arXiv:2512.15078v1 [math.AC] 17 Dec 2025

关于 S-J-诺特环

Tushar Singh[1], Ajim Uddin Ansari[2], 和 Shiv Datt Kumar [3]

[1, 3]数学系，莫蒂拉尔·尼赫鲁国家理工学院阿拉哈巴德分校，普拉亚格拉吉 211004，印度 邮箱：sjstusharsingh0019@gmail.com、tushar.2021rma11@mnnit.ac.in、sdt@mnnit.ac.in[2]数学系，CMP 学院，阿拉哈巴德大学，普拉亚格拉吉-211002，印度 邮箱：ajimmatau@gmail.com

2025年12月18日

摘要

设 R 是含幺交换环， $S \subseteq R$ 是乘法集， J 是 R的一个理想。本文引入了 S-J-诺特环的概念，它同时推广了J-诺特环和 S-诺特环。我们研究了这一新环类的若干性质和刻画。例如，我们证明了 S-J-诺特环的柯恩型定理。除其他结果外，我们还建立了 S-J-诺特环中 S-初等分解的存在性，这是对经典 Lasker-Noether 定理的推广。

关键词： J-理想， S-J-诺特环， S-诺特环。**MSC(2020)：**
13A15, 13B02, 13C05, 13E05.

1 引言

本文中，设 R 为含幺交换环， $S \subseteq R$ 为乘法集， J 为 R的一个固定理想。对于 R的一个理想 I，我们记作 $S = \{s + I \mid s \in S\}$，它是 R/I的乘法封闭子集。环的诺特性质在交换代数和代数几何等领域发挥着至关重要的作用。鉴于诺特环的重要性，许多作者尝试推广诺特环的概念（参见 [2], [3], [7], [8], [9], [13], 和 [14]）。作为一项重要的推广，Anderson 和 Dumitrescu [3] 引入了 S-诺特环的概念。若 R 的一个理想 I 存在一个元素 $s \in S$ 和 R 的一个有限生成理想 F，使得 $sI \subseteq F \subseteq I$，则称该理想为 S-有限的。若 R 的每个理想都是 S-有限的，则称环 R 为 S-诺特环。最近，Alhazmy 等人 [2] 引入了 J-诺特环的概念，作为诺特环的推广。若 R 的一个理想 I 满足 $I \nsubseteq J$，则称其为 J-理想；若每个 J-理想都是有限生成的，则称 R 为 J-诺特环。当$J = Nil(R)$时，便出现一个特别有趣的情形；该理想由 R的所有幂零元组成。在这种情况下， J-诺特环称为非幂零诺特环，该概念最早由 Badawi 于 [5]提出并研究。此外，当 $J = J(R)$时，即 R的雅各布森根， J-诺特环称为

非-J-诺特环。这类环最早由 Dabbabi [7] 等人于 2024 年引入，他们刻画了非-J-诺特环的各种性质。

本文的主要目标是引入并研究 S-J-诺特环的概念。我们给出了一个不是 S-诺特环的 S-J-诺特环的例子（见例 2.4）。我们将 J-诺特环和S-诺特环的各种性质及刻画推广到这一新的环类。例如，我们建立了适用于 S-J-诺特环的 Cohen 型定理，并证明多项式环 $R[X]$是 S-J-诺特环，当且仅当它是 S-诺特环。此外，我们证明了 S-J-诺特环的商环是 S-诺特环（见命题 2.11）。进一步地，我们给出了 S-J-诺特环属于 S-诺特环这一类的充要条件（见定理 2.7 和 2.18）。在[15, 定理 2.10], 中，在其他结果之外，Singh 等人将经典的 Lasker-Noether 定理推广到了 S-诺特模。最后，我们将经典的 Lasker-Noether 定理推广到了 S-J-诺特环这一类（见定理 2.22）。

2 主要结果

我们首先引入 S-J-诺特环的概念。

定义 2.1. 设 R 为一个环， $S \subseteq R$ 为一个乘法集，且 J 为 R的一个理想。若理想I满足 $I \nsubseteq J$，则称其为 R的一个 J-理想。若 R 的每个 J-理想都是 S-有限的，则称 R为 S-J-诺特环。

显然，当 $S = \{1\}$时，每个 J-诺特环都是 S-J-诺特环。然而，下面的例子说明，反过来一般并不成立。

例子 2.2. 考虑环 $R = \mathcal{F}[X_1, X_2, \dots]$，其中 $\mathcal{F}$是一个域，并令 $J = (0)$。定义理想 $I = (X_1, \dots, X_n, \dots)$。显然， I 是一个 J- 理想，但不是有限生成的。因此， R 不是一个 J- 诺特环。现在，令 $S = R \setminus \{0\}$ 为 R的乘法封闭子集。令K 为 R的一个非零真理想。显然， K 是 J-理想，且 $K \cap S \neq \emptyset$。因此，由 *[3,命题 2(a)]*， K 是 S-有限的。因此， R 是 S-J-诺特的。

科恩定理是经典结果，它指出：如果一个环的所有素理想都是有限生成的，那么该环就是诺特环。现在，我们将这一结果推广到 S-J-诺特环。

定理 2.3. 环 R是 S-J-诺特环，当且仅当其素 J-理想（与 S 不相交）是 S-有限的。

证明。若 R 是 S-J-诺特的，那么显然 R 的所有素 J-理想都是 S-有限的。现在，假设 R 的所有与 S不相交的素 J-理想都是 S-有限的，并假设 R 不是S-J-诺特的。因此，所有非S-有限的 J-理想构成的集合 $\mathcal{F}$非空，且按包含关系排序。根据佐恩引理，取 $\mathcal{F}$中的一个极大元 P。这意味着 P 不是 S-有限的，因此 $P \cap S = \emptyset$。我们证明 P是 R的素理想。于是 P是一个与 S不相交且 S-有限的 J-素理想，这与 $P \in \mathcal{F}$这一事实矛盾。假设存在 a、$b \in R \setminus P$使得 $ab \in P$。若 $P + aR \subseteq J$、 $P \subseteq J$，则产生矛盾，因为 P是J-理想。因此 $P + aR$ 是 J-理想。由于 $P \subsetneq P + aR$，可知 $P + aR$ 是 S-有限的，因为P是 $\mathcal{F}$的极大元。于是，存在 $s \in S$、 α_1、……、 $\alpha_n \in P$以及 x_1、 $\dots x_n \in R$，使得

$s(P+aR) \subseteq (\alpha_1+ax_1, \ldots\ldots, \alpha_n+ax_n) \subseteq P+aR$。考虑理想 $Q=(P\colon a)=\{x\in R \mid ax\in P\}$。显然，$Q$是 J-理想，且 $P\subsetneq Q$，因为 $b\in Q\setminus P$。由 P的极大性可知，Q是一个S-有限理想。于是存在 $t\in S$ 和 β_1、……、$\beta_k\in Q$，使得 $tQ\subseteq(\beta_1,\ldots\ldots,\beta_k)\subseteq Q$。令$x\in P$。那么 $sx\in s(P+aR)\subseteq(\alpha_1+ax_1,\ldots\ldots,\alpha_n+ax_n)$，因此存在 u_1、……、$u_n\in R$使得 $sx=u_1(\alpha_1+ax_1)+\cdots+u_n(\alpha_n+ax_n)$ $=u_1\alpha_1+\cdots+u_na_n+a(u_1x_1+\cdots+u_nx_n)$。所以$a(u_1x_1+\cdots+u_nx_n)=sx-(u_1\alpha_1+\cdots+u_n\alpha_n)\in P$。于是 $u_1x_1+\cdots+u_nx_n\in(P\colon a)=Q$。因此，我们可以找到 w_1、……、$w_k\in R$使得 $t(u_1x_1+\ldots+u_nx_n)=w_1\beta_1+\cdots+w_k\beta_k$，这表明 $stx=t(u_1\alpha_1+\cdots+u_na_n)+at(u_1x_1+\cdots+u_nx_n)$ $=t(u_1\alpha_1+\cdots+u_na_n)+a(w_1\beta_1+\cdots+w_k\beta_k)$。由此得到 $uP\subseteq(\alpha_1,\ldots\ldots,\alpha_n,a\beta_1,\ldots\ldots,a\beta_k)\subseteq P$，其中 $u=st\in S$，这意味着 P是 S-有限的。这与 P的选取矛盾。因此 R是 S-J-诺特的。

□

显然，每个 S-诺特环都是 S-J-诺特环。然而，S-J-诺特环未必是 S-诺特环。为此，考虑下面的例子。

例 *2.4.* 设环 $R_1=\mathcal{F}[X_1,\ldots,X_n,\ldots]$，其中 $\mathcal{F}$ 是一个域，且 $I=(X_i^2;\ i\in\mathbb{N})$ 是 R_1 的一个理想。令 $R=R_1/I$。考虑 R_1 的素理想 $P=(X_i;i\in\mathbb{N})$。注意，环 R 的任意素理想都包含 P/I。于是，R 的唯一极小素理想是 P/I。取 $J=P/I$，且 $S=R\setminus(P/I)$ 是 R 的一个乘法子集。任意 R 的 J-素理想 P' 都真包含 P/I，因此 $P'\cap S\neq\emptyset$。根据 [3, 命题 2(a)]，P' 是 S-有限的。根据定理 *2.3*，R 是一个 S-J-诺特环。接下来，我们要证明 R 不是一个 S-诺特环。假设理想 P/I 是 S-有限的。存在 $\bar{s}\in S$ 和 $i_1,\ldots,i_n\in\mathbb{N}$，使得 $\bar{s}(P/I)\subseteq(X_{i_1},\ldots,X_{i_n})\subseteq(P/I)$。多项式 $\bar{s}$ 属于 R，仅涉及有限个变量 $X_{j_1},\ldots,X_{j_m}$，且其常数项为 $d\neq 0$。令 $k\in\mathbb{N}\setminus\{i_1,\ldots,i_n,j_1,\ldots,j_m\}$。那么，$\bar{s}X_k=sX_k-f_1X_{i_1}-\cdots-f_nX_{i_n}$，其中 $f_1,\ldots,f_n\in R$。因此 $sX_k-f_1X_{i_1}-\cdots-f_nX_{i_n}\in I$。这意味着$X_{i_1}=\cdots=X_{i_n}=X_{j_1}=\cdots=X_{j_m}=0$，从而得到 $dX_k\in\left(X_i^2\mid i\in\mathbb{N}\setminus\{i_1,\ldots,i_n,j_1,\ldots,j_m\}\right)$。矛盾。

例子 2.2 和 2.4 表明，S-J-诺特环这一概念是 J-诺特环和 S-诺特环的适当推广。

回忆一下，[6], 设 E 是环 R的一个理想族。若元素 $I\in E$ 满足：存在 $s\in S$，使得对每个 $J\in E$，若 $I\subseteq J$，则 $sJ\subseteq I$，则称 $I\in E$ 为 S-极大元 。此外，若理想链 $(I_i)_{i\in\wedge}$ 满足存在 $k\in\wedge$ 和 $s\in S$，使得$sI_i\subseteq I_k$ 对所有 $i\in\wedge$成立，则称其为 S-平稳，其中 $\wedge$ 是任意指标集。若理想族 $\mathcal{F}$ 满足以下性质，则称其为 S-饱和的：对于 R的每个理想 I，若存在 $s\in S$和 $J\in\mathcal{F}$使得 $sI\subseteq J$，则 $I\in\mathcal{F}$。

定理 2.5. 设 J 是 R的一个真理想。那么下列陈述等价 t.

1. R 是一个 S-J-诺特。 *2.* R 的每条 J-理想升链都是 S-稳定的。 *3.* R 的每个非空 S-饱和 J-理想集合都有一个极大元。 *4.* 每个非空的 J-理想族都存在一个关于包含关系的 S-极大元。

证明。
(1) $\Rightarrow$ (2)。设 $(I_n)_{n\in\wedge}$ 是 J-理想的递增序列，且这些理想属于 R。定义理想 $I = \bigcup I_n$。$n\in\wedge$ 若 $I \subseteq J$，则 $I_n \subseteq J$，这是不可能的，因为每个 I_n都是 J-理想。因此， I是 J的理想。此外，由于 R 是 S-J-诺特的， I 是 S-有限的。于是，存在一个有限生成理想 $F \subseteq R$ 和 $s \in S$，使得 $sI \subseteq F \subseteq I$。由于 F 是有限生成的，存在一个 $k \in \wedge$满足 $F \subseteq I_k$。于是我们有 $sI \subseteq F \subseteq I_k$，由此可知，对于每个 $n \in \wedge$，都有 $sI_n \subseteq I_k$。

(2) $\Rightarrow$ (3)。设 $\mathcal{D}$ 是 R中 J-理想的一个 S-饱和集。给定任意链 $\{I_n\}_{n\in\wedge} \subseteq \mathcal{D}$，我们声称 $I = \bigcup I_n$ 属于 $\mathcal{D}$，这将证明 I 是该链的一个上界。$n\in\wedge$事实上，根据 (2)，存在 $k \in \wedge$ 和 $s \in S$，使得对于每个 $n \in \wedge$都有 $sI_n \subseteq I_k$。因此，我们得到 $sI = s\left(\bigcup_{n\in\wedge} I_n\right) \subseteq I_k$。由于 $\mathcal{D}$是 S-饱和的，遂有 $I \in \mathcal{D}$，正如所要求的。应用佐恩引理，我们得出结论： $\mathcal{D}$ 具有一个极大元。

(3) $\Rightarrow$(4). 设 $\mathcal{D}$是 R的一个非空 J-理想集。考虑由所有满足存在某些 $s \in S$ 和 $L_0 \in \mathcal{D}$ 使得 $sL \subseteq L_0$的 J-理想$L \subseteq R$ 组成的族 $\mathcal{D}^S$。显然， $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}^S$，因此 $\mathcal{D}^S \neq \emptyset$。不难看出， $\mathcal{D}^S$ 是 S-饱和的。因此，由 (3) 可知， $\mathcal{D}^S$ 有一个极大元$K \in \mathcal{D}^S$。固定 $s \in S$ 和 $Q \in \mathcal{D}$，使得 $sK \subseteq Q$。现在我们断言， Q 是 $\mathcal{D}$的一个 S-极大元；具体而言，给定满足 $Q \subseteq L$的 $L \in \mathcal{D}$，我们将证明 $sL \subseteq Q$。注意， $K + L$满足 $s(K + L) = sK + sL \subseteq Q + L \subseteq L$，因此 $K + L \in \mathcal{D}^S$。此外，如果 $(K + L) \subseteq J$，那么$K \subseteq J$，这不可能，因为 K是 R的一个 J-理想。因此， $K + L$是 R的一个 J-理想。因此， K 的极大性意味着 $K = K + L$，从而 $L \subseteq K$。但此时 $sL \subseteq sK \subseteq Q$，如所需。

(4) $\Rightarrow$ (1). 设 I 是 R 的一个 J-理想，我们将证明它是 S-有限的。设 $\mathcal{D}$ 是 R 的有限生成 J-理想所组成的族，使得 $J \subseteq I$。取 $x \in I \setminus J$。那么 $L = (x) \subseteq I$，且 $L \nsubseteq J$。这意味着 $L \in \mathcal{D}$，因此 $\mathcal{D}$ 非空。于是 $\mathcal{D}$ 有一个 S-极大元 $K \in \mathcal{D}$。固定 $x \in I$，取一个形如 $Q = K + xR$ 的有限生成理想。由于 $K \subseteq I$ 且 $x \in I$，所以 $Q \subseteq I$。因此，存在 $Q \in \mathcal{D}$ 使得 $K \subseteq Q$。这意味着存在 $s \in S$ 使得 $sQ \subseteq K$；特别地， $sx \in K$。这验证了 $sI \subseteq K \subseteq I$，因此 I 是 S- 有限的。由此可得， R 是 S-J-诺特的。

□

设 $f : R \to R'$ 是一个同态， S 是 R 的乘法封闭子集。那么容易看出，如果 $0 \notin f(S)$ 且 $1 \in f(S)$，则 $f(S)$ 是 R' 的乘法封闭子集。

命题 2.6. 设 $f : R \to R'$ 是一个满同态， J 是 R'的一个理想。若 R 是一个S-$f^{-1}(J)$-诺特环，且满足 $0 \notin f(S)$，则 R' 是一个 $f(S)$-J-诺特环。

证明。设 $\{I_i\}_{i\in\wedge}$ 是 R' 的任意递增 J-理想链。那么，对每个 $i \in \wedge$， $I_i \nsubseteq J$。反设，对每个 i，都存在 $\alpha_i \in I_i \setminus J$，使得 $f^{-1}(\alpha_i) \subseteq f^{-1}(J)$。那么，由于 f 是满同态，$\alpha_i \in f(f^{-1}(\alpha_i)) \subseteq f(f^{-1}(J)) = J$。这与 $\alpha_i \notin J$ 矛盾。因此，对每个 $i \in \wedge$， $f^{-1}(I_i) \nsubseteq f^{-1}(J)$，于是 $f^{-1}(I_i)$ 是 R 的 $f^{-1}(J)$ 理想。由此得到 R 的 $f^{-1}(J)$-理想递增链 $\{f^{-1}(I_i)\}_{i\in\wedge}$。由于 R 是一个 S-$f^{-1}(J)$-诺特环，

存在 $k \in \wedge$ 和 $s \in S$，使得对所有 $i \in \wedge$， $sf^{-1}(I_i) \subseteq f^{-1}(I_k)$。对两边应用 f，得到对所有 $i \in \wedge$， $f(sf^{-1}(I_i)) = f(s)f(f^{-1}(I_i)) \subseteq f(f^{-1}(I_k))$。由于 f 是满同态，可知对所有 $i \in \wedge$， $f(s)I_i \subseteq I_k$。因此，根据定理 2.5， R' 是一个 $f(S)$-J-诺特环。

□

定理 2.7。设 S 是环 R 的一个乘法子集。以下陈述等价:

1. R 是 S-诺特的。
2. R 是 S-J-诺特的，并且 J 是 R 的一个 S-有限理想。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2)。该蕴含显然。(2) $\Rightarrow$ (1)。设 P 是 R 的一个素理想。若 $P \subseteq J$，则根据假设， P 是 S-有限的。假设 P 真包含于 J 中。那么 P 是一个与 S 不相交的 J-理想，其中 R。由于 R 是 S-J-诺特的，因此 P 是与 S 不相交的 S-有限集。所以，根据 [3, 推论 5]， R 是 S-诺特的。

□

设 R 是一个环，且 S 是 R 的一个乘法子集。回顾一下，如果对于所有 $s \in S$ 都有 $\bigcap_{n\geq 1} s^n R \cap S \neq \emptyset$，则称 S 是 R 的一个反阿基米德子集。

推论 2.8. 设 $S \subseteq R$ 是一个反阿基米德乘法集，且 J 是 S-有限的。若 R 是S-J-诺特的，则多项式环 $R[X_1, \ldots, X_n]$也是 S-J-诺特的。

证明. 由定理 2.7， R是 S-诺特环。于是，由 [3, 命题 9]， $R[X_1, \ldots, X_n]$是S-诺特的。这意味着 $R[X_1, \ldots, X_n]$是 S-J-诺特的。 □

回顾一下，设 M是一个 R-模。 R-模 M的理想化 $R(+)M = \{(r, m) \mid r \in R, m \in M\}$是一个交换环，其逐分量加法和乘法定义为 $(\alpha_1, m_1)(\alpha_2, m_2) = (\alpha_1\alpha_2, \alpha_1 m_2 + \alpha_2 m_1)$，对所有 α_1, $\alpha_2 \in R$和 $m_1, m_2 \in M$均成立。容易验证， $S(+)M = \{(s, m) \mid s \in S, m \in M\}$在 $R(+)M$中构成一个乘法集。下面的例子说明， S-J-诺特环上的多项式环未必是S-J-诺特的。

例 2.9. 设 V是域 K上的无限维向量空间。则对于 R的任意乘法子集 S， $R = K(+)V$都是 S-J-诺特环。此外，若 $0 \notin S$，则 $R[X]$不是 S-J-诺特环。特别地，若 $J = Nil(R)$，则证明可由 *[10,*例 *2.4]* 得出。

接下来我们证明，多项式环 $R[X]$ 是 S-J-诺特环，当且仅当它是 S-诺特的。

推论 2.10. 设 R 是一个环， $S \subseteq R$ 是一个乘法集，且 J 是 R的一个理想。那么，$R[X]$ 是 S-$J[X]$-诺特环，当且仅当 $R[X]$ 是 S-诺特环。

证明。设 $R[X]$ 是一个 S-$J[X]$-诺特环。接下来证明 $R[X]$ 是一个 S-诺特环。为此，根据定理 2.7，只需证明 $J[X]$ 是 S-有限的。定义 $R[X]$的理想 $Q = J[X] + XR[X]$。注意，由于 $Q \not\subseteq J[X]$， Q 是一个 $J[X]$-理想。因此，Q 是 S-有限的。所以存在 $s \in S$ 和 $f_1, \ldots, f_n \in R[X]$，使得 $s($ $J[X] + XR[X]) \subseteq$

$f_1R[X]+\cdots+f_nR[X]\subseteq J[X]+XR[X]$。由此得到 $sJ\subseteq f_1(0)R+\cdots+f_n(0)R\subseteq J$。这意味着 $sJ[X]\subseteq f_1(0)R[X]+\cdots+f_n(0)R[X]\subseteq J[X]$。因此， $J[X]$ 是 $R[X]$ 的一个 S-有限理想。反向结论显然成立。 □

命题 2.11。 设 R 是一个 S-J-诺特环。那么 R/J 是一个 S-诺特环。

证明。 R/J 的一个非零素理想（与 S不相交）具有以下形式： P/J ，其中 $P\in$Spec(R) 且 $J\subsetneq P$。显然， P是一个 J-理想，且 $P\cap S=\emptyset$，因为 P/J非零并且 $P/J\cap S=\emptyset$。根据假设， P是 S-有限的。因此存在 $s\in S$和 $p_1,\ldots,p_n\in P$，使得 $sP\subseteq(p_1,\ldots,p_n)\subseteq P$。令 $x\in P$。那么我们可以找到 $a_1,\ldots,a_n\in R$，使得 $sx=a_1p_1+\cdots+a_np_n$。由此可得 $(s+J)(x+J)=(a_1+J)(p_1+J)+\ldots+(a_n+J)(p_n+J)$，其中 $s+J\in S$且$a_1+J,\ldots,a_n+J\in R/J$。这意味着 $(s+J)(P/J)\subseteq(p_1+J,\ldots,p_n+J)\subseteq P/J$，即，$P/J$ 是 S-有限的。根据 [3,推论 5]，R/J 是 S-诺特的。 □

推论 2.12. 设 $S\subseteq R$ 是反阿基米德乘法集。若 R 是 S-J-诺特的，则多项式环 $(R/J)[X_1,\ldots,X_n]$ 是 S-$J[X_1,\ldots,X_n]$- 诺特的。

证明. 根据命题 2.11， R/J 是 S-诺特的。因此，根据 $[3,\text{命题 }9],(R/J)[X_1,\ldots,X_n]$是 S-诺特的。这意味着 $(R/J)[X_1,\ldots,X_n]$ 是 S-$J[X_1,\ldots,X_n]$-诺特的。 □

定义 2.13. *[5]* 环 R 的理想 I 称为可分的，如果 $I\subset xR$ 对每个 $x\in R\backslash I$ 都成立。

定理 2.14. 设 R 是一个 S-J-诺特环，且 I 是 R 的一个与 S 不相交的 J-理想。若 J 是可分理想，则存在 $s\in S$ 和 S-素理想 $P_1,\ldots,P_n$，它们属于 R，使得 $s(P_1\cdots P_n)\subseteq I$。

证明。由于 $I\nsubseteq J$和 J可整除，因此 $J\subset(x)\subseteq I$，其中某个 $x\in I\setminus J$。于是， I/J是 S-诺特环 R/J 的一个理想。由于 $I\cap S=\emptyset$，所以 $(I/J)\cap S=\emptyset$。为此，若 $(I/J)\cap S\neq\emptyset$，则存在某个 $s\in S$和 $i\in I$，使得 $s+J=i+J$。因此， $s-i\in J\subset I$，从而 $s\in I$；这与 $I\cap S=\emptyset$矛盾。因此， I/J与 S不相交。由此可知，存在 $\bar{s}\in S$ 和S-素理想 Q_1、.....、 Q_n，它们是 R/J中包含 I/J的理想，并且根据 $[1,$定理有 $\bar{s}(Q_1\ldots Q_n)\subseteq I/J$。显然，对每个 $i=1$、.....、 n，都有 $Q_i\cap S=\emptyset$，因为每个 Q_i都是 S-素理想。然后，根据 $[1,$命题3]，，对每个 $1\leq i\leq n$，存在一个 S- 素理想 P_i，它是 R 中包含 J 的理想，且满足 $Q_i=P_i/J$。因此，由于 $P_1/J\cdots P_n/J=(P_1\cdots P_n)/J$，故 $\bar{s}((P_1\cdots P_n)/J)\subseteq I/J$。对每个 $a\in P_1\cdots P_n$，存在某个 $b\in I$，使得 $(s+J)(a+J)=b+J$。因此， $sa-b\in J\subset I$，从而 $sa\in I+Rb\subseteq I+J=I$。于是 $s(P_1\cdots P_n)\subseteq I$。 □

命题 2.15. 设 $R\subseteq R'$ 是环扩张，满足对于 R的每个理想I ， $IR'\cap R=I$ ；并设 $S\subseteq R$ 是一个乘法集。若 R' 是一个 S-J-诺特环，则 R 是S-J-诺特的。

证明。 设 I是 R和 $I\subseteq IR'$的一个 J-理想。若 $IR'\subseteq J$，则 $I\subseteq J$，这不可能，因为 $I\nsubseteq J$。因此，IR' 是 R'的一个 J-理想。由于环 R' 是 S-J-诺特的，存在 $s\in S$和 $i_1,$ ....., $i_n\in I$，使得 $sIR'\subseteq(i_1,$ ....., $i_n)R'\subseteq IR'$。根据假设， $sI=sIR'\cap R\subseteq(i_1,$ ....., $i_n)R'\cap R\subseteq IR'\cap R=I$。于是， I是 R 的一个 S- 有限理想，如所求。 □

命题 2.16. 设 R 是一个 S-J-诺特环，且 I 是 R 中与 S 不相交的一个 J-理想。那么存在 $t\in S$ 和 $m\in\mathbb{N}$，使得 $t(rad(I))^m\subseteq I$。

证明。设 I 是 R 的一个 J-理想。那么 $rad(I)$ 也是 R 的一个 J-理想，因此 $rad(I)$ 是 S-有限的。由此，存在 $s \in S$ 和 $x_1, \ldots, x_n \in rad(I)$，使得 $s(rad(I)) \subseteq K \subseteq rad(I)$，其中 $K = (x_1, \ldots, x_n)$。设 $m_i \in \mathbb{N}$ 满足对任意 $1 \leq i \leq n$，都有 $x_i^{m_i} \in I$。然后选取充分大的 $m \in \mathbb{N}$，使得 $K^m \subseteq I$。因此 $t(rad(I))^m \subseteq I$，其中 $t = s^m \in S$。 □

引理 2.17. 设 R 是一个 S-J-诺特的环，且 I 是 R的一个 J-理想。那么 R/I 是一个 S-诺特环。

证明. 设 $\{I_i/I\}_{i \in \wedge}$ 是 R/I的非零理想升链。因此， $\{I_i\}_{i \in \wedge}$ 是 R 的 J-理想升链，故由定理 2.5，存在 $s \in S$ 和 $k \in \wedge$，使得对每个 $i \in \wedge$都有 $sI_i \subseteq I_k$。因此，对每个 $i \in \wedge$都有$(s+I)(I_i/I) \subseteq I_k/I$，从而$(I_i/I)_{n \in \wedge}$是$S$-稳定的。由定理 2.3], R/I 是 S-诺特的。 □

回顾一下，若一个环 R 存在非平凡幂等元 R，则称其为可分解的。令$Idem(R)$表示 R的幂等元集合。

定理 2.18. 设 R 是可分解环， J 是 R 的一个理想，并且对每个$e \in Idem(R) \setminus \{0, 1\}$，都有 $eJ \neq (e)$ 。那么， R是 S-J-诺特环，当且仅当 R是 S-诺特环。

证明。只需证明：若 R 是 S-J-诺特环，则 R 是 S-诺特环。为证明这一点，我们先证明对每个 $e \in Idem(R) \setminus \{0, 1\}$， $R/(e)$ 是 S-诺特环。考虑 $e \in Idem(R) \setminus \{0, 1\}$。设 L 是 R 的一个理想，且包含 (e)。那么 $e \notin J$，因为 $eJ \neq (e)$，因此 $L \nsubseteq J$。故 L 是一个 J-理想，由引理 2.17， R/L 是 S-诺特环。这意味着 $R/(e)$ 是 S-诺特环，因为 $(e) \subseteq L$。现在，设 K 是 R 的一个理想，使得对每个 $e \in Idem(R) \setminus \{0, 1\}$，都有$K \subseteq (e)$。我们断言 K 是 S-有限的。显然， $eK = K$。若$K = (0)$，则 K 是 S-有限的。因此不妨设 $K \neq 0$。若 $K \subseteq (1-e)$，则 $eK \subseteq (e - e^2) = (0)$，即 $eK = K = 0$; 这与 $K \neq 0$矛盾。因此 $K \nsubseteq (1-e)$。由于$1 - e \in Idem(R) \setminus \{0, 1\}$， $R/(1-e)$ 是一个 S-诺特环。为简便起见，令 $I = (1-e)$。则 $L = (K+I)/I$是 R/I的一个 S-有限理想。因此存在 $\alpha_1 + I, \ldots, \alpha_n + I \in R/I$，其中 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$，且 $s' = s + I \in S$，使得 $s'L \subseteq (\alpha_1 + I, \ldots, \alpha_n + I) \subseteq L$。令$\beta \in K + I$。于是 $\beta + I \in L$，故 $s\beta + I \in s'L \subseteq (\alpha_1 + I, \ldots, \alpha_n + I)$。这意味着，对于某些 $u_1 + I, \ldots, u_n + I \in R/I$，有 $s\beta + I = (u_1 + I)(\alpha_1 + I) + \cdots + (u_n + I)(\alpha_n + I)$。因此，$s\beta - (u_1\alpha_1 + \cdots + u_n\alpha_n) \in I$， $s\beta - (u_1\alpha_1 + \cdots + u_n\alpha_n) \in F$，其中 $F = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 1-e)$，因为$I \subseteq F$。于是 $s\beta \in F$，从而 $s(K + (1-e)) \subseteq F \subseteq K + (1-e)$。因此 $K + (1-e)$ 是S-有限的。故 $K = Ke = (K + (1-e))e$ 是 R的一个 S-有限理想，正如所断言的那样。现在，设 T是 R的一个理想。由于 $eT \subseteq (e)$，并且对每个$e \in Idem(R) \setminus \{0, 1\}$，$(1-e)T \subseteq K + (1-e)T \subseteq K + (1-e)$，所以 eT和 $(1-e)T$都是 S-有限的。因此 $T = eT + (1-e)T$是 S-有限的，从而 R 是 S-诺特环。

□

定义 2.19. *[15]* 环 R 中的理想 Q （与 S不相交）称为 S-不可约的，如果$s(I \cap K) \subseteq Q \subseteq I \cap K$ 对于某个 $s \in S$ 以及环 R中的某些理想 I、 K，则存在 $s' \in S$ 使得 $ss'I \subseteq Q$ 或 $ss'K \subseteq Q$。

由定义可知，每个不可约理想都是一个 S-不可约理想。然而，下面的例子表明， S-不可约理想未必是不可约理想。

例 2.20. 令 $R=\mathbb{Z}$、 $S=\mathbb{Z}\setminus 3\mathbb{Z}$ 和 $I=6\mathbb{Z}$。由于 $I=2\mathbb{Z}\cap 3\mathbb{Z}$，因此 I 不是 R 的不可约理想。现在，取 $s=2\in S$。那么 $2(3\mathbb{Z})=6\mathbb{Z}\subseteq I$。因此， I 是 R 的一个 S-不可约理想。

回忆 [11, 定义 2.1], : 环 R 的真理想 Q若与 S 不相交，则称其为 S-主理想，如果存在一个 $s\in S$，使得对所有 $a,\ b\in R$，若 $ab\in Q$，则要么 $sa\in Q$，要么 $sb\in rad(Q)$。由 [15], 可知，设 I 是 R 的一个理想，且 $I\cap S=\emptyset$。那么，如果 I 能写成 R的有限个 S-主理想的交， I 就有 S-主分解。

现在，我们将 S-J-诺特环的 S-主分解定理推广。首先给出以下引理。

引理 2.21. 设 R是一个 S-J-诺特环。那么， R的每个 S-不可约 J-理想都是 S-主理想。

证明。假设 Q是 R的一个 S-不可约 J-理想。设 $a,b\in R$满足 $ab\in Q$且对所有 $s\in S$均有 $sb\notin Q$。我们的目标是证明存在 $t\in S$ 使得 $ta\in rad(Q)$。对 $n\in\mathbb{N}$，考虑$A_n=\{x\in R\mid a^nx\in Q\}$。由于 Q是一个 J理想，存在 $\alpha\in Q\setminus J$。于是，对每个 $n\in\mathbb{N}$都有 $a^n\alpha\in Q$。这意味着 $\alpha\in A_n$，但对每个 $n\in\mathbb{N}$都有 $\alpha\notin J$。因此，每个 A_n都是 R的一个 J-理想，并且 $A_1\subseteq A_2\subseteq A_3\subseteq\cdots$是 R的理想递增链。由于 R是S-J-诺特环，根据定理 2.5，这条链是 S-稳定的，也就是说，存在 $k\in\mathbb{N}$ 和 $s\in S$，使得对所有 $n\geq k$都有 $sA_n\subseteq A_k$。考虑 R的两个理想 $I=(a^k)+Q$ 和 $K=(b)+Q$。于是 $Q\subseteq I\cap K$。为证明反向包含，取 $y\in I\cap K$。将 $y=a^kz+q$写成某个 $z\in R$和 $q\in Q$。由于 $ab\in Q,\ aK\subseteq Q$; 因此 $ay\in Q$。现在， $a^{k+1}z=a(a^kz)=a(y-q)\in Q$。这意味着 $z\in A_{k+1}$，因此 $sz\in sA_{k+1}\subseteq A_k$。于是， $a^ksz\in Q$，这意味着$a^ksz+sq=sy\in Q$。因此我们有 $s(I\cap K)\subseteq Q\subseteq I\cap K$。这意味着存在 $s'\in S$，使得 Q 是 S-不可约的，因此要么 $ss'I\subseteq Q$，要么 $ss'K\subseteq Q$。若 $ss'K\subseteq Q$，则 $ss'b\in Q$，这是不可能的。因此 $ss'I\subseteq Q$，这意味着 $ss'a^k\in Q$。令 $t=ss'\in S$。那么 $(ta)^k\in Q$，从而 $ta\in rad(Q)$，如所求。 □

定理 2.22。 设 R 是一个 S-J-诺特环。那么， R 的每个与 S 不相交的真 J-理想都可以表示为有限个 S-一次理想的有限交。

证明。设 E 是 R 中与 S 不相交且不能写成有限个 S-准素理想之交的 J-理想的集合。我们要证明 $E=\emptyset$。反设 $E\neq\emptyset$。由于 R 是一个 S-J-诺特环，根据定理 2.5， E 中存在一个 S-极大元，记为 I。显然， I 不是 S-准素理想；根据引理 2.21， I 不是 S-不可约理想，因此 I 不是不可约理想。这意味着，对于某些 R 中的理想 K 和 L，有 $I=K\cap L$，且 $I\neq K$ 和 $I\neq L$。由于 I 不是 S-不可约的，因此对所有$s\in S$，都有 $sK\nsubseteq I$ 和 $sL\nsubseteq I$。现在我们断言 $K,\ L\notin E$。为此，若 K（分别为 L）属于 E，则由于 I 是 E 中的一个 S-极大元，且 $I\subset K$（分别为 $I\subset L$），存在来自 S 的 s'（分别为 s''），使得 $s'K\subseteq I$（分别为 $s''L\subseteq I$）。这不可能，因为 I 不是 S-不可约的。因此 $K,\ L\notin E$。此外，若 $K\cap S\neq\emptyset$（$respectively,\ L\cap S\neq\emptyset$），则存在 $s_1\in K\cap S$（$respectively,\ s_2\in L\cap S$）。这意味着 $s's_1\in s'K\subseteq I$（$respectively,\ s''s_2\in s''L\subseteq I$），与 I 和 S 不相交矛盾。因此 K 和 L 也与 S 不相交。这意味着 K 和 L 可以写成有限个 S-准素理想之交。因此，

I 也可以写成有限个 S-准素理想之交，因为 $I = K \cap L$，这与 $I \in E$ 矛盾。因此 $E = \emptyset$，即 R 中每个与 S 不相交的真 J-理想，都可以写成有限个 S-准素理想之交。

□

参考文献

[1] H. Ahmed and M. Achraf（2020）：交换环的S-素理想。Beitr Algebra Geom. 61:533-542。[2] K. Alhazmy, F. A. Ahmed, N. Mahdou and E. H. Oubouhou（2024）：关于 j-诺特环。Open Mathematics 22: 20240014。[3] D. D. Anderson and T. Dumitrescu（2002）：S-诺特环。Commun. Algebra 30:4407- 4416。[4] D. D. Anderson and M. Winders（2009）：模的理想化。J. Commut. Algebra 1:3-56。[5] A. Badawi（2003）：论非幂零诺特环。Commun. Algebra 31:1669-1677。[6] Z. Bilgin, M.L. Reyes and U. Tekir（2018）：论右 S-诺特环和 S-诺特模。Commun. Algebra 46:863-869。[7] A. Dabbabi and A.Benhissi（2024）：论非J-诺特环。Rendi. del Cir. Mat. di Pal. Ser. 2 73:2603-2611。[8] H. Kim, N. Mahdou, and Y. Zahir（2021）：双拼接中的S-诺特性。Bull. Korean Math. Soc. 58:1021-1029。[9] J. W. Lim and D. Y. Oh（2014）：沿理想的拼接代数上的S-诺特性质。J. Pure Appl. Algebra 218:1075-1080。[10] N. Mahdou, E. H. Oubouhou and E. Y. Celikel（2024）：论非幂零S-诺特环和非幂零u-S-诺特环。An. st. Univ. Ovidius Constanta 32:201-219。[11] E. Massaoud（2022）：交换环的S-拟素理想。Commun. Algebra 50:988- 997。[12] E. Noether（1921）：环域中的理想理论。Math. Ann. 83:24–66。[13] E. Rostami（2022）：论强 J-诺特环。J. Algebra Appl. 21:2250144-13[14] T. Singh, A. U. Ansari and S. D. Kumar（2023）：S-诺特环、模及其推广。Surv. Math. Appl. 18:163-182。[15] T. Singh, A.U. Ansari and S. D. Kumar（2024）：S-诺特模中的 S-素分解的存在性与唯一性。Commun. Algebra 52:4515-4524。