial\Omega^1 \cap \Gamma_2$。

假设 L_1 和 L_2 是 $\partial\Omega \setminus \{P,Q\}$ 的两个连通分支，且 $z_L \in L_1$。令 γ_1 为 Ω^1 中的一条连接 P,Q 的简单曲线。由于 $\Omega^2 \cap \gamma_1 = \emptyset$，集合 Ω^2 包含在 $\Omega \setminus \gamma_1$ 的一个连通分支中。

注意 $z_L \in L_1$ 且 $z_L \in \partial\Omega^2$, 集合 Ω^2 包含在 $\Omega \setminus \gamma_1$ 的一个连通分支中，其边界为 L_1 和 γ_1。因此 $[\partial\Omega^2 \cap \partial\Omega] \subset L_1$。

根据 $[L_1 \cap \Gamma_1] \subset [B_{z_L}(\delta) \cap \Gamma_1]$ 以及（2.1），我们得到

$$[\partial\Omega^2 \cap \partial\Omega \cap \Gamma_1] \subseteq [\partial\Omega^2 \cap L_1 \cap \Gamma_1] \subseteq [\partial\Omega^2 \cap B_{z_L}(\delta) \cap \Gamma_1] = \emptyset.$$

因此 $[\partial\Omega^2 \cap \partial\Omega] \subseteq \Gamma_2$，应用定理A.4 于 Ω^2, 我们得到

$$\mu \geq \lambda_1(\Omega^2) \geq \frac{\pi^2}{4\epsilon^2}.$$

步骤（4）。最后，我们处理情形 $[B_{z_L}(\delta) \cap \Gamma_2] \subset \partial\Omega^1$。假设 $u > 0$ 在 Ω^1 中。

由引理 3.3 且节点域只有有限个，我们可以选取一个序列 $z_k \to z_L$ 使得 $u(z_k) < 0$，并且 $z_k \in \Omega^3$ 对所有 k 均成立。由此得到 $z_L \in \partial\Omega^3$。

我们选取 $P \in B_{z_L}(\delta) \cap \Gamma_1$ 和 $Q \in B_{z_L}(\delta) \cap \Gamma_2$。设 γ_1 是 Ω^1 中连接 P 与 Q 的一条简单曲线。设 L_1 和 L_2 是 $\partial\Omega \setminus \{P、Q\}$ 的两个连通分支，而 L_1 是包含 z_L 的连通分支。

由于 $z_L \in \partial\Omega^3$, 可得 Ω^3 包含在由 $\gamma_1 \cup L_1$ 所围成的区域内。因此 $\partial\Omega^3 \cap \partial\Omega \subset L_1$。由（2.1），我们有

$$([\partial\Omega^3 \cap \partial\Omega]\backslash\{z_L\}) \subseteq [\partial\Omega^3 \cap B_{z_L}(\delta) \cap \Gamma_1] \cup [\partial\Omega^3 \cap B_{z_L}(\delta) \cap \Gamma_2] = \emptyset.$$

因此，我们有 $[\partial\Omega^3 \cap \partial\Omega] = \{z_L\}$。现在应用 A.4 关于 Ω^3的定理（在此情况下狄利克雷边界为空），我们得到 $\mu = \lambda_1(\Omega^3) \geq \frac{\pi^2}{4\epsilon^2}$。 □

我们回顾 [Krö99]的以下结果。

定理 2.3。假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个直径为 $\mathcal{D}(\Omega) = 1$的凸域，令 $k \in \mathbb{Z}^+$，且 $\mu_k(\Omega)$是 Ω的第 k 个 *Neumann* 特征值，则有

(a) 。若 $n = 2$，则 $\mu_k(\Omega) \leq 4(j_{0,1} + k^{-1}\pi)^2$；*(b)* 。若 $n > 2$，且 k 为奇数，则 $\mu_k(\Omega) \leq 4j^2_{n-2}k_{+1}$；*(c)* 。若 $n > 2$，且 k 为偶数，则 $\mu_k(\Omega) \leq (j_{n-2}, k + j_{n-2}, k_{+2})^2$；

根据定理 2.3 和定理 2.2，我们得到以下结果：

定理 2.4. 设$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是具有 C^1 边界的凸域，Ω 的直径为 $\mathcal{D}(\Omega)$，宽度为$\mathcal{W}(\Omega)$。若 $\mathcal{W}(\Omega)\mathcal{D}(\Omega) < \frac{\pi}{4}(j_{0,1} + k^{-1}\pi)$，则$\Omega$ 的第一个 k 个 *Neumann* 特征值是单重的。

证明：通过缩放，我们假设 $\mathcal{D}(\Omega) = 1$，且 $\mathcal{W}(\Omega) = \epsilon$。设 μ 是 Ω 的一个重特征值。根据定理 2.2，我们得到 $\mu \geq \frac{\pi^2}{4\epsilon^2}$。若 $\epsilon \leq \frac{\pi}{4}(j_{0,1} + k^{-1}\pi)$，则 $\mu > 4(j_{0,1} + k^{-1}\pi)^2$。根据定理 2.3，我们得到 μ 不可能是 Ω 的第一个 k 个 Neumann 特征值。 □

3. 凸域的第一诺伊曼特征值

本节中，我们假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个具有C^1 光滑边界的凸域，且 $\mathcal{W}(\Omega) = \epsilon > 0$。此外，假设 $\mathcal{D}(\mathscr{P}_{v_0}(\Omega)) = \mathcal{W}(\Omega) = \epsilon$，其中 $v_0 = (1, 0, \cdots, 0)$。根据 $\mathscr{P}_v(\Omega)$ 的定义，我们得到 $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathscr{P}_{v_0}(\Omega)$。

引理 *3.1.* 设 u 是 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 关于特征值 μ 的第一诺伊曼特征函数，满足 u 的上确界 $= 1$，u 的下确界 $= -k$，且 $0 < k \leq 1$。假设 $u(s_0, y_0) = -k$，$u(s_1, y_1) = 1$，其中 (s_0, y_0)、$(s_1, y_1) \in \Omega$。则对任意 $(s_0, y) \in \Omega$，有 $u(s_0, y) \leq -k + 2\mu\epsilon^2$；并且对任意 $(s_1, y) \in \Omega$，有 $u(s_1, y) \geq 1 - 2\mu\epsilon^2$。

证明： 设 $v = \frac{u - 1 - k}{1 + k}$ 且 $\theta = \sin^{-1} v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$。由特征函数 [ZY84],的梯度估计可得

$$|D\theta| \leq \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{1+k}} \leq \sqrt{2\mu}. \tag{3.1}$$

因此，我们得到

$$|Du| = \frac{1+k}{2}|Dv| = \frac{1+k}{2}\sqrt{1-v^2}|D\theta| \leq \sqrt{(u+k)(1-k)}\sqrt{2\mu}. \tag{3.2}$$

对于任意 $(s_0, \mathbf{y}) \in \Omega$，由于 $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathscr{P}_{v_0}(\Omega)$，且 $\mathcal{D}(\mathscr{P}_{v_0}(\Omega)) = \epsilon$，我们得到 $|(s_0,\mathbf{y}) - (s_0,\mathbf{y}_0)| \le \epsilon$，因此有

$$u(s_0, \mathbf{y}) \le -k + \sup |Du| \cdot \epsilon \le -k + \epsilon\sqrt{2\mu}. \tag{3.3}$$

将（3.3）代入（3.2），得到

$$|Du|(s_0, y) \le \sqrt{2\mu}\sqrt{u(s_0, y) + k} \le \sqrt{2\mu}(\epsilon\sqrt{2\mu})^{\frac{1}{2}}. \tag{3.4}$$

将（3.4）代入（3.3），得到

$$u(s_0, \mathbf{y}) \le -k + \epsilon \cdot \sqrt{2\mu}(\epsilon\sqrt{2\mu})^{\frac{1}{2}}. \tag{3.5}$$

重复这一过程m 次，由归纳法可得

$$|Du|(s_0, \mathbf{y}) \le \sqrt{2\mu}(\epsilon\sqrt{2\mu})^{2^{-1}+2^{-2}+\cdots+2^{-m}}. \tag{3.6}$$

设$m \to \infty$，可得

$$|Du|(s_0, \mathbf{y}) \le 2\mu\epsilon, \tag{3.7}$$

and

$$u(s_0, \mathbf{y}) \le -k + 2\mu\epsilon^2. \tag{3.8}$$

对$u(s_1, \mathbf{y})$ 和 $|Du|(s_1,\mathbf{y})$，类似的论证同样成立。 □

由 [Kr¨o98],，我们得到关于 u 的上确界与 $-\mathrm{u}$ 的下确界之比的以下估计。

引理 3.2。 [Kr¨o98] 设 M 是一个具有非负里奇曲率的紧致 n 维黎曼流形，或是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸域。设 u 是 M 上对应于第一 *Neumann* 特征值 $\mu_1(M)$ 的特征函数。假设 u 的上确界 大于 $\geq -\mathrm{u}$ 的下确界。令 ψ 为 *Sturm-Liouville* 问题的解

$$\psi'' + \frac{n-1}{x}\psi' + \psi = 0, \tag{3.9}$$

其初始条件为 $\psi(0) = 1$，$\psi'(0) = 0$。令 $C_n = -\Gamma(\frac{n}{2})(\frac{2}{x_m})^{\frac{n-2}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(x_m)$，其中 x_m 是 $t^{-\frac{n-2}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(t)$ 在 $t > 0$ 时的第一个极小点，且 J_α 是 α 阶贝塞尔函数。

于是，我们有

$$\frac{\sup u}{-\inf u} \le \frac{\sup \psi}{-\inf \psi} = \frac{\sup_{t>0} t^{-\frac{n-2}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(t)}{-\inf_{t>0} t^{-\frac{n-2}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(t)} = \frac{1}{C_n}. \tag{3.10}$$

引理 3.3。 假设 u 是 Ω 的第一诺伊曼特征函数，$\Delta u = -\mu \cdot u$ 在 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 上成立。假设 $u(z_0) = 0$ 对某个 $z_0 \in \Omega$ 成立，那么对任意 $\delta > 0$，存在 $p,q \in B_{z_0}(\delta) \cap \Omega$，使得 $u(p) > 0$ 且 $u(q) < 0$。

证明： 通过反证法，我们还可以进一步假设$u \le 0$ 在$B_{z_0}(\delta) \cap \Omega$上（否则我们在其余论证中考虑$-u \le 0$）。于是我们有

$$\Delta u = -\mu \cdot u \ge 0, \qquad \text{on } B_{z_0}(r) \cap \Omega.$$

如果 $u(z_1) = 0$ 对某个 $z_1 \in B_{z_0}(\delta) \cap \Omega$成立，根据强最大值原理，我们得到 u 在$B_{z_0}(\delta) \cap \Omega$上为常数。根据唯一延拓性质 [GL87，定理 1，1], u 在 Ω中为常数，这就产生了矛盾。

因此，在$u < 0$ 上$B_{z_0}(\delta) \cap \Omega$，我们得到$z_0 \in \partial\Omega$，且

$$u(z_0) > u(z), \forall z \in B_{z_0}(\delta) \cap \Omega.$$

根据 Hopf引理，我们得到 $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} > 0$ 在z_0, 处，其中 $\vec{n}$ 是z_0处的外单位法向量。这与u的诺伊曼边界条件矛盾。□

引理 *3.4*。假设 $\Omega \subset (0, d) \times \mathscr{P}_{v_0}(\Omega)$，且 $A = (0, y_0)$，$B = (d, y_1) \subset \Omega$。假设 $\Delta u = -\mu \cdot u$ 在 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 上，且 $u(A) = 0$，定义 $\Sigma_p = \{x \in \mathbb{R} : \{x\} \times \mathbb{R}^{n-1} \cap u^{-1}(0) \neq \emptyset\}$，则存在 $\Sigma_p = [0,a]$，使得 $a \in (0, d]$。

证明：记 $\Sigma = u^{-1}(0)$。由于 $u(A) = 0$，根据引理 3.3，对于任意 $\delta > 0$，u 在 $B_A(\delta) \cap \Omega$ 中既有正值也有负值。因此，存在某点 $q \in (B_A(\delta) \cap \Omega)$，使得 $u(q)=0$，所以 Σ_p 不只是一个点。

接下来，我们证明 Σ_p 是连通的。否则，存在 $0 \leq$ 一个$_1 <$ 一个$_2 <$ 一个$_3 \leq d$，使得一个$_1$,一个$_3 \in \Sigma_p$ 且一个$_2 \notin \Sigma_p$。

注意，$\Omega_{a_2} := \{($一个$_2$,$\mathbf{y}) \in \Omega : y \in \mathbb{R}^{n-1}\}$ 是连通的，并且$u\big|_{\Omega_{a_2}} \neq 0$，不妨设

$$u\big|_{\Omega_{a_2}} > 0. \tag{3.11}$$

取 $p_1 = (a_1, y_1)$ 和 $p_3 = (a_3, y_3)$，其中 $p_1, p_3 \in \Sigma$。根据引理 3.3，我们可以在 p_1, p_3, 的邻域 U_1, U_3 中选取点 q_1 和 q_3，使得 $u(q_1)$、$u(q_3) < 0$。由于 $a_1 < a_2 < a_3$,，可以将邻域 U_1,U_3 选取得满足

$$U_k \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^n, x = a_2\} = \emptyset, \qquad k = 1, 3.$$

假设q_1 和q_3 的第一坐标为b_1，且b_3,满足$b_1 < a_2 < b_3$。

我们声称q_1 和q_3 不在同一个节点域中。否则，在该节点域中存在一条曲线 γ，连接q_1 和q_3,，且

$$u\big|_{\gamma} < 0. \tag{3.12}$$

γ 中各点的第一坐标从$b_1 < a_2$ 开始，到$b_3 > a_2$,结束，因此

$$\gamma \cap \Omega_{a_2} \neq \emptyset. \tag{3.13}$$

根据（3.11）、（3.12）和（3.13），这就产生了矛盾。因此q_1 和q_3 分别属于两个不同的不同节点域。

由于至少存在一个$u > 0$所在的节点域，因此我们至少得到三个节点域，这与 Courant-Cheng 节点域定理矛盾。

由于 $u(A) = 0$，我们得到 Σ_p 是一条端点为 0 的线段。节点集是 Ω 的闭子集，因此 Σ_p 是 $[0,d]$, 的闭连通子集，结论得证。□

定理 3.5. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个具有 C^1 光滑边界的凸域，且宽度为 $\mathcal{W}(\Omega) = \epsilon$。若 Ω 的第一诺伊曼特征值 μ 不是单特征值，令 $C_n = -\Gamma(\frac{n}{2})(\frac{2}{n}x_m)^{\frac{n-2}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(x_m)$，其中 J_α 是 α 阶贝塞尔函数，x_m 是 $t^{-\frac{n-2}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(t) > 0$的第一个极小点，则有

$$\mu \geq \frac{C_n}{2\epsilon^2}. \tag{3.14}$$

证明：假设 $\Omega \subset (0, d) \times \mathscr{P}_{v_0}(\Omega)$，且 $A = (0, \mathbf{y}_0)$，$B = (d, \mathbf{y}_1) \subset \Omega$。由于 μ 不是单特征值，由 μ 的两个线性无关特征函数的线性组合可知，存在一个对应于 μ 的特征函数 u，使得 $u(A) = 0$，且 $\sup u = 1$，$\inf u = -k$，$0 < k \leq 1$。

假设 $P, Q \in \Omega$，使得

$$u(P) = \min u = -k, \quad u(Q) = \max u = 1, \quad P = (p_1, \mathbf{p}), \quad Q = (q_1, \mathbf{q}).$$

由于 $u(P) < 0$ 且 $u(Q) > 0$，并且 Ω 是凸集，因此可知线段 PQ 上存在一点 $R \in \Omega$，使得

$$u(R) = 0, \qquad R = (r_1, \mathbf{r}), \qquad \min\{p_1, q_1\} \leq r_1 \leq \max\{p_1, q_1\}.$$

由引理 3.4，我们知道 $r_1 \in \Sigma_p = [0, a]$。

若 $p_1 \leq q_1$，，则得到 $p_1 \leq r_1 \leq a$ 且 $p_1 \in \Sigma_p$，因此对于某个 $(p_1, \mathbf{y}) \in \Omega$，有 $u(p_1, \mathbf{y}) = 0$。由引理3.1，可得 $u(p_1, \mathbf{y}) \leq -k + 2\mu\epsilon^2$，因此得到 $\mu \geq \frac{k}{2\epsilon^2}$。

如果 $q_1 < p_1$，，类似的论证表明 $\mu \geq \frac{1}{2\epsilon^2}$。

在这两种情况下，我们得到

$$\mu \geq \frac{k}{2\epsilon^2}. \tag{3.15}$$

由引理 3.2，我们得到 $k \geq \frac{n}{2}\inf t^{-\frac{n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(t) \max t^{-\frac{n-2}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(t) = -\Gamma(\frac{n}{2})(\frac{2}{n}x_m)^{\frac{n-2}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(x_m) = C_n$，其中 x_m 是 $t^{-\frac{n-2}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(t)$ 的第一个极小点。

因此，我们得到 $\mu \geq \frac{C_n}{2\epsilon^2}$。

□

由定理 3.5 和定理 2.3 可得以下结果：

定理 3.6。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个具有 C^1 光滑边界的凸域，且直径为 $\mathcal{D}(\Omega)$，宽度为 (Ω)。若 $\mathcal{W}(\Omega)\mathcal{D}(\Omega) < \sqrt{8}\sqrt{\frac{n}{2}}j_{\frac{n-2}{2},1}$，其中 $C_n = -\Gamma(\frac{n}{2})(\frac{2}{n}x_m)^{\frac{n-2}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(x_m)$，且 x_m 是 $t^{-\frac{n-2}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(t)$ 的第一个极小点，则 Ω 的第一诺伊曼特征值是单重的。

4. 流形上特征值的单重性

引理 4.1。设 M 是一个满足 $Rc \geq 0$ 的紧致完备n维黎曼流形。设 A、B 是 M 中的两点，且 $d(A,B) =$ 直径 $M = d$，设 l 是 M 中连接 A、B 的一条线段，满足

that

$$l : [0, d] \to M, \quad l(0) = A, \quad l(d) = B.$$

假设 M 位于 l 的 ϵ 邻域内，即对任意 $p \in M$，都有 $d(p,l) < \epsilon$。那么对任意$\alpha \in [0,d]$, ，都有

$$M \setminus B_{2\epsilon}(l(\alpha)) \subset B_\alpha(A) \cup B_{d-\alpha}(B) \tag{4.1}$$

证明：对于任意 $z \in M \setminus B_{2\epsilon}(l(\alpha))$，由于 $d(z, l) < \epsilon$，存在 $l(\beta) \in l$，使得 $d(z, l(\beta)) < \epsilon$；由于 $d(z, l(\alpha)) \geq 2\epsilon$，我们得到 $\beta < \alpha - \epsilon$或 $\beta > \alpha + \epsilon$。无论哪种情况，我们都有 $d(A, l(\beta)) < \alpha - \epsilon$或 $d(B, l(\beta)) < d - \alpha - \epsilon$。因此，$d(A, z) < \alpha$ 或 $d(B, z) < d - \alpha$。□

定理4.2。 设M是一个$Ric \geq 0$的紧致完备n维黎曼流形。设A、B是M中的两点，满足$d(A,B) =$ 直径 $M = d$，令l为M中连接A、B的线段，使得

$$l : [0, d] \to M, \quad l(0) = A, \quad l(d) = B.$$

假设M位于l的 ϵ 邻域内，即对于任意$p \in M$，都有$d(p,l) < \epsilon$。如果M的第一特征值μ 不是单的，则有μ 满足

$$\mu \geq \frac{C_n}{18\epsilon^2}. \tag{4.2}$$

其中 $C_n = -\Gamma(n-2)(\frac{2}{\ }x_m)^{\frac{-2}{n}}J_{\frac{n-2}{2}}(x_m)$，$J_\alpha$是 α 阶贝塞尔函数，x_m是 $t^{-\frac{-2}{n}}J_{\frac{n-2}{2}}(t)$在 $t > 0$ 时的第一个极小点，

证明： 步骤（1）：由于 $\mu_1(M)$ 不是单重的，设u_1 和 u_2 是对应于 $\mu_1(M)$ 的两个线性无关特征函数。通过u_1 和 u_2, 的线性组合，我们得到一个对应于 $\mu_1(M)$ 的特征函数u，使得$u(A) = 0$，且 $\sup u = 1$，$\inf u = -k$，$0 < k \leq 1$。

设 $v = u\frac{-1-\frac{2}{k1+}}{\ }k2$且 $\theta = \sin^{-1} v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$。由 [ZY84],可得

$$|D\theta| \leq \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{1+k}} \leq \sqrt{2\mu}. \tag{4.3}$$

于是得到

$$|Du| = \frac{1+k}{2}|Dv| = \frac{1+k}{2}\sqrt{1-v^2}|D\theta| \leq \sqrt{(u+k)(1-k)}\sqrt{2\mu}. \tag{4.4}$$

设 $u(P) = \min u = -k$ 且 $u(Q) = \max u = 1$。我们采用引理 3.1中的类似论证。对于 $x \in B_{3\epsilon}(P)$，有

$$u(x) \leq u(P) + 3\epsilon \sup |Du| \leq -k + 3\epsilon\sqrt{2\mu}. \tag{4.5}$$

由（4.4），对于 $x \in B_{3\epsilon}$（P），我们有

$$|Du|(x) \leq \sqrt{2\mu}\sqrt{3\epsilon\sqrt{2\mu}}. \tag{4.6}$$

按照引理 3.1中的方法重复此过程，可得对于 $x \in B_{3\epsilon}(P)$，有

$$u(x) \leq -k + (3\epsilon\sqrt{2\mu})^{-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\cdots} = -k + 18\mu\epsilon^2. \tag{4.7}$$

类似地，可得对于 $x \in B_{3\epsilon}(Q)$，有

$$u(x) \geq 1 - 18\mu\epsilon^2. \tag{4.8}$$

由引理3.2，可得

$$k \geq C_n, \tag{4.9}$$

若 $18\mu\epsilon^2 < C_n \leq k$，则可得 $-k + 18\mu\epsilon^2 < 0$。因此，$u < 0$ 在$B_{3\epsilon}(P)$上，且$u > 0$ 在$B_{3\epsilon}(Q)$上。

步骤（2）：令Σ为 u 的节点集，且 $\Sigma_0 = \{z \in l, d(z,\Sigma) \leq 2\epsilon\}$。对于任意 $\alpha \in [0,d]$,，若 $l(\alpha) \notin \Sigma_0$，则 u 在 $B_{2\epsilon}(l(\alpha))$ 上 $\neq 0$，假设 u 在 $B_{2\epsilon}(l(\alpha))$ 上 > 0。于是，根据引理 4.1，我们有

$$\{u < 0\} \subset M \setminus B_{2\epsilon}(l(\alpha)) \subset [B_\alpha(A) \cup B_{d-\alpha}(B)].$$

根据 Courant-Cheng 节点域定理 [Che76，第 1], 节可得u 有两个节点域，$\{u < 0\}$ 且 $\{u > 0\}$。因此 $\{u < 0\}$是连通的。

对于 Σ 中点 A 的任意邻域 U，如果 $u \geq 0$ 于 U 上，那么我们有

$$\Delta u = -\mu u \leq 0$$

由于 $u(A) = 0$，我们有 $u(A) = \min_{z\in U} u(z)$。由强最大值原理可知，$u$ 在U中为常数。因此，u 是常数函数，矛盾。因此 $\{u < 0\} \cap U \neq \emptyset$，于是我们得到

$$\{u < 0\} \cap B_\alpha(A) \neq \emptyset.$$

Si由于$B_\alpha(A)$ 和 $B_{d-\alpha}(B)$ 不连通，我们得到 $\{u < 0\} \subset B_\alpha(A)$。并且得到 $\Sigma \subset B_\alpha(\overline{A})$,

步骤（3）：选取 $P_1 = l(p)$ 和 $Q_1 = l(q)$，使得 $d(P,l) = d(P,P_1) < \epsilon$，且 $d(Q,l) = d(Q,Q_1) < \epsilon$。由于 $u < 0$ 于 $B_{3\epsilon}(P)$ 上，且 $u > 0$ 于 $B_{3\epsilon}(Q)$ 上，我们得到 $u < 0$ 于 $B_{2\epsilon}(P_1)$ 上，且 $u > 0$ 于 $B_{2\epsilon}(Q_1)$ 上，因此 $P_1 = l(p)$、$Q_1 = l(q) \notin \Sigma_0$。由步骤（2），我们得到

$$\Sigma \subset \overline{B_p(A)}, \quad \Sigma \subset \overline{B_q(A)}. \tag{4.10}$$

然而，设 γ 为 M 中由三条线段组成的曲线，$\gamma = PP_1 \cup P_1Q_1 \cup Q_1\overline{Q}$。由于 $\overline{u(P)} < \overline{0}$ 且 $u(Q) > 0$，因此存在一点 x_0 位于 γ 上，使得 $u(x_0) = 0$。由于 u 在 $B_{3\epsilon}(P)$ 上 < 0，且 u 在 $B_{3\epsilon}(Q)$ 上 > 0，我们得到 $x_0 \in \Sigma$ 是线段 P_1Q_1的内点。因此 $d(x_0, A) > \min\{p, q\}$，这与 $\Sigma \subset B_p(A)$，$\Sigma \subset B_q(A)$ 矛盾。因此我们得到

$$18\mu\epsilon^2 \geq C_n. \tag{4.11}$$

So

$$\mu \geq \frac{C_n}{18\epsilon^2}. \tag{4.12}$$

□

第 2. 部分：纽曼特征值的比较

5. 特征值界

引理 5.1. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个直径为 $\mathcal{D}(\Omega) = 1$ 、宽度为 $\mathcal{W}(\Omega) = \epsilon$的凸域。假设 $(0, \mathbf{0}),(1, \mathbf{0}) \in \Omega$，则

$$\Omega \subset \Big([0,1] \times B_{\mathbf{0}}(\epsilon)\Big);$$

其中，$B_{\mathbf{0}}(\epsilon)$ 是以 $\mathbf{0}$ 为中心、半径为 ϵ 的 $\mathbb{R}^{n-1}$ 维球。

证明： 记两点为 $v_1 = (\mathbf{0},\mathbf{0})$ 和 $v_2 = (\mathbf{1},\mathbf{0})$。假设存在一点 $v_3 = (x,\mathbf{y}) \in \Omega$，使得 $|\mathbf{y}| = \epsilon_0 > \epsilon$。

对于任意 $\mathrm{v} \in \mathbb{S}^{n-1}$，不妨设 $\mathrm{v} \cdot \mathrm{v}_i \le \mathrm{v} \cdot \mathrm{v}_j \le \mathrm{v} \cdot \mathrm{v}_k$，其中 i、j、k 是 1、2、3 的某个排列。于是存在 $\lambda \in [0,1]$ 使得 $\mathrm{v} \cdot \mathrm{v}_j = \lambda \mathrm{v} \cdot \mathrm{v}_i + (1-\lambda)\mathrm{v} \cdot \mathrm{v}_k = \mathrm{v} \cdot (\lambda \mathrm{v}_i + (1-\lambda)\mathrm{v}_k)$。注意，$\mathrm{v}_0 := \lambda \mathrm{v}_i + (1-\lambda)\mathrm{v}_k$ 是线段 $\mathrm{v}_i\mathrm{v}_k$上的一点。由于 Ω 是凸的，我们知道 $\mathrm{v}_0 \in \Omega$。

The 到直线 v_1v_2 的距离为 $|\mathbf{y}|$，因此由 v_1, v_2, v_3 构成的三角形面积等于

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}|v_1 - v_2| \cdot |\mathbf{y}| = \frac{1}{2}|\mathbf{y}| = \frac{\epsilon_0}{2}.$$

另一方面，假设 $\overrightarrow{v_0v_k}$ 与 $\overrightarrow{v_0v_j}$ 之间的角为 $\theta \in [0, 2\pi)$。由于 $\mathcal{D}(\Omega) = 1$，我们有 $|v_i - v_k| \le 1$。于是

$$\epsilon_0 = 2\mathscr{A} = |v_i - v_k| \cdot |v_j - v_0| \cdot |\sin\theta| \le |v_j - v_0|.$$

令 $\mathrm{x}_\mathrm{j} = \mathrm{v}_j - (\mathrm{v}_\mathrm{j} \cdot \mathrm{v}) \cdot \mathrm{v}$，且 $\mathrm{x}_0 = \mathrm{v}_0 - (\mathrm{v}_0 \cdot \mathrm{v}) \cdot \mathrm{v}$，则有 $\mathrm{x}_\mathrm{j}, \mathrm{x}_0 \in \mathscr{P}_v(\Omega)$。由 $\mathrm{v} \cdot \mathrm{v}_\mathrm{j} = \mathrm{v} \cdot \mathrm{v}_0$，，我们得到 $\mathrm{x}_\mathrm{j} - \mathrm{x}_0 = \mathrm{v}_j - \mathrm{v}_0$。现在我们有

$$\mathcal{D}(\mathscr{P}_v(\Omega)) \ge |x_j - x_0| = |v_j - v_0| \ge \epsilon_0.$$

因此 $\mathcal{W}(\Omega) = \min_{v\in\mathbb{S}^{n-1}} \mathcal{D}(\mathscr{P}_v(\Omega)) \ge \epsilon_0 > \epsilon$，这与 $\mathcal{W}(\Omega) = \epsilon$ 矛盾。

现在对于一个 任意点 $P = (x, \mathbf{y}) \in \Omega$，我们有 $|\mathbf{y}| \le \epsilon$。由于 $|P - v_1|, |P - v_2| \le \mathcal{D}(\Omega) = 1$，我们得到 $x \in [0,1]$。Th 结论随即得出。□

在本章余下部分，我们假设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个凸域，且

$$\mathcal{D}(\Omega) = 1, \qquad (0,\mathbf{0}),(1,\mathbf{0}) \in \overline{\Omega}, \qquad \mathcal{W}(\Omega) = \epsilon \in (0, \frac{1}{2}).$$

由引理5.1，我们知道

$$\Omega \subset \Big([0,1] \times B_{\mathbf{0}}(\epsilon)\Big);$$

假设 $\Omega_t = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : (t,y) \in \Omega\}$ 且 $\Omega = \{(t,y) : t \in [0,1], y \in \Omega_t\}$。我们有 $\Omega_t \subset \{t\} \times B_{\mathbf{0}}(\epsilon)$。

令$V = V(\Omega) = \int_0^1 \int_{\Omega_x} 1 dt$ 用于后续论证。

对于 $L^2(\Omega)$，我们使用如下范数：

$$|f|_{L^2(\Omega)} := \Big(\frac{1}{V}\int_\Omega f(x,y)^2 dxdy\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

我们定义

$$H(x) := \frac{\mathcal{H}^{n-1}(\Omega_x)}{\int_0^1 \mathcal{H}^{n-1}(\Omega_t)dt},$$

其中，$\mathcal{H}^{n-1}$ 是（$n-1$）维豪斯多夫测度。

我们假设 $d\mu(x) = H(x)dx$，则 μ 是 $N := [0,1]$ 上的拉东测度。

对于 $L^2(N)$，我们使用如下范数：

$$|h|_{L^2(N)} := \Big(\int_0^1 h(x)^2 d\mu(x)\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Neumann 特征值 Ω, N 的极小极大定义给出：对于 $k \geq 1$,

$$\mu_{k-1}(\Omega) = \inf_{V_k \subseteq C^\infty(\Omega)} \sup_{f \in V_k - \{0\}} \frac{\int_\Omega |Df|^2}{\int_\Omega f^2}, \tag{5.1}$$

$$\mu_{k-1}(N) = \inf_{V_k \subseteq C^\infty(N)} \sup_{h \in V_k - \{0\}} \frac{\int_N |Dh|^2}{\int_N h^2}. \tag{5.2}$$

其中V_k 是任意 k 维子空间。

定义 5.2. 对于 k 维子空间 Λ^k，我们定义

$$\lambda(\Lambda^k) = \sup_{f \in \Lambda^k - \{0\}} \frac{\int |Df|^2}{\int f^2}.$$

我们定义 Ψ：$L^2(N) \to L^2(\Omega)$ 如下：对于任意 $h \in L^2(N)$,

$$\Psi(h)(x,y) := h(x), \qquad \forall x \in [0,1] \text{ and } (x,y) \in \Omega.$$

命题 5.3. 对于任意 $k \in \mathbb{Z}^+$，我们有$\mu_{k-1}(\Omega) \leq \mu_{k-1}(N)$。

P证明：注意，对于任意 $\delta > 0$，由 (5.2)，可找到 k 维子空间 $\Lambda^k \subseteq C^\infty(N)$，使得 t

$$\lambda(\Lambda^k) \leq \mu_{k-1}(N) + \delta. \tag{5.3}$$

令 $\tilde{\Lambda}^k = \Psi(\Lambda^k)$。注意 Ψ是线性的，且 $\mathrm{Ker}(\Psi) = \{0\}$，因此 $\tilde{\Lambda}^k \subseteq C^\infty(\Omega)$ 是一个 k 维子空间。由 (5.1) 可得

$$\mu_{k-1}(\Omega) \leq \lambda(\tilde{\Lambda}^k). \tag{5.4}$$

假设存在$h_0 \in \Lambda^k$ 使得

$$\lambda(\tilde{\Lambda}^k) = \frac{\int_\Omega |D(\Psi(h_0))|^2}{\int_\Omega |\Psi(h_0)|^2}.$$

接着注意$\int_\Omega |\Psi_0|^2 D((h))_\Omega(h)|^2 = \int_N |_0|^2 D(h)_N h$，利用

（5.3）和（5.4），可得

$$\mu_{k-1}(\Omega) \leq \lambda(\tilde{\Lambda}^k) \leq \frac{\int_N |D(h_0)|^2}{\int_N |h_0|^2} \leq \lambda(\Lambda^k) \leq \mu_{k-1}(N) + \delta.$$

令 $\delta \to 0$如上所述，结论即得。

我们定义 $\Phi: L^2(\Omega) \to L^2(N)$ 如下：对于任意 $f \in L^2(\Omega)$,

$$\Phi(f)(x) := f(x,0), \qquad \forall x \in N.$$

显然， $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id} : L^2(N) \to L^2(N)$。

引理 5.4. 对于任意 $f \in C^\infty(\Omega)$，则

$$\left| |f|^2_{L^2(\Omega)} - |\Phi(f)|^2_{L^2(N)} \right| \le \epsilon \cdot \left\{ |f|^2_{L^2(\Omega)} + |Df|^2_{L^2(\Omega)} \right\}.$$

证明：我们有

$$\begin{aligned}
&\left| |f|^2_{L^2(\Omega)} - |\Phi(f)|^2_{L_2(N)} \right| \\
=&\frac{1}{V}\left| \int_0^1 dx \int_{\Omega_x} (f(x,y)^2 - f(x,0)^2)\, dy \right| \\
=&\frac{1}{V}\left| \int_0^1 dx \int_{\Omega_x} dy \int_0^y \partial_t (f(x,t)^2)\, dt \right| \\
\le&\frac{1}{V}\left| \int_0^1 dx \int_{\Omega_x} dy \int_0^y 2 \cdot |f(x,t)| \cdot |Df(x,t)|\, dt \right| \\
\le&\frac{1}{V}\left| \int_0^1 dx \int_{\Omega_x} \epsilon |2f(x,y)| \cdot |Df(x,y)| dy \right| \\
\le&\frac{\epsilon}{V}\left| \int_0^1 dx \int_{\Omega_x} f(x,y)^2 + |Df(x,y)|^2\, dt \right| \\
=&\epsilon(|f|^2_{L^2(\Omega)} + |Df|^2_{L^2(\Omega)}) \qquad (5.5)
\end{aligned}$$

□

下面的引理是 Ω 的凸性所导出的一个众所周知的结论。

引理 5.5. 对于任意满足 $\frac{\partial w}{\partial \vec{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0$ 的 $w \in C^\infty(\bar{\Omega})$，有 $\left(D_{\vec{n}} D_{\vec{t}} w \cdot D_{\vec{t}} w\right)\Big|_{\partial\Omega} \le 0$，其中 $\vec{t}$ 是 Ω 的单位切向量。

□

引理 5.6. 对于任意满足 $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0$ 的 $u \in C^\infty(\Omega)$，有

$$\int_\Omega |D^2 u|^2 \le \int_\Omega |\Delta u|^2.$$

证明：设 $e_1, \cdots, e_{n-1}$ 是 $\partial\Omega$ 上的正交归一标架。由引理 5.5，有 $D_i u \cdot D^i \frac{\partial u}{\partial n} \le 0$，其中 $i = 1, \cdots, n-1$。

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \Delta(|Du|^2) = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} |Du|^2 = \int_{\partial\Omega} Du \cdot D\frac{\partial u}{\partial n} = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{n-1} D_i u \cdot D_i \frac{\partial u}{\partial n} \le 0.$$

另一方面，

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \Delta(|Du|^2) = \int_\Omega |D^2u|^2 + D(\Delta u)\cdot Du = \int_\Omega |D^2u|^2 - |\Delta u|^2.$$

□

引理 5.7。对于任意 $f \in C^\infty$（Ω），有

$$|Df|^2_{L^2(\Omega)} - |D(\Phi(f))|^2_{L^2(N)} \geq -\epsilon\cdot\left\{|Df|^2_{L^2(\Omega)} + |D^2f|^2_{L^2(\Omega)}\right\}.$$

证明：根据引理 5.4，我们有

$$\begin{aligned}
|Df|^2_{L^2(\Omega)} - |D(\Phi(f))|^2_{L^2(N)} &\geq \frac{1}{V}\Big\{\int_0^1 dx\int_{\Omega_x}|Df(x,y)|^2dy - \int_0^1 f_x^2(x,0)\mathcal{H}^{n-1}(\Omega_x)dx\Big\}\\
&\geq \frac{1}{V}\Big\{\int_0^1 dx\int_{\Omega_x}|f_x(x,y)|^2dy - f_x^2(x,0)dy\Big\}\\
&\geq -\epsilon\cdot\left\{|Df|^2_{L^2(\Omega)} + |D^2f|^2_{L^2(\Omega)}\right\}.
\end{aligned}$$

□

命题 5.8。对于任意 $k \geq 0$，有

$$\mu_k(\Omega) \geq \left\{1 - 2\epsilon(1+\mu_k(N))\right\}\cdot\mu_k(N).$$

证明：当$k = 0$时，结论显然成立。在其余论证中，$k \geq 1$ 固定。注意μ_k（Ω）$\leq\mu_k$（N），根据命题5.3。

设 $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ 为 Ω 的正交归一特征函数，且相应的特征值 $\mu_j(\Omega)$ 随j递增。令 $\Lambda :=$张成空间$\{\varphi_j\}_{j=1}^k$，

由$f \in \Lambda$和 $|f|_{L^2}(\Omega) = 1$，我们知道 $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\big|_{\partial\Omega} = 0$。由引理 5.6 以及 $\Delta\varphi_j = -\mu_j(\Omega)\varphi_j$，可得

$$|D^2f|^2_{L^2(\Omega)} \leq |\Delta f|^2_{L^2(\Omega)} \leq \mu_k(\Omega)^2|f|^2_{L^2(\Omega)} = \mu_k(\Omega)^2.$$

$$|Df|^2_{L^2(\Omega)} \leq \mu_k(\Omega)|f|^2_{L^2(\Omega)} \leq \mu_k(\Omega). \tag{5.6}$$

我们假设 $1-2\epsilon(1+\mu_k(N)) > 0$，否则命题右端为负。由引理 5.4、命题 5.3 以及 (5.6) 可得 $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{0\}$，因此 $\Phi(\Lambda)$ 是 k维子空间，且属于$C^\infty(N)$。

选取$f \in \Lambda$，使得 $|f|_{L^2}(\Omega) = 1$ 满足

$$\lambda(\Phi(\Lambda)) = \frac{\int|D\Phi(f)|^2}{\int\Phi(f)^2}.$$

由引理5.7，可得

$$\mu_k(\Omega) = \lambda(\Lambda) \geq \frac{|Df|_{L^2(\Omega)}}{|f|_{L^2(\Omega)}} \geq \frac{|D(\Phi(f))|^2_{L^2(N)} - \epsilon\cdot\left\{|Df|^2_{L^2(\Omega)} + |D^2f|^2_{L^2(\Omega)}\right\}}{|f|_{L^2(\Omega)}}. \tag{5.7}$$

由引理5.4，可得

$$|\Phi(f)|^2_{L^2(N)} \geq |f|^2_{L^2(\Omega)} - \epsilon \cdot \left\{|f|^2_{L^2(\Omega)} + |Df|^2_{L^2(\Omega)}\right\} \geq 1 - \epsilon(1 + \mu_k(\Omega)).$$

将上述不等式代入（5.7），得到

$$\begin{aligned}
\mu_k(\Omega) &\geq \frac{|D(\Phi(f))|^2_{L^2(N)} - \epsilon \cdot (\mu_k(\Omega)^2 + \mu_k(\Omega))}{|f|^2_{L^2(\Omega)}} \\
&= |D(\Phi(f))|^2_{L^2(N)} - \epsilon \cdot (\mu_k(\Omega)^2 + \mu_k(\Omega)) \\
&\geq \frac{|D(\Phi(f))|^2_{L^2(N)}}{|\Phi(f)|^2_{L^2(N)}} \cdot |\Phi(f)|^2_{L^2(N)} - \epsilon \cdot (\mu_k(\Omega)^2 + \mu_k(\Omega)) \\
&\geq \left\{1 - \epsilon(1 + \mu_k(\Omega))\right\} \cdot \lambda(\Phi(\Lambda)) - \epsilon \cdot (\mu_k(\Omega)^2 + \mu_k(\Omega)) \\
&\geq \left\{1 - \epsilon(1 + \mu_k(\Omega))\right\} \cdot \mu_k(N) - \epsilon \cdot (\mu_k(\Omega)^2 + \mu_k(\Omega)) \\
&\geq \left\{1 - 2\epsilon(1 + \mu_k(N))\right\} \cdot \mu_k(N).
\end{aligned}$$

□

定理 5.9。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个直径为 $\mathcal{D}(\Omega) = 1$、宽度为 $\mathcal{W}(\Omega) = \epsilon$的凸域。那么，我们有

$$\mu_k(N) \geq \mu_k(\Omega) \geq \left\{1 - 2\epsilon(1 + \mu_k(N))\right\} \cdot \mu_k(N).$$

证明：由命题5.3 和命题 5.8可得。 □

阶数为ν的贝塞尔函数J_ν 的正零点依次递增

$$j_{\nu,1} < j_{\nu,2} < \cdots .$$

我们回顾以下结果，摘自 [Kr¨o99]。

命题 5.10. 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个直径为 $\mathcal{D}(\Omega) = 1$的凸域，令 $k \in \mathbb{N}^+$，则有

(a). 若 $n = 2$，则 $\mu_k(N) \leq 4(j0,1 \pm k_2^{-1}\pi)^2$; *(b)*. 若 $n > 2$ 且 k 为奇数，则 $\mu_k(N) \leq 4j^2 n-2\, k+1;2 \cdot 2$*(c)*. 若 $n > 2$且 k 为偶数，则 $\mu_k(N) \leq (j^{n-2}_2, k_2 + j\, n_2^{-2}, k_{+2})^2$;

证明： 见 [Kr¨o99， 命题 2]。 □

推论 5.11. 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个直径为 $\mathcal{D}(\Omega) = 1$、宽度为 $\mathcal{W}(\Omega) = \epsilon$的凸域。存在 $C(n, k) > 0$，使得

$$\mu_k(N) \geq \mu_k(\Omega) \geq \left\{1 - C(n,k) \cdot \epsilon)\right\} \cdot \mu_k(N).$$

注 5.12. 此命题归功于 [Jer00] 当 $n = 2, k = 1$时；而当 $n \geq 2, k = 1$ 时，参见 [CJK09]。我们在此给出的证明与他们的不同。

证明： 由定理 5.9，可得

$$\mu_k(\Omega) \geq (1 - 2(1 + \mu_k(N)) \cdot \epsilon) \cdot \mu_k(N).$$

由命题 5.10，可得 $\mu_k(N)$ 有界，且其上界仅依赖于 n、k。结论得证。 □

6. 垂直导数估计

本节中，我们假设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个凸域，其直径为 $\mathcal{D}(\Omega) = 1$，宽度为 $\mathcal{W}(\Omega) = \epsilon$，其中 $\epsilon < \frac{1}{40}$。由引理 5.1，我们进一步假设 $\Omega \subseteq (0,1) \times (-\epsilon, \epsilon) \subseteq \mathbb{R}^2$，且 $(0,0)$、$(1,0) \in \Omega$。

由 [Kr¨o99], 可知，Ω 的第一诺伊曼特征值 μ_1 满足 $\mu_1 \leq 4j20,_1{}^{<25}$ 有界。设 u 为对应于 μ_1, 的第一诺伊曼特征函数，满足 $\sup u = 1$ 且 $\inf u = -k$，其中 $k \in (0,1]$, 由引理 3.2[Kr¨o98], 可得 $k \geq {}^{1}{}_{j0,\,1} > \frac{2}{5}$。

引理 6.1。 设 Ω 的第一诺伊曼特征函数为 u，对应于特征值 μ_1, 假设上确界 $u = 1$，下确界 $u = -k$，使得 $0 < k \leq 1$，则

$$\sup_{x \in [0,\epsilon] \cup [1-\epsilon, 1]} |Du|(x,y) \leq 6\mu_1\epsilon, \tag{6.1}$$

以下结论之一也成立，

(1) 。 上确界 $_{x\in[0,\epsilon]}\, u(x,\ y) \leq -k + 18\mu_1\epsilon^2$，下确界 $_{x\in[1-\epsilon,1]}\, u(x,\ y) \geq 1 - 18\mu_1\epsilon^2$

(2) 。 下确界 $_{x\in[0,\epsilon]}\, u(x,\ y) \geq 1 - 18\mu_1\epsilon^2$，上确界 $_{x\in[1-\epsilon,1]}\, u(x,\ y) \leq -k + 18\mu_1\epsilon^2$。

证明： 设 $v = {}^{u-\frac{1-k}{2}}{}^{2}{}_{k2}$ 且 $\theta = \text{正弦}^{-1} v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$。由 [ZY84], 可得

$$|D\theta| \leq \sqrt{\mu_1}\sqrt{\frac{2}{1+k}} \leq \sqrt{2\mu_1}. \tag{6.2}$$

因此，我们得到

$$|Du| = \frac{1+k}{2}|Dv| = \frac{1+k}{2}\sqrt{1-v^2}|D\theta| \leq \sqrt{(u+k)(1-k)}\sqrt{2\mu_1}. \tag{6.3}$$

令 $s_0 = \max\{x \in [0,1], \min_y u(x,y) = -k\}$，则对于任意 $(s_0, y) \in \Omega$，我们有

$$u(s_0, y) \leq -k + \sup|Du| \cdot 2\epsilon \leq -k + 2\epsilon\sqrt{2\mu_1}. \tag{6.4}$$

将 (6.4) 代入 (6.3)，得到

$$|Du|(s_0, y) \leq \sqrt{2\mu_1}\sqrt{u(s_0, y) + k} \leq \sqrt{2\mu_1}(2\epsilon\sqrt{2\mu_1})^{\frac{1}{2}}. \tag{6.5}$$

将 (6.5) 代入 (6.4)，得到

$$u(s_0, y) \leq -k + 2\epsilon \cdot \sqrt{2\mu_1}(2\epsilon\sqrt{2\mu_1})^{\frac{1}{2}}. \tag{6.6}$$

重复此过程 m 次，由归纳法可得

$$|Du|(s_0, y) \leq \sqrt{2\mu_1}(2\epsilon\sqrt{2\mu_1})^{2^{-1}+2^{-2}+\cdots+2^{-m}}. \tag{6.7}$$

令$m \to \infty$，可得

$$|Du|(s_0, y) \leq 4\mu_1\epsilon, \tag{6.8}$$

and

$$u(s_0, y) \leq -k + 8\mu_1\epsilon^2. \tag{6.9}$$

因此，我们有 $u < 0$ 在 $\Omega \cap \{x = s_0\}$。

由于 u 是第一特征函数，根据 Courant-Cheng 节点域定理[Che76], 我们得到$\{u > 0\}$是连通的，因此

$$\{u > 0\} \cap \{x < s_0\} = \emptyset, \quad or \quad \{u > 0\} \cap \{x > s_0\} = \emptyset. \tag{6.10}$$

不失一般性，我们假设

$$\{u > 0\} \cap \{x < s_0\} = \emptyset. \tag{6.11}$$

如果 $s_0 = 0$，那么我们得到

$$u(0, 0) \leq -k + 8\mu_1\epsilon^2. \tag{6.12}$$

如果 $s_0 \neq 0$，那么在 $\Omega_1 := (\Omega \cap \{x < s_0\})$ 上，我们有

$$\Delta u = -\mu_1 u \geq 0. \tag{6.13}$$

假设$u(x_0) = \max_{x \in \bar{\Omega}_1} u(x)$。由最大值原理可得$x_0 \in \partial\Omega_1$。若$x_0 \in \text{Interior}(\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega)$，由强最大值原理可得 $\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) > 0$，这与$u$的诺伊曼边界条件矛盾。因此可得$x_0 \in \Omega \cap \{x = s_0\}$，于是得到

$$\max_{x \in \bar{\Omega}_1} u(x) \leq -k + 8\mu_1\epsilon^2. \tag{6.14}$$

若$s_0 > \epsilon$，由6.14可得

$$\sup_{x \in [0,\epsilon]} u(x, y) \leq \sup_{\bar{\Omega}_1} u \leq -k + 8\mu_1\epsilon^2, \tag{6.15}$$

并且由（6.3），可得

$$\sup_{x \in [0,\epsilon]} |Du(x, y)| \leq 4\mu_1\epsilon. \tag{6.16}$$

若$s_0 \leq \epsilon$，假设$u(s_0, y_0) = -k$，则对任意$(p, q) \in \Omega$、$x \in [0, \epsilon]$，有$d((p, q), (s_0, y_0)) \leq \epsilon + 2\epsilon = 3\epsilon$。因此

$$u(p, q) \leq u(s_0, y_0) + \sup_{x \in [0,\epsilon]} |Du|(x, z) \cdot 3\epsilon = -k + 3\epsilon \cdot \sup_{x \in [0,\epsilon]} |Du|(x, z). \tag{6.17}$$

由（6.3），可得

$$|Du|(p, q) \leq \sqrt{2\mu_1} \sqrt{3\epsilon \sup_{x \in [0,\epsilon]} |Du|(x, z)}. \tag{6.18}$$

对上述不等式左侧取上确界p $\in [0, \epsilon]$，可得

$$\sup_{x \in [0,\epsilon]} |Du|(x, y) \leq 6\mu_1\epsilon, \tag{6.19}$$

and

$$\sup_{x\in[0,\epsilon]} u(x,y) \le -k + 18\mu_1\epsilon^2. \tag{6.20}$$

对 $[1-\epsilon, 1]$ 运用同样的论证，即可得到不等式的另一半。 □

引理 6.2。我们有

$$\sup_{(x,y)\in\Omega} |D_y u(x,y)| \le 2 \sup_{(x,y)\in\partial\Omega} |D_y u(x,y)|. \tag{6.21}$$

证明：令 $w(x,y) = 1+\cos(\frac{y}{\epsilon})$, $v(x,y) = \frac{D^y u(x,y)}{w(x,y)}$。

若存在 $(x_0,y_0) \in \Omega$，使得 $|v(x_0,y_0)| = \sup_{(x,y)\in\Omega}|v(x,y)|$，不失一般性，假设 $v(x_0,y_0) > 0$。我们有

$$0 = \nabla v(x_0,y_0) = \frac{\nabla u_y}{w} - u_y\frac{\nabla w}{w^2}, \tag{6.22}$$

并且我们有

$$\begin{aligned} 0 \ge \Delta v(x_0,y_0) &= -\mu_1\frac{u_y}{w} + u_y(\frac{-\Delta w}{w^2} + 2\frac{w_y^2}{w^3}) - 2\nabla u_y\frac{\nabla w}{w^2} \\ &= (-\mu_1 - \frac{\Delta w}{w})\cdot v(x_0,y_0). \end{aligned} \tag{6.23}$$

根据 w 的定义，得到

$$0 \ge (\frac{1}{\epsilon^2} - \mu_1)v(x_0,y_0) > 0, \tag{6.24}$$

矛盾。因此 $|v(x,y)| \le \sup_{(x,y)\in\partial\Omega}|v(x,y)|$。

注意 $y \in [-\epsilon,\epsilon]$，我们有 $w(x,y) \in [1,2]$。因此

$$|D_y u(x,y)| \le 2|v(x,y)| \le 2 \sup_{(x,y)\in\partial\Omega}|v(x,y)| \le 2 \sup_{(x,y)\in\partial\Omega}|D_y u(x,y)|. \tag{6.25}$$

□

我们有以下对u 在垂直方向上的导数的控制，见 [Zhe13]。

引理 6.3。 [Zhe13，引理 15] 我们有

$$|D_y u(x,y)| \le 48\mu_1\epsilon. \tag{6.26}$$

证明：步骤（1）。假设引理 6.1 中的第一种情况成立，则我们有 $\sup_{x\in[0,\epsilon]} u(x,y) \le -k + 18\mu_1\epsilon^2$。若 $x \in [0,\epsilon]$ 或 $x \in [1-\epsilon, 1]$，由引理 6.1，可得

$$|D_y u| \le |Du| \le 6\mu_1\epsilon. \tag{6.27}$$

取 $m \in \mathbb{N}$，使得 $\epsilon \in [2^{-m-1}, 2^{-m}]$。对于 $n = 0, 1, \cdots, m+1$，令

$$|u|_n = \sup_{x\in[2^{-n-1},2^{-n}]} u(x,y), \quad |Du|_n = \sup_{x\in[2^{-n-1},2^{-n}]} |Du(x,y)|. \tag{6.28}$$

根据引理6.1，可得

$$|u|_{m+1} \le -k + 18\mu_1\epsilon^2 \le -k + 18\mu_1\cdot 2^{-2m}, \quad |Du|_{m+1} \le 6\mu_1\epsilon \le 6\mu_1 2^{-m}. \tag{6.29}$$

步骤（2）。我们通过归纳法证明

$$|u|_n \le -k + 18\mu_1 \cdot 2^{-2n+2}, \quad |Du|_n \le 6\mu_1 \cdot 2^{-n+1}, \quad n = 0, 1 \cdots, m+1, \tag{6.30}$$

其中 $n = m+1$ 在（6.29）中得到了证明。

Note

$$|u|_{n-1} \le |u|_n + (2^{-n} + 3\epsilon)|Du|_{n-1} \le |u|_n + 7 \cdot 2^{-n}|Du|_{n-1}, \tag{6.31}$$

and

$$|Du|_{n-1} \le \sqrt{2\mu_1}\sqrt{k + |u|_{n-1}} \le \sqrt{2\mu_1}\sqrt{7 \cdot 2^{-n}|Du|_{n-1} + 18\mu_1 \cdot 2^{-2n+2}}. \tag{6.32}$$

因此 $|Du|_{n-1} \le 6\mu_1 \cdot 2^{-n+2}$，并且

$$|u|_{n-1} \le -k + 18\mu_1 \cdot 2^{-2n+2} + 42\mu_1 \cdot 2^{-2n+2} \le -k + 18\mu_1 \cdot 2^{-2n+4}. \tag{6.33}$$

因此（6.30）得证。对于 $x \in [2^{-n-1}, 2^{-n}]$，其中 $n \le m+1$，我们有

$$|Du|(x, y) \le |Du|_n \le 6\mu_1 \cdot 2^{-n+1} \le 24\mu_1 x. \tag{6.34}$$

因此，对于 $x \in [\epsilon, \frac{1}{2}]$，我们有

$$|Du|(x, y) \le 24\mu_1 x. \tag{6.35}$$

对于 $x \in [\frac{1}{2}, 1-\epsilon]$，同样的论证也成立，因此对于 $x \in [\epsilon, 1-\epsilon]$，我们有

$$|Du|(x, y) \le 24\mu_1 \min\{x, (1-x)\}, \quad \forall (x, y) \in \Omega. \tag{6.36}$$

步骤（3）。对于$p = (x,y) \in \partial\Omega$，设$l$ 为在p处与Ω相切的直线。由于Ω是凸集，(0, 0)和(1, 0)位于l的同一侧。不失一般性，假设$y > 0$，设l的斜率为s，则有

$$s \in [-\frac{y}{1-x}, \frac{y}{x}] \subset [-\frac{\epsilon}{1-x}, \frac{\epsilon}{x}]. \tag{6.37}$$

由于 $\partial_n u(x,y) = 0$，则有 $D_y u(x,y) = s \cdot D_x u(x,y)$，由（6.36），可得

$$|D_y u(x, y)| \le \frac{\epsilon}{\min\{x, 1-x\}}|Du(x, y)| \le 24\mu_1\epsilon \tag{6.38}$$

由引理6.2，可得

$$|D_y u(x, y)| \le 48\mu_1\epsilon. \tag{6.39}$$

□

7. 纽曼特征函数的 L^∞ 估计

本节中，我们利用索博列夫–纽曼不等式证明，纽曼特征函数的L^∞ 范数可以由L^2 范数控制。

假设 $\Omega \in \mathbb{R}^2$ 是一个凸开域，且 $\mathcal{D}(\Omega) = 1$。
定义**索博列夫–纽曼常数**$SN_2(\Omega)$ Ω 如下：

$$SN_2(\Omega) = V(\Omega)^{\frac{1}{2}} \cdot \sup_{f\in C^\infty(\Omega)} \frac{|f - \fint_\Omega f|_{L^2}}{|Df|_{L^1}}.$$

根据 [DWZ18][定理 1。4], 我们得到以下关于$SN_2(\Omega)$ 的上界，它仅取决于Ω的直径。

定理 7.1。假设$\Omega \in \mathbb{R}^2$ 是一个凸开域。那么

$$SN_2(\Omega) \le 1600\mathcal{D}(\Omega).$$

引理 7.2。对于所有 $f \in W^{1,2}(\Omega)$，我们有

$$V(\Omega)^{\frac{1}{2}}|f|_4^2 \le |f|_2^2 + 4(SN_2(\Omega))^2 V(\Omega)\cdot|Df|_2^2.$$

证明：令 $F = f^2$, 首先注意到

$$|DF|_1^2 = 4|fDf|_1^2 \le 4|f|_2^2\cdot|Df|_2^2.$$

另一方面，我们有

$$|DF|_1^2 \ge (SN_2(\Omega))^{-2}|F - \fint_\Omega F|_2^2 = (SN_2(\Omega))^{-2}\cdot\left\{|f|_4^4 - V(\Omega)^{-1}|f|_2^4\right\}.$$

由上式，利用 $|f|_2^2 \le |f|_4^2 V(\Omega)^{\frac{1}{2}},$，可得

$$\begin{aligned}(SN_2(\Omega))^{-2}|f|_4^4 &\le (SN_2(\Omega))^{-2}|f|_2^4 V(\Omega)^{-1} + 4|f|_2^2\cdot|Df|_2^2 = |f|_2^2\cdot\left\{(SN_2(\Omega))^{-2}V(\Omega)^{-1}|f|_2^2 + 4|Df|_2^2\right\}\\ &\le V(\Omega)^{\frac{1}{2}}|f|_4^2\cdot\left\{(SN_2(\Omega))^{-2}V(\Omega)^{-1}|f|_2^2 + 4|Df|_2^2\right\}.\end{aligned}$$

化简上式即可得到结论。 □

引理 7.3。假设 $-\Delta f = \mu\cdot f$ 在 Ω 中，且 $\frac{\partial f}{\partial \underline{n}}\big|_{\partial\Omega} = 0$，则

$$|f|_\infty \le |f|_2\cdot C\cdot(1+\mu)V(\Omega)^{-\frac{1}{2}},$$

其中 $C > 0$ 是某个普适常数。

证明：对 7.2 应用引理 f^k，对于任意 $k \ge 1$，我们得到

$$V(\Omega)^{\frac{1}{2}}|f^k|_4^2 \le |f^k|_2^2 + 4(SN_2(\Omega))^2 V(\Omega)\cdot|D(f^k)|_2^2.$$

Note

$$\begin{aligned}|D(f^k)|_2^2 &= \int_\Omega k^2 f^{2k-2}Df\cdot Df = \frac{k^2}{2k-1}\int_\Omega D(f^{2k-1})\cdot Df = \frac{-k^2}{2k-1}\int_\Omega f^{2k-1}\cdot\Delta f\\ &= \frac{\mu\cdot k^2}{2k-1}|f|_{2k}^{2k}.\end{aligned}$$

由此可得

$$V(\Omega)^{\frac{1}{2}}|f|_{4k}^{2k} \le |f|_{2k}^{2k}\Big\{1 + 4(SN_2(\Omega))^2 \cdot \frac{\mu k^2}{2k-1}V(\Omega)\Big\}.$$

令 $\alpha = 4(SN_2(\Omega))^2$, 因此我们得到

$$V(\Omega)^{-\frac{1}{4k}}|f|_{4k} \le V(\Omega)^{-\frac{1}{2k}}|f|_{2k} \cdot (1 + \alpha \cdot \frac{k^2\mu}{2k-1}V(\Omega))^{\frac{1}{2k}}.$$

取 $k = 2^{i-1}$ 使得 $i = 1, 2, \cdots$, 利用归纳法, 使用 $\mathcal{D}(\Omega) = 1$ 和定理 7.1, 我们有

$$\begin{aligned}|f|_\infty = \lim_{i\to\infty} V(\Omega)^{-\frac{1}{2^i}}|f|_{2^i} \le V(\Omega)^{-\frac{1}{2}}|f|_2 \cdot &\sqrt{\prod_{j=0}^{\infty}[1 + \alpha \cdot \frac{2^{2j}\mu}{2^{j+1}-1}]^{2^{-j}}} \\ \le &V(\Omega)^{-\frac{1}{2}} \cdot |f|_2 \cdot (1+\mu)2\alpha \\ \le &C(1+\mu)V(\Omega)^{-\frac{1}{2}}|f|_2.\end{aligned}$$

□

8. 二维情形下第一特征值的比较

本节中, 我们假设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个凸域, 其直径为 $\mathcal{D}(\Omega) = 1$, 宽度为$\mathcal{W}(\Omega) = \epsilon$, 其中 $\epsilon < \frac{1}{40}$。根据引理 5.1,一我们进一步假设 $\Omega \subseteq (0,1) \times (-\epsilon, \epsilon) \subseteq \mathbb{R}^2$, 且 $(0,0)$、$(1,0) \in \Omega$。

假设 $\Omega_t = \Omega \cap \{x = t\} = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 | y \in (h_-(t), h_+(t))\}$。令 $h(t) = h_+(t) - h_-(t)$。

设 u 为相对于 μ 的 Ω 的第一诺伊曼特征函数, $-\Delta u = \mu \cdot u$, 假设 $\sup |u| = 1$。对于 $x \in [0,1]$, 定义 $\bar{u}(x) = \frac{1}{h(x)} \int_{\Omega_x} u(x,y)dy$。我们定义修正截面平均值 $\tilde{u}$ 和误差项 η 如下:

$$\hat{u} = \begin{cases} \bar{u}(\epsilon), & x \in [0, \epsilon]; \\ \bar{u}(x), & x \in [\epsilon, 1-\epsilon]; \\ \bar{u}(1-\epsilon), & x \in [1-\epsilon, 1]. \end{cases} \tag{8.1}$$

$$c_1 = \frac{\int_0^1 h\hat{u}}{\int_0^1 h}, \quad \tilde{u} = \hat{u} - c_1. \tag{8.2}$$

$$\eta(x) = h\tilde{u}'(x) + \mu \int_0^x h\tilde{u}. \tag{8.3}$$

由 $\sup |u| = 1$, 可得 $\sup |\bar{u}| \le 1$ 以及 $\sup |\hat{u}| \le \sup |\bar{u}| \le 1$。因此由（8.2）, 可得 $\sup |\tilde{u}| \le 2$。由 [Krüo99, 根据命题 2], , 可得 $\mu_1 \le 4j20,1 \le C$。

根据 Li-Yau 梯度估计 [LY80], 可得

$$|Du| \le \sqrt{1-u^2}\sqrt{\mu_1} \le C. \tag{8.4}$$

对于任意 $s \in [0,\epsilon]$，有

$$|\bar{u}(s)-\bar{u}(\epsilon)| \le |\min_{(x,y)\in\Omega, x\le\epsilon} u(x,y) - \max_{(x,y)\in\Omega, x\le\epsilon} u(x,y)| \le 3\epsilon\cdot\sup|Du| \le C_1\epsilon. \tag{8.5}$$

对 $s \in [1-\epsilon,1]$ 使用相同的论证，可得

$$|\bar{u}(s)-\bar{u}(1-\epsilon)| \le C_1\epsilon. \tag{8.6}$$

假设 $h(t_0) = \sup h$，由于 $\mathcal{W}(\Omega) = \epsilon$，可得 $h(t_0) \ge \epsilon$。由于 Ω 是凸集，我们有 Ω 包含由 (0, 0)、$(t_0, h_-(t_0))$、(1, 0)、$(t_0, h_+(t_0))$ 构成的四边形。因此可得

$$\int_0^1 h = V(\Omega) \ge \frac{1}{2}(h_+(t_0)-h_-(t_0)) = \frac{1}{2}h(t_0) \ge \frac{1}{2}\epsilon. \tag{8.7}$$

因此我们有

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\int_0^1 h\hat{u}}{\int_0^1 h} = \frac{\int_0^1 h(\hat{u}-\bar{u})}{\int_0^1 h} \\ &= \frac{\int_0^\epsilon h(s)(\bar{u}(\epsilon)-\bar{u}(s))ds + \int_{1-\epsilon}^1 h(s)(\bar{u}(\epsilon)-\bar{u}(s))ds}{\int_0^1 h} \\ &\le \frac{4C_1\epsilon^3}{\frac{1}{2}\epsilon} \\ &\le C_2\epsilon^2. \end{aligned} \tag{8.8}$$

引理 8.1。对于 $x \in (0,1)$，有

$$|h'_+(x)| \le \frac{h_+(x)}{\min\{x,1-x\}}, \qquad |h'_-(x)| \le \frac{|h_-(x)|}{\min\{x,1-x\}}. \tag{8.9}$$

特别地，对于 $x \in [\epsilon, 1-\epsilon]$，有 $|h'_+|, |h'_-| \le 1$。

证明：由于 Ω 是凸的，因此我们得到 h_+ 在 $[0,1]$, 上是一个凹函数，所以 $h'_+(x)$ 是 $[0,1]$上的递减函数。对于任意 $x \in (0,1)$，根据中值定理，存在 $x_1 \in (0,x)$，使得

$$h'_+(x_1) = \frac{h_+(x)-h_+(0)}{x} = \frac{h_+(x)}{x},$$

因此我们得到

$$h'_+(x) \le h'_+(x_1) = \frac{h_+(x)}{x}.$$

同理，我们得到

$$h'_+(x) \ge \frac{-h_+(x)}{1-x}.$$

因此，我们得到

$$|h'_+(x)| \le \frac{h_+(x)}{\min\{x,1-x\}}$$

对 $-h_-$ 也适用同样的论证，因此得到第二个不等式。 □

引理 8.2。 我们有以下公式：

$$\mu = \frac{\int_0^1 h(\tilde{u}')^2}{\int_0^1 h\tilde{u}^2} - \frac{\int_0^1 \eta\tilde{u}'}{\int_0^1 h\tilde{u}^2}. \tag{8.10}$$

证明： 根据 η 的定义，我们有

$$\int_0^1 h(\tilde{u}')^2 = \int_0^1 \eta\tilde{u}' - \mu \int_0^1 \tilde{u}'(x)dx \int_0^x h\tilde{u}(s)ds.$$

由于 $\int_0^1 h\tilde{u} = 0$，利用分部积分可得

$$\int_0^1 \tilde{u}'(x)dx \int_0^x h\tilde{u}(s)ds = -\int_0^1 h\tilde{u}^2.$$

因此我们得到（8.10） □

引理 8.3。 存在一个普适常数 $C > 0$，使得

$$\int_{-1}^1 h\tilde{u}^2 \geq C\epsilon. \tag{8.11}$$

证明： 由引理 7.3 和（8.7）可得

$$\int_\Omega u^2 \geq C \cdot V(\Omega) \cdot (1+\mu_1)^{-2} \sup|u|^2 \geq C\epsilon. \tag{8.12}$$

我们有

$$|u(t,y) - \bar{u}(t)| \leq |\sup_y u(t,y) - \inf_y u(t,y)| \leq \sup|Du| \cdot h(t) \leq C\epsilon. \tag{8.13}$$

因此得到

$$\bar{u}(t)^2 = \fint_{\Omega_t} u(t,y)^2 dy - \fint_{\Omega_t} |u(t,y) - \bar{u}(t)|^2 dy \geq \fint_{\Omega_t} u^2 dy - C\epsilon^2. \tag{8.14}$$

所以，我们有

$$\int_0^1 h\bar{u}^2 \geq \int_\Omega u^2 - C\int_0^1 h\epsilon^2 \geq C\epsilon. \tag{8.15}$$

根据 $\tilde{u}$ 的定义，我们得到

$$\begin{aligned} |\int h\tilde{u}^2 - \int h\bar{u}^2| \leq & \int_0^\epsilon h(t)|(\bar{u}(\epsilon) - c_1)^2 - \bar{u}(t)^2|dt + \int_{1-\epsilon}^1 h(t)|(\bar{u}(1-\epsilon) - c_1)^2 - \bar{u}(t)^2|dt \\ & + |\int_\epsilon^{1-\epsilon} h \cdot ((\bar{u} - c_1)^2 - \bar{u}^2)|. \end{aligned} \tag{8.16}$$

由（8.5）和（8.8），可得

$$|\int h\tilde{u}^2 - \int h\bar{u}^2| \leq C\epsilon^3. \tag{8.17}$$

将此与8.15结合，可得

$$\int_0^1 h\tilde{u}^2 \geq C\epsilon. \tag{8.18}$$

□

引理 8.4. 存在一个普适常数 $C > 0$，使得

$$|\eta(t)| \leq \begin{cases} C\epsilon^2, & t \in [0,\epsilon] \cup [1-\epsilon, 1], \\ C\epsilon \cdot h(t)(|h_-(t)'| + |h_+(t)'|) + C\epsilon^3; & t \in [\epsilon, 1-\epsilon]. \end{cases} \tag{8.19}$$

证明：由 $\Delta u = -\mu_1 u$，可得

$$\mu_1 \int_0^t h\bar{u} = \mu_1 \int_{\Omega\cap\{x\leq t\}} u = -\int_{\Omega_x} u_x(x,y)dy. \tag{8.20}$$

首先，计算 $\bar{u}'$，得到

$$\begin{aligned} \bar{u}'(t) &= \frac{d}{dx}\Big\{\frac{1}{h(t)}\int_{\Omega_t} u(t,y)\Big\} \\ &= -\frac{h'}{h^2}\int_{\Omega_t} u + \frac{1}{h}\int_{\Omega_t} u_x + \frac{[u(t,h_+(t))\cdot h_+'(t) - u(t,h_-(t))\cdot h_-'(t)]}{h(t)} \end{aligned} \tag{8.21}$$

对于 $t \in [0,\epsilon]$，有 $\tilde{u}(t) = \bar{u}(\epsilon) - c_1$，且 $\tilde{u}' = 0$，因此可得

$$|\eta(t)| = \mu_1 \Big|\int_0^t h\tilde{u}\Big| \leq C\epsilon \sup|h| \cdot \sup|\tilde{u}| \leq C\epsilon^2 \tag{8.22}$$

类似地，对于 $t \in [1-\epsilon, 1]$，有

$$|\eta(t)| = \mu_1 \Big|\int_t^1 h\tilde{u}\Big| \leq C\epsilon^2 \tag{8.23}$$

对于 $t \in [\epsilon, 1-\epsilon]$，我们有 $\tilde{u}' = \bar{u}'$，由式（8.20）、（8.21）及引理 6.3，可得

$$\begin{aligned} |\eta(t)| &\leq \Big| -\frac{h'}{h}\int_{\Omega_t} u dy + [u(t,h_+(t))\cdot h_+'(t) - u(t,h_-(t))\cdot h_-'(t)]\Big| \\ &\quad + \Big|\mu_1 \int_0^\epsilon h(s)\cdot[\bar{u}(\epsilon) - c_1 - \bar{u}(s)]ds\Big| + \Big|\mu_1\int_\epsilon^{1-\epsilon} h(s)\cdot c_1 ds\Big| \\ &\leq \Big|\frac{\int_{\Omega_t}[u(t,h_+(t)) - u(t,y)]\cdot h_+'(t) - [u(t,h_-(t)) - u(t,y)]\cdot h_-'(t)dy}{h(t)}\Big| + C\epsilon^3 \\ &\leq [|h_+(t)'| + |h_-(t)'|]\cdot \sup|D_y u(t,y)|\cdot h(t) + C\epsilon^3 \\ &\leq C\epsilon\cdot h(t)(|h_-(t)'| + |h_+(t)'|) + C\epsilon^3 \end{aligned} \tag{8.24}$$

□

引理 8.5. 存在一个普适常数 $C > 0$，使得

$$\int_0^1 \eta\tilde{u}' \leq C\epsilon^3. \tag{8.25}$$

证明：假设 $h(t_0) = \sup h(t)$，由于 $\mathcal{W}(\Omega) = \epsilon$，我们得到 $h(t_0) \geq \epsilon$。由于 Ω 是凸的，我们得到$h' \geq 0$ 在 $[0, t_0]$ 上，以及 $h' \leq 0$ 在 $[t_0, 1]$上。由于 $\int h\tilde{u} = 0$，我们得到

$$\left|\frac{\int_0^t \mu_1 h(s)\tilde{u}(s)ds}{h(t)}\right| = \begin{cases} \left|\frac{\int_0^t \mu_1 h(s)\tilde{u}(s)ds}{h(t)}\right| \leq C, & t \in [0, t_0]; \\ \left|\frac{\int_t^1 \mu_1 h(s)\tilde{u}(s)ds}{h(t)}\right| \leq C; & t \in [t_0, 1]. \end{cases}$$

So

$$\begin{aligned} |\int_0^1 \eta\tilde{u}'| &= |\int_\epsilon^{1-\epsilon} \eta \cdot (\frac{\eta}{h} - \frac{1}{h}\int_{-1}^t \mu_1 h\tilde{u})dt| \\ &\leq \int_\epsilon^{1-\epsilon} (\frac{\eta^2}{h} + C|\eta|) \\ &\leq \int_\epsilon^{1-\epsilon} [C\epsilon^2 h + C\frac{\epsilon^6}{h} + C\epsilon h \cdot (|h'_+| + |h'_-|)] + C\epsilon^3. \end{aligned} \tag{8.26}$$

由于h 是凸的，对于$t \in [\epsilon, t_0]$, , 我们有

$$h(t) \geq \frac{t}{t_0}h(t_0) + \frac{t_0 - t}{t_0}h(0) \geq \epsilon h(t_0) \geq \epsilon^2, \tag{8.27}$$

对于$t \in [t0, 1 - \epsilon]$，同理可得，因此对于$t \in [\epsilon, 1 - \epsilon]$，我们有

$$h(t) \geq \epsilon^2. \tag{8.28}$$

由于$h(t) = h_+(t) - h_-(t)$，我们得到

$$\int_\epsilon^{1-\epsilon} h_+|h'_+| \leq \int_0^1 \frac{1}{2}|(h_+^2)'| = \sup|h_+^2| \leq \epsilon^2. \tag{8.29}$$

对h_，类似的论证同样成立。将 (8.28) 和 (8.29) 代入 (8.26)，得到

$$|\int_0^1 \eta\tilde{u}'| \leq C\epsilon^3. \tag{8.30}$$

□

定理 8.6。设$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个凸域，其直径为 $\mathcal{D}(\Omega) = 1$，宽度为 $\mathcal{W}(\Omega) = \epsilon$。那么，存在一个普适常数 $C > 0$，使得

$$\mu_1(N) \geq \mu_1(\Omega) \geq \mu_1(N) - C\epsilon^2. \tag{8.31}$$

证明：不等式左侧由命题 5.3得出。

对于不等式右侧，我们还设常数 $C > 6400j_{0,1}^2$, 若宽度$\mathcal{W}(\Omega) = \epsilon \geq \frac{1}{40}$，由于 $\mu_1(N) \leq 4j_{0,1}^2$,，我们得到 $\mu_1(N) - C\epsilon^2 \leq 0 \leq \mu_1(\Omega)$。

若 $\epsilon < \frac{1}{40}$，由引理8.2、引理8.3 和引理8.5，可得

$$\begin{aligned} \mu_1(\Omega) = \mu &= \frac{\int_0^1 h(\tilde{u}')^2}{\int_0^1 h\tilde{u}^2} - \frac{\int_0^1 \eta\tilde{u}'}{\int_0^1 h\tilde{u}^2} \\ &\geq \mu_1(N) - C\epsilon^2. \end{aligned} \tag{8.32}$$

(8.33)

□

9. N 的特征值估计

本节通过估计塌缩线段 N 的特征值，给出凸域上 $\mathbb{R}^2$中特征值单重性的另一种证明。

引理 9.1. 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个边界光滑的凸集，且 $H(x)$ 是$(n-1)$维 *Hausdorff* 测度 $\Omega\Omega_x := \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : (x,y) \in \Omega\Omega\}$，则有

$$(H^{\frac{1}{n-1}})'' \leq 0$$

.

证明： 我们只需证明$H^{\frac{1}{n-1}}$是一个凹函数。

对于任意 $-1 \leq a < b \leq 1$，有 $\Omega_a = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : (a,y) \in \Omega\}$，且 $\Omega_b = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : (b,y) \in \Omega\}$是 $\mathbb{R}^{n-1}$中的有界子集。由于 Ω 是凸集，我们得到

$$\frac{\Omega_a + \Omega_b}{2} \subset \Omega_{\frac{a+b}{2}},$$

其中$\frac{\Omega_a + \Omega_b}{2} = \{\frac{p+q}{2}, p \in \Omega_a, \ q \in \Omega_b\}$。

根据 [Fed69定理 3。2。41], 我们得到

$$\mathcal{H}^{n-1}(\Omega_a)^{\frac{1}{n-1}} + \mathcal{H}^{n-1}(\Omega_b)^{\frac{1}{n-1}} \leq \mathcal{H}^{n-1}(\Omega_a + \Omega_b)^{\frac{1}{n-1}} = 2\mathcal{H}^{n-1}(\frac{\Omega_a + \Omega_b}{2})^{\frac{1}{n-1}}$$

因此我们得到

$$\frac{\{\mathcal{H}^{n-1}(\Omega_a)^{\frac{1}{n-1}} + \mathcal{H}^{n-1}(\Omega_b)^{\frac{1}{n-1}}\}}{2} \leq \mathcal{H}^{n-1}(\Omega_{\frac{a+b}{2}})^{\frac{1}{n-1}}$$

由于

$$H(x) = \mathcal{H}^{n-1}(\Omega_x) \times (\int_{-1}^{1} \mathcal{H}^{n-1}(\Omega_t)dt)^{-1}, \quad x \in [-1,1] \tag{9.1}$$

我们得到

$$\frac{\left(H(a)^{\frac{1}{n-1}} + H(b)^{\frac{1}{n-1}}\right)}{2} \leq \frac{H(\frac{a+b}{2})^{\frac{1}{n-1}}}{2}$$

因此,$H^{\frac{1}{n-1}}$是凹函数。 □

N 的特征值是 λ，相对于

$$\psi''(t) + (\ln H)'\psi'(t) + \lambda \cdot \psi(t) = 0, \qquad \forall t \in [0,1], \psi'(0) = \psi'(1) = 0.$$

定义 $V = \frac{3}{4}[(\ln H)']^2 - H''$以及 $L_2(w) = w'' - V \cdot w$，其中 $w \in C_0^\infty[0,1]$。

引理 9.2. 对于任意 $k \in \mathbb{Z}^+$，我们有

$$\lambda_k(L_2) = \mu_k(N).$$

证明： 如果 v 使商 $\frac{\int_0^1 h(t)(\phi'(t))^2dt}{\int_0^1 h(t)\phi(t)^2dt}$ 在满足假设的函数 ϕ 中达到最小值，那么对于任意满足 $\int_0^1 fhdt = 0$ 的函数 f，我们有

$$0 = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\Big(\frac{\int_0^1 h(t)((v+sf)'(t))^2dt}{\int_0^1 h(t)(v+sf)(t)^2dt}\Big).$$

化简上面的方程，得到

$$\int_0^1 hv'f' - \lambda hvfdt = 0, \tag{9.2}$$

其中 λ 是该商的最小值。

注意 $f \equiv 1$，（9.2）也成立，这是因为 $\int_0^1 hvdt = 0$。

注意 $1 = \alpha \cdot h + h^\perp$，其中 $\int_0^1 h \cdot h^\perp = 0$，$\alpha \in \mathbb{R}$。若 $\alpha = 0$，则 $\int_0^1 h = 0$，然而 $h \geq 0$，因此 $h \equiv 0$，这就产生了矛盾。现在由 $\alpha \neq 0$可知，（9.2）对 $f = h$也成立。因此，（9.2）对任意 f 都成立。

由（9.2），经分部积分可得

$$(hv'f)\Big|_0^1 - \int_0^1 \Big\{(hv')' + \lambda hv\Big\} \cdot fdt = 0. \tag{9.3}$$

在上面的等式中取$f \in C_0^\infty[0,1]$，我们得到 $\int_0^1 \Big\{(hv')' + \lambda hv\Big\} \cdot fdt = 0$，对任意这样的$f$均成立。因此，我们得到

$$(hv')' + \lambda hv = 0. \tag{9.4}$$

将（9.4）代入（9.3），得到 $(hv'f)\Big|_0^1 = 0$ 对任意f均成立，因此有$hv'(0) = hv'(1) = 0$。

令$w = \sqrt{h}v'$，则有

$$w'' = -\lambda w + (\frac{3}{4}(\frac{h'}{h})^2 - \frac{h''}{2h})w, \qquad and \qquad w(0) = w(1) = 0.$$

□

于是有

命题 9.3。 对任意 $k \in \mathbb{Z}^+$，有$\mu_k(N) \geq k^2\pi^2$。

证明： **步骤（1）**。定义$L_1(w) = w''$，其中$w \in C_0^\infty[0,1]$，则 $\lambda_k(L_1) = k^2\pi^2$。

Note $V = (\frac{3}{4}(\frac{h'}{h})^2 - \frac{h''}{2h}) \geq -\frac{1}{2}(\ln h)''$，那么根据假设可得$V \geq 0$。于是得到

$$\frac{\int_0^1 w(-L_2(w))dt}{\int_0^1 w^2dt} \geq \frac{\int_0^1 w(t)\cdot(-L_1(w))dt}{\int_0^1 w(t)^2dt}, \qquad \forall w \in C_0^\infty[0,1]. \tag{9.5}$$

现在由（9.5），我们得到

$$\lambda_k(L_1) = \inf_{V_k \subseteq C_0^\infty[0,1]} \sup_{w \in V_k - \{0\}} \frac{\int_0^1 w(t)\cdot(-L_1(w))dt}{\int_0^1 w(t)^2dt} \leq \inf_{V_k \subseteq C_0^\infty[0,1]} \sup_{w \in V_k - \{0\}} \frac{\int_0^1 w(-L_2(w))dt}{\int_0^1 w^2dt} = \lambda_k(L_2) = \mu_k(N),$$

其中V_k是任意一个k维子空间。 □

基于上述内容，我们得到一个关于$\mathbb{R}^2$中凸域上特征值单重性的另一种证明，

推论 9.4. 设Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的凸域，其直径为 *1*，宽度为 ϵ。其中

$$\epsilon < \frac{2(\pi - j_{0,1})(k\pi + j_{0,1})}{(k+1)^2\pi^2[(k+1)^2\pi^2 + 1]}$$

则Ω 的第一个 k 个纽曼特征值是单重的。

证明： 设 N 是 Ω 的对应塌缩线段，根据命题 9.3和 [Kr¨o99]对于任意整数 $k > 0$,

$$k^2\pi^2 \le \mu_k(N) \le (2j_{0,1} + (k-1)\pi)^2, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}^+.$$

应用定理 5.9，我们得到 $\mu_k(\Omega) \le \mu_k(N) < (1 - 2\epsilon(1 + \mu_{k+1}(N)))\mu_{k+1}(N) \le \mu_{k+1}(\Omega)$，其中 s = 1，2，⋯，k。因此，Ω 的第一个 k 个特征值是单重的。□

注 9.5。 在上述证明中，宽度的界 ϵ 为 $\epsilon \sim k^{-3}$，这比定理*2.4* 中的 $\epsilon \sim k^{-1}$更弱。主要问题是，我们无法直接对 N 的特征值间隙给出界。在上述证明中，我们利用了这样一个事实：N 的特征值上界小于下一个特征值的下界。但这一点在高维情形下不再成立。

Appendix A. The estimate of Dirichlet-Neumann heat kernel

By Guoyi Xu[1]

本节中利用 Dirichlet-Neumann 热核估计 Neumann 特征值的方法，受到 [CY81] 和 [LY86]中热核下界论证的启发。

引理 A.1。 假设 $f \in C^\infty[0,\rho_1]$，且

$$f'(0) = f(\rho_1) = 0, \qquad f \ge 0, \qquad f'(y) \le 0, \qquad \forall y \in [0,\rho_1]. \tag{A.1}$$

此外，假设 $v(y,t)$: $[0,\rho_1]\times[0,\infty) \to \mathbb{R}$ 是以下方程的解

$$\begin{cases} v_t - v_{yy} = 0\,, & \forall (y,t) \in (0,\rho_1)\times(0,\infty) \\ v(y,0) = f(y), \quad \forall y \in [0,\rho_1], \quad \textit{and} \quad v_y(0,t) = v(\rho_1,t) = 0\,, & \forall t \in [0,\infty) \end{cases} \tag{A.2}$$

那么，对于所有 $t \ge 0$, $y \in [0,\rho_1]$, 均有 $v_y(y,t) \le 0$。

证明： 由 Hopf 强最大值原理和最大值原理，我们得到

$$\min_{(y,t)\in[0,\rho_1]\times[0,\infty)} v(y,t) \ge \min_{(x,t)\in([0,\rho_1]\times\{0\})\cup(\{0,\rho_1\}\times\mathbb{R}^+)} v(x,t) = \min_{(x,t)\in([0,\rho_1]\times\{0\})\cup(\{\rho_1\}\times\mathbb{R}^+)} v(x,t) \ge 0. \tag{A.3}$$

这意味着 $\frac{\partial}{\partial y}v(\rho_1,t) \le 0$ 因为 $v(\rho_1,t) = 0$。

令$u = v_y$，则$u_t - u_{yy} = 0$。根据假设和上文，我们得到

$$u(y,0) = f'(y) \le 0, \qquad u(0,t) = v_y(0,t) = 0, \qquad u(\rho_1,t) = v_y(\rho_1,t) \le 0.$$

[1]数学科学系，清华大学，北京，P. R. 中国。电子邮件地址：guoyixu@tsinghua.edu.cn

对u应用最大值原理，得到$u(y,t) \le 0$，结论由此得出 . □

定义 A.2。对于有界区域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$（其中 $n \ge 2$），且满足 $\partial\Omega = \gamma_1 \cup \gamma_2$，其中 γ_1是 *Lipschitz*，且 γ_2 是凸边界（或 C^2 边界）；相对于 $(\Omega, \gamma_1, \gamma_2)$的狄利克雷-纽曼热核$\mathcal{K}(x,y,t)$ 是满足以下条件的函数：

$$\mathcal{K}(x,y,t) = \mathcal{K}(y,x,t), \qquad \mathcal{K}(x,\cdot,t)\Big|_{\gamma_1} = \frac{\partial}{\partial\vec{n}}\mathcal{K}(x,\cdot,t)\Big|_{\gamma_2} = 0,$$

$$(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_y)\mathcal{K}(x,y,t) = 0, \qquad \lim_{t\to 0}\int_\Omega \mathcal{K}(x,y,t)f(x)dx = f(y), \qquad \forall f \in L^\infty(\Omega).$$

定义 A.3。我们称 φ 是相对于 以及 $(\Omega, \gamma_1, \gamma_2)$的狄利克雷-诺伊曼特征函数，当且仅当

$$\Delta\varphi = -\lambda\cdot\varphi, \qquad \varphi\Big|_{\gamma_1} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial\vec{n}}\varphi\Big|_{\gamma_2} = 0.$$

对于任意相对于 $(\Omega, \gamma_1, \gamma_2)$ 的狄利克雷-纽曼热核 $\mathcal{K}(x, y, t)$，已知

$$\mathcal{K}(x,y,t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i\cdot t}\varphi_i(x)\varphi_i(y),$$

其中 $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ 是 $L^2(\Omega)$ 的一组基，而 φ_i 是相对于 λ_i的狄利克雷-诺伊曼特征函数。

定理 A.4。假设 $\partial\Omega = \Lambda \cup \gamma$，且满足 $\vec{n}\big|_\Lambda \cdot \partial y_2 \le 0$，其中 $\vec{n}$ 是Ω的外单位法向量；并且 $(0,0) \in \Omega \subseteq \{(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^n : \ y_1 \in \mathbb{R}^{n-1}, 0 \le y_2 \le \rho_1\}$。则相对于 $(\Omega, \gamma, \Lambda)$ 的第一狄利克雷-诺伊曼特征值 $\lambda_1(\Omega)$ 满足以下不等式：

$$\lambda_1(\Omega) \ge \frac{\pi^2}{4\rho_1^2}.$$

证明：**步骤（1）**。设 $\mathcal{K}(x, y, t)$ 是关于 $(\Omega, \gamma, \Lambda)$ 的狄利克雷-纽曼热核，$\mathcal{H}(x, y, t)$ 是关于 $([0,\rho_1], \rho_1, 0)$ 的狄利克雷-纽曼热核。对于一个 y f 满足ying (A.1), 我们定义

$$F(y,t) := \int_\Omega \mathcal{K}((z_1,z_2),y,t)f(z_2)dz_1dz_2 - \int_0^{\rho_1}\mathcal{H}(z,y_2,t)f(z)dz,$$

其中 $y = (y_1, y_2) \in \Omega$。

直接计算可得

$$(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_y)F(y,t) = 0, \qquad \forall (y,t) \in \Omega\times(0,\infty).$$

由热方程的最大值原理可得

$$\max_{(x,t)\in\Omega\times[0,\infty)} F(x,t) \le \max_{(y,t)\in(\partial\Omega\times\mathbb{R}^+)\cup(\Omega\times\{0\})} F(y,t). \tag{A.4}$$

步骤（2）。对于 $y \in \Lambda$，根据假设 $\vec{n}\cdot\partial y_2 \le 0$ 以及引理 A.1，我们得到

$$\frac{\partial F}{\partial\vec{n}}(y,t) = 0 - (\vec{n}\cdot\partial y_2)\cdot\frac{d}{dy_2}\int_0^{\rho_1}\mathcal{H}(z,y_2,t)f(z)dz \le 0.$$

因此，根据 Hopf 强最大值原理和（A.4），我们得到

$$\max_{(x,t)\in\Omega\times[0,\infty)} F(x,t) \le \max_{(y,t)\in(\gamma\times\mathbb{R}^+)\cup(\Omega\times\{0\})} F(y,t).$$

Note $F\big|_{(\gamma\times\mathbb{R}^+)\cup(\Omega\times\{0\})} \le 0$ 由 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{H}$的狄利克雷–诺伊曼边界条件，我们得到 et

$$\max_{(x,t)\in\Omega\times[0,\infty)} F(x,t) \le 0.$$

步骤（3）。由上述内容，我们知道

$$\int_\Omega \mathcal{K}((z_1,z_2),y,t)f(z_2)dz_1dz_2 \le \int_0^{\rho_1} \mathcal{H}(z,y_2,t)f(z)dz.$$

利用通过特征函数表示狄利克雷-纽曼热核的公式，我们得到

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_\Omega e^{-\lambda_i t}\varphi_i(z_1,z_2)\cdot\varphi_i(y)f(z_2)dz_1dz_2 \le \sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{\rho_1} e^{-\tilde{\lambda}_i t}\tilde{\varphi}_i(z)\tilde{\varphi}_i(y_2)f(z)dz,$$

˜其中，λ_i是关于（Ω，γ，Λ）的第i个狄利克雷–诺伊曼特征值，对于 λ_i关于（$[0,\rho_1]$，ρ_1，0）的情形同样如此。

关于（$[0,\rho_1]$，ρ_1，0）的第一个狄利克雷–诺伊曼特征值 $\tilde{\lambda}_1$ 等于 π $\frac{\rho_1^2}{4}$

Let $t\to\infty$, note $\varphi_1>0$ and $\tilde{\varphi}_1>0$, we get $\lambda_1 \ge \tilde{\lambda}_1 = \frac{\pi^2}{4\rho_1^2}$. □

参考文献

[BB99] Rodrigo Ba˜nuelos 和 Krzysztof Burdzy，《论 J. Rauch 的“热点”猜想》，《函数分析杂志》164 (1999年)，第 1 期，1–33，DOI 10.1006/jfan.1999.3397。[Ber55] Lipman Bers，《一般线性椭圆方程解的局部行为》，《纯粹与应用数学通讯》8 (1955)，473–496，DOI 10.1002/cpa.3160080404。[Bes80] G´erard Besson，《黎曼曲面第一特征值的重数》，《傅里叶研究所年刊》(1980)。[CdV87] Yves Colin de Verdi`ere，《构造一类拉普拉斯算子，使其谱的一部分有限集具有给定值》，《高等师范学校科学年刊》(第 4 辑) 20 (1987年)，第 4 期，599–615。[Cha84] Isaac Chavel，《黎曼几何中的特征值》，纯粹与应用数学丛书，第 115 卷，Academic Press, Inc.，奥兰多，佛罗里达州，1984年。含 Burton Randol 撰写的一章，并附有 Jozef Dodziuk 的附录。[CY81] Jeff Cheeger 和 Shing Tung Yau，《热核的下界》，《纯粹与应用数学通讯》34 (1981)，第 4 期，465–480，DOI 10.1002/cpa.3160340404。[Che76] Shiu Yuen Cheng，《特征函数与节点集》，《赫尔维数学评论》51 (1976)，第 1 期，43–55，DOI 10.1007/BF02568142。[CJK09] Sunhi Choi、David Jerison 和 Inwon Kim，《高维中第一节点集的位置》，《美国数学会汇刊》361 (2009)，第 10 期，5111–5137，DOI 10.1090/S0002-9947-09-04729-1。[DWZ18] Xianzhe Dai、Guofang Wei 和 Zhenlei Zhang，《凸域的诺伊曼等周常数估计》，《美国数学会会刊》146 (2018)，第 8 期，3509–3514，DOI 10.1090/proc/14079。[EG15] Lawrence C. Evans 和 Ronald F. Gariepy，《测度论与函数的精细性质》，修订版，数学教材丛书，CRC 出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，2015年。[Fed69] Herbert Federer，《几何测度论》，数学科学基础丛书第 153 卷，施普林格出版社纽约公司，纽约，1969年。[Fuk87] Kenji Fukaya，《黎曼流形的塌缩与拉普拉斯算子的特征值》，《数学发明》87 (1987)，第 3 期，517–547，DOI 10.1007/BF01389241。

[GL87] Nicola Garofalo 和 Fang-Hua Lin，《椭圆算子的唯一延拓：一种几何变分方法》，《纯粹与应用数学通讯》40 (1987)，第 3 期，347–366，DOI 10.1002/cpa.3160400305。[Gil01] David 和 Trudinger Gilbarg Neil S.，《二阶椭圆偏微分方程》，数学经典，施普林格出版社，柏林，2001年。1998年版重印。[Hat02] Allen Hatcher，《代数拓扑》，剑桥大学出版社，剑桥，2002年。[HOHON99] M. Hoffmann-Ostenhof、T. Hoffmann-Ostenhof 和 N. Nadirashvili，《曲面上拉普拉斯算子特征值的重数》，《全球分析与几何》17 (1999)，第 1 期，43–48，DOI 10.1023/A:1006595115793。[HOMN99] T. Hoffmann-Ostenhof、P. W. Michor 和 N. Nadirashvili，《固定膜特征值重数的界》，《几何与泛函分析》9 (1999)，第 6 期，1169–1188，DOI 10.1007/s000390050111。[Jer95] David Jerison，《凸域第一节点线的直径》，《数学年刊》(第 2 辑) 141 (1995)，第 1 期，1–33，DOI 10.2307/2118626。[Jer00] ，《诺伊曼问题中第一节点线的位置》，《美国数学会汇刊》352 (2000)，第 5 期，2301–2317，DOI 10.1090/S0002-9947-00-02546-0。[Kr¨o92] Pawel Kr¨oger，《紧流形上的谱隙》，《微分几何杂志》36 (1992)，第 2 期，315–330。[Kr¨o98] Pawel Kr¨oger，《紧流形上特征函数的值域》，《伦敦数学会会刊》30 (1998)，第 6 期，651–655，DOI 10.1112/S0024609398004792。[Kr¨o99] Pawel Kr¨oger，《欧几里得空间中凸域高阶诺伊曼特征值的上界》，《美国数学会会刊》127 (1999)，第 6 期，1665–1669，DOI 10.1090/S0002-9939-99-04804-2。[LY80] Peter Li 和 Shing Tung Yau，《紧黎曼流形的特征值估计》，《拉普拉斯算子的几何》（夏威夷大学檀香山分校纯粹数学专题讨论会论文集，夏威夷檀香山，1979年），1980年，第 205–239 页。[LY86] Peter Li 和 Shing-Tung Yau，《论薛定谔算子的抛物型核》，《数学学报》156 (1986)，第 3–4 期，153–201，DOI 10.1007/BF02399203。[Nad87] N. S. Nadirashvili，《拉普拉斯算子的重特征值》，《数学文集》(新系列) 133 (1987)，第 2 期，175–237，DOI 10.1070/SM1988v061n02ABEH003204。[PW84] Murray H. Protter 和 Hans F. Weinberger，《微分方程中的极大值原理》，施普林格出版社，纽约，1984年。1967年原版的勘误重印版。[S´ev02] Bruno S´evennec，《闭曲面上第二个薛定谔特征值的重数》，《数学年刊》324 (2002)，第 1 期，195–211，DOI 10.1007/s00208-002-0337-1。[WX24] Haibin Wang 和 Guoyi Xu，《第一诺伊曼特征值与宽度》，arXiv:2407.13984 [math.SP] (2024年)。[Xu23] Guoyi Xu，《非线性泛函分析》，讲义（2023年秋季）。[ZY84] Jia Qing Zhong 和 Hong Cang Yang，《紧黎曼流形第一特征值的估计》，《中国科学》A 辑 27 (1984)，第 12 期，1265–1273。[Zhe13] Fan Zheng，《高维中第一节点集的位置》，arxiv:1312.0101 [math.DG] (2013年)。

Qixuan Hu，数学与计算机科学系，汕头大学，广东省，中华人民共和国电子邮箱地址：qxhu@stu.edu.cn