奉至仁至慈的安拉之名。

关于三维反交换代数 AS

U. BEKBAEV

乌兹别克斯坦塔什干都灵理工大学，塔什干，乌兹别克斯坦。

arXiv:2512.15161v1 [math.RA] 17 Dec 2025

Abstract. 本文致力于研究任意基域 $\mathbb{F}$ 上满足 $Char(\mathbb{F}) \neq 2$ 且每个元素都有平方根的三维反交换（零幂）代数的分类问题。

数学主题分类（2010）：17A30，17A60

1. Introduction

反交换（零幂）代数是与李代数最为接近的代数结构之一。本文研究任意基域 $\mathbb{F}$ 上三维反交换代数的分类问题，其中 $\mathrm{char}(\mathbb{F}) \neq 2$，且 $\mathbb{F}$ 中的每个元素都有平方根。

特别地，这种分类将 $\mathbb{F}$ 上三维李代数的分类作为一个特例，而后者是一项经典结果。因此，本文主要关注非李代数的情形。我们将所得结果与 [1] 中最新的分类结果进行比较。最后，我们描述非李代数典范代表的所有自同构和导子。

Our 这种方法有别于现有方法，并提供了更简短、更直接的解法 .

2. The Main Result

定义 2.1. 域 $\mathbb{F}$ 上配备双线性映射的向量空间 $\mathbb{V}$

$$\cdot : \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \to \mathbb{V}, \qquad (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \mapsto \mathrm{x} \cdot \mathrm{y},$$

满足

$$(\alpha \mathrm{x} + \beta \mathrm{y}) \cdot \mathrm{z} = \alpha(\mathrm{x} \cdot \mathrm{z}) + \beta(\mathrm{y} \cdot \mathrm{z}), \qquad \mathrm{z} \cdot (\alpha \mathrm{x} + \beta \mathrm{y}) = \alpha(\mathrm{z} \cdot \mathrm{x}) + \beta(\mathrm{z} \cdot \mathrm{y}),$$

对于所有的 x、y、$\mathrm{z} \in \mathbb{V}$ 以及 α、$\beta \in \mathbb{F}$，称其为一个代数 $\mathbb{A} = (\mathbb{V}, \cdot)$。

设 $\mathbb{A} = (\mathbb{V}, \cdot)$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的一个 n 维代数，并设 $\mathbf{e} = (\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_n)$ 是其一组固定的基。则双线性映射 $\cdot : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ 可由一个 $n \times n^2$ 矩阵表示（称为结构常数矩阵，缩写为 MSC）

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & \cdots & a_{1n}^1 & a_{21}^1 & \cdots & a_{nn}^1 \\ a_{11}^2 & a_{12}^2 & \cdots & a_{1n}^2 & a_{21}^2 & \cdots & a_{nn}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{11}^n & a_{12}^n & \cdots & a_{1n}^n & a_{21}^n & \cdots & a_{nn}^n \end{pmatrix},$$

定义为

$$\mathrm{e}_i \cdot \mathrm{e}_j = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k \, \mathrm{e}_k, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Th因此，一旦基 $\mathbf{e}$ 确定，代数 $\mathbb{A}$ 就可以用其结构常数矩阵 $A \in M_{n \times n^2}(\mathbb{F}$ 来表示).
相对于基 $\mathbf{e}$，$\mathbb{A}$ 上的乘法可写为

$$\mathrm{x} \cdot \mathrm{y} = \mathbf{e}\, A(x \otimes y),$$

对于任意的 $\mathrm{x} = \mathbf{e}x$ 和 $\mathrm{y} = \mathbf{e}y$，其中 $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ 和 $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ 分别是 x 和 y 的坐标列向量，而 $x \otimes y$ 表示克罗内克积（张量积）。

电子邮件：uralbekbaev@gmail.com。

用乘法结构常数（MSC）表示，代数 $\mathbb{A}$ 的自同构 $\mathbf{g}$ 和导子 $\mathbf{D}$ 可由下式刻画：

$$A = g^{-1}A(g \otimes g), \qquad DA = A(D \otimes I + I \otimes D),$$

其中， g （分别地， D）是所选基下$\mathbf{g}$ （分别地，$\mathbf{D}$）的矩阵。

定义 2.2. 若存在 $g \in GL_n(\mathbb{F})$ 使得，则称乘法结构常数为 A 和 B 的两个代数同构。

$$B = gA(g^{-1} \otimes g^{-1}).$$

因此，按同构分类 n 维代数等价于在该作用下分类 $n \times n^2$ 矩阵

$$A \mapsto gA(g^{-1} \otimes g^{-1}), \qquad g \in GL_n(\mathbb{F}).$$

一旦固定了基，我们就不再区分代数与其乘法结构常数，也不区分线性映射与其表示矩阵。

定义 2.3. 若代数 $\mathbb{A}$ 满足以下条件，则称其为反交换（零幂）代数

$$a^2 = 0 \quad for\ all\ a \in \mathbb{A}.$$

在三维情形下，我们将乘法结构常数写成如下形式

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8 & b_9 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & c_9 \end{pmatrix}.$$

本文中， $\mathbb{F}$ 表示一个特征为 $\mathrm{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ 的域，其中每个元素都有平方根。

引理 2.4. 每个三维反交换代数都有一个二维子代数。

证明。 假设某个三维反交换代数 $\mathbb{A}$ 没有二维子代数。那么，对于任意线性无关的 $e_1, e_2 \in \mathbb{A}$，元素 e_1, e_2, e_3 线性无关，其中 $e_3 = e_1e_2$。设

$$e_2e_3 = ae_1 + be_2 + ce_3.$$

考虑线性无关的向量 $f_1 = e_2$ 和 $f_2 = xe_1 + e_3$。那么

$$f_1f_2 = e_2(xe_1 + e_3) = -xe_3 + ae_1 + be_2 + ce_3 = ae_1 + be_2 + (c - x)e_3.$$

因此，

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ a & b & c - x \end{pmatrix} = x^2 - cx + a,$$

通过适当选择 x，可以使其为零。因此， f_1， f_2， f_1f_2 线性相关，这就导致了矛盾。□

Th关于 $\mathbb{F}$ 上的三维李代数的以下分类是众所周知的 [2, 3]。

定理 2.5. 任何非平凡的 $\mathbb{F}$上的三维李代数都同构于下列代数中的且仅其中一个，它们按结构常数矩阵列出：

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{r}_{3,\lambda}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&-1&0&0&0&0&0\\0&0&\lambda&0&0&0&-\lambda&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda\in\mathbb{F},\quad \mathfrak{r}_{3,\lambda}\simeq\mathfrak{r}_{3,1/\lambda}\ (\lambda\neq 0),$$

$$\mathfrak{r}'_{3,1}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&1&-1&0&0&-1&0&0\\0&0&1&0&0&0&-1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{h}_3=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&-1&0\end{pmatrix},$$

海森堡代数。

以下定理构成了本文的主要结果。除非另有明确说明，所列出的所有代数均为非李代数。

定理 2.6。 $\mathbb{F}$ 上的任意非平凡三维反交换代数都同构于下列代数中的恰好一个，它们按结构常数矩阵列出：

$$A_1=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&-1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&-1&0\end{pmatrix},$$

$$A_2(\lambda)=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0&-1&0&0\\0&1&\lambda&-1&0&0&-\lambda&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&-1&0\end{pmatrix},\quad \lambda\in\mathbb{F},$$

$$A_3=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&1&-1&0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&-1&0\end{pmatrix},$$

$$A_4(\lambda)=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&1&0&-1&0\\0&1&0&-1&0&0&0&0&0\\0&0&\lambda&0&0&0&-\lambda&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda\in\mathbb{F},$$

其中 $A_4(-1)\simeq\mathfrak{sl}_2$,

$$A_5=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&1&0&-1&0\\0&1&0&-1&0&1&0&-1&0\\0&0&1&0&0&0&-1&0&0\end{pmatrix},$$

$$A_6(\lambda)=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&-1&0&0&0&0&0\\0&0&\lambda&0&0&0&-\lambda&0&0\end{pmatrix}=\mathfrak{r}_{3,\lambda},$$

其中 $A_6(\lambda)\simeq A_6(1/\lambda)$ 对应 $\lambda\neq 0$,

$$A_7(\lambda)=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0&-1&0&0\\0&1&0&-1&0&0&0&0&0\\0&0&\lambda&0&0&0&-\lambda&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda\in\mathbb{F},$$

$$A_8=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&1&-1&0&0&-1&0&0\\0&0&1&0&0&0&-1&0&0\end{pmatrix}=\mathfrak{r}'_{3,1},$$

$$A_9=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&1&0&-1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\mathfrak{h}_3,$$

海森堡代数。

证明。 我们首先对具有非平凡二维子代数的三维反交换代数进行分类。为此，我们使用关于二维代数的以下众所周知的事实。

每个非平凡二维反交换代数都同构于由结构常数矩阵给出的代数

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

其自同构群为

$$\mathrm{Aut}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} : \ c, d \in \mathbb{F}, \ d \neq 0 \right\}.$$

为了对所有此类三维代数进行分类，只需考虑具有如下形式的结构常数矩阵的代数

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & a_6 & -a_3 & -a_6 & 0 \\ 0 & 1 & b_3 & -1 & 0 & b_6 & -b_3 & -b_6 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & c_6 & -c_3 & -c_6 & 0 \end{pmatrix},$$

并研究它们在群的作用下的同构

$$G_1 = \left\{ g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ c & d & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} : \ c, d, x, y, z \in \mathbb{F}, \ dz \neq 0 \right\},$$

其中包含保持由 e_1、e_2 生成的子代数的变换。对于 $A' = g^{-1}A(g \otimes g)$，我们得到

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & M_{13} & 0 & 0 & M_{23} & -M_{13} & -M_{23} & 0 \\ 0 & 1 & N_{13} & -1 & 0 & N_{23} & -N_{13} & -N_{23} & 0 \\ 0 & 0 & P_{13} & 0 & 0 & P_{23} & -P_{13} & -P_{23} & 0 \end{pmatrix},$$

其中

$$M_{13} = z(a_3 + ca_6) - x(c_3 + cc_6), \qquad M_{23} = d(za_6 - xc_6),$$

$$N_{13} = \frac{1}{d}\left[(1 - (c_3 + cc_6))(y - cx) + z(b_3 + cb_6 - ca_3 - c^2 a_6)\right], \qquad N_{23} = z(b_6 - ca_6) - x(1 - cc_6) - c_6 y,$$

$$P_{13} = c_3 + cc_6, \qquad P_{23} = dc_6.$$

首先假设 $c_6 \neq 0$。选择

$$d = \frac{1}{c_6}, \quad c = -\frac{c_3}{c_6}, \quad x = \frac{za_6}{c_6}, \quad y = \frac{z(b_6 - ca_6) - x(1 - cc_6)}{c_6},$$

我们得到 $P_{23} = 1$、$P_{13} = 0$、$M_{23} = 0$ 和 $N_{23} = 0$。因此，我们可以假设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & -a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_3 & -1 & 0 & 0 & -b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

如果 $a_3 = b_3 = 0$，那么选择 $x = y = 0$、$c = -c_3$ 和 $d = 1$ 将 A 变换为

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

它是一个非李代数。

如果 $a_3 \neq 0$，那么选择 $x = y = 0$、$z = 1/a_3$、$c = -c_3$ 和 $d = 1$，即可将 A 转换为

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & -1 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

它仍然是非李代数。

若 $a_3 = 0$ 且 $b_3 \neq 0$，则 A 可变换为

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

它也不是李代数。

接下来，假设 $c_6 = 0$。在这种情况下，

$$\begin{aligned} M_{13} &= z(a_3 + ca_6) - xc_3, & M_{23} &= dza_6, \\ N_{13} &= \frac{1}{d}\left[(1 - c_3)(y - cx) + z(b_3 + cb_6 - ca_3 - c^2a_6)\right], & N_{23} &= z(b_6 - ca_6) - x, \\ P_{13} &= c_3, & P_{23} &= 0. \end{aligned}$$

若 $a_6 \neq 0$ 且 $c_3 \neq 1$，则 A 可变换为

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a \neq 1.$$

当且仅当 $a = -1$ 时，该代数才是李代数。基变换 $e = e_2$、$f = -2e_3$、$h = 2e_1$ 表明 $A_4(-1) \simeq \mathfrak{sl}_2$。

如果 $a_6 \neq 0$ 且 $c_3 = 1$，则该系统化为

$$\begin{aligned} M_{13} &= z(a_3 + ca_6) - x, & M_{23} &= dza_6, \\ N_{13} &= \frac{z}{d}(b_3 + cb_6 - ca_3 - c^2a_6), & N_{23} &= z(b_6 - ca_6) - x, \\ P_{13} &= 1, & P_{23} &= 0, \end{aligned}$$

并且 A 可变换为

$$A_5(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & a & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $A_5(0) = A_4(1)$。

代数 $A_5(a)$ 不是李代数，因为

$$(e_1e_2)e_3 + (e_2e_3)e_1 + (e_3e_1)e_2 = 2e_1 + ae_2 \neq 0.$$

此外，等式

$$A_5(a) = g^{-1}A_5(b)(g \otimes g), \qquad g = \operatorname{Diag}\left(1, \frac{b}{a}, \frac{a}{b}\right),$$

这表明，在同构意义下，这样的代数只有一个，即

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0. \end{pmatrix}$$

如果 $a_6 = 0$，那么该系统变为

$$M_{13} = za_3 - xc_3, \qquad M_{23} = 0,$$
$$N_{13} = \frac{1}{d}\left[(1-c_3)(y-cx) + z(b_3 + cb_6 - ca_3)\right], \qquad N_{23} = zb_6 - x,$$
$$P_{13} = c_3, \qquad P_{23} = 0.$$

因此，选择 $x = zb_6$ 可将该系统化简为

$$M_{13} = z(a_3 - b_6c_3), \qquad M_{23} = 0,$$
$$N_{13} = \frac{1}{d}\left[(1-c_3)(y-zb_6c) + z(b_3 + cb_6 - ca_3)\right], \qquad N_{23} = 0,$$
$$P_{13} = c_3, \qquad P_{23} = 0.$$

若 $c_3 \neq 1$，则可令 $N_{13} = 0$，并将 M_{13} 规范化为 0 或 1。因此，我们得到

$$A_6(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{r}_{3,a}, \quad a \neq 1,$$

and

$$A_7(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a \neq 1.$$

代数 $A_7(a)$ 不是李代数，因为

$$(e_1e_2)e_3 + (e_2e_3)e_1 + (e_3e_1)e_2 = e_2e_3 - (e_1 + ae_3)e_2 = -e_2 \neq 0.$$

若 $c_3 = 1$，则在 $b_6 \neq a_3$ 的情况下，可以将 $M_{13} = 1$ 和 $N_{13} = 0$ 规范化；否则，可以得到 $M_{13} = 0$ 和 $N_{13} = 0$ 或 $N_{13} = 1$。由此得到以下其他代数：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_7(1),$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_6(1) = \mathfrak{r}_{3,1},$$

and

$$A_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{r}'_{3,1}.$$

接下来，我们考察仅有平凡二维子代数的三维反交换代数。我们计算 $A' = g^{-1}A(g \otimes g)$，其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & a_6 & -a_3 & -a_6 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_6 & -b_3 & -b_6 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & c_6 & -c_3 & -c_6 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b & x \\ c & d & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix},$$

保持由 e_1，e_2 生成的子代数不变的变换。

我们可以假设，若 $b_3 = 0$，则 $a_3 = c_3 = 0$；若 $a_6 = 0$，则 $b_6 = c_6 = 0$；否则，该代数将包含一个非平凡的二维子代数。

计算可得

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_1 & 0 & 0 & D_1 & -C_1 & -D_1 & E_1 \\ 0 & 0 & C_2 & 0 & 0 & D_2 & -C_2 & -D_2 & E_2 \\ 0 & 0 & C_3 & 0 & 0 & D_3 & -C_3 & -D_3 & E_3 \end{pmatrix},$$

其中 $\Delta_0 = (ad-bc)z \neq 0$，系数已明确给出（如上所述）。

代入 $x = y = 0$，得到

$$\begin{pmatrix} C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_3 & a_6 \\ b_3 & b_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad (C_3, D_3) = (c_3, c_6) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

仅有以下几种可能：

(1) $\begin{pmatrix} C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, with $C_3, D_3 \in \{0, 1\}$;

(2) $\begin{pmatrix} C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \lambda I$, with $(C_3, D_3) = (1, 0)$ or $(0, 0)$;

(3) $\begin{pmatrix} C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, with $(C_3, D_3) = (a, 1)$, $(1, 0)$, or $(0, 0)$.

为避免出现非平凡的二维子代数，必须有 $(C_1, D_2) = (0,0)$。在这种情况下，所有得到的代数都是李代数，其中只有

$$A_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

对应于 $\begin{pmatrix} C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$的代数没有非平凡的二维子代数。这个代数就是海森堡代数 $\mathfrak{h}_3$。

要证明非李代数 A_1, $A_2(\lambda)$, A_3, $A_4(\lambda)$, A_5和 $A_7(\lambda)$两两不同构，可以使用标准不变量，例如 $\dim Z(A)$、$\dim \mathrm{Ann}(A)$、$\dim A^2$和$\dim \mathrm{InnDer}(A)$。

其中，只有 A_1 具有非平凡的中心，$Z(A_1) = \langle e_1 \rangle$，因此它与其他代数不同构。只有 $A_7(\lambda)$具有二维湮灭子，因此它也与其余代数不同构。下表表明，$A_2(\lambda)$、A_3、$A_4(\lambda)$ 和 A_5 两两不同构：

A	$\dim \mathrm{Ann}(A)$	$\dim A^2$	$\dim(\mathrm{Ann}(A) \cap A^2)$
$A_2(\lambda)$	0	3	0
A_3	1	2	1
$A_4(\lambda)$	1	2	0
A_5	1	3	1

当然，在每种情况下，$i = 2$，4，7 都会产生这样一个问题：对应于不同 λ 值的代数 $A_i(\lambda)$ 是否彼此同构。迄今为止，我们的分析表明，答案是**否**。在此背景下，研究这些代数的导子和自同构或许会有所帮助。□

在 $\mathbb{F}$上三维反交换非李代数的另一种分类可见于 [1], 。这些典范代表的 MSC（用我们的记号表示）如下：

- $ZA_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
- $ZA_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,
- $ZA_3(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \lambda & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0 \neq \lambda \in \mathbb{F}$,

- $ZA_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$,
- $ZA_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & i & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$, $i^2 = -1$.

与我们上述结果比较可知， [1] 中给出的分类**并不完整**。

以下结果描述了三维非李代数的典范代表的自同构和导子。

定理 2.7. 定理中给出的非李代数的导子和自同构如下：f g , p ,

$\mathrm{Der}(A_1) = \{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : \ a \in \mathbb{F} \}$, $\mathrm{Aut}(A_1) = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} : \ 0 \neq t \in \mathbb{F} \}$,

$Der(A_2(\lambda)) = \{a \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda} \\ \frac{\lambda-1}{\lambda} & 0 & \frac{\lambda-1}{\lambda} \\ -\frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda} & 1 \end{pmatrix} : \ a \in \mathbb{F} \}$, *if* $\lambda \neq 0$; $Der(A_2(0)) = \{a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} : \ a \in \mathbb{F} \}$,

$Aut(A_2(\lambda)) = \{I_3\}$,

$Der(A_3) = \{a \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{F} \}, Aut(A_3) = \{ \begin{pmatrix} 1/t & 0 & 0 \\ 1-1/t & 1 & 0 \\ 1/t-1 & t-1 & t \end{pmatrix} : \ t \in \mathbb{F}^* \}$,

$Der(A_4(\lambda)) = \{a \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{F} \}$, *where* $\lambda \neq -1$,

$Aut(A_4(\lambda)) = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1/t \end{pmatrix} : \ t \in \mathbb{F}^* \}$, *where* $\lambda \neq -1$,

$Der(A_5) = \{a \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \ a \in \mathbb{F} \}$,

$Aut(A_5) = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{F} \} \cup \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & t \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{F} \}$.

$Der(A_7(\lambda)) = \{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b(1-\lambda) & a & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \ a, b \in \mathbb{F} \}$,

$Aut(A_7(\lambda)) = \{I_3\}$, *if* $\lambda \neq 0$, $Aut(A_7(0)) = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \ t \in \mathbb{F}^* \}$.

证明包括求解关于三阶矩阵 X 的方程 $XA = A(X \otimes I + I \otimes X)$（自同构情形下则求解 $XA = A(X \otimes X)$），其中在自同构情形下要求该矩阵可逆； A 是定理 2.6 中列出的一个典范代表。

References

[1] Yuji Kobayashi、Kiyoshi Shirayanagi、Sin-Ei Takahasi、Makoto Tsukada. 代数闭域上的三维零幂代数分类, (2017), *Communications in Algebra* 45(12), 5037-5052。

[2] Fowler-Wright, A. (2014). 三维李代数的分类。学位论文。考文垂：华威大学。[3] J. Patera、P. Winternitz, (1977)，实三维和四维李代数的子代数， *Journal of Mathe-matical Physics*，18(7)，1449–1455。