arXiv:2512.15156v1 [math.MG] 17 Dec 2025

# 球面支撑性质与无限半径外部球条件

Chadi Nour[1*]

1*黎巴嫩美国大学比布鲁斯校区计算机科学与数学系，邮政信箱36号，黎巴嫩比布鲁斯。

通讯作者。电子邮箱：cnour@lau.edu.lb；

**摘要**

我们对 [19], 中提出的球面支撑几何性质给出了若干新的刻画，着重阐明了它与无限半径外部球条件之间的联系。此外，我们强化了 [19]中确立的主要结果，并为其提供了更直接、更简洁的证明。

**关键词：** 球支撑集、强凸性、外部球条件、近端正则性、近端分析

## 1 引言

设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 是一个非空闭集，且 $s \in$ 边界 $S$ 是 $S$ 的边界。对于$r > 0$，非零向量 $\zeta \in N_S^P(s)$，若 $S$ 在 $s$ 处的近端法锥 被一个 $r$球实现，则

$$\left\langle \frac{\zeta}{\|\zeta\|}, x - s \right\rangle \leq \frac{1}{2r}\|x - s\|^2, \ \forall x \in S \quad \left[\text{or equivalently } B\left(s + r\frac{\zeta}{\|\zeta\|}; r\right) \cap S = \emptyset\right],$$

其中， $B(y; \rho)$ 表示以 $y$ 为中心、半径为 $\rho$ 的开球。同一向量称为由远处的一个 $r$-球实现，如果

$$\left\langle \frac{\zeta}{\|\zeta\|}, x - s \right\rangle \leq -\frac{1}{2r}\|x - s\|^2, \ \forall x \in S \quad \left[\text{or equivalently } S \subset \overline{B}\left(s - r\frac{\zeta}{\|\zeta\|}; r\right)\right],$$

其中，$\overline{B}(y;\rho)$ 表示以 $y$ 为中心、半径为 $\rho$ 的闭球。对于固定的 $r>0$，我们回顾以下四个几何性质：

• 我们称 $S$ 为 $r$-近端正则的，如果对所有 $s\in$ 边界 $S$ 以及每个非零向量$\zeta\in N_S^P(s)$，法向量 $\zeta$ 都由一个 $r$-球实现。注意，近端正则性意味着近端法锥 $\neq\{0\}$是非平凡的（即，$N_S^P(s)$），对任意边界 $s$均如此。关于近端正则性及其相关概念的更多背景，例如正可达性、近端光滑性、 $p$-凸性以及 $\varphi_0$-凸性，参见 [6, 7, 9, 10,22, 26, 27]。

• 我们称 $S$ 满足外部 $r$-球条件，如果对所有 $s\in$ 边界 $S$，都存在一个非零向量 $\zeta\in N_S^P(s)$，使得法向量 $\zeta$ 由一个 $r$-球实现。当外部 $r$-球条件施加于 $S$补集的闭包时，它对应于控制理论中的经典内部 $r$-球条件。该条件在建立最小时间函数的正则性性质方面发挥着关键作用；参见 Cannarsa 和 Frankowska [3] 以及 Cannarsa 和 Sinestrari [4, 5]。注意，在 [20]（另见 [18]）中，Nour 和 Takche 引入了外部球条件的一个扩展版本，并证明其补集恰好是具有相同半径的闭球的并集。

• 我们称 $S$ 是 $r$-强凸的，如果对于所有 $s\in$ 边界 $S$ 上的点以及每个非零向量 $\zeta\in N_S^P(s)$，法向量 $\zeta$ 都能由一个半径为 $r$ 的球远距离实现。注意， $r$-强凸性等价于 $S$ 是半径为 $r$ 的闭球的交集。关于强凸性及其应用的更多细节，读者可参阅 [14], 的引言，其中对这一性质作了全面的历史回顾；另见 [2, 11, 13, 28]。

• 我们称 $S$ 是 $r$-球支撑的，如果对于所有 $s\in$ 边界 $S$上的点，都存在一个非零向量 $\zeta\in N_S^P(s)$，使得法向量 $\zeta$ 能由一个半径为 $r$ 的球远距离实现。此性质显然最早是在 [19]中引入的。

由上述定义可直接得出，若 $S$ 是 $r$-近端正则的，则它满足外部 $r$-球条件。反之一般不成立（见 [15,例 2.5]），但当 $S$ 是具有紧边界的上图-*Lipschitz*集时，反之亦成立；见 [15,推论 3.12]。回顾一下，若对每个边界点 $s$，集合 $S$ 经正交变换后在 $s$ 附近均可局部表示为某个 Lipschitz连续函数的上图，则称 $S$ 为上图-*Lipschitz* （或楔形）集。Rockafellar 在 [23], 引入了这一几何概念；它也可由 Clarke切锥的拓扑内部非空来刻画，而这等价于 Clarke法锥具有尖性；见 [8, 23]。类似地，若 $S$ 是 $r$-强凸的，则它具有 $r$-球面支撑性质。反之一般不成立，这一点可由取 $S$ 为 $\mathbb{R}^2$中的闭单位圆轻易看出。在 [19], ， Nour 和 Takche 证明，若 $S$ 具有 $r$-球面支撑性质且内部非空，则 $S$ 是 $r$-强凸的；见 [19, 定理 1.1]。这推广了文献中的一个已知结果（见 [28, 定理 1.2]证明之后的 (ii′)；另见 [1, 命题 2.4]），该结果是在对 $S$施加凸性 假设的条件下建立了等价关系。请注意， [19, 定理 1.1] 的证明相当复杂，因为假设集合 $S$ 仅具有非空内部；因此需要用到非光滑分析中的高级工具。

本文旨在研究 $r$-球面支撑性质及其与外部 $\infty$-球条件（即对所有 $r>0$均成立的外部 $r$-球条件）的关系。将这两个概念联系起来是很自然的，因为任何具有 $r$-球面支撑性质的集合都满足外部 $\infty$-球条件。事实上，容易看出，若某个非零向量 $\zeta \in N_S^P(s)$ 能由一个 $r$-球远实现，那么对任意 $\rho>0$，它也能由一个 $\rho$-球实现。给出 $r$-球面支撑性质新的解析刻画后，我们证明，满足该性质的集合要么是 $r$-强凸集，要么包含于某个 $r$-强凸集的边界中。同样，我们证明，满足外部 $\infty$-球条件的集合要么是凸集，要么包含于某个凸集的边界中。由此，我们得到对 [19, 定理 11],的略微加强版本，并给出更直接、简洁的证明。

下一节将介绍本文所用的记号和基本定义。第 3 节将陈述并证明我们的主要结果。

## 2 记号和基本定义

我们分别用 $\|\cdot\|$、$\langle\cdot,\cdot\rangle$、$B$ 和 $\overline{B}$表示欧几里得范数、通常内积、开单位球和闭单位球。对于 $r>0$ 和 $x\in\mathbb{R}^n$，我们定义

$$B(x;r):=x+rB \quad \text{and} \quad \overline{B}(x;r):=x+r\overline{B}.$$

对于集合 $S\subset\mathbb{R}^n$，我们分别用 $S^c$、$\operatorname{int} S$、$\operatorname{bdry} S$ 和 $\operatorname{cl} S$表示 $S$的补集（相对于 $\mathbb{R}^n$）、内部、边界和闭包。连接 $\mathbb{R}^n$ 中两点 $x$ 和 $y$ 的闭线段（分别为开线段）记为 $[x,y]$ （分别记为$]x,\ y[$）。对于开集 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$和函数 $f\colon\Omega\to\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$，我们用 $\operatorname{epi} f$表示 $f$的上图。从点 $x$到非空闭集 $S\subset\mathbb{R}^n$ 的距离记为

$$d_S(x):=\inf_{s\in S}\|x-s\|.$$

我们用 $\operatorname{proj}_S(x)$ 表示 $S$ 中距离 $x$ 最近的点集，即，

$$\operatorname{proj}_S(x):=\{s\in S:\|x-s\|=d_S(x)\}.$$

点 $x$ 到非空闭集 $S\subset\mathbb{R}^n$ 的最远距离记作

$$d_S^f(x):=\sup_{s\in S}\|x-s\|.$$

我们用 $\operatorname{far}_S(x)$ 表示 $S$ 中距离 $x$ 最远的点集，即，

$$\operatorname{far}_S(x):=\{s\in S:\|x-s\|=d_S^f(x)\}.$$

现在我们回顾几个非光滑分析中的概念，这些概念将在全文中使用。关于这些概念的全面介绍，可参见

专著 [8, 12, 21, 24, 27]。设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 是一个非空闭集，且 $s \in S$。 $S$ 在 $s$处的近端法锥 记作 $N_S^P(s)$，定义如下：

$$N_S^P(s) := \{\zeta \in \mathbb{R}^n : \exists \sigma \geq 0 \text{ such that } \langle \zeta, x - s\rangle \leq \sigma \|x - s\|^2 \text{ for all } x \in S\}.$$

该法锥的一个关键特征已在 [8, 命题 1.1。5], 中确立，即其具有局部性：只要两个闭集在某个点 $s$的邻域内重合，它们在 $s$ 处的近端法锥也相同。若 $S$ 是凸集，则近端法锥 $N_S^P(s)$退化为凸分析中的法锥，记作 $N_S(s)$，并由下式给出

$$N_S(s) := \{\zeta \in \mathbb{R}^n : \langle \zeta, x - s\rangle \leq 0, \ \forall x \in S\}.$$

在此情形下，对于每个边界点 $s \in \operatorname{bdry} S$， $N_S(s)$ 都是非平凡的。下面的陈述总结了任意非空闭集 $S \subset \mathbb{R}^n$所具有的一些几何性质。若对于某个 $x \in \mathbb{R}^n$有 $s \in \operatorname{proj}_S(x)$，则 $s$ 必然位于 $S$的边界上，且向量 $x - s$ 属于近端法锥 $N_S^P(s)$。此外，对于每个 $y \in S$，都有

$$\langle x - s, y - s\rangle \leq \tfrac{1}{2}\|y - s\|^2,$$

并且投影在线段 $s$ 与 $x$的连线上保持不变，即

$$\operatorname{proj}_S(s + t(x - s)) = \{s\}, \quad \forall t \in [0, 1[.$$

类似地，若 $s \in \operatorname{far}_S(x)$，则 $s \in \operatorname{bdry} S$，且相反方向的向量 $s - x$ 属于$N_S^P(s)$。在这种情况下，

$$\langle s - x, y - s\rangle \leq -\tfrac{1}{2}\|y - s\|^2, \quad \forall y \in S,$$

并且，从 $x$ 出发沿方向 $x - s$ 的射线上，最远点保持不变，即：

$$\operatorname{far}_S(x + t(x - s)) = \{s\}, \quad \forall t > 0.$$

最后，对于非空闭集 $S \subset \mathbb{R}^n$、 $s \in$ 边界 $S$ 和 $r > 0$，我们记为：

- $[N_S^P(s)]_r := \{\zeta \in N_S^P(s)$： 是单位的，且由一个 $r$-球面实现$\}$,
- $[N_S^P(s)]_r^f := \{\zeta \in N_S^P(s)$： 是单位的，且由一个 $r$-球面远距离实现$\}$.

## 3 主要结果

本节确立我们的主要结果。我们首先给出 $r$-球面支撑性质的解析刻画（命题 1），然后研究外部 $\infty$-球条件及其凸性推论（定理 2），最后给出关于 $r$-球面支撑集的相应结果（定理3 和4）。

我们首先给出以下命题，它为 $r$-球面支撑性质提供了新的解析刻画。

**命题 1** *Let $S \subset \mathbb{R}^n$ be nonempty and closed, and for $r > 0$. The following assertions are equivalent:*

**(*i*)** *$S$ is $r$-spherically supported.*

**(*ii*)** *$S$ is bounded and for all $s \in$ 边界 $S$ there exists $\zeta_s \in N_S^P(s)$ unit such that for all $R > 0$,*

$$\langle \zeta_s - \zeta_x, x - s \rangle \leq -\frac{r+R}{2rR}\|x-s\|^2, \ \forall (x, \zeta_x) \in \operatorname{bdry} S \times [N_S^P(x)]_R^f.$$

**(*iii*)** *$S$ is bounded and for all $s \in$ 边界 $S$ there exists $\zeta_s \in N_S^P(s)$ unit such that for all $R > 0$,*

$$\|s - x\| \leq \frac{2rR}{r+R}\|\zeta_s - \zeta_x\|, \ \forall (x, \zeta_x) \in \operatorname{bdry} S \times [N_S^P(x)]_R^f.$$

**(*iv*)** *$S$ is bounded and for all $s \in$ 边界 $S$ there exists $\zeta_s \in N_S^P(s)$ unit such that for all $R > 0$,*

$$\langle \zeta_s - \zeta_x, x - s \rangle \geq -\frac{2rR}{r+R}\|\zeta_s - \zeta_x\|^2, \ \forall (x, \zeta_x) \in \operatorname{bdry} S \times [N_S^P(x)]_R^f.$$

*Proof* **(*i*) $\Longrightarrow$ (*ii*)**: 设 $s \in$ 边界 $S$。则存在 $\zeta_s \in N_S^P(s)$ 单位，使得

$$\langle \zeta_s, y - s \rangle \leq -\frac{1}{2r}\|y-s\|^2, \ \forall y \in S \quad \left[\text{or equivalently } S \subset \overline{B}\left(s - r\zeta_s; r\right)\right]. \tag{1}$$

这显然推出 $S$有界。现在设 $(x, \zeta_x) \in$边界 $S \times [N_S^P(x)]_{R^\circ}^f$。于是我们有

$$\langle \zeta_x, y - x \rangle \leq -\frac{1}{2R}\|y-x\|^2, \ \forall y \in S.$$

取 $y := x$ 在后者中，并取 $y := x$ 在（1）中，我们可推出

$$\langle \zeta_x, s - x \rangle \leq -\frac{1}{2R}\|s-x\|^2 \text{ and } \langle \zeta_s, x - s \rangle \leq -\frac{1}{2r}\|x-s\|^2.$$

因此

$$\langle \zeta_x - \zeta_s, s - x \rangle \leq -\frac{r+R}{2rR}\|s-x\|^2.$$

（*ii*） $\Longrightarrow$ （*iii*）：令 $s \in$ 边界 $S$。则存在 $\zeta_s \in N_S^P$（$s$）单位向量，使得对所有 $R > 0$,

$$\langle \zeta_s - \zeta_x, x - s \rangle \leq -\frac{r+R}{2rR}\|x-s\|^2, \ \forall (x, \zeta_x) \in \operatorname{bdry} S \times [N_S^P(x)]_R^f.$$

由此利用柯西–施瓦茨不等式可得

$$-\|s-x\|\|\zeta_s - \zeta_x\| \leq \langle \zeta_x - \zeta_s, \ s - x \rangle \leq -\frac{r+R}{2rR}\|s-x\|^2, \quad \forall (x, \zeta_x) \in \text{边界}$$

$S \times [N_S^P(x)]_R^f$.因此,

$$\|s-x\|\left(\frac{r+R}{2rR}\|s-x\| - \|\zeta_s - \zeta_x\|\right) \leq 0, \ \forall (x, \zeta_x) \in \operatorname{bdry} S \times [N_S^P(x)]_R^f.$$

现在，由于当 $s = x$ 时（*iii*）中的不等式显然成立，我们可以假设 $s \neq x$，由此可得

$$\|s-x\| \leq \frac{2rR}{r+R}\|\zeta_s - \zeta_x\|.$$

**(*iii*) $\Longrightarrow$ (*i*)**: 设 $s \in$ 边界 $S$。那么存在 $\zeta_s \in N_S^P(s)$ 单位向量，使得对所有 $R > 0$,

$$\|s-x\| \leq \frac{2rR}{r+R}\|\zeta_s - \zeta_x\|, \ \forall (x, \zeta_x) \in \operatorname{bdry} S \times [N_S^P(x)]_R^f.$$

我们断言

$$S \subset \overline{B}\,(s - r\zeta_s; r)\,.$$

否则，由于 $A$ 有界，存在 $x \in$ 边界 $A$ 和 $R > r$，使得

$$A \subset \overline{B}\,(x - r\zeta_s; R) \text{ and } \|s - r\zeta_s - x\| = R.$$

因此，$x \in$ 远$_S$($x - r\zeta_s$)，这意味着单位向量 $\zeta_x := \frac{x-s+r\zeta_s}{R} \in N_S^P x$), ~~并且远点~~由一个 $R$-球实现。于是

$$\|r\zeta_s - R\zeta_x\| = \|s - x\| \le \frac{2rR}{r+R}\|\zeta_s - \zeta_x\|.$$

将后一个不等式与 $c := \langle \zeta_s, \zeta_s \rangle \in [-1, 1]$ 两边平方，我们得到

$$r^2 + R^2 - 2rRc \le \frac{8r^2R^2}{(r+R)^2}(1 - c).$$

这就得到

$$c \ge \frac{t^4 + 2t^3 - 6t^2 + 2t + 1}{2t(t-1)^2},$$

其中 $t := \frac{R}{r} > 1$。因此，

$$c - 1 \ge \frac{t^4 + 2t^3 - 6t^2 + 2t + 1}{2t(t-1)^2} - 1 = \frac{(t^2-1)^2}{2t(t-1)^2} = \frac{(t+1)^2}{2t} > 0,$$

这与 $c \in [-1, 1]$ 矛盾。 □

*Remark 1* 我们无法去除命题 **1** 中 (*ii*)–(*iii*) 对 $S$ 的有界性假设。事实上，当 $S$ 无界时，对于所有 $x \in \mathrm{bdry}\, S$，都有 $[N_S^P(x)]_R^f = \emptyset$；因此，对于任意满足 $N_S^P(s) \neq \{0\}$ 的集合 $S$，在任意边界点 $s$ 处，(*ii*)–(*iii*) 中的不等式都会自动成立。还应注意到，蕴含关系 (*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*) 直接由柯西–施瓦茨不等式推出，因此不需要 $S$ 的有界性；这一假设仅在几何步骤 (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*) 和 (*iii*) $\Rightarrow$ (*i*) 中才是必要的。

正如引言中所述，如果 $S$ 是 $r$-球面支撑的，那么它满足外部 $\infty$-球条件。因此，研究后一个条件可以更深入地理解 $r$-球面支撑性质。另一方面，已知如果 $S$ 是 $\infty$-近端正则的（即，对每个 $r > 0$ 而言， $r$-近端正则），那么 $S$ 是凸的。由于近端正则性与外球条件密切相关（见 [15]），一个自然的问题是：如果 $S$ 满足外部 $\infty$-球条件，那么可以推出它具有何种凸性？下面的定理回答了这一问题。事实上，该定理表明，如果 $S$ 满足外部 $\infty$-球条件，那么它要么是凸集，要么包含于某个闭凸集的边界中。

**定理 2** *Let $S \subset \mathbb{R}^n$ be a nonempty, closed set satisfying the exterior $\infty$-sphere condition. Then $S$ is convex or there exists a nonempty closed and convex set $A \subset \mathbb{R}^n$ such that* ,,,边界 ,内部 ,, $S \subset$ $A$. *In fact $S$ is convex if $S \neq \emptyset$ and a subset of the boundary of nonempty closed , and convex set if*内部 $S = \emptyset$.

*Proof* 设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 为满足外部 $\infty$-球条件的非空闭集。对于$s \in$ 边界 $S$，我们断言存在一个 $\zeta_s \in N_S^P(s)$ 单位向量，使得

$$\langle \zeta_s, x - s \rangle \leq 0, \ \forall x \in S.$$

事实上，由于 $S$ 满足外部 $\infty$-球条件，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个 $\zeta_n \in N_S^P(s)$ 单位向量，使得

$$\langle \zeta_n, x - s \rangle \leq \frac{1}{2n} \|x - s\|^2, \ \forall x \in S.$$

在后一个式子中取 $n \longrightarrow +\infty$，并利用 $(\zeta_n)_n$ 有一个收敛到单位向量 $\zeta_s$的子序列（不妨不重新编号），我们得出

$$\langle \zeta_s, x - s \rangle \leq 0, \ \forall x \in S,$$

这也说明 $\zeta_s \in N_S^P(s)$。

*Case 1*: 内部 $S \neq \emptyset$。

于是存在 $s_0 \in S$和 $\rho > 0$，使得 $B(s_0; \rho) \subset S$。我们声称 $S$是上图-Lipschitz 的。若非如此，则由 [8, 习题 3.6.5(a)] 可知，存在 $s \in$边界 $S$，使得对所有 $u \in \mathbb{R}^n$和$\varepsilon > 0$，都能找到 $s' \in S \cap B(s; \varepsilon)$、$t \in [0, \varepsilon[$,和 $v \in B(u; \varepsilon)$，满足 $s' + tv \notin S$。于是存在 $s_n \in S \cap B(s; \frac{1}{n})$、 $v_n \in B(s - s_0; \frac{1}{n})$和 $t_n \in [0, \frac{1}{n}[$，使得 $s_n \mp t_n v_n \notin S$。

$$\|s_n + v_n - s_0\| \leq \|s_n - s\| + \|v_n - (s_0 - s)\| \leq \frac{2}{n}.$$

当 $n$ 较大时，我们有 $s_n + v_n \in B(s_0; \rho) \subset$内部 $S$。于是，当 $n$ 较大时，存在 $\tau_n \in ]t_n, \ 1[$ 使得 $s_n + \tau_n v_n \in$边界 $S$。于是，当 $n$ 较大时，存在 $\zeta_n \in N_S^P(s_n + \tau_n v_n)$ 单位向量，使得

$$\langle \zeta_n, x - s_n - t_n v_n \rangle \leq 0, \ \forall x \in S.$$

Then

$$\langle \zeta_n, s_n - s_n - t_n v_n \rangle \leq 0 \ \text{ and } \ \langle \zeta_n, s_n + v_n - s_n - t_n v_n \rangle \leq 0,$$

so

$$\langle \zeta_n, -t_n v_n \rangle \leq 0 \ \text{ and } \ \langle \zeta_n, (1 - t_n) v_n \rangle \leq 0.$$

Then

$$\langle \zeta_n, v_n \rangle \geq 0 \ \text{ and } \ \langle \zeta_n, v_n \rangle \leq 0,$$

这意味着

$$\langle \zeta_n, v_n \rangle = 0. \tag{2}$$

由于 $s_n + v_n \in B(s_0; \rho) \subset$内部 $S$，我们有

$$\|s_n + v_n - s_0\| < \rho, \ \text{and hence, } \ \rho - \|s_n + v_n - s_0\| > 0.$$

Let

$$\varepsilon_n = \frac{\rho - \|s_n + v_n - s_0\|}{2} > 0.$$

Then

$$\|s_n + v_n + \varepsilon_n \zeta_n - s_0\| \leq \|s_n + v_n - s_0\| + \varepsilon_n < \|s_n + v_n - s_0\| + \rho - \|s_n + v_n - s_0\| = \rho.$$

因此

$$s_n + v_n + \varepsilon_n \zeta_n \in B(s_0; \rho) \subset \operatorname{int} S.$$

Then

$$\langle \zeta_n, s_n + v_n + \varepsilon_n \zeta_n - s_n - t_n v_n \rangle \leq 0,$$

由此，利用（2），可得

$$\varepsilon_n = \langle \zeta_n, (1 - t_n) v_n + \varepsilon_n \zeta_n \rangle \leq 0,$$

矛盾。因此， $S$ 是上图-Lipschitz的。现在，根据 [16, 定理 7 和注 12], ，我们推得 $S$ 是 $\infty$-近端正则的，因此 $S$ 是凸的。

*Case 2*: 内部 $S = \emptyset$。

我们对任意 $s \in$ 边界 $S = S$ 定义，

$$[N_S^P(s)]_\infty := \bigcap_{r>0} [N_S^P(s)]_r = \{\zeta_s \in N_S^P(s) : \langle \zeta_s, x - s\rangle \leq 0, \ \forall x \in S\}.$$

注意， $[N_S^P(s)]_\infty$ 非空，正如上文证明开头所示。我们定义

$$\mathcal{A} := \{(s, \zeta_s) : s \in S \text{ and } \zeta_s \in [N_S^P(s)]_\infty\}, \text{ and}$$
$$A := \bigcap_{(s,\zeta_s)\in\mathcal{A}} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle \zeta_s, x - s\rangle \leq 0\}.$$

显然，我们有:

- $A$ 是闭凸集，且

$$\operatorname{int} A = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < 0\} \text{ and } \operatorname{bdry} A = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}.$$

  其中

$$f(x) := \sup_{(s,\zeta_s)\in\mathcal{A}} \langle \zeta_s, x - s\rangle, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

- $S \subset A$。

我们声称 $S \subset \operatorname{bdry} A$。事实上，对于 $s \in S$，有

$$0 \geq f(s) \geq \langle \zeta_s, s - s\rangle = 0.$$

因此， $s \in \operatorname{bdry} A$，从而 $S \subset \operatorname{bdry} A$。 □

鉴于定理 2，研究类似结论是否适用于 $r$-球面支撑性质是很自然的。在这种情形下，支撑由包含 $S$ 的固定半径 $r$ 球面给出，这比外部$\infty$-球条件更强，正如引言中所解释的。因此，可以预期会出现更强的凸性形式。下一个定理表明事实确实如此: 一个 $r$-球面支撑集要么是 $r$-强凸的，要么包含于某个 $r$-强凸集的边界中。

**定理 3** *Let $S \subset \mathbb{R}^n$ be nonempty, closed, and $r$-spherically supported for some $r > 0$.*
*Then $S$ is $r$-strongly convex or there exists a nonempty closed and $r$-strongly convex set , , , 边界 , 内 $A \subset \mathbb{R}^n$ such that $S \subset$ A. In fact $S$ is $r$-strongly convex if $S \neq \emptyset$ and a subset of 部, the boundary of nonempty closed and $r$-strongly convex set if $S = \emptyset$. , , 内部*

由于 $S$ 是 $r$-球面支撑的，因此对于所有 $s \in$ 边界 $S$， $[N_S^P(s)]_r^f \neq \emptyset$ ， $S$ 是紧的，并且 $S$ 满足外部 $\infty$-球条件。

*Case 1*: $S \neq \emptyset$的内部。

于是，由定理2， $S$ 是凸的。因此，根据 [25,定理 2.2。6]结合 $r$-球面支撑性质的定义，我们有

$$\bigcap_{\substack{s\in \operatorname{bdry} S\\ \zeta_s\in N_S^P(s)]_r^f}} \overline{B}(s-r\zeta_s;r)\supset S = \bigcap_{\substack{s\in \operatorname{bdry} S\\ \zeta_s\in N_S^P(s)]_r^f}} \{x\in\mathbb{R}^n:\langle \zeta_s, x-s\rangle\le 0\} \supset \bigcap_{\substack{s\in \operatorname{bdry} S\\ \zeta_s\in N_S^P(s)]_r^f}} \overline{B}(s-r\zeta_s;r).$$

由此可得

$$S = \bigcap_{\substack{s\in \operatorname{bdry} S\\ \zeta_s\in N_S^P(s)]_r^f}} \overline{B}(s-r\zeta_s;r),$$

因此， $S$ 是 $r$-强凸的 .

*Case 2*: 内部 $S=\emptyset$。

我们定义

$$\mathcal{A}^f := \left\{s-r\zeta_s : s\in S \text{ and } \zeta_s\in [N_S^P(s)]_r^f\right\}, \text{ and}$$
$$A := \bigcap_{c\in\mathcal{A}^f} \overline{B}(c;r).$$

显然，我们有:

- $\mathcal{A}^f$ 是紧的。
- $A$是紧的且强凸，凸性参数为 $r$，并且满足

$$\operatorname{int} A = \{x\in\mathbb{R}^n : f(x)<r\} \text{ and } \operatorname{bdry} A = \{x\in\mathbb{R}^n : f(x)=r\} = A\cap \bigcup_{c\in\mathcal{A}^f}\{x\in\mathbb{R}^n : \|c-x\|=r\},$$

其中， $f(\cdot)$ 是由下式定义的 Lipschitz连续函数

$$f(x) := d^f_{\mathcal{A}^f}(x) = \sup_{c\in\mathcal{A}^f}\|c-x\|,\ \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

- $S\subset A$。

我们声称 $S\subset$ 边界 $A$。事实上，对于 $s\in S$ 以及 $\zeta_s\in[N_S^P(s)]_r^f$，有 $s\in A$，并且

$$s\in\{x\in\mathbb{R}^n : \|s+r\zeta_s-x\|=r\}\subset \bigcup_{c\in\mathcal{A}^f}\{x\in\mathbb{R}^n:\|c-x\|=r\}.$$

因此， $s\in$ 边界 $A$，从而 $S\subset$ 边界 $A$。 □

作为定理 3 的推论，我们得到 [19, 定理 1.1] 的加强版本。第一项改进涉及 [19, 定理 1.1] 的表述。事实上，由于$N_S^P(\cdot)\subset N^P_{\text{边界 }S}(\cdot)$，可以很容易证明，如果 $S$ 是 $r$-球面支撑的，那么其边界也是 $r$-球面支撑的。然而，反之则不一定成立，如例子 $S:=B^c$ 所示。第二项改进涉及必要条件的证明，该证明现在更加简洁直接。

**定理 4** *Let $S \subset \mathbb{R}^n$ be a nonempty and closed set not reduced to a singleton and let, 边界 $r > 0$. Then $S$ is $r$-strongly convex if and only if $S$ is bounded and $S$ is $r$-spherically supported with $S \neq \emptyset$.* 内部

*Proof* 充分条件显然成立。事实上，当 $S$ 是非空、非单点的闭集且为 $r$-强凸时，它是有界的，并且 $r$-球面支撑，且 int $S \neq \emptyset$。此外，如上所述，由于 $N_S^P(\cdot) \subset N_{\text{bdry } S}^P(\cdot)$，我们直接得到 bdry $S$ 是 $r$-球面支撑的。

我们接下来证明必要条件。由于 bdry $S$ 是 $r$-球面支撑的，且 int (bdry $S$) $= \emptyset$，由定理 3可知，存在一个 $r$-强凸集 $A$，使得 bdry $S \subset \text{bdry } A$。我们断言 $S = A$。事实上，令 $s \in$ 内部 $S$。若 $s \notin A$，则由于 $A$ 是凸集，并利用 Hahn–Banach 分离定理，存在 $\zeta$ 单位向量，使得

$$\langle \zeta, a \rangle \leq 0 \text{ and } A \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \langle \zeta, x \rangle \geq 0\}.$$

由于 $S$ 有界且 $s \in \text{int } S$，存在 $t > 0$ 使得

$$a - t\zeta \in \text{bdry } A \subset \text{bdry } S.$$

那么，

$$0 \leq \langle \zeta, a - t\zeta \rangle = \langle \zeta, a \rangle - t \leq -t < 0,$$

这就得出了所需的矛盾。因此，内部 $S \subset A$，由此可得

$$S = \text{bdry } S \cup \text{int } S \subset \text{bdry } A \cup A = A.$$

对于另一个包含关系，假设 $S \subsetneq A$。那么存在 $x \in A$ 使得 $x \notin S$。由于内部 $S \neq \emptyset$，我们考虑 $y \in$ 内部 $S \subset$ 内部 $A$。因为 $A$ 是凸的，所以我们得到 $[y, x[ \subset$ 内部 $A$。另一方面，由于 $x \notin S$ 且 $y \in$ 内部 $A$，可知存在 $z \in ]x,\ y[$ 使得 $z \in$ 边界 $S \subset$ 边界 $A$。这会导致矛盾，因为 $z \in ]x,\ y[ \subset ]x,\ y] \subset$ 内部 $A$。因此，$S \subset A$，进而 $A = S$。这表明 $S$ 是 $r$-强凸的。□

# 参考文献

[1] Azagra, D., Drake, M., Hajlasz, P.: $C^2$强凸体的 Lusin 逼近，《凸分析杂志》32/1，91–106（2025）[2] Balashov, M. V., Ivanov, G. E.: 集合的最远点，《数学札记》80，159–166（2006）[3] Cannarsa, P., Frankowska, H.: 可达集的内球性质与时间最优控制问题，《ESAIM 控制、优化与变分法》12，350–370（2006）[4] Cannarsa, P., Sinestrari, C.: 最短时间函数的凸性性质，《Calc. Var.》3，273–298（1995）[5] Cannarsa, P., Sinestrari, C.: 《半凹函数、Hamilton–Jacobi 方程与最优控制》，Birkh¨auser，波士顿（2004）[6] Canino, A.: 关于 $p$凸集与测地线，《J. Diff. Equations》75/1，118–157（1988）[7] Clarke, F. H., Stern, R. J., Wolenski, P. R.: 近端光滑性与下$C^2$性质，《凸分析杂志》2/1–2，117–144（1995）

[8] Clarke, F.H., Ledyaev, Yu., Stern, R. J.,Wolenski,P. R.：《非光滑分析与控制理论》，数学研究生教材 178，施普林格，纽约（1998）[9] Colombo, G., Marigonda, A.：一类非凸函数的可微性，《Calc. Var.》25，1–31（2005）[10] Federer, H.：曲率测度，《Trans. Amer. Math. Soc.》93，418–491（1959）[11] Frankowska, H., Olech, C.：集值函数积分的 $R$凸性，载于：《分析与几何论集》，约翰·霍普金斯大学出版社，巴尔的摩，马里兰州，117–129（1981）[12] Mordukhovich, B. S.：《变分分析与广义微分 I：基础理论》，施普林格，柏林（2006）[13] Goncharov, V. V., Ivanov, G. E.：希尔伯特空间中闭集的强凸性与弱凸性，载于：《运筹学、工程与网络安全》，Springer 优化与应用 113，施普林格，尚，259–297（2017）[14] Nacry, F., Thibault, L.：具有可变半径的强凸集，《数学、控制与相关领域》14(4)，1530–1559（2024）[15] Nour, C., Stern, R. J., Takche, J.：近端光滑性与外部球条件，《凸分析杂志》16/2，501–514（2009）[16] Nour, C., Takche, J., Stern, R. J.： $\theta$外部球条件、 $\varphi_0$凸性与局部半凹性，《Nonlinear Analysis》73，573–589（2010）[17]Nour, C., Takche, J.：《扩展外球条件》，《凸分析杂志》31/1，39–50（2024）[18] Nour, C., Takche, J.：满足扩展外球条件的闭集的补集，《正性》29，25（2025）[19] Nour, C., Takche, J.：强凸性的新刻画。《J. Convex Anal.》，小幅修改后提交（预印本：https://doi.org/10.48550/arXiv.2501.07693）[20]Nour, C., Takche, J.：《扩展外球条件》，《凸分析杂志》31/1，39–50（2024）[21] Penot, J.-P.：《无导数微积分》，数学研究生教材 266，施普林格，纽约（2013）[22] Poliquin, R. A., Rockafellar, R. T., Thibault, L.：距离函数的局部可微性，《Trans. Amer. Math. Soc.》352，5231–5249（2000）[23] Rockafellar, R. T.：$\mathbb{R}^n$中的 Clarke 切锥与闭集的边界，《Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.》3，145–154（1979）

[24] Rockafellar, R. T.，Wets, R. J.-B.：《变分分析》，数学科学基础丛书第317卷，施普林格，柏林（1998）[25] Schneider，R.：《凸体：Brunn–Minkowski理论》，第2版，剑桥大学出版社（2013）[26] Shapiro, A. S.：希尔伯特空间中度量投影的存在性与可微性，《SIAM优化杂志》4，231–259（1994）[27] Thibault, L.：《巴拿赫空间中的单侧变分分析》，世界科学出版社（2023）[28] Weber, A.，Reissig, G.：强凸集的局部刻画，《数学分析与应用杂志》400，743–750（2013）