arXiv:2512.15084v1 [math.AC] 17 Dec 2025

交换 S约化环的结构分析

TusharSingh[1] 和 ShivDattKumar [2]

[1, 2]数学系，莫蒂拉尔·尼赫鲁国立理工学院阿拉哈巴德分校，普拉亚格拉杰 211004，印度 电子邮箱: sjstusharsingh0019@gmail.com，tushar.2021rma11@mnnit.ac.in[1],sdt@mnnit.ac.in[2]

2025年12月18日

摘要

设 R 是一个带单位元的交换环， $S \subseteq R$ 是一个乘法集。本文证明， S约化环中所有 S-素理想的交集为 S零。此外，我们证明， S-Artinian 约化环同构于有限个域的直积。进一步地，我们给出一个 S约化环的例子，它是一个一致-S-Armendariz 环（简称 u-S-Armendariz 环）。此外，我们证明一致-S约化环（简称 u-S约化环）这一类属于 u-S-Armendariz 环这一类。在其他结果中，我们建立了 S约化环与 S-强 Hopfian 环之间的关系。最后，我们证明了 S约化环的结构定理。

关键词： S-约化环， u-S-Armendariz 环， S-整环， S-强 Hopfian 环。**2020年数学学科分类：** 12E20, 13G05, 16N40, 16U10.

1 引言

本文中， R 表示一个交换环， $S \subseteq R$ 是一个乘法闭集。交换代数与环论侧重于研究环及其推广，而约化环的概念是其中最重要的概念之一。约化环推广了整环，并作为一种中间框架，有助于探索整环与一般环之间的性质，这些性质在推广下得以保留。2020年，Pakin 等人 [14] 提出了 S-约化环的概念，将其作为约化环的一种推广（见定义 2.1）。本文的主要目标是研究 S-约化环的各种刻画，并探讨它们与某些特殊环类之间的关系，包括u-S-Armendariz 环、 S-Hopfian 环和 S-PF 环。本研究受到 [1, 2, 11, 14, 19, 20]中所述结果的启发。众所周知，在约化环中，所有素理想的交集为零。然而，在 S-约化环中，所有 S-素理想的交集不一定为零（见例 2.15）。最近，2024年，Ersoy 等人 [10]提出了 S-零的概念（见定义 2.8）。基于这一思想，我们证明，在 S-约化

环中，所有 S-素理想的交集恰好是 S-零（见定理 2.16）。此外，2020年，Sevim 等人 [18]将阿廷环的概念推广为 S-阿廷环。若交换环 R 满足对每个理想降链：，则称其为 S-阿廷的

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots$$

属于 R，存在 $s \in S$ 和 $k \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \geq 1$， $sI_k \subseteq I_n$。

本节证明， S-Artinian 约化环同构于有限个域的直积（见定理 2.22）。Armendariz 环的概念最初由 Armendariz [7]提出，随后由 Rege 和 Chhawchharia [16]加以发展。由于能够简化并推广多项式环理论、模论及其他代数结构，这类环在代数中占有重要地位。它们的重要性源于其独特性质，以及在交换环与非交换环理论中的广泛应用。若环 R 满足：对于任意多项式 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ 和 $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \in R[x]$，只要它们满足 $f(x)g(x) = 0$，就有 $a_ib_j = 0$ 对所有 $0 \leq i \leq n$ 和 $0 \leq j \leq m$ 都成立，则称其为 $Armendariz$环。鉴于其重要性，作为 Armendariz 环的一种出色推广，u-S-Armendariz 环的概念最早由 Kim 等人 [12] 于2024年提出（见定义 3.1）。本文确定了一类特定的 3×3 上三角矩阵，它们构成一个u-S-Armendariz 环（见例 3.2）。接着，我们证明每个 u-S-约化环都是u-S-Armendariz 环（见定理 3.5）。2021年，Ahmed 等人 [2] 提出了 S-强 Hopfian 环的概念（见定义 3.7）。随后，我们证明每个 S-约化环都是 S-强 Hopfian 环（见命题 3.9）。最近，2024年，Ersoy 等人 [10]将纯理想的概念扩展为 S-纯理想（见定义 3.11）。本文表明，S-PF 环类是 S-约化环类的子类（见例 3.13）。此外，我们以 S-约化环的一个结构定理作为结尾（见定理 3.16）。

2 S-约化环

我们首先引入 S-约化环的概念，旨在建立与约化环相关的著名结果的 S 类比。

定义 2.1. *[14]* 若环 R 满足：对于任意 $r \in R$，只要存在某个 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $r^n = 0$，就存在 $s \in S$ 使得 $sr = 0$，则称其为 S-约化环。

显然，每个约化环都是 S-约化环；但反过来一般不成立。为突出这一区别，我们现在给出以下例子。在整篇手稿中，我们用 $N(R)$ 表示 R 的所有幂零元构成的集合

例 2.2. 设 $R = \mathbb{Z}_{24}$，且 $S = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{8}, 16\}$。我们注意到 $\bar{6}^3 = \bar{0}$，但 $\bar{6} \neq \bar{0}$。因此， R不是约化环。显然， $N^*(R) = \{\bar{6}, 12, 18\}$ 是 R 的所有非零幂零元构成的集合。设 $x \in N(R)$。于是有 $x^3 = \bar{0}$。取 $s = \bar{4} \in S$。则 $sx = \bar{0}$，因此 R 是一个 S-约化环。

例 2.3。 令 $R = \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12} \times \ldots$（$\mathbb{Z}_{12}$的可数无穷多个副本），以及 $S = \{\alpha^n \,|where\, \alpha = (\bar{2}, \bar{2}, \bar{2}, \ldots) \in R\, and\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$。令 $\beta = (\bar{6}, \bar{6}, \bar{6}, \ldots) \in R$。我们注意到$\beta^2 = (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \ldots)$，但 $\beta \neq (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \ldots)$。因此， R不是约化环。显然，该集合

$$N(R) = \{(\bar{\alpha_1}, \bar{\alpha_2}, \bar{\alpha_3}, \ldots) |\ \alpha_i = 0\ or\ 6\ for\ all\ i \in \mathbb{N}\}$$

是 R 的所有幂零元组成的集合。令 $\gamma \in N(R)$。则 $\gamma^n = (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \ldots)$ 对于某个 $n \in \mathbf{N}$成立。取 $\alpha = (\bar{2}, \bar{2}, \bar{2}, \ldots) \in S$。因此， $s\gamma = (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \ldots)$ ，从而 R 是一个 S-约化环。

注 2.4. 如果 $S^{-1}R$ 是一个整环，那么 R 是一个 S-约化环。为此，设 $r \in R$ 满足：对于某个 $n \in \mathbb{N}$，有 $r^n = 0$。那么，由于 $S^{-1}R$ 是一个整环，我们有：对于某个 $s \in S$， $\frac{r^n}{s^n} = \frac{0}{s^n}$， $\frac{r}{\bar{s}} = \frac{0}{\bar{s}}$。这意味着存在 $u \in S$ 使得 $usr = 0$，如所需。

定义 2.5. *[6, 定义 2.1]* 设 $S \subseteq R$ 是一个乘法集， I 是 R 的一个理想。那么， I 的 S-根定义为

$$\sqrt[S]{I} = \{a \in R \mid sa^n \in I \text{ for some } s \in S \text{ and } n \in \mathbb{N}\}.$$

此外，如果 $\sqrt[S]{I} = I$，则称 I 为一个 S-根理想。

现在， $Z(R)$ 表示环 R 的零因子集合。

命题 2.6. 设 I 是 R 的一个理想，且满足 $Z(R/I) \cap \bar{S} = \emptyset$，其中 $\bar{S} = \{s + I \mid s \in S\}$ 是 R/I 的一个乘法闭集。那么，当且仅当 R/I 是一个 S-约化环时， I 才是一个 S-根理想。

证明。如果 I 是 S-根式的，那么它就是根式的，因此 R/I 是约化的，这意味着它是 S-约化环。反过来，设 R/I 是一个 $\bar{S}$-约化环，且 $y \in \sqrt[S]{I}$。那么存在 $s \in S$ 使得 $\overline{sy^n} \in I$, $\overline{(sy)^n} \in I$。因此，$(sy + I)^n = I$；存在 $t + I \in S$ 使得 $(t + I)(sy + I) = I$，因为 R/I 是一个 S-约化环。由此可得 $(st + I)(y + I) = I$，于是 $y \in I$，因为 $Z(R/I) \cap \bar{S} = \emptyset$，证毕。 □

问题 2.1。 *"$S \cap Z(R/I) = \emptyset$"这一假设对于命题 2.6 是否必要?*

是的，这是一个必要条件。我们给出一个例子，其中 $S \cap Z(R/I) \neq \emptyset$，且命题 2.6 不成立。

例 2.7. 设 $R = \mathbb{Z}$、 $S = \{2^n \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ 和 $I = 12\mathbb{Z}$。则 $R = R/I = \mathbb{Z}_{12}$、 $\bar{S} = \{s + 12\mathbb{Z} \mid s \in S\} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{8}\}$。显然， $Z(R) \cap \bar{S} \neq \emptyset$。由于 $\bar{6}$ 是 R 中唯一的非零幂零元素。取 $s = \bar{2} \in S$。则 $s\bar{6} = \bar{0}$, 因此 R 是一个 $\bar{S}$- 约化环。由于 $3 \notin I$，但 $\overline{4} \cdot 3 \in I$，由此可知 I 不是 R 的 S- 根理想。

定义 2.8. *[10]* 设 $y \in R$。则有如下结论：

1. 若对于某些 $s \in S$ 和 $n \in \mathbb{N}$， $sy^n = 0$，则称 y 为 S-幂零。
2. 若对于某个 $s \in S$， $sy = 0$，则称 y 为 S-零。

定义 2.9. 环 R 的理想 I 称为 S-零，如果 I 的每个元素都是 S-零；也就是说，对于每个 $a \in I$，都存在 $s \in S$ 使得 $sa = 0$。

命题 2.10. 设 R 是一个 S-约化环，且 I、 J 是 R 的理想。那么， $I \cap J$ 是一个 S-零理想，当且仅当 IJ 是一个 S-零理想。

证明. 假设 $I \cap J$ 是 R 的一个 S-零理想。取 $a \in IJ \subseteq I \cap J$。这意味着存在 $s \in S$ 使得 $sa = 0$。因此， IJ 是 R 的一个 S-零理想。反之，取 $a \in I \cap J$。那么 $a \in I$ 且 $a \in J$、$a^2 \in IJ$。因此，存在 $s' \in S$ 使得 $s'a^2 = 0$，因为 IJ 是 R 的一个 S-零理想。由于 R 是一个 S-约化环，存在 $s'' \in S$ 使得 $s's''a = 0$。因此， $I \cap J$ 是 R 的一个 S-零理想。 □

定义 2.11. [22] 若存在 $s \in S$，使得对任意 a、$b \in R$，只要 $ab = 0$，就有 $sa = 0$ 或 $sb = 0$，则称环 R 为 S-整环。

注意，每个整环都是 S-整环；然而，反过来一般并不成立（见例 2.12）。

例 *2.12.* 考虑 $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$、 $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}^*$，其中 $\mathbb{Q}^*$ 是一个非零有理数。显然， R 不是整环。设 a、 $b \in R$ 满足 $a = (x, u)$ 且 $b = (y, v)$，其中 x、$y \in \mathbb{Z}$ 以及 u、$v \in \mathbb{Q}$。现在，若 $a \cdot b = (xy, uv) = (0, 0)$，则可得 $xy = 0$ 且 $uv = 0$。这意味着 $x = 0$ 或 $y = 0$，并且 $u = 0$ 或 $v = 0$，因为 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Q}$ 都是整环。因此， a 和 b 有两种可能：若 $a = (x, 0)$，则 $b = (0, v)$。此外，若 $a = (0, u)$，则 $b = (y, 0)$。取 $s = (0, 1) \in S$。那么 $sa = 0$ 或 $sb = 0$。因此， R 是一个 S-整环。

注意： 显然，所有 S-整环都是 S-约化环。

定义 2.13. *[8]* 设 I 和 J 是 R 的两个理想。

1. 则 I 关于 J 的商理想定义为 $(I : J) = \{r \in R \mid rJ \subseteq I\}$。

2. 特别地，若 $x \in R$，则 I 关于 x 的商理想定义为 $(I : x) = \{r \in R \mid rx \in I\}$。

由 [1], 可知，环 R 中与 S 不相交的理想 P 称为 S-素 的，若存在一个 $s \in S$，使得对所有满足 $ab \in P$ 的 $a, b \in R$，都有 $sa \in P$ 或 $sb \in P$；等价地， P 是 S-素 的，当且仅当存在 $s \in S$，使得对于 R 的任意两个理想 I, J，若 $IJ \subseteq P$，则 $sI \subseteq P$ 或 $sJ \subseteq P$。显然，每个素理想都是 S-素的，但反之通常不成立（见 [1, 例 1(3)]）。我们知道，约化环中所有素理想的交集为零。于是我们提出以下问题：

问题 2。 **2.** 一个 S-约化环中所有 S-素理想的交集是否等于零?

这个问题的答案是否定的。我们给出一个例子，说明 S-约化环中所有 S-素理想的交集不一定是零理想。在给出例子之前，我们先作如下说明，以提供一些必要的背景：

注 2.14。 回顾 *[13]*：如果 D 是一个商域为 $\mathcal{F}$ 的整环，且 M 是一个 D-模，那么 M 称为可除 D-模，如果对于每个 $0 \neq r \in D$，都有 $rM = M$。此外，根据 *[1,* 命题 *1],*，环 R 的一个理想 P 若与 S 不相交，则它是 R 的 S-素理想，当且仅当存在 $s \in S$，使得 $(P : s)$ 是 R 的一个素理想。

由 [4], 得，令 M 为一个 R-模。 R-模 M 的理想化记作 $R(+)M$，定义为 $R(+)M = \{(r, m) \mid r \in R, m \in M\}$。它构成一个交换环，加法按分量进行，乘法定义为 $(\alpha_1, m_1)(\alpha_2, m_2) = (\alpha_1\alpha_2, \alpha_1 m_2 + \alpha_2 m_1)$，其中 $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ 和 $m_1, m_2 \in M$ 任意。容易验证，若 N 是 M 的子模，则 $S(+)N = \{(s, n) \mid s \in S, n \in N\}$ 是 $R(+)M$ 中的乘法集。

例 *2.15.* 设 D 是一个非域的整环，$\mathcal{F}$ 表示其商域。定义 $R = D(+)(\mathcal{F}/D)$，并令 S 为 R 中所有非幂零元组成的集合。则 $S = \{(x, (a/b) + D) \mid x \neq 0, a, b \in D, b \neq 0\}$ 是 R 的一个乘法子集。取满足 $r^n = 0$ 的 $r \in R$。则对某个 $a, b \in D, b \neq 0$，有 $r = (0, a/b + D)$。令 $s = (b, 0 + D) \in S$。则 $(b, 0 + D)r = (b, 0 + D)(0, a/b + D) = (0, D) = 0_{(+)}$，其中 $0_{(+)}$ 表示 R 的零元，因此 R 是 S-约化的。现在证明 R 不是 S-整环。反设 R 是一个 S-整环。则 $(0_{(+)})$ 是 R 的一个 S-素理想，因此根据 [1, 命题 1]，$\big((0_{(+)}) : (x, a/b + D)\big)$ 是 R 的素理想。这意味着对于 D 的某个素理想 p，$\big((0_{(+)}) : (x, a/b + D)\big) = p(+)(\mathcal{F}/D)$。由于 $x \neq 0$，我们有 $p = (0)$。因此 $\big((0_{(+)}) : (x, a/b + D)\big) = (0)(+)(\mathcal{F}/D)$。注意到，由于 $\mathcal{F}/D$ 可被 $x\mathcal{F}/D = \mathcal{F}/D$ 整除，$(x, a/b + D)((0)(+)(\mathcal{F}/D)) = (0)(+)(\mathcal{F}/D) \neq 0_{(+)}$，这与假设矛盾。因此 R 不是 S-整环。接下来，我们证明 R 的所有 S-素理想的交集非零。设 P 是 R 的一个 S-素理想。由于 $P \cap S = \emptyset$，对某个 D-子模 $N \subseteq \mathcal{F}/D$，有 $P = (0)(+)N$。于是，对于 D 的某个素理想 p，有 $((0)(+)N : (x, a/b + D)) = p(+)(\mathcal{F}/D)$。如上所述，我们有 $p = (0)$。因此 $((0)(+)N : (x, a/b + D)) = (0)(+)(\mathcal{F}/D)$。由于 $\mathcal{F}/D$ 可整除，$(x, a/b + D)((0)(+)\mathcal{F}/D) = (0)(+)(\mathcal{F}/D)$。因此 $N = \mathcal{F}/D$。由此，R 的唯一 S-素理想是 $(0)(+)(\mathcal{F}/D)$。因此，R 的所有 S-素理想的交集为 $(0)(+)(\mathcal{F}/D)$，且该交集非零。

现在我们可以将这一性质推广到 S 版本。这里，$\mathrm{Spec}_S(R)$ 表示 R 的所有 S-素理想的集合。

定理 2.16. 若 S-约化环满足 $0 \notin S$，则其所有 S-素理想的交集为 S-零。

证明。 反设 $\bigcap_{P \in Spec_S(R)} P$ 不是一个 S-零。那么存在 $x \in \bigcap_{P \in Spec_S(R)} P$，使得对所有 $s \in S$ 都有 $sx \neq 0$。由于 R 是一个 S-约化环，因此这意味着对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $x^n \neq 0$。现在，定义一个集合

$$E = \{sx^n \mid s \in S, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

再次考虑借助集合 E 定义的一族理想，如下所示 s:

$$E' = \{I \subseteq R \mid I \cap E = \emptyset\}.$$

显然，$E' \neq \emptyset$，因为 $(0) \in E'$。由佐恩引理，E' 有一个极大元，记为 P'。为了证明 P' 是 R 的 S-素理想，我们首先证明 $P' \cap S = \emptyset$。为此，取 $n = 0$，得到 $sx^n = s$，因此 S 的所有元素都包含在 E中。于是 P' 与 S 不相交，因为它属于 E'。现在，我们断言对所有 $t \in S$，$(P' : t) \cap E = \emptyset$。反之，假设存在$s' \in S$使得$(P' : s') \cap E \neq \emptyset$。因此，存在 $v \in E$使得 $v \in (P' : t)$。由此可知，对某个 $l \in \mathbb{N}$，$stx^l \in P'$，这与 $P' \cap E = \emptyset$矛盾。因此，对所有$t \in S$，$(P' : t) \cap E = \emptyset$。接下来，我们断言 P' 是关于 $u \in S$的 S-素理想。于是，根据 [1, 命题1],，只需证明 $(P' : u)$是 R的素理想。假设$(P' : u)$不是素理想。那么存在 a、$b \in R$，使得 $ab \in (P' : u)$，但 $a \in (P' : u)$和 $b \in (P' : u)$均不成立。这意味着 $ua \notin P'$且 $ub \notin P'$，因此 $P' \subseteq P' + Rua$且 $P' \subseteq P' + Rub$。由于 P'是 E'的极大元，故$(P' + Rua) \cap E \neq \emptyset$且$(P' + Rub) \cap E \neq \emptyset$。因此，存在 v、$w \in E$ 以及 l、$m \in \mathbb{N}$，使得对某个

r_1， $r_2 \in R$且 c， $d \in P'$。现在，我们有 $s^2x^{l+m} = r_1r_2u^2ab + u(r_1ad + r_2ubc) + cd \in (P'\colon u)$，这与对所有 $t \in S$，$(P'\colon t) \cap E = \emptyset$矛盾。因此，$(P'\colon u)$是 R的素理想，故根据 [1, 命题 1]， P'是关于 $u \in S$的 S-素理想。因此， $x \in P'$； $sx^n \in P'$，这与 $P' \cap E = \emptyset$矛盾。于是，$\bigcap_{P \in Spec_S(R)} P$是一个 S-零理想。 □

定义 2.17. 设 I 是环 R的一个理想。则有如下结论:

1. 若对任意 $a \in I$，存在 $s \in S$，使得对某个 $n \in \mathbb{N}$有 $sa^n = 0$，则称 I 为S-幂零理想。*2.* 集合 $Nil_S(R) = \{a \in R \mid sa^n = 0 \ for\ some\ n \in \mathbb{N}\ and\ s \in S\}$。显然， $Nil_S(R)$是 R的一个理想，称为 R的 S-幂零根。

注记 2.18. 设 $P \in Spec_S(R)$。那么，由 *[22,* 命题 *2],*，存在 $s \in S$，使得$(P\colon s') \subseteq (P\colon s)$ 对所有 $s' \in S$ 成立，并且$(P\colon s)$ 是一个素理想。从现在起，我们将 $P \in Spec_S(R)$ 对应的这个 $s \in S$记作 s_P。

推论 2。 **19.** 设 R 为一个环， $S \subseteq R$ 为一个乘法集。则有以下结论 *:*

1. 如果 P 是 R 的 S-素理想，则 $Nil_S（R）\subseteq（P\colon\ s_P）$。

2. 如果 R 是 S-约化环，则 $Nil_S（R）$ 是 S-零的。

证明。

1. 设 $a \in Nil_S（R）$。则存在 $s' \in S$ 使得 $s'a^n = 0$，$(s'a)^n \in P$。由于 P 是 R 的 S-素理想，因此存在 $s \in S$ 使得 $ss'a \in P$，从而根据注记 2.18，有 $Nil_S（R）\subseteq（P\colon\ s_p）$。

2. 由定义 2.17(2) 可立即得出。

□

注记 2.20. 若 R 是一个 S-约化环，则 $S^{-1}R$ 是一个约化环。

证明. 设 $0 \neq x = \frac{a}{s} \in S^{-1}R$，其中 $a \in R$ 和 $s \in S$ 满足 $x^n = 0$，其中某个 $n \in \mathbb{N}$。于是 $\frac{a^n}{s^n} = \frac{0}{1}$。因此，存在 $u \in S$ 使得 $ua^n = 0$，$(ua)^n = 0$。由于 R 是S-约化的，存在 $u' \in S$ 使得 $uu'a = 0$。于是 $x = \frac{uu'a}{uu's} = \frac{0}{1}$。因此 $S^{-1}R$ 是一个约化环。 □

The 注记 2.20 的逆命题未必成立。下面给出一个说明性例子。

例 2.21。 设 $\mathbb{E} = \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，其中 $\mathcal{P}$ 是 $\mathbb{Z}$ 中所有素数的集合。定义$R = \mathbb{Z}(+)\mathbb{E}$以及 $S = \mathbb{Z}\setminus\{0\}(+)(0)$。根据 *[12,*例 *3.12],*，局部化 $S^{-1}R = \mathbb{Q}$ 是一个域，因而是一个约化环。令 $\alpha = (0,1) \in R$。则 $\alpha^2 = 0$，但对于所有 $s \in S$ 都有 $s\alpha \neq 0$ ；为此，若存在 $s \in S$ 使得 $s\alpha = 0$。显然， $s = (n,0) \in S$，其中$n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$。由此可得 $s\alpha = (0, n) = 0$，从而 $n = 0$，这不可能，因为 $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$。因此， R 不是一个 S-约化环。

由此，环 R 的理想 I 称为 S-有限的：若 $S \subseteq R$ 是一个乘法集，则对某个 R 的有限生成理想 J 以及某个 $s \in S$，有 $sI \subseteq J \subseteq I$。如果 R 的每个理想都是 S- 有限的，则 R 称为 S- 诺特环。

定理 2.22。设 R 是一个 S-诺特 S-约化环，并且具有这样的性质： $S^{-1}R$ 的每个非零元素都是零因子或可逆元。那么 $S^{-1}R$ 是一个阿廷环。

证明。注意到，根据 [3, 命题 2(f)]， $S^{-1}R$ 是一个诺特环。于是 $S^{-1}R$ 只有有限多个极小素理想，记为 $\{S^{-1}P_1, \ldots, S^{-1}P_n\}$；根据 [1, 推论 4]，其中 $P_i(1 \leq i \leq n)$是 R的一个 S-素$_n$理想。根据注记 2.20， $S^{-1}R$ 是一个约化环，因为$_{i=1}$在约化环中，所有极小素理想的交集为零。设 $S^{-1}R$的一个素理想为 $S^{-1}P$。令 $0 \neq x \in S^{-1}P$。那么存在 $0 \neq y \in S^{-1}R$ 使得 $xy = 0$。这意味着$_n$对所有 $i = 1$，.....， n，都有 $xy \in S^{-1}P_i$。若对所有 $i = 1$，.....， n，都有 $x \notin S^{-1}P_i$，则 $y \in \bigcap S^{-1}P_i$，这与 $y \neq 0$矛盾，因为$_{i=1n}$。因此，对某个 $i = 1$，.....， n，有 $x \in S^{-1}P_i$。由此可得 $S^{-1}P \subseteq \bigcup S^{-1}P_i$。根据 [8, 命题 1， 11], 我们得到，对某个 i，有 $S^{-1}P \subseteq S^{-1}P_i$， $S^{-1}P = S^{-1}P_i$。因此， $S^{-1}R$ 只有有限多个形如 $\{S^{-1}P_i\}$ 的素理想，并且 $dim(S^{-1}R) = 0$。所以 $S^{-1}R$ 是一个阿廷环。

□

回顾 [18] ，环 R 称为 S-阿廷环，如果对于 R的每个理想降链$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots$，都存在 $s \in S$和 $k \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \geq k$，都有 $sI_k \subseteq I_n$。我们用 $Nil(R)$表示 R的所有素理想的交集，称为幂零根。众所周知，在阿廷环中，幂零根是幂零的（见 [8, 命题 8.4]）。Ansari 和 Sharma[5] 将这一结果推广到了 S-阿廷环的情形，如下所示：

引理 2.23。 [5] 设 R 是一个环， $S \subseteq R$ 是 R的一个乘法闭集，且不含 R的任何零因子。则有如下结论：

1. $Nil(R) =$ R 中所有与 S不相交的素理想的交集。
2. 如果 R 是 S-阿廷环，那么 Nil（R） 是幂零的。

定理 2.24。 *An* S-阿廷约化环在 Z（R） $\cap S = \emptyset$ 时同构于有限个域的直积。

证明。 假设 R 是一个 S-阿廷且约化的环。根据 [17, 定理 2.4], ，在 S-阿廷环中，与 S 不相交的素理想只有有限多个，记为 P_1， P_2，.....， P_n，$_n$于是根据引理 2.23(1)，有 $Nil(R)$ $= \bigcap P_i$。由于 $Nil(R)$ 在 S-阿廷$_{i=1n}$ $_n$环中是幂零的，根据引理 2.23(2)，存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $(\bigcap P_i)^k = 0$。由于 $\prod_{i=1}^n P_i \subseteq \bigcap P_i$, $_{i=1}$ $_{i=1}$于是 $(\prod_{i=1}^n P_i)^k = 0$。这意味着 ($\prod_{i=1}^n P_i) = 0$ ，因为 R 是约化环。此外，根据[17, $Proposition$ 2.5]，每个 $P_i(1 \leq i \leq n)$ 都是 R 的极小理想，同时也是极大理想，根据 [8,命题 8.1]。于是根据中国剩余定理，有：

$$R = R/(\prod_{i=1}^{n} P_i) \cong R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n,$$

其中 $R_i = R/P_i$ 对所有 $i = 1$，2，.....，n 都是一个域。 □

注： 众所周知，环 R 是约化的，当且仅当多项式环 $R[X]$ 是约化的。现在我们将这一结果推广到 S-约化环的概念：

命题 2.25. 环 R 是 S-约化环，当且仅当 $R[X]$是 S-约化环 g.

证明。设 R 是一个 S-约化环。令 $f(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i X^i \in R[X]$，其中对于 $(1 \leq i \leq n)$ 有 $a_i \in R$，使得 $(f(X))^k = 0$ 对某个 $k \in \mathbb{N}$ 成立。于是，对每个 a_i，存在 $s_i \in S$ 使得 $s_i a_i = 0$。取 $s = s_1 s_2 \dots s_n \in S$。则 $sa_i = 0$。因此， $R[X]$ 是 S-约化的。反之，设 $R[X]$ 是一个 S-约化环。令 $a \in R$，使得对某个 $n \in \mathbb{N}$ 有 $a^n = 0$。考虑多项式 $f(X) = a \in R[X]$。由于在 $R[X]$ 中有 $f(X)^n = a^n = 0$，且 $R[X]$ 是 S-约化的，存在 $s \in S$ 使得 $sa = 0$。因此， R 是一个 S-约化环。□

3 一致-S-Armendariz 环

1974 年，E. Armendariz 引入了如今称为 *Armendariz* 环 的环类，并证明每个约化环都是 Armendariz 环（见 [7, 引理 1]）。最近，在 2024年，Kim 等人将这一概念扩展到乘法集合的框架中，引入了 u-S- *Armendariz* 环 的概念。受此启发，本节先举一个 S-约化环同时也是 u-S-Armendariz 环的例子。

定义 3.1. [12] 若环 R 满足以下条件，则称其为 u-S-*Armendariz* 环：对于任意多项式 $f = \sum_{i=1}^{m} a_i X^i$和 $g = \sum_{j=1}^{n} b_j X^j$，若它们属于 $R[X]$ 且满足 $fg = 0$，则存在一个元素 $s \in S$，使得$sa_i b_j = 0$ 对所有指标 i 和 j均成立。

例 3.2。 设 R 为一个 S-约化环。那么

$$E = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in R \right\}$$

是一个 u-S'-*Armendariz* 环，其中

$$S' = \left\{ \begin{bmatrix} s & s & s \\ 0 & s & s \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \mid s \in S \right\}$$

是 E的乘法封闭子集。

证明。 我们采用 [11, 命题 2]证明中的方法。首先注意到，对于

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix} \in E,$$

我们可以将它们的加法和乘法分别表示为：$(a_1, b_1, c_1, d_1) + (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2,\ c_1 + c_2,\ d_1 + d_2)$ 和 $(a_1, b_1, c_1, d_1)(a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 a_2,\ a_1 b_2 + b_1 a_2,\ a_1 c_2 +$

$b_1d_2+c_1a_2,\ a_1d_2+d_1a_2)$。因此， $E[x]$ 中的每个多项式都可以表示为$(p_0(x)\ \ p_1(x)\ \ p_2(x)\ \ p_3(x))$ 的形式，其中某个 $p_i(x)\in R[x]$。

令 $f(x)=\big(f_0(x)\ \ f_1(x)\ \ f_2(x)\ \ f_3(x)\big)$ 和 $g(x)=\big(g_0(x)\ \ g_1(x)\ \ g_2(x)\ \ g_3(x)\big)$ 为 $E[x]$ 中的元素，且满足 $f(x)g(x)=0$。由此可得 $f(x)g(x)=\big(f_0(x)g_0(x)\ \ f_0(x)g_1(x)+f_1(x)g_0(x)\ \ f_0(x)g_2(x)+f_1(x)g_1(x)+f_2(x)g_0(x)\ \ f_0(x)g_3(x)+f_1(x)g_2(x)\big)=0$。因此，我们得到以下方程组:

$$\begin{aligned} f_0(x)g_0(x)&=0, && (A)\\ f_1(x)g_0(x)+f_0(x)g_1(x)&=0, && (B)\\ f_2(x)g_0(x)+f_1(x)g_3(x)+f_0(x)g_2(x)&=0, && (C)\\ f_3(x)g_0(x)+f_0(x)g_3(x)&=0. && (D)\end{aligned}$$

现在，若将方程 (B) 乘以 $f_0(x)$，则 $f_1(x)f_0(x)g_0(x)+f_0^2(x)g_1(x)=0$，$(f_0(x)g_1(x))^2=0$。利用 $R[x]$ 是一个 S-约化的这一事实，存在 $s_1\in S$ 使得 $s_1f_0(x)g_1(x)=0$，从而 $s_1f_1(x)g_0(x)=0$。类似地，若将方程 (D) 乘以 $f_0(x)$，则 $f_3(x)f_0(x)g_0(x)+f_0^2(x)g_3(x)=0$，$(f_0(x)g_3(x))^2=0$。于是存在 $s_2\in S$使得 $s_2(f_0(x)g_3(x))=0$，从而 $s_2(f_3(x)g_0(x))=0$。现在，若将方程 (C) 乘以 $s_2f_0(x)$，则 $s_2f_2(x)f_0(x)g_0(x)+f_1(x)s_2f_0(x)g_3(x)+s_2f_0^2(x)g_2(x)=0$，$(s_2f_0(x)g_2(x))^2=0$。于是存在 $s_3\in S$使得$s_2s_3(f_0(x)g_2(x))=0$，从而方程 (C) 变为

$$s_2s_3(f_2(x)g_0(x)+f_1(x)g_3(x))=0. \qquad (D')$$

再次将方程（D'）乘以 $s_1f_1(x)$，则 $s_2s_3(f_2(x)s_1f_1(x)g_0(x)+s_1f_1^2(x)g_3(x))=0, (s_1s_2s_3f_1(x)g_3(x))^2=0$。于是存在 $s_4\in S$，使得 $s_1s_2s_3s_4(f_1(x)g_3(x))=0$，因此 $s_1s_2s_3s_4(f_2(x)g_0(x))=0$。现在得到的方程如下:

$$\begin{aligned} s_1(f_0(x)g_1(x))=0,\ s_1(f_1(x)g_0(x))&=0 && (A')\\ s_2(f_0(x)g_3(x))=0,\ s_2(f_3(x)g_0(x))&=0 && (B')\\ s_1s_2s_3s_4(f_2(x)g_0(x)))=0, s_2s_3(f_0(x)g_2(x))&=0 && (C')\\ s_1s_2s_3s_4(f_1(x)g_3(x))&=0. && (D'')\end{aligned}$$

现在令

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\begin{bmatrix}a_i & b_i & c_i\\ 0 & a_i & d_i\\ 0 & 0 & a_i\end{bmatrix}x^i,\ and\ g(x)=\sum_{j=0}^{m}\begin{bmatrix}a'_j & b'_j & c'_j\\ 0 & a'_j & d'_j\\ 0 & 0 & a'_j\end{bmatrix}x^j,$$

其中 $f_0=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i,\ f_1=\sum_{i=0}^{n}b_ix^i,\ f_2=\sum_{i=0}^{n}c_ix^i,\ f_3=\sum_{i=0}^{n}d_ix^i\ g_0=\sum_{j=0}^{m}a'_jx^j,\ g_1=\sum_{j=0}^{m}b'_jx^j,$ $g_2=\sum_{j=0}^{m}c'_jx^j$，且 $g_2=\sum_{j=0}^{m}d'_jx^j$。取 $s=s_1s_2s_3s_4\in S_\circ$ 利用方程（A）、（A'）、（B'）、（C'）和（D''），可得 $sa_ia'_j=0, sa_ib'_j=0, sb_ia'_j=0, sa_ic'_j=0, sb_id'_j=0, sc_ia'_j=0, sa_id'_j=0$ 和 $sd_ia'_j=0$，对所有 $i,\ j$ 均成立。这意味着

$$\begin{bmatrix}s & s & s\\ 0 & s & s\\ 0 & 0 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_i & b_i & c_i\\ 0 & a_i & d_i\\ 0 & 0 & a_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a'_j & b'_j & c'_j\\ 0 & a'_j & d'_j\\ 0 & 0 & a'_j\end{bmatrix}=0$$

对所有 $i,\ j$ 因此 E 是一个 u-S'-Armendariz 环。 □

定义 *3.3. </style}*若对于任意 $a \in R$，只要 $a^n = 0$ 对某个$n \in \mathbb{N}$成立，就存在固定元素 $s \in S$ 使得 $sa = 0$，则称环 R 是 u-S-约化的。

在定义 3.3 中，元素 s 不取决于 $a \in R$的选择；它仅取决于环 R 本身。

例 3.4. 设 $R = \mathbb{Z}_{24}$，且 $S = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{8}, 16\}$。显然，$N^*(R) = \{\bar{6}, 12, 18\}$ 是 R的所有非零幂零元组成的集合。设 $x \in N(R)$。那么我们有 $x^3 = \bar{0}$。取 $s = \bar{4} \in S$。于是 $sx = 0$，因此 R 是关于 $4 \in S$的一个 u-S-约化环。

定理 3.5. 设 R 是关于 $s \in S$的一个 u-S-约化环。那么 R 是一个 u-S-*Armendariz* 环。

证明。设 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$，$g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \in R[x]$ 满足$f(x) \cdot g(x) = 0$。不妨设 $n = m$。于是有以下方程：$a_0b_0 = 0$；$a_0b_1 + a_1b_0 = 0$；$a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 = 0$；$a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0 = 0$；$\cdots$；$a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0 = 0$。因此，将这些方程中的第二个乘以 b_0，得到 $b_0a_0b_1 + b_0a_1b_0 = 0$，这意味着 $(a_1b_0)^2 = 0$，于是存在 $s \in S$ 使得 $sa_1b_0 = 0$。现在，将这些方程中的第三个乘以 sb_0，得到 $sb_0a_0b_2 + sb_0a_1b_1 + sa_2b_0^2 = 0$，这意味着 $(sa_2b_0)^2 = 0$，于是存在 $s \in S$ 使得$s^2a_2b_0 = 0$。类似地，将这些方程中的第 i^{th} 个乘以 s^2b_0；我们得到 $s^2a_ib_0 = 0$，对所有$4 \leq i \leq n$均成立。因此 $s^2a_ib_0 = 0$，对所有 $0 \leq i \leq n$均成立。接下来，将原方程中的 $(i+1)^{th}$ 乘以 s^2a_0；对所有 $1 \leq i \leq n$，我们得到 $s^2a_0b_i = 0$。现在，在原方程中乘以 s^2，可化为：$s^2a_1b_1 = 0$；$s^2(a_1b_2 + a_2b_1) = 0$；$\cdots$；$s^2(a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \cdots + a_{n-1}b_1) = 0$。然后，将化简后方程中的 $(i)^{th}$ 乘以 b_1；我们得到：$s^2a_ib_1 = 0$，对所有 $2 \leq i \leq n$均成立；若将化简后方程中的 $(i)^{th}$ 乘以 a_1，则我们得到：$s^2a_1b_i = 0$，对所有 $2 \leq i \leq n$均成立。重复类似步骤可得：对所有 $1 \leq i \leq n$，$s^2a_ib_j = 0$ $1 \leq j \leq n$，因此 R 是一个 u-S-Armendariz 环。 □

推论 3.6. 设 R 是一个 u-S-约化环。则 $R(+)R$ 是一个 u-S-*Armendar* *iz.*

证明. 设 $f(x) = (f_0(x)\ f_1(x))$ 和 $g(x) = (g_0(x)\ g_1(x))$ 是 $(R(+)R)[x]$ 中满足;$f(x)g(x) = 0$ 的元素。记；$f(x) = \sum_{i=0}^{m}(a_i, u_i)x^i$和 $g(x) = \sum_{j=0}^{n}(b_j, v_j)x^j$，并以相应形式表示 $f_k(x)$ 和 $g_k(x)$，其中 $k \in \{0, 1\}$。根据乘积定义，我们有;

$$\text{(A)} \quad f_0(x)g_0(x) = 0.$$
$$\text{(B)} \quad f_0(x)g_1(x) + f_1(x)g_0(x) = 0.$$

将方程 (B) 两边乘以 $g_0(x)$ 并使用 (A)，得到;

$$g_0(x)f_1(x)g_0(x) = 0.$$

这意味着;

$$(f_1(x)g_0(x))^2 = 0$$

并且由于 $R[x]$ 是一个 u-S-约化的，存在 $s \in S$ 使得;

$$\text{(C)} \quad s(f_1(x)g_0(x)) = 0.$$

由（B）可得;

$$\text{(D)} \quad s(f_0(x)g_1(x)) = 0.$$

结合（A）、（C）和（D），并注意到 R 是 u-S-Armendariz，由定理 3.5 可得；

$$sa_ib_j = 0, \quad s^2u_ib_j = 0, \quad s^2a_iv_j = 0 \quad \text{for all } i \text{ and } j.$$

因此可得：$(s^2,\ s)(a_i,\ u_i)(b_j,\ v_j) = (s^2,\ s)(a_ib_j,\ a_iv_j + u_ib_j) = 0$ 对所有 i 和 j 均成立，其中 $(s^2,\ s) \in S(+)R$ 是 $R(+)R$ 的乘法闭集。 □

由此可知，若环 [9], 满足其湮灭子链 $\text{ann}(a) \subseteq \text{ann}(a^2) \cdots \subseteq \text{ann}(a^n) \subseteq \text{ann}(a^{n+1}) \subseteq \cdots$ 对每个 $a \in R$ 都稳定，则称其为强 Hopfian 环。后来，在 2021年，Ahmed 等人[2]将这一概念推广为 S-强 Hopfian 环，定义如下：

定义 3.7。 [2] 若环 R 的湮灭子链 $ann(a) \subseteq ann(a^2) \subseteq \cdots \subseteq ann(a^n) \subseteq ann(a^{n+1}) \subseteq \cdots$ 对每个 $a \in R$ 都是 S-稳定的，则称该环为 S-强 *Hopfian* 环。

例 3.8. S-整环和 S-诺特环是 S-强 *Hopf* 环。

命题 3.9. 每个 S-约化环都是 S-强 *Hopf* 环。

证明. 设 R 是一个 S-约化环，并且 $a \in R$。现在考虑消灭子递增链；

$$\text{ann}(a) \subseteq \text{ann}(a^2) \subseteq \cdots \subseteq \text{ann}(a^n) \subseteq \text{ann}(a^{n+1}) \subseteq \cdots,$$

其中 $n \geq 1$。令 $y \in \text{ann}(a^{n+1})$。则 $ya^{n+1} = 0$，且 $(ya)^{n+1} = 0$。因此，存在$s \in S$ 使得 $sya = 0$，且 $sy \in ann(a)$。于是，对所有 $n \geq 1$，$s(ann(a^{n+1})) \subseteq ann(a^n)$。 □

推论 3.10. 对于每个环 R，环 $R/Nil_S(R)$ 是 S-强 *Hopf* 环。

定义 3.11. [10] 称 R 的理想 I 为 S-纯理想，若对于所有 $a \in I$，都存在 $b \in I$ 和$s \in S$ 使得 $sa = ab$。

注意，每个纯理想都是 S-纯的，但反之未必成立（参见 [10, 例 3.3]）。

定义 3.12。 若对每个元素 $a \in R$，其湮灭子$(0 :\ a)_R$ 都是一个 S-纯理想，则称环 R 为 S-*PF* 环。这意味着，对于每个 $x \in (0 :\ a)$，都存在一个元素 $y \in (0:\ a)$和 $s \in S$，使得 $xy = sx$。

例 3.13。 每个 S-*PF* 环都是一个 S-约化环。

证明。 设 R 是一个 S-PF-环，且 $a \in R$ 满足 $a^n = 0$，其中某个 $n \in \mathbb{N}$成立。于是 $a \in (0 : a^{n-1})$，并且 $(0 :\ a^{n-1})$ 是 S-纯的，因此存在 $b \in (0 : a^{n-1})$ 和 $s_1 \in S$，使得 $ab = s_1a$。由于 $a^{n-1}b = 0$，故 $aba^{n-2} = s_1a^{n-1} = 0$。因此，$a \in (0 :\ s_1a^{n-2})$。由于 $(0 :\ s_1a^{n-2})$ 是 S-纯的，因此存在$b_1 \in (0 :\ s_1a^{n-2})$ 和 $s_2 \in S$，使得 $ab_1 = s_2a$。由于 $s_1a^{n-2}b_1 = 0$，$s_1s_2a^{n-2} = 0$ 蕴含$a \in (0 :\ s_1s_2a^{n-3})$。用类似的方法，我们得到 $a \in (0 :\ s_1s_2 \dots s_{n-3}a^{(n-\{n-2\})})$，对所有 $n \geq 3$，$_{n-3}s_1s_2 \dots s_{n-3}a = 0$均成立。令 $t = \prod_{k=1} s_k$。因此 $ta = 0$，证毕。 □

回顾 [21, 定义 1.6.10], 若一个 R-模 M 对于任意$m \in M$，都存在 $s \in S$ 使得 $sm = 0$，则称其为 S-挠模。根据 [12], ，若 R的一个 S-素理想 P 满足：对于某个 R的 S-素理想 Q ，若有 $Q \subseteq P$ ，则必有$sP \subseteq Q$，其中 $s \in S$，那么称其为一个 S-极小 S-素理想。由 [12, 命题 2.1]可知，$Spec_S R$ 包含一个与 S不相交的素理想，并且每个素理想都包含一个极小素理想。此外，根据 [12, 例 2.6]， R 中每个与 S 不相交的极小素理想都是 S-极小 S-素理想。于是， R 的所有S-素理想的交集等于 R的所有 S-极小 S-素理想的交集。若 R 是一个S-约化环，则 R 的所有 S-极小 S-素理想的交集为 S-零。

注记 3.14. [15] 设 M 和 N 是 R-模。则有以下结论:

1. R-同态 $f: M \longrightarrow N$ 是 S-单射，当且仅当 $Ker(f)$ 是 S-挠的。
2. R-同态 $f: M \longrightarrow N$ 是 S-满射，当且仅当 $Coker(f)$ 是 S-挠的。

定义 3.15. 设 $\wedge$是一个指标集， $R_{i\in\wedge}$ 是一些环。对每个 $j \in \wedge$ ，定义自然投影 $\pi_j: \prod_{i\in\wedge} R_i \longrightarrow R_j$。若满足以下条件，则称 R 是 R_i的 S_i-次直积，其中对所有 $i \in \wedge$，S_i 是 R_i 的乘法封闭子集:

1. 存在一个 S-单射环同态 $f: R \longrightarrow \prod_{i\in\wedge} R_i$; 2. 对每个 $j \in \wedge$ ，映射 $\pi_j of: R \longrightarrow R_j$ 都是 S-满射。

定理 3.16。(约化环的结构定理 S-约化环)设 $\{P_i\}_{i\in\wedge}$ 是 S-极小 S-素理想 of R。那么，R 是 S-约化的，当且仅当 R 是S_i-整环的 S-次直积，其中 $S_i = \{s + P_i \mid s \in S\}$ 是 R/P_i 的乘法封闭子集。

证明。考虑环同态 $f: R \longrightarrow \prod_{i\in\wedge} R/P_i$，定义为 $f(r) = (r + P_1, r + P_2, \ldots)$，其中对于所有 $i \in \wedge$， $P_i \in Spec_S R$。那么 $Ker f = \{r \in R \mid f(r) = P_i\} = \{r \in R \mid r \in P_i \ for\ all\ i \in \wedge\} = \{r \in R \mid r \in \bigcap_{i\in\wedge} P_i = \bigcap_{P\in Spec_S(R)} P\}$。由于 R 是 S-约化的，根据定理 2.16， $Ker f = \{r \in R \mid sr = 0\ for\ some\ s \in S\}$。因此 $ker f$ 是 S-挠的，故 f 是 S-单射。对于每个 $j \in \wedge$，我们定义环同态 $\pi_j of: R \longrightarrow R/P_j$，其中 $\pi_j: \prod_{i\in\wedge} R/P_i \longrightarrow R/P_j$ 是自然投影。显然，对于所有 $j \in \wedge$， $Im(\pi_j of) = R/P_j$; 为此，令 $r \in R$，$(\pi_j of)r = \pi_j(r + P_1, r + P_1, \ldots) = r + P_j$，对于所有 $r \in R$。因此 $Coker(\pi_j of)$ 是 S-挠的。所以 R 是 R/P_i 的 S-次直积。由于对于所有 $i \in \wedge$， R/P_i 是 S_i-整环，因此 R 是S_i-整环的 S-次直积。

反过来，假设 R 是 S的子直积，即对所有 $i \in \wedge$， S_i都是整环，并且$f: R \longrightarrow \prod_{i\in\wedge} R/P_i$定义为 $f(r) = (r + P_1, r + P_2, \ldots)$ 是单射环同态。设 $r \in R$和 $r^n = 0$，其中 $n \in \mathbb{N}$。那么我们有 $f(r^n) = f(0)$，$(f(r))^n = (P_1, P_2, \ldots)$。因此，对所有 $i \in \wedge$，都有 $r^n \in P_i$，于是由于每个 R/P_i 都是整环，存在某个$s \in S$ 使得$(s + P_i)(r + P_i) = P_i$。因此，对所有 $i \in \wedge$，都有 $sr \in P_i$，所以 $sr \in \bigcap_{i\in\wedge} P_i$ 蕴含$sr \in Ker f$。于是存在 $s' \in S$ 使得 $ss'r = 0$。因此 R 是 S-约化的。 □

冲突 **利益声明：**作者声明，他们不存在利益冲突 t.

参考文献

[1] H. Ahmed 和 M. Achraf：交换环的 S-素理想，代数与几何贡献 61，533-542（2020年）。DOI:10.1007/s13366-019-00476-5。[2] H. Ahmed、B. Gouaid 和 A. Benhissi：满足强 Hopf 性质和 S-强 Hopf 性质的环，数学报告 23，383-395（2021年）。[3] D. D. Anderson 和 T. Dumitrescu：S-诺特环，《代数通讯》30，4407-4416（2002）。DOI:10.1081/AGB-120013328[4] D. D. Anderson 和 M. Winders：模的理想化，交换代数杂志 1，3-56（2009）。DOI:10.1216/JCA-2009-1-1-3[5] A.U. Ansari、B.K. Sharma 和 S.K. Maurya：关于 S-诺特模的一些评述，乌克兰数学杂志 77，第 72 页（2025）。DOI:10.3842/umzh.v77i1.7907[6] U. Tekir、E. Yildiz、H.A. Khashan 和 E. Yetkin Celikel：理想的 S-根基与强 S-n 理想，数学研究。1-17（2025）。DOI:10.1007/s11587-025-00981-x[7] E. Armendariz：关于 Baer 环和 P.P. 环扩张的一则注记，澳大利亚数学会杂志 18，470-473（1974）。DOI:10.1017/S1446788700029190[8] M. F. Atiyah 和 I. G. Macdonald：交换代数导论，Addison-Wesley 出版公司（1969）。DOI: 10.1201/9780429493638[9]A. Benhissi：交换环中的链条件，Springer（2022年）https://doi.org/10.1007/978-3-031-09898-7。DOI: 10.1007/978-3-031-09898-7[10]B. A. Ersoy、U. Tekir 和 E. Yildiz：幂等元、纯理想和 Stone 型定理的 S-版本及 S-推广，《韩国数学会通报》61，83-92（2024年）。DOI:10.4134/BKMS.b230023[11] N. K. Kim 和 Y. Lee：Armendariz 环与约化环，代数杂志 223，477-488（2000）。DOI:10.1006rjabr.1999.8017[12] H. Kim、N. Mahdou 和 E. Oubouhou：关于交换环的 S-Krull 维数，《代数与应用杂志》，2650045-20（2024年）。DOI:10.1142/S0219498826500453[13]E. Matlis：可除模，美国数学会会刊 11，385-391（1960）。DOI:10.2307/2034781[14] A. Pekin、U. Tekir 和 O. Kilic：S-半素子模与 S-约化模，数学杂志，1-7（2020年）。DOI:10.1155/2020/8824787[15] W. Qi、X. Zhang 和 W. Zhao：S-凝聚环的新刻画，《代数与应用杂志》22，2350078-2350092（2023）。DOI:10.1142/S0219498823500780[16] M. B. Rege 和 S. Chhawchharia：Armendariz 环，日本学士院院刊 A 辑：数学科学 73，14-17（1997）。DOI:10.3792/pjaa.73.14

[17] E. S. Sevim, U. Tekir 和 S. Koc：*S-Artinian* 环与有限 *S*-余生成环，《代数与应用杂志》**19**，2050051-2050067（2020年）。DOI:10.1142/S0219498820500516[18] E.S. Sevim、T. Arabaci、U. Tekir 和 S. Koc：关于 *S*-素子模。《土耳其数学杂志》**43**，1036-1046（2019）。DOI:10.3906/mat-1808-50[19] T. Singh、A.U. Ansari 和 S. D. Kumar：S-诺特环、模及其推广。《数学与应用综述》**18**，163-182（2023年）。[20]T. Singh、A.U. Ansari 和 S. D. Kumar：的存在性与唯一性 *S-primary* 分解于 S-诺特模中。《代数通讯》**52**，4515-4524（2024年）。DOI:10.1080/00927872.2024.2350598[21] F. Wang 和 H. Kim 2016：交换环及其模基础，《代数与应用》，22，Springer，新加坡。DOI:10.1007/978-981-97-5284-3[22] E. Yldz、B. A. Ersoy、U. Tekir 和 S. Koc：关于 *S-Zariski* 拓扑，《代数通讯》**49**，1212-1224（2020年）。DOI:10.1080/00927872.2020.1831006[23]X. Zhang 和 W. Qi：通过一致性刻画 *S-Artinian* 性，arXiv:2207.12569（2023年）。DOI:10.48550/arXiv.2207.12569[24] X. Zhang：刻画 S-平坦模与 S-冯·诺伊曼正则环的一致性，《韩国数学会通报》，**59**，$643-657$（2022年）。DOI:10.48550/arXiv.2105.07941