融合置换代数与退化仿射Hecke代数

DEMESMAY Yoann

兰斯数学实验室 UMR 9008，兰斯香槟-阿登大学，Moulin de la Housse BP 1039，51100 兰斯，法国。

电子邮箱地址：

yoann.demesmay-michaud@univ-reims.fr

arXiv:2512.15272v1 [math.RT] 17 Dec 2025

2025年12月18日

摘要

本文给出了单边界情形下一种称为融合置换代数的代数表示。该代数是通过对退化分圆 Hecke 代数的详细研究得到的。特别地，我们证明了融合置换代数是退化分圆仿射Hecke代数的一个商，并且还利用带符号排列及其避免模式，对一个基进行了组合描述。为了理解这个商，我们研究了该退化分圆仿射Hecke代数的本原幂等元。

1 引言

对称群 $\mathfrak{S}_n$ 出现在舒尔–韦伊对偶 [1] 中，用于描述线性群 GL_N的向量表示的张量幂的中心化子。设 V 为一个维数为 N的向量空间，则存在一个满态射：

$$\mathbb{C}\mathfrak{S}_n \longrightarrow End_{GL_N}(V^{\otimes n}).$$

对称群代数 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ 不依赖于 N，并且对于任意 N，它在GL_N 中发挥相应作用。中心化子对 N 的依赖性体现在上述映射的核的描述中。事实上，对于给定的 N，当 $n \geq N+1$时， GL_N 的中心化子同构于 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$除以定义在 $N+1$个点上的反对称化子所得的商：

$$\sum_{\delta \in \mathfrak{S}_{N+1}} (-1)^{\ell(\delta)}\delta \in \mathbb{C}\mathfrak{S}_{N+1} \subset \mathbb{C}\mathfrak{S}_n.$$

其中， ℓ 是定义在考克斯特生成元上的长度函数，见 [6]。该反对称化子是 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_{N+1}$ 的极小中心幂等元（当 $n \leq N$时商是平凡的），并且对于任意 $n \geq N+1$都生成其核。因此，我们得到了 $V^{\otimes n}$上的 GL_N 中心化子的一个显式代数描述。

我们希望将这一结果推广到一种称为融合置换代数的新代数。后者正是为此目的在 [4] 中引入的。对于 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，我们有一个满态射：

$$H_{k,n} \longrightarrow End_{GL_N}(S^k(V) \otimes V^{\otimes n}),$$

其中， $S^k(V)$ 是 k 阶对称幂，$H_{k,\,n}$ 被称为融合置换代数。同样，代数 $H_{k,\,n}$ 不依赖于 N，并且当 N 足够大时恰好就是中心化子。中心化子对 N 的依赖性体现在满射映射的核中，该映射的显式描述已在 [4] 中提出猜想，并在

某些情形下得到证明，其中包括本文将研究的情形。因此，剩下要做的就是找出融合置换代数 $H_{k,\ n}$ 的显式代数描述。

融合置换代数可以通过融合 Hecke 代数得到，后者是前者的平坦变形。文献 [5] 通过将其与分圆 Hecke 代数联系起来研究了这一代数；分圆 Hecke 代数是型 A 仿射 Hecke 代数的一个商。

本文的第一个主要目标是给出融合置换代数 $H_{k,\ n}$ 的代数表示，以及以型 B 组合对象为指标的一个基。

本文的第二个主要目的源自第一个目的，即研究分圆退化仿射 Hecke 代数的本原幂等元。事实上，该代数的本原正交幂等元完全集的构造早已为人熟知（见 [3]），而我们将这一构造的某些特殊情形“线性化”。换言之，我们给出了这些特殊幂等元在该代数某个特定基上的分解。

现在我们将更准确地介绍本文所涉及的代数。

代数 $H_{k,\ n}$。 融合置换代数 $H_{k,\ n}$ 可以从不同角度来理解。我们在第二节中介绍两种方法。一种是将该代数视为以图为基、并配有某种乘法的代数。另一种方法更具代数性，即将其视为 $k+n$ 元对称群代数的某个子代数。更准确地说，我们考虑代数 $P_k\mathbb{C}\mathfrak{S}_{k+n}P_k$，其中 P_k 是 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_k$ 的极小中心幂等元，称为 k 点上的对称化子，并通过包含 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_k \subset \mathbb{C}\mathfrak{S}_{k+n}$ 将其视为 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_{k+n}$ 中的一个元素。这两种构造作为代数是同构的。我们对其表示论已有很好的了解。具体而言，该代数是半单的，其不可约表示以第一分量大于 k 的分拆 $\lambda \vdash k+n$ 为指标。

代数 $\hat{\mathcal{H}}^{(\kappa_1,\kappa_2)_n}$。 我们考虑定义在 $\mathbb{C}$ 上的分圆退化仿射 Hecke 代数 $\hat{\mathcal{H}}^{(\kappa_1,\kappa_2)_n}$。参数 κ_1 和 κ_2 对应于多项式生成元 x_1 的特征值。代数 $\hat{\mathcal{H}}^{(\kappa_1,\kappa_2)_n}$ 有一个以带符号排列为指标的标准基，并且其表示理论也已得到很好的理解。具体而言，该代数的半单性由数值 κ_1，κ_2 和 n 刻画。此外，在半单情形下，不可约表示由 n 的双分拆标记。在这些不可约表示中，有四个是一维的，分别对应于以下双分拆：

$$\underset{(1,\kappa_1)}{(\square\ldots\square,\emptyset)},\qquad \underset{(-1,\kappa_1)}{\left(\begin{smallmatrix}\square\\ \vdots\\ \square\end{smallmatrix},\emptyset\right)},\qquad \underset{(1,\kappa_2)}{(\emptyset,\square\ldots\square)},\qquad \underset{(-1,\kappa_2)}{\left(\emptyset,\begin{smallmatrix}\square\\ \vdots\\ \square\end{smallmatrix}\right)}.$$

上述每个一维表示都对应于生成元特征值的一种选择，如上所示。此外，第三节将研究与这些表示对应的极小中心幂等元的显式表达式。这些幂等元记作 $F^{(\alpha_1,\alpha_2)_n}$，其中（$\alpha_1$，$\alpha_2$）是相应的特征值，并且它们对我们所有的构造都至关重要。

代数 $\mathcal{A}_n^\kappa$。 代数 $\mathcal{A}_n^\kappa$ 是通过对 $\hat{\mathcal{H}}^{(\kappa_1,\kappa_2)_n}$ 取商，消去幂等元 $F^{(-1,\kappa_2)\ 2}$ 而得到的。这个商是第三节的主要研究对象之一。根据其定义，代数 $\mathcal{A}_n^\kappa$ 的不可约表示自然地由一类双分拆来标记，其中第二个分量是单行分拆。我们的第一个主要结果是，代数 $\mathcal{A}_n^\kappa$ 有一个由避免模式的带符号排列构成的基。

代数 $\mathcal{A}_n^{\kappa\ (k)}$。 最后一节主要致力于融合置换代数 $H_{k,\ n}$ 的代数描述。为此，我们将代数 $\mathcal{A}_n^{\kappa\ (k)}$ 定义为$\mathcal{A}_n^\kappa$ 关于 $F^{(1,\kappa_1)\ k+1}$ 的商。本节的主要结果是，当我们赋予不定元 κ_1 和 κ_2 特定值时，代数$\mathcal{A}_n^{\kappa\ (k)}$ 与$H_{k,\ n}$ 同构。这由此给出了融合置换的表示

代数的生成元与关系表示。此外，还给出了$\mathcal{A}_n^{\kappa\ (k)}$, 的一个基，该基由避免模式的带符号排列构成。

因此，本文涉及的所有代数都是通过对上述某些幂等元取商得到的，如下图所示：

$$\hat{\mathcal{H}}_n^{(\kappa_1,\kappa_2)} \xrightarrow{F_2^{(-1,\kappa_2)}} \mathcal{A}_n^{\kappa} \overset{F_{k+1}^{(1,\kappa_1)}}{\dashrightarrow} \mathcal{A}_n^{\kappa,(k)} \cong H_{k,n} \qquad \left(\begin{array}{l} \kappa_1 = 0 \\ \kappa_2 = k+1 \end{array} \right).$$

实线表示真正的商，而虚线表示与参数特化相结合的商 κ_1， κ_2 如图所示。

致谢： 我要感谢我的导师 Loïc Poulain d'Andecy 将我引入这些研究领域，感谢他进行了许多有益的讨论，提出了宝贵的意见并给予支持，一路指导我走到现在。

内容

1 引言

1 2 融合置换代数 32.1 组合定义.3 2.2 代数定义.5

3 分圆退化仿射 Hecke 代数 8

3.1 定义与性质.8 ˆ 3.2 代数 $\mathcal{H}_n^{\kappa}$ 的表示.12 ˆ 3.3 代数 $\mathcal{H}_n^{\kappa}$ 的幂等元.14

4 与融合置换代数的联系 21

4.1 $\mathcal{H}_{n,k}^{\kappa}$ 作为一个商 ˆ.21 4.1.1 通过表示论.21 4.1.2 通过代数构造.23 4.2 $n \leq k$ 的情形.27 4.3 $n > k$ 的情形.31

2 融合置换代数

本节基于 [4] ，更多详情请参阅该文献。

2.1 组合定义

多重集 是由一对 $(E,\ m)$ 给定的数据，其中 E 是一个集合， $m:\ E \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 是一个函数。

换句话说，多重集是一种会将可能的重复项纳入考虑的集合。与集合一样，顺序并不重要。我们将用双大括号表示多重集。

例如，$\{\{4,\ 4,\ 3,\ 4,\ 1,\ 2,\ 1\}\}$ 是一个包含$\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$中元素的多重集。该函数为 $m(1) = 2,\quad m(2) = 1,\quad m(3) = 1,\quad m(4) = 3$。

令 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $k \geq 1$。

定义 2.1. 集合 $S_{k,n}$ 由所有满足以下条件的序列 $(S_1, \ldots, S_{n+1})$ 组成：

- S_1 是一个多重集，包含 k 个来自 $\{1, \ldots, n+1\}$ 的元素。
- 集合 $\{S_i\}_{i\in\{2,\ldots,n+1\}}$ 是 $\{1, \ldots, n+1\}$ 中元素的单元素集合。
- 元素 1 在 $S_1, \ldots, S_{n+1}$ 中出现 k 次，而 $2, \ldots, n+1$ 在 $S_1, \ldots, S_{n+1}$ 中各出现一次。

$S_{k,\ n}$ 称为一个融合置换。

For example, for $n = k = 2$, $(\{\{1,3\}\}, \{\{1\}\}, \{\{2\}\}) \in S_{2,2}$.

图示表示 我们可以用一种更几何化的方式来看待这些对象。

我们固定两行各含 $n+1$ 个点的水平线，一上一下。将上方水平线上的点与下方水平线上的点连接，并施加以下条件：

有 k 条边从上方的第一个点出发，同样，有 k 条边到达下方的第一个点。

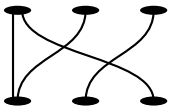
对于 $a=2$、$\ldots$、$n+1$，恰有一条边从第 a 个点出发，且恰有一条边到达第 a 个点。

我们注意到，边的总数为 $k+n$ 条。

这样的图对应于一个融合置换，方式如下。多重集 S_1 对应于从第一个点到达的下方各点。同样，单元素集合 S_a、$a \geq 2$ 对应于与上方第 a 个点相连的点。

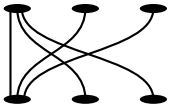
例 2.2. • 设 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $k = 1$。由于所施加的条件，融合置换很容易被视为 $n+1$ 个元素上的一个置换。因此，$S_{k,\ n}$ 确实是 $\mathfrak{S}_{n+1}$ 的推广。

- 对于 $n = k = 2$，我们有 $Card(S_{k,\ n}) = 7$。例如：

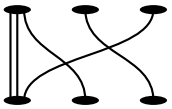


$corresponds\ to\ (\{1,3\},\{1\},\{2\}).$

- 对于 $n = 2$ 和 $k = 3$，例如有 $\quad :$



对应于 ({1, 2,3}, {1}, {1})。



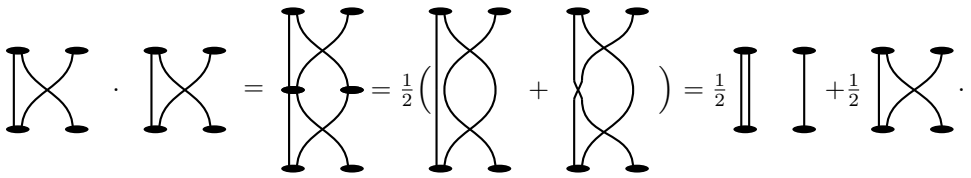
对应于 ({1, 1,2}, {3}, {1})。

融合置换的乘法 现在我们将基于集合 $S_{k,\ n}$定义一个（结合的）代数，其底层向量空间是 $\mathbb{C}$ 上的向量空间，其基由 $S_{k,\ n}$索引。为了赋予它代数结构，还需在这个基上定义一种乘法（结合且有单位元）。令 $d,\ d' \in S_{k,\ n}$ 与其对应的图相对应。我们分三步进行：

- 拼接：将 d 的图置于 d的图上方，并将 d 的底线与 d的顶线重合。

- 中间点消去：中间行的第一个点有 k 条边进入，有 k 条边离开。接下来，我们移除中间行的第一个点，并对所有可能的连接方式求和，即将从该点进入的 k 条边与离开的 k 条边相连接（因此共有 $k!$ 种可能）。对于中间行中的其他点，每个点都有一条边进入、一条边离开：我们将这两条边连接起来（每个点只有一种可能）。
- 归一化：我们将结果除以可能方式的数量，即 $k!$。

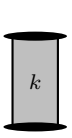
例如，设 $n = 1$ 和 $k = 2$。下面来看 $S_{2,1}$ 中两个元素相乘的详细示例：



上面定义的代数$H_{k,n}$ 称为**融合置换代数**。它显然是结合的，也是含幺代数：事实上，

$$1_{H_{k,n}} := (\{\underbrace{1,\ldots,1}_{k\ \text{times}}\},\{2\},\ldots,\{n+1\})$$

是$H_{k,n}$ 的单位元，其对应的图为：

$\mathbf{1} :=$  ，

(2.1)

其中，阴影区域对应于 k 竖直平行边。

命题 2.3. 代数$H_{k,n}$ 的维数为：

$$\dim(H_{k,n}) = \sum_{i=0}^{\min(k,n)} \binom{n}{i}^2 (n-i)!. \tag{2.2}$$

证明。 代数$H_{k,n}$ 的一组基由这些图表给出，因此只需计算不同图表的数量。

设 $i \in \{0, \ldots, \min(k,n)\}$ 表示从上方第一个点出发并到达最后 n 个点的边数。此外，还必须有 i 条边将底部第一个点与顶部最后 n 个点相连。这给出了将这些 i 条边分配到顶部和底部的 n 个点上的选择。最后，对于顶部和底部剩余的 $n-i$ 个点，可以选择将它们相连，即有 $(n-i)!$ 种选择。因此，对于每个 i, $i = 0, \ldots,$ $\min(k,n)$，图表的数量为.....，对所有 i 求和即可得到结果。

□

2.2 代数定义

回顾一下，对称群 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ 的代数是一个 $\mathbb{C}$-代数，其基由 $\mathfrak{S}_n$的元素索引。此外，存在自然的包含 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n \subset \mathbb{C}\mathfrak{S}_{n+1}$，其中 $\mathfrak{S}_n$ 的元素（ $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$的基的元素）在 $\mathfrak{S}_{n+1}$ 中被视为作用于前 n 个元素的同一个置换，而 $n+1$ 保持不变。

我们定义 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_k$的一个元素，称为**对称化子**：

$$P_k := \frac{1}{k!} \sum_{\omega \in \mathfrak{S}_k} \omega \in \mathbb{C}\mathfrak{S}_k. \tag{2.3}$$

这个元素是 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_{k+n}$ 的一个幂等元（即 $P_k^2 = P_k$）。此外，对于 i =1，.....，$k-1$，将 δ_i 视为交换 i和 $i+1$ 并固定其他点的对换，我们有 $\delta_i P_k = P_k \delta_i = P_k$。

定义 2.4。 我们定义代数：

$$\mathcal{H}_{k,n} := P_k \cdot \mathbb{C}\mathfrak{S}_{k+n} \cdot P_k, \tag{2.4}$$

其中 P_k 被视为 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_{k+n}$的一个元素。

注记 2.5. 代数 $H_{k,\ n}$ 是 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_{k+n}$ 的一个子代数，其单位元为 P_k （不包含 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_{k+n}$的单位元）。

命题 2.6. *[4,*命题 *2.4]*

代数 $H_{k,\ n}$ 和 $H_{k,\ n}$ 同构。

这里我们只给出该同构的描述。对于 $\omega \in \mathfrak{S}_{k+n}$，我们将 ω 视为由两行 $k+n$ 个点组成的图，这些点根据置换 ω 通过边连接（第 i个底部点与第 $\omega(i)$ 个顶部点相连）。 $\mathfrak{S}_{k+n}$ 中的乘法就是图的拼接。

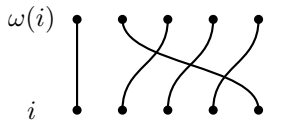
然后，在 $\omega \in \mathfrak{S}_{k+n}$的图中，我们将两行点中每行的前 k个点粘合成一个椭圆。我们用 $[\omega]$ 表示对应的融合置换 $S_{k,\ n}$及其图示表示。

于是，我们有如下映射：

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{H}: & \mathcal{H}_{k,n} & \longrightarrow & H_{k,n} \\ & P_k \omega P_k & \longmapsto & [\omega] \end{array} \tag{2.5}$$

这是一个代数同构。

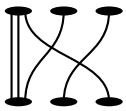
例如，令 $n = 2$和 $k = 3$。给定 $\omega = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$，其对应的图为：



$\in \mathfrak{S}_{3+2\circ}$

将两行中各自的前三个点粘合起来，我们得到：

$$\mathbf{H}(P_k\omega P_k) = [\omega] = \quad \in H_{3,2}.$$



我们注意到，对于固定的 k，代数 $H_{k,\ n}$ 随着 n 的变化构成一条代数链：

$$\mathbb{C} = H_{k,0} \subset H_{k,1} \subset H_{k,2} \subset \cdots \subset H_{k,n} \subset H_{k,n+1} \subset \cdots .$$

包含由图的自然包含给出（在右侧添加一条竖直边）。

半单代数。关于本段及下文的更多细节，请参见 [11] 和 [1]。

称域 $\mathbb{C}$上的有限维代数 $\mathfrak{A}$是**半单的**，如果每个 $\mathfrak{A}$ 上的有限维模（即，$\mathfrak{A}$的每个有限维表示）都可以分解为简单模的直和（即不可约表示）。

因此，要理解 $\mathbb{C}$上的有限维半单代数的表示论，只需研究它的不可约表示。此外，代数的结构由其不可约表示集所编码。事实上，我们有以下定理，它是 Artin–Wedderburn 定理的一个特例，参见 [1, §3.3]：设 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathbb{C}$上的有限维半单代数。那么存在一个代数同构：

$$\mathfrak{A} \cong \bigoplus_k \mathrm{End}(V_k), \tag{2.6}$$

其中直和遍历 $\mathfrak{A}$的两两不同构的不可约表示 V_k 。我们用 $Irr(\mathfrak{A})$表示 $\mathfrak{A}$的不可约表示在模同构意义下的等价类代表元集合。该同构自然地通过将 $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$ 映射到 $\mathfrak{a}$ 在 V_k上的作用所对应的 $End(V_k)$中的自同态来给出。

因此，有限维半单代数是一个**多矩阵代数**，这意味着它分解为矩阵代数的直和。根据该定理，每个元素 $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$ 都可以通过上述同构视为一个大小为$\sum_k \dim(V_k)$的分块对角矩阵；每个对角块对应于直和中的一项，并且是 $\mathfrak{a}$在投影到 $\mathrm{End}(V_k)$下的像。

半单代数链的布拉泰利图。**A代数链**是由$(\mathfrak{A}_n, \iota_n)_{n\geq 0}$ 构成的数据，其中对于 $n \geq 0$，$\mathfrak{A}_n$ 是一个代数，且 $\iota_n : \mathfrak{A}_n \hookrightarrow \mathfrak{A}_{n+1}$是代数的单射态射。

考虑$\{\mathfrak{A}_n\}_{n\geq 0}$，这是一个有限维半单代数链。

给定 V_i $\mathfrak{A}_{n+1}$的一个不可约表示，将其限制到 $\iota_n(\mathfrak{A}_n)$上的 V_i ，记作 $Res_{\mathfrak{A}_n}(V_i)$。根据代数的半单性，它可分解为不可约表示的直和：

$$Res_{\mathfrak{A}_n}(V_i) \cong \bigoplus_{i\in I} m_i W_i$$

其中，I 表示 $Irr(\mathfrak{A}_n)$的一个子集，$\{W_i\}_{i\in I}$ 是 $\mathfrak{A}_n$的两两不同构的不可约表示，而$(m_i)_{i\in I}$ 称为重数。

代数链$\{\mathfrak{A}_n\}_{n\geq 0}$ 的**布拉泰利图**是由以下内容定义的图：

- 一个按 $n \geq 0$索引的子集划分的顶点集合。我们称 n 为图的**层**。第 n 层的顶点由 $Irr(\mathfrak{A}_n)$索引。
- 边只连接相邻层之间的顶点。设 V是 $\mathfrak{A}_n$ 的一个不可约表示，V' 是 $\mathfrak{A}_{n+1}$的一个不可约表示。当且仅当 V以重数 m出现在分解 $Res_{\mathfrak{A}_n}(V')$ 中时，索引为 V 和 V' 的顶点之间才有 m 条边。

在图中，同一层的所有顶点都排列在一条水平线上，层 $n+1$ 的顶点置于层 n的顶点下方。

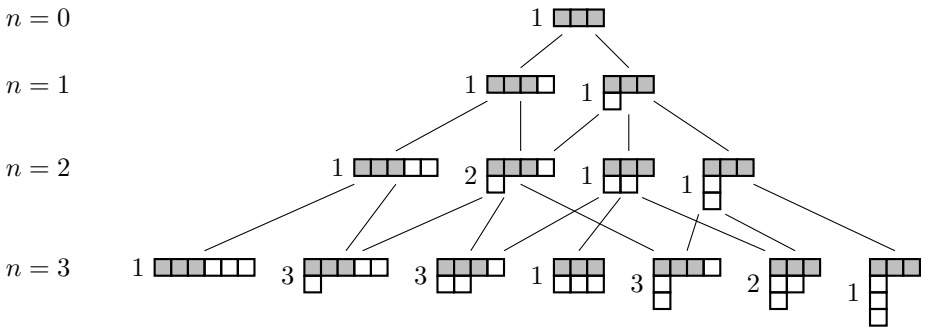
阿廷-韦德伯恩分解$H_{k,\ n}$。 设 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $k \geq 1$。

我们知道，代数 $H_{k,\ n}$ 是半单的，其不可约表示已在 [4]中描述。它们由分拆 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \vdash k+n$ 标记，其中 $\lambda_1 \geq k$ （也就是说， λ 的第一行至少包含 k 个方格）。例如，对于$n = 0$，只有一个不可约表示，由一行 k 个方格标记。我们定义 $Irr(H_{k,n}) := \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \vdash k+n \mid \lambda_1 \geq k\}$，并将其不可约表示记为 U_λ, $\lambda \in Irr(H_{k,n})$。

于是，我们得到 $H_{k,\ n}$ 的以下阿廷-韦德伯恩分解（见 [4,定理 6.5]）：

$$H_{k,n} \simeq \bigoplus_{\lambda \in Irr(H_{k,n})} End(U_\lambda). \tag{2.7}$$

分支规则由分拆的包含关系给出。例如，当 $k = 3$时，布拉泰利图的开头如下：



我们将每个分拆第一行中的三个固定方格涂了阴影。每个分拆旁边标出了相应不可约表示的维数。需要强调的是，严格来说，维数并非标准杨表的数量，而是用 $1, \ldots\ldots, n$ 填充未涂阴影方格所得的标准填充数量。

我们需要更精确地说明 U_λ, $\lambda \in Irr(H_{k,\ n})$ 的维数。

固定 $p,\ l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。

满足 $\nu_1 + \ldots + \nu_l = p$ 的非负整数序列 $\nu = (\nu_1, \ldots\ldots, \nu_l)$ 称为 p 的**组合**。我们称 $|\nu|$ 的**大小**等于 p。对于 ν，即使在其末尾添加若干个等于 0 的部分所得的同一序列，我们也不作区分。

如果数字沿杨表的**行**弱递增、沿列严格递增，则称该杨表为**半标准**杨表。

令 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $k \geq 1$。

令 $\mathbf{t}$ 为一个大小为 $k+n$ 的杨表，其表项取值于 $\{1, 2, \ldots, n+1\}$。对于 $a = 1, \ldots, n+1$，令 ν_a 表示整数 a 在杨表 $\mathbf{t}$ 中出现的次数。序列 $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_{n+1})$ 构成 $k+n$ 的一个**组合**。我们称$\mathbf{t}$ 为一个**权**为 ν 的杨表。

给定 $\lambda \vdash k+n$，我们定义：

$$SSTab(\lambda, k) = \{\text{semistandard Young tableaux of shape } \lambda \text{ and weight } (k, 1, \ldots, 1)\}.$$

于是有如下等式（[4, 定理 6.5]）：

$$\dim(U_\lambda) = |SSTab(\lambda, k)|.$$

例如，对于 $n = 2$ 和 $k = 3$，恰好存在两个权为 $(3,1,1)$ 的半标准杨表：

1	1	1	2
3			

and

1	1	1	3
2			

因此，对于 $\lambda = (4,1) \vdash 3+2$，我们有维数$(U_\lambda) = 2$。

3 分圆退化仿射 Hecke 代数

更多详情请参阅本节的 [2] 或 [3] 。

3.1 定义与性质

令 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。固定一对 $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2) \in \mathbb{C}^2$。

定义 3.1. 参数为 κ 的分圆退化仿射 ***Hecke*** 代数是含幺结合代数 H_n^κ，由 $x_1, x_2, \ldots, x_n$（*Jucys–Murphy* 元）和 $s_1, \ldots, s_{n-1}$（*Coxeter* 元）生成，并满足以下关系：

$$(x_1 - \kappa_1)(x_1 - \kappa_2) = 0, \tag{3.1}$$

$$x_r s_\ell = s_\ell x_r \quad \textit{for} \quad r \neq \ell, \ell+1, \tag{3.2}$$

$$x_r x_t = x_t x_r, \quad r, t = 1, \ldots, n, \tag{3.3}$$

$$x_{r+1} = s_r x_r s_r + s_r, \quad r = 1, \ldots, n-1, \tag{3.4}$$

$$s_k^2 = 1 \quad \textit{for} \quad k = 1, \ldots, n-1, \tag{3.5}$$

$$s_i s_j = s_j s_i \quad \textit{if} \quad |i-j| > 1, \tag{3.6}$$

$$s_k s_{k+1} s_k = s_{k+1} s_k s_{k+1} \quad \textit{for} \quad k = 1, \ldots, n-2. \tag{3.7}$$

ˆ 按照惯例，我们有 $\mathcal{H}_0^\kappa = \mathbb{C}$。

可以看出，关系 (3.4) 表明该代数由 x_1，$s_1, \ldots, s_{n-1}$生成，但为方便起见，我们保留生成元 $x_2, \ldots, x_n$。稍后将给出该代数的另一种表示，其中仅使用这些生成元，且定义关系更少。

显然，该代数不依赖于对 κ 中各元素的排列顺序。

ˆH$_n^\kappa$ 的基本性质 。 我们先给出 ˆ$\mathcal{H}_n^\kappa$ 的另一种表示，这将在最后一节中派上用场。

命题 3.2。 *[2,* 命题 *7.8*。*1]*

代数由 x_1 和ˆ $s_1, \ldots, s_{n-1}$生成，且仅满足以下关系：

$$(x_1 - \kappa_1)(x_1 - \kappa_2) = 0, \tag{3.8}$$

$$x_1 s_\ell = s_\ell x_1 \quad (2 \leq \ell \leq n-1), \tag{3.9}$$

$$x_1(s_1 x_1 s_1 + s_1) = (s_1 x_1 s_1 + s_1) x_1, \tag{3.10}$$

$$s_k^2 = 1, \quad s_k s_m = s_m s_k, \quad s_k s_{k+1} s_k = s_{k+1} s_k s_{k+1}, \tag{3.11}$$

对所有满足 $|k-m| > 1$ 的可容许 k, m，均成立。

对于 $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$，定义 $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$。

回忆一下，$\mathfrak{S}_n$ 是由 n 个元素组成的对称群。对于 $1 \leq r < n$，令 $\delta_r := (r, r+1)$ 表示交换 r 和 $r+1$、并固定其他点的对换。于是，$\{\delta_1, \ldots, \delta_{n-1}\}$ 是 $\mathfrak{S}_n$ 的标准考克斯特生成元集合。元素 $\omega \in \mathfrak{S}_n$ 的一个**约化表达式** 是一个最短词 $\omega = \delta_{r_1} \ldots \delta_{r_k}$，其中 $1 \leq r_j < n$ 且 $1 \leq j \leq k$。若 $\omega = \delta_{r_1} \ldots \delta_{r_k}$ 是约化的，则定义 $s_\omega := s_{r_1} \ldots s_{r_k}$。根据松本引理，$s_\omega$ 与所选的约化表达式无关（参见 [6], 定理 1.2.2），因为辫关系在 ˆ$\mathcal{H}_n^\kappa$中成立。

一个重要的结果是，集合：

$$\{x^\alpha s_\omega \mid \alpha \in \{0,1\}^n, \omega \in \mathfrak{S}_n\} \tag{3.12}$$

是 ˆ$\mathcal{H}_n^\kappa$ 的一组基（参见（[2, 定理 7.5.6]）。

特别是，$\hat{\mathcal{H}}_n^\kappa$ 的维数为：

$$\dim(\hat{\mathcal{H}}_n^\kappa) = 2^n n!. \tag{3.13}$$

ˆ ˆ 对于 $n \geq 2$，我们自然地将 $\mathcal{H}_{n-1}^\kappa$ 视为由$x_1, \ldots, x_{n-1}$和 $s_1, \ldots, s_{n-2}$生成的 $\mathcal{H}_n^\kappa$ 的子代数。例如，基 (3.12) 的知识使这成为可能。

ˆ 接着，对于固定的 k，当 n 变化时，代数$\mathcal{H}_n^\kappa$ 构成一条代数链：

$$\mathbb{C} = \hat{\mathcal{H}}_0^\kappa \subset \hat{\mathcal{H}}_1^\kappa \subset \hat{\mathcal{H}}_2^\kappa \subset \cdots \subset \hat{\mathcal{H}}_n^\kappa \subset \hat{\mathcal{H}}_{n+1}^\kappa \subset \cdots .$$

ˆ 此外，我们可以看到， $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ 既是$\mathcal{H}_n^\kappa$的子代数，也是其商。事实上，根据（3.12），具有 $\alpha = (0, \ldots, 0)$的基元素构成一个与 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$同构的子代数的基。

现在定义映射：

$$\begin{array}{rccc} \pi: & \hat{\mathcal{H}}_n^\kappa & \longrightarrow & \mathbb{C}\mathfrak{S}_n \\ & s_i & \longmapsto & \delta_i \\ & x_1 & \longmapsto & 0 \end{array} \tag{3.14}$$

对于 $i = 1, \ldots, n-1$。

这是一个代数同态（关系在 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$中显然成立）。满射性是显然的，因为初等换位生成对称群的群代数，从而生成该商。

注记 3.3。（*3.14*）中的态射 π 将 x_k 映射为 $J_k := \sum_{i=1}^{k-1} (i, k)$，其中 $k = 2, \ldots, n$是 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$的 ***Jucys–Murphy*** 元，以其优雅的性质而闻名（见 *[9]* 或 *[7]*）。

ˆ代数 $\mathcal{H}_n^\kappa$ 称为 2 层分圆 Hecke 代数，因为关系 (3.8) 是 x_1 的二次特征关系。关于下文回顾的 ˆ$\mathcal{H}_n^\kappa$，参见例如 [2]。

ˆ我们将看到，代数 $\mathcal{H}_n^\kappa$ 有一个以 B_n 型 Coxeter 群的元素为标记的基。我们将滥用记号，并用 B_n 表示这个 Coxeter 群。其元素可以看作带符号排列，即集合 $\{-n, -n+1, \ldots, -1, 1, 2, \ldots, n\}$ 上的那些置换，使得对所有 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$， $\omega(-i) = -\omega(i)$。我们可以用词 $b = b_1 b_2 \ldots b_n$ 表示 B_n 的元素，其中数字 $1, 2, \ldots, n$ 各出现一次，并且可能带有上划线（参见例如 [8]）。在这种表示中， b_i 是 i 在 ω 下的像，其中上划线记号表示负号。群 B_n 包含 $n!2^n$ 个元素。

我们用 τ_i 表示 B_n 中 i 与 $i+1$ 的对换（因此也会对换 $-i$ 与 $-(i+1)$），用 τ_0 表示 -1 与 1 的对换。群 B_n 由 τ_i 生成，并满足 $i = 0$、.....、$n-1$，且仅受以下关系约束（参见例如 [6]）：

$$\tau_i^2 = 1, \tag{3.15}$$

$$\tau_k \tau_{k+1} \tau_k = \tau_{k+1} \tau_k \tau_{k+1}, \quad \tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i, \quad \tau_0 \tau_1 \tau_0 \tau_1 = \tau_1 \tau_0 \tau_1 \tau_0, \tag{3.16}$$

对所有满足 $|i-j| > 1$ 的可取 $k = 1$、.....、$n-1$、 i、 $j = 0$、.....、$n-1$。

以下集合的乘积（其中两个集合 $A \cdot B$ 的乘积理解为 $A \cdot B = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$）为群 B_n 的元素提供了一个标准形（[8,第一部分]）：

$$\left\{ \begin{array}{l} 1, \\ \tau_0 \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1, \\ \tau_1, \\ \tau_1\tau_0, \\ \tau_1\tau_0\tau_1 \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1, \\ \tau_2, \\ \tau_2\tau_1, \\ \tau_2\tau_1\tau_0, \\ \tau_2\tau_1\tau_0\tau_1, \\ \tau_2\tau_1\tau_0\tau_1\tau_2 \end{array} \right\} \cdot \ \ldots \ \cdot \left\{ \begin{array}{c} 1, \\ \tau_{n-1}, \\ \vdots \\ \tau_{n-1} \ldots \tau_1\tau_0, \\ \tau_{n-1} \ldots \tau_1\tau_0\tau_1, \\ \vdots \\ \tau_{n-1} \ldots \tau_1\tau_0\tau_1 \ldots \tau_{n-1} \end{array} \right\}. \tag{3.17}$$

对于以标准形 (3.17) 写出的元素 $\omega \in B_n$ $\omega = \tau_{i_1}\tau_{i_2}\ldots\tau_{i_k}$，令 $k \geq 0$ 和 ˆ 表示 $s_0 := x_1$，我们在 $\mathcal{H}_n^\kappa$ 中设定 $s_\omega = s_{i_1} \ldots s_{i_k}$。

我们为 $0 \leq m \leq n$ 引入以下记号：

$$[n, m] = s_n \ldots s_{m+1} s_m, \quad [n, 0] = s_n \ldots s_1 x_1, \qquad [n, -m] = s_n \ldots s_1 x_1 s_1 \ldots s_m.$$

我们考虑以下集合的乘积：

$$\left\{\begin{array}{c}1,\\ x_1\end{array}\right\}\cdot\left\{\begin{array}{c}1,\\ s_1,\\ s_1x_1,\\ s_1x_1s_1\end{array}\right\}\cdot\left\{\begin{array}{c}1,\\ s_2,\\ s_2s_1,\\ s_2s_1x_1,\\ s_2s_1x_1s_1,\\ s_2s_1x_1s_1s_2\end{array}\right\}\cdot\ldots\cdot\left\{\begin{array}{c}1,\\ s_{n-1},\\ \vdots\\ s_{n-1}\ldots s_1x_1,\\ s_{n-1}\ldots s_1x_1s_1,\\ \vdots\\ s_{n-1}\ldots s_1x_1s_1\ldots s_{n-1}\end{array}\right\}. \quad (3.18)$$

可以看出，(3.18) 中的元素恰好是以其标准形 (3.17) 写出的 s_ω for $\omega \in B_n$ 。

那么，上述乘积中出现的元素具有以下形式：

$$[n_1,m_1]\ldots[n_k,m_k],\ \text{with } 0\le n_1<n_2<\cdots<n_k\le n-1,\ \text{and } |m_i|\le n_i. \quad (3.19)$$

命题 3.4. (3.19) 中的元素构成代数 $\hat{H}_n^\kappa$的一组基。

证明. 我们证明这些元素张成向量空间 $\mathcal{H}_n^\kappa$。
为此，我们需要以下引理：

引理 3.5. H_n^κ 的每个元素都可以写成形如 $\omega[n-1,j]$ 的元素的线性组合，其中 $\omega\in\hat{H}_{n-1}^\kappa$，且 $|j|\le n-1$。

证明. 我们验证将元素 $\omega[n-1,j]$ 右乘代数 $x_1,s_1,\ldots,s_{n-1}$的生成元后，所得结果是相同形式元素的线性组合。

令 $p\in\{1,\ldots n-1\}$，并取满足 $j\le n-1$的 $j\in\mathbb{N}$。
我们考虑不同的情形：

- 用 s_p 乘：我们使用辫关系和交换关系。

(a) 情形 $p>j+1$：我们有：

$$\omega[n-1,-j]s_p=\omega s_{n-1}\ldots s_ps_{p-1}s_p\ldots s_1x_1s_1\ldots s_j=\underbrace{\omega s_{p-1}}_{\in\hat{\mathcal{H}}_{n-1}^\kappa}[n-1,-j],$$

类似地，我们有：

$$\omega[n-1,j]s_p=\underbrace{\omega s_{p-1}}_{\in\hat{\mathcal{H}}_{n-1}^\kappa}[n-1,j].$$

(b) 情形 $p=j+1$：我们有：

$$\omega[n-1,-j]s_{j+1}=\omega[n-1,-(j+1)],\quad \omega[n-1,j]s_{j+1}=\underbrace{\omega s_j}_{\in\hat{\mathcal{H}}_{n-1}^\kappa}[n-1,j].$$

(c) 情形 $p=j$：我们得到：

$$\omega[n-1,-j]s_j=\omega[n-1,-(j-1)],\quad \omega[n-1,j]s_j=\omega[n-1,j+1].$$

(d) 情形 $p<j$：我们得到：

$$\begin{aligned}\omega[n-1,-j]s_p&=\omega s_{n-1}\ldots s_1x_1s_1\ldots s_ps_{p+1}s_p\ldots s_j\\&=\omega s_{n-1}\ldots s_{p+1}s_ps_{p+1}\ldots s_1x_1s_1\ldots s_j\\&=\underbrace{\omega s_p}_{\in\hat{\mathcal{H}}_{n-1}^\kappa}[n-1,-j],\end{aligned}$$

最后，我们得到：

$$\omega[n-1,j]s_p=\begin{cases}\omega[n-1,j-1] & \text{if } p=j-1,\\ \underbrace{\omega s_p}_{\in\hat{\mathcal{H}}_n^\kappa}[n-1,j] & \text{otherwise.}\end{cases}$$

- 乘以 x_1：对于 $j=0$，由于 $x_1^2=(\kappa_1+\kappa_2)x_1-\kappa_1\kappa_2$ 根据 (3.8)，我们有：

$$\begin{aligned}\omega[n-1,0]x_1&=\omega[n-1,1]x_1^2\\&=(\kappa_1+\kappa_2)\omega[n-1,0]-\kappa_1\kappa_2\omega[n-1,1].\end{aligned}$$

利用该代数的关系可得：

$$(s_1x_1)^2=(x_1s_1)^2+x_1s_1-s_1x_1. \tag{3.20}$$

然后，由 (3.20) 可得，对于 $j\geq 1$：

$$\begin{aligned}\omega[n-1,-j]x_1&=\omega(s_{n-1}\dots s_2s_1x_1s_1x_1s_2\dots s_j)\\&=\omega(s_{n-1}\dots s_2x_1s_1x_1s_1\dots s_j+s_{n-1}\dots s_2x_1s_1\dots s_j\\&\quad-s_{n-1}\dots s_1x_1s_2\dots s_j).\end{aligned}$$

我们可以将上一个等式右侧的元素改写为：

$$\omega s_{n-1}\dots s_2x_1s_1x_1s_1\dots s_j=\underbrace{\omega x_1}_{\in\hat{\mathcal{H}}_{n-1}^{\kappa}}[n-1,-j],$$

$$\omega s_{n-1}\dots s_2x_1s_1\dots s_j=\underbrace{\omega x_1s_1\dots s_{j-1}}_{\in\hat{\mathcal{H}}_{n-1}^{\kappa}}[n-1,1],$$

$$\omega s_{n-1}\dots s_1x_1s_2\dots s_j=\underbrace{\omega s_1\dots s_{j-1}}_{\in\hat{\mathcal{H}}_{n-1}^{\kappa}}[n-1,0].$$

最后，

$$\omega[n-1,j]x_1=\begin{cases}\omega[n-1,0] & \text{if } j=1,\\ \underbrace{\omega x_1}_{\in\hat{\mathcal{H}}_{n-1}^{\kappa}}[n-1,j] & \text{otherwise.}\end{cases}$$

□

利用该引理并通过直接归纳法，所描述的元素张成 $\hat{}\mathcal{H}_n^{\kappa}$。此外，对于每个 $k\in\{1,\dots,n\}$，集合

$$\left\{\begin{array}{c}1,\\ s_{k-1},\\ \vdots\\ s_{k-1}\dots s_1x_1,\\ s_{k-1}\dots s_1x_1s_1,\\ \vdots\\ s_{k-1}\dots s_1x_1s_1\dots s_{k-1}\end{array}\right\}$$

基数为 $2k$，因此对所有 $k\in\{1,\dots,n\}$ 取乘积，得到一个基数为 $2^n n!$ 的集合；根据 (3.13)，这等于 $\hat{}\mathcal{H}_n^{\kappa}$ 的维数。因此，该集合构成该空间的一组基。

□

因此，集合 (3.18) 的乘积构成代数 $\hat{}\mathcal{H}_n^{\kappa}$ 的一组基，而 $\hat{}$代数 $\mathcal{H}_n^{\kappa}$ 有一组以 B_n 型 Coxeter 群的元素标记的基，即集合 $\{s_\omega\}_{\omega\in B_n}$。

$\hat{}$**注 3.6.** 元素 $s_\omega\in H_n^{\kappa}$ 取决于 $\omega\in B_n$ 的约化形式。例如，在 B_n, $n\geq 2$ 中，我们有 $\omega=(\tau_0\tau_1)^2=(\tau_1\tau_0)^2$，但在 $\hat{}H_n^{\kappa}$ 中，如果 ω 写成其标准形式 (3.17)，那么利用关系 (3.10)，我们有：

$$s_\omega=(x_1s_1)^2=(s_1x_1)^2+s_1x_1-x_1s_1,$$

这不等于 $(s_1x_1)^2$。

因此，辫子关系 $(x_1s_1)^2=(s_1x_1)^2$ 在 $\hat{}H_n^{\kappa}$ 中并不成立，因此松本引理的假设也不满足（参见 *[6, Theorem1.2.2]*）。

^3.2 代数$\mathcal{H}_n^{\zeta}$的表示

双分拆与（标准）杨表。A分拆是非负整 数 d的一个非递增正整数序列 $\lambda = (\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_p)$，满足$|\lambda| = \lambda_1 + \ldots + \lambda_p = d$。我们不区分一个分拆与在其后添加零分量所得的相同分 拆，即$(\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_p) = (\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_p, 0, \ldots\ldots, 0)$。令 $\mathcal{P}_d$ 表示 d的所有分拆组成的集合。

我们将分拆与其**杨图**对应起来： λ的杨图是一个左对齐的方格行数组，其中第 j 行（从上到下计数）包含 λ_j 个方格。非空行的数量是 λ的长度 $\ell(\lambda)$。按照约定，空集 $\emptyset$ 是 $n = 0$的唯一分拆。

非负整数 n 的一个**双分拆** 是由两个分拆组成的有序对 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$，满足 $|\lambda^{(1)}| + |\lambda^{(2)}| = n$。我们将双分拆 $\boldsymbol{\lambda}$ 与其**图**对应起来，该图是节点的集合

$$[\![\boldsymbol{\lambda}]\!] := \{(l, r, c) \mid 1 \le c \le \lambda_r^{(l)},\ l = 1, 2\},$$

这些节点可以可视化为一对杨图。例如，对于 $\boldsymbol{\lambda} = ((3,1,1),(2,2,1))$这个 10 的双分拆，我们有：

$$[\![\boldsymbol{\lambda}]\!] = \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \ & \ & \ \\ \hline \ \\ \cline{1-1} \ \\ \cline{1-1} \end{array} \ , \ \begin{array}{|c|c|} \hline \ & \ \\ \hline \ & \ \\ \cline{1-2} \ \\ \cline{1-1} \end{array} \right)$$

这里， l、 r和 c 分别表示**分量**、**行**和**列**。

n 的双分拆集合按以下方式构成偏序：

$$\boldsymbol{\lambda} \trianglerighteq \boldsymbol{\mu} \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{l-1} |\lambda^{(k)}| + \sum_{j=1}^{i} \lambda_j^{(l)} \ge \sum_{k=1}^{l-1} |\mu^{(k)}| + \sum_{j=1}^{i} \mu_j^{(l)}, \quad l = 1, 2, \quad i \ge 1. \tag{3.21}$$

若 $\boldsymbol{\lambda} \trianglerighteq \boldsymbol{\mu}$ 且 $\boldsymbol{\lambda} \neq \boldsymbol{\mu}$，则记作 $\boldsymbol{\lambda} \triangleright \boldsymbol{\mu}$。

令 $Par_2(n)$ 表示 n 的双分拆集合。

固定 $\boldsymbol{\lambda} \in Par_2(n)$。一个 **$\boldsymbol{\lambda}$-杨表** 是一个双射 $t\colon [\![\boldsymbol{\lambda}]\!] \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$，并将$[\![\boldsymbol{\lambda}]\!]$ 视为其节点集合。例如，

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & 7 & 8 \\ \hline 9 \\ \cline{1-1} 10 \\ \cline{1-1} \end{array} \ , \ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \cline{1-2} 5 \\ \cline{1-1} \end{array} \right) \quad \text{and} \quad \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 6 \\ \cline{1-1} 9 \\ \cline{1-1} \end{array} \ , \ \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 2 \\ \hline 7 & 8 \\ \cline{1-2} 10 \\ \cline{1-1} \end{array} \right) \tag{3.22}$$

它们是 $\boldsymbol{\lambda}$-杨表，属于 $\boldsymbol{\lambda} = ((3,1,1),(2,2,1))$。

如果一个 $\boldsymbol{\lambda}$-杨表的每个分量中的各行和各列上的条目都严格递增，则称其为**标准** 杨表。例如，在 (3.22) 中，第一个杨表是标准的，而第二个不是。

令 $Std(\boldsymbol{\lambda})$ 表示标准 $\boldsymbol{\lambda}$-杨表的集合，并令 $Std(Par_2(n)) := \bigcup_{\boldsymbol{\lambda} \in Par_2(n)} Std(\boldsymbol{\lambda})$

若 $\mathfrak{t}$ 是一个 $\boldsymbol{\lambda}$-杨表，则令 $\mathtt{Forme}(\mathfrak{t}) = \boldsymbol{\lambda}$，并将 $\mathfrak{t}_{\downarrow m}$ 定义为包含整数 $\{1, 2, \ldots\ldots, m\}$ 的子杨表。若 $\mathfrak{t}$ 是标准的，则对所有 $m \ge 0$， $\mathtt{Forme}(\mathfrak{t}_{\downarrow m})$ 都是一个双分拆。

我们将双分拆上的支配序扩展到标准杨表：

$$\mathfrak{s} \trianglerighteq \mathfrak{t} \Longleftrightarrow \mathtt{Forme}(\mathfrak{s}_{\downarrow m}) \trianglerighteq \mathtt{Forme}(\mathfrak{t}_{\downarrow m}) \quad \forall\ 1 \le m \le n. \tag{3.23}$$

类似地，若 $\mathfrak{s} \trianglerighteq \mathfrak{t}$ 且 $\mathfrak{s} \neq \mathfrak{t}$，则 $\mathfrak{s} \triangleright \mathfrak{t}$。

例如，

$$\mathfrak{s} = \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \cline{1-2} 6 \\ \cline{1-1} \end{array} \ , \ \begin{array}{|c|c|} \hline 7 & 8 \\ \hline 9 \\ \cline{1-1} \end{array} \right) \quad \text{and} \quad \mathfrak{t} = \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \cline{1-2} \end{array} \ , \ \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 \\ \cline{1-2} 9 \\ \cline{1-1} \end{array} \right)$$

不可比较，因为：

$$\mathtt{Forme}(\mathfrak{t}_{\downarrow 2}) = \left(\ydiagram{2} \ , \ \emptyset \right) \rhd \left(\ydiagram{1,1} \ , \ \emptyset \right) = \mathtt{Forme}(\mathfrak{s}_{\downarrow 2}),$$

but

$$\mathtt{Forme}(\mathfrak{s}_{\downarrow 4}) = \left(\ydiagram{3,1} \ , \ \emptyset \right) \rhd \left(\ydiagram{2,2} \ , \ \emptyset \right) = \mathtt{Forme}(\mathfrak{t}_{\downarrow 4}).$$

给定 $\kappa = (\kappa_1, \ \kappa_2) \in \mathbb{C}^2$，对于一个 $\boldsymbol{\lambda}$-杨表 $\mathfrak{s}$，我们将其第 i 个 **内容** 定义为 $c_i^{\kappa}(\mathfrak{s}) = c_i(\mathfrak{s}) = \kappa_l + c - r$，其中 $t(l, \ c, \ r) = i$ 对于 $i = 1, \ \ldots\ldots, \ n$。

i 与 $i+1$ 在 $\mathfrak{s}$ 中的**轴向距离** 定义为 $\rho_i(\mathfrak{s}) = c_i(\mathfrak{s}) - c_{i+1}(\mathfrak{s})$。

ˆH 的阿廷-韦德伯恩分解 $\mathcal{H}_n^{\kappa}$。 根据 [3, 定理 3.13], ，代数 $\hat{}\mathcal{H}_n^{\kappa}$ 是半单的当且仅当：

$$\kappa_1 - \kappa_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(n-1)\}. \tag{3.24}$$

ˆ 在此情形下，$\mathcal{H}_n^{\kappa}$ 的不可约表示集由大小为 n的双分拆标记，我们将 $W_{\boldsymbol{\lambda}}$ 记作由$\boldsymbol{\lambda} \in Par_2(n)$标记的不可约表示，使得：

$$Irr(\hat{\mathcal{H}}_n^{\kappa}) = \{W_{\boldsymbol{\lambda}} \mid \boldsymbol{\lambda} \in Par_2(n)\} \ .$$

在此情形下，我们有如下阿廷-韦德伯恩分解：

$$\hat{\mathcal{H}}_n^{\kappa} \cong \bigoplus_{\boldsymbol{\lambda} \in Par_2(n)} End(W_{\boldsymbol{\lambda}}). \tag{3.25}$$

此外，这些不可约表示各自的维数为：

$$\dim(W_{\boldsymbol{\lambda}}) = |Std(\boldsymbol{\lambda})|. \tag{3.26}$$

下面说明生成元如何作用于 $W_{\boldsymbol{\lambda}}$。

固定 $\boldsymbol{\lambda} \in Par_2(n)$，令 $W_{\boldsymbol{\lambda}}$ 为向量空间，其一组基为 $\{v_{\mathfrak{t}}\}^{\mathfrak{t} \in Std(\boldsymbol{\lambda})}$，由标准 $\boldsymbol{\lambda}$-杨表索引。

ˆ $\mathcal{H}_n^{\kappa}$ 的生成元满足以下公式，它们在空间 $W_{\boldsymbol{\lambda}}$ 上定义了该代数的一个不可约表示：

$$x_k(v_{\mathfrak{t}}) = c_k(\mathfrak{t}) v_{\mathfrak{t}}, \quad k = 1, \ldots, n \tag{3.27}$$

$$s_r(v_{\mathfrak{t}}) = \alpha_r(\mathfrak{t}) v_{s_r(\mathfrak{t})} - \frac{1}{\rho_r(\mathfrak{t})} v_{\mathfrak{t}}, \quad r = 1, \ldots, n-1, \tag{3.28}$$

其中 $s_r(\mathfrak{t})$ 是由 $\mathfrak{t}$ 交换 r 和 $r+1$ 而其余部分保持不变所得到的 $\boldsymbol{\lambda}$-杨表（不一定是标准杨表）；对于 $\mathfrak{t} \in \mathsf{Std}(\mathsf{Par}_2(n))$，定义如下：

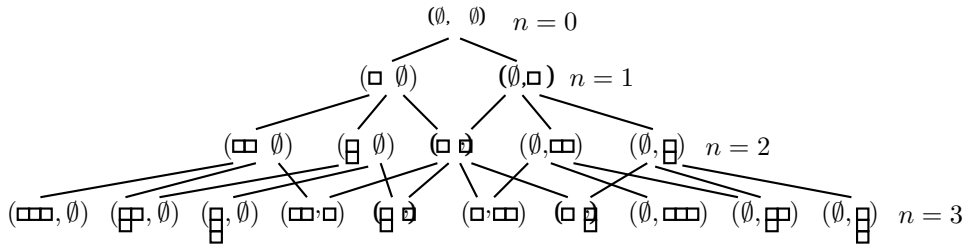
$$\alpha_r(\mathfrak{t}) = \begin{cases} 1 & \text{if } s_r(\mathfrak{t}) \text{ is standard and } \mathfrak{t} \rhd s_r(\mathfrak{t}), \\ \frac{(1+\rho_r(\mathfrak{t}))(1+\rho_r(s_r(\mathfrak{t})))}{\rho_r(\mathfrak{t})\rho_r(s_r(\mathfrak{t}))} & \text{if } s_r(\mathfrak{t}) \text{ is standard and } s_r(\mathfrak{t}) \rhd \mathfrak{t}, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

对于 $1 \le r < n$。如果 $s_r(\mathfrak{t})$ 不是标准杨表，则令 $v_{s_r(\mathfrak{t})} := 0$。

当 $\boldsymbol{\lambda}$ 遍历 n 的双分拆集合时，表示 $W_{\boldsymbol{\lambda}}$ 两两不同构，并穷尽 $\hat{}\mathcal{H}_n^{\kappa}$ 的不可约表示集（见 [3], §3）。

注释 3.7。 不可约模 $W_{\boldsymbol{\lambda}}$ 的基 $\{v_{\mathfrak{t}}\}^{\mathfrak{t} \in Std(\boldsymbol{\lambda})}$ 取决于集合 $\{\alpha_r(\mathfrak{t})\}^{\mathfrak{t} \in Std(\boldsymbol{\lambda}))}$，称为与该基相关联的半正规系数系统（更多详情见 *[3], §3*）。

ˆˆ 表示从 $\mathcal{H}_n^{\kappa}$ 到 $\mathcal{H}_{n-1}^{\kappa}$ 的限制的分支规则，是通过双分拆（更准确地说，是通过其杨图）的包含关系给出的，如下方布拉泰利图开头部分所示。例如，对于 $k \ge 2$，我们有链 $\{\hat{}\mathcal{H}_n^{\kappa}\}_{n \ge 0}$ 前四层的以下布拉泰利图（例如 [2] 或 [3]）：



^3.3 代数$\mathcal{H}_n^\kappa$的幂等元

中心正交幂等元的完备集合。 有关半单代数的幂等元的更多细节，请参阅 [11, 第 17 章，第 §4]节。

设 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathbb{C}$ 上的含幺半单代数。回顾一下， $e \in \mathfrak{A}$ 是**幂等元**当且仅当 $e^2 = e$。若 e_1， $e_2 \in \mathfrak{A}$ 是幂等元，则称它们**正交**当且仅当

$$e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0.$$

此外，若幂等元 $e \in \mathfrak{A}$ 满足 e 不能写成一个和，则称其为**本原**

$$e = e_1 + e_2$$

其中 e_1， $e_2 \in \mathfrak{A}$ 都是非零幂等元。若幂等元为 0 或 1，则称其为**平凡**幂等元。

假设我们有一个分解，使得

$$\mathfrak{A} = M_1 \oplus M_2$$

作为（左）模，并且对于某些 $m_1 \in M_1$、 $m_2 \in M_2$， $1 = m_1 + m_2$。那么 m_1、 m_2 是 $\mathfrak{A}$ 中的正交幂等元，并且

$$M_1 = \mathfrak{A}m_1, \quad M_2 = \mathfrak{A}m_2.$$

此外， M_i （作为模）不可约当且仅当 m_i 是本原幂等元。这可以很容易地推广到任意有限个直和项的情形。

如果 $\mathfrak{A}$ 还是有限维的，那么

$$\mathfrak{A} = P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$$

对于某些不可约表示集 模 P_i。由前面的 内容可知

$$P_i = \mathfrak{A}e_i$$

对于某些 $e_i \in \mathfrak{A}$， $\{e_1, \ldots, e_n\}$ 是一个两两正交的本原幂等元集合。

如果一组有限的幂等元之和为 1，则称其为**完备的**。

集合 $\{e_1$、.....、 $e_n\}$ 称为 $\mathfrak{A}$的**本原正交幂等元完全集**。

设 e 是一个非零中心幂等元（即 $e^2 = e$ 和 e 属于 $\mathfrak{A}$ 的中心）。若不能将 e 写成两个非零正交中心幂等元之和，则称其为**中心本原**。中心幂等元 e 可以是中心本原的，但并非本原，即 e 可以写成两个非零正交幂等元之和，但这两个幂等元都不是中心幂等元。

$\mathfrak{A}$ 中的**中心本原正交幂等元完全集**是一个由元素组成的集合$\{e_1$、 e_2、.....、 $e_p\}$，$p \geq 0$ 满足：这些元素都是中心本原的，它们的和为 1，并且满足 $e_i e_j = \delta_{i,j} e_i$。

此外， $\mathfrak{A}$ 中的中心本原正交幂等元完全集在以下意义下是唯一的：若 $1 = e_1 + \ldots + e_r = f_1 + \ldots + f_s$，其中 e_1、.....、 e_r 和 f_1、.....、 f_s 各自都是由中心本原中心幂等元组成的正交集合，则 $r = s$，并且存在 σ 的一个置换，使得对所有 i，都有 $e_i = f_{\sigma(i)}$。

在 $\mathfrak{A}$ 为半单的特殊情形下，我们可以通过阿廷-韦德伯恩分解来描述中心本原正交幂等元完全集（参见 (2.6)）。

事实上，设 S 是 $\mathfrak{A}$ 的一组完备的两两不同构不可约表示的编号集合。

设 $\lambda \in S$。我们将 E_λ 定义为 $\mathfrak{A}$ 中的元素：根据 $\mathfrak{A}$ 的阿廷–韦德伯恩分解（参见（2.6））, 它在对应于 λ 的分量中对应于 Id_{V_λ} , 而在所有其他分量中均为 0。集合$\{E_\lambda\}_{\lambda\in S}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的完备中心本原正交幂等元集合。在 $\mathfrak{A}$ 的任意表示 W 中, E_λ 的作用投影到 W 中对应于 λ 的同位分量上。更准确地说，若将 W 分解为不可约表示,

$$W \cong \bigoplus_{\lambda'\in S} V_{\lambda'}^{\oplus m_{\lambda'}},$$

那么, E_λ 的作用就是投影到与此分解对应的 $V_\lambda^{\oplus m_\lambda}$上，即:

$$E_\lambda = \mathrm{Id}_{V_\lambda}^{\oplus m_\lambda} \quad \text{on} \quad V_\lambda^{\oplus m_\lambda} \quad \text{and} \quad E_\lambda\left(V_{\lambda'}^{\oplus m_{\lambda'}}\right) = 0 \quad \text{for } \lambda' \neq \lambda.$$

理想与商。从分解 (2.6) 可以立即看出, $\mathfrak{A}$ 的理想（等价地，商）以下列方式对应于子集 $S' \subset S$:

$$I_{S'} := \bigoplus_{\lambda\in S'} \mathrm{End}(V_\lambda), \quad \text{and} \quad \mathfrak{A}/I_{S'} \cong \bigoplus_{\lambda\in S\setminus S'} \mathrm{End}(V_\lambda).$$

理想 $I_{S'}$ 的一组生成元由元素 E_λ 组成，其中 $\lambda \in S'$。

ˆ情形 $\mathcal{H}_n^\kappa$。固定 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$。在本节余下部分中，我们假设代数 ˆ$\mathcal{H}_n^\kappa$处于半单情形，也就是说，考虑复数 κ_1 和 κ_2满足条件 (3.24)，即:

$$\kappa_1 - \kappa_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm 1, \ldots, \pm(n-1)\}.$$

我们记

$$\mathcal{C}_n := \{\, c_i(\mathfrak{t}) \mid \mathfrak{t} \in Std(Par_2(n)),\ 1 \leq i \leq n\}$$

大小为 n 的标准杨表中出现的所有内容所构成的集合。

对于 $\mathfrak{t} \in Std(Par_2(n))$，我们定义 ˆ$\mathcal{H}_n^\kappa$ 的元素:

$$F_\mathfrak{t} = \prod_{k=1}^{n} \prod_{\substack{c\in\mathcal{C}_n \\ c\neq c_k(\mathfrak{t})}} \frac{x_k - c}{c_k(\mathfrak{t}) - c}. \tag{3.29}$$

由 Jucys-Murphy 元 x_i、 $i = 1, \ldots, n$ 对不可约模 $W_{\boldsymbol{\lambda}}$ 的基 $\{v_\mathfrak{t}\}^{\mathfrak{t}\in Std(\boldsymbol{\lambda})}$ 的作用 (3.27)，通过阿廷 - 韦德伯恩分解 (3.25) x_i , 我们可以将其视为一个对角矩阵，其对角线上的元素属于$\mathcal{C}_n$。

那么，根据定义 (3.29)，通过阿廷-韦德伯恩分解，对于每个 $\mathfrak{t} \in Std(Par_2(n))$，都得到一个初等矩阵 E_i，其中 E_i 是大小为 $\sum_{\boldsymbol{\lambda}\in Par_2(n)} \dim(W_{\boldsymbol{\lambda}})$ 的对角矩阵，第 i 行上的系数为 1，其余位置为 0。指标 i 对应于标准杨表 $\mathfrak{t}$。此外，两个不同的标准杨表会得到两个不同的初等对角矩阵。

因此，同构 (3.25) 诱导出以下集合之间的双射:

$$\{F_\mathfrak{t} \mid \mathfrak{t} \in Std(Par_2(n))\} \longleftrightarrow \left\{ E_i \mid i = 1, 2, \ldots, \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in Par_2(n)} \dim(W_{\boldsymbol{\lambda}}) \right\}.$$

集合 $\{F_\mathfrak{t} \mid \mathfrak{t} \in Std(Par_2(n))\}$ 因此是 $\mathcal{H}_n^\kappa$ 的一组完备原始正交幂等元。

前面的讨论使我们能够推导出 $\mathcal{H}_n^\kappa$ 的 Jucys-Murphy 元素的以下有用性质。

我们回顾一下，对于 $n \geq 2$，我们自然地将 $\hat{\mathcal{H}}_{n-1}^\kappa$ 与.....的子代数 ˆ $\mathcal{H}_n^\kappa$由 $x_1, \ldots, x_{n-1}$和 $s_1, \ldots, s_{n-2}$生成。

若 $\mathfrak{s} \in Std(Par_2(n-1))$，则在 $\hat{\mathcal{H}}_n^\kappa$ 中：

$$F_{\mathfrak{s}} = \sum_{\mathfrak{s} \to \mathfrak{t}} F_{\mathfrak{t}},$$

其中 $\mathfrak{s} \to \mathfrak{t}$ 表示 $\mathfrak{t}$ 由 $\mathfrak{s}$ 添加标记为 n的方格得到。

此外，根据 Jucys–Murphy 作用，对于所有 $\mathfrak{t} \in Std(Par_2(n))$ 和 $r = 2, \dots, n$，有：

$$x_r F_{\mathfrak{t}} = F_{\mathfrak{t}} x_r = c_r(\mathfrak{t}) F_{\mathfrak{t}}.$$

特别地，

$$x_n = \sum_{\boldsymbol{\lambda} \in Par_2(n)} \sum_{\mathrm{Forme}(\mathfrak{t}) = \boldsymbol{\lambda}} c_n(\mathfrak{t})\, F_{\mathfrak{t}} = \sum_{\mathfrak{t} \in Std(Par_2(n))} c_n(\mathfrak{t}) F_{\mathfrak{t}}.$$

按照约定，$F_{(\emptyset,\emptyset)} := 1$，而 $F_{\mathfrak{t}}$ 可以递归构造：若 $\mathfrak{s}$ 由 $\mathfrak{t}$移除含有 n 的方格得到，则

$$F_{\mathfrak{t}} = F_{\mathfrak{s}} \cdot \frac{(x_n - \alpha_1) \cdots (x_n - \alpha_k)}{(c - \alpha_1) \cdots (c - \alpha_k)}, \tag{3.30}$$

其中 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ 是 Forme($\mathfrak{s}$) 的所有可添加方格（除去内容为 c的方格）的内容，该方格为 $\mathfrak{t}$。

对于 $\boldsymbol{\lambda} \in Par_2(n)$，令 $\mathfrak{t}^{\boldsymbol{\lambda}}$ 为标准杨表，其条目 $1, \dots, n$ 按西式阅读顺序填入图中。例如，当 $\boldsymbol{\lambda} = ((3,2,1),(2,2))$ 时，

$$\mathfrak{t}^{\boldsymbol{\lambda}} = \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \cline{1-2} 6 \\ \cline{1-1} \end{array} \quad , \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 \\ \hline \end{array} \right).$$

对于形如 $\mathfrak{t}^{\boldsymbol{\lambda}}$、$\boldsymbol{\lambda} \in Par_2(n)$的标准杨表，在(3.29)中定义的元素尤其值得关注，并已在 [3, 定理3.13]中得到研究。

事实上，$\hat{\mathcal{H}}_n^\kappa$ 的一组完备的两两不同构不可约表示由$\{ \hat{\mathcal{H}}_n^\kappa F_{\mathfrak{t}^{\boldsymbol{\lambda}}} \}_{\boldsymbol{\lambda} \in Par_2(n)}$给出。

由(3.25)可推出如下分解：

$$\hat{\mathcal{H}}_n^\kappa \cong \bigoplus_{\boldsymbol{\lambda} \in Par_2(n)} End(\hat{\mathcal{H}}_n^\kappa F_{\mathfrak{t}^{\boldsymbol{\lambda}}}), \tag{3.31}$$

其中，$\hat{\mathcal{H}}_n^\kappa F_{\mathfrak{t}^{\boldsymbol{\lambda}}}$的维数为 $= |Std(\boldsymbol{\lambda})|$，且模同构为 $W_{\boldsymbol{\lambda}} \cong \hat{\mathcal{H}}_n^\kappa F_{\mathfrak{t}^{\boldsymbol{\lambda}}}$。

我们定义与下列双分拆相关的$\hat{\mathcal{H}}^{(\kappa_1,\kappa_2)_n}$ 的四个一维表示：

$$\begin{array}{cccc} (\square \dots \square, \emptyset) & (\begin{array}{c}\square\\ \vdots \\ \square\end{array}, \emptyset) & (\emptyset, \square \dots \square) & (\emptyset, \begin{array}{c}\square\\ \vdots \\ \square\end{array}) \\ x_1 \mapsto \kappa_1 & x_1 \mapsto \kappa_1 & x_1 \mapsto \kappa_2 & x_1 \mapsto \kappa_2 \\ s_i \mapsto 1 & s_i \mapsto -1 & s_i \mapsto 1 & s_i \mapsto -1 \end{array} \tag{3.32}$$

设 $\lambda \vdash n$。形状为 λ 的**标准杨表** 是对 λ 的方格进行双射填充，填入数字$1, \dots, n$，使得沿图中的任意一行以及向下的任意一列，元素都严格递增。我们用 d_λ 表示形状为λ的标准杨表的数量。根据对称群的表示论，或由Robinson–Schensted对应（参见例如 [13]），有：

$$\sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda^2 = n!\,. \tag{3.33}$$

回顾一下，形状为 $(\delta,\ \mu)$ 的标准杨表（其中 $(\delta,\ \mu)$ 是 n 的一个双分拆），是对 δ 和 μ 的方格进行双射填数，所用数字为 1，.....，n，且其中的数字

在两个图的任一行中以及任一列中均严格递增。形状为 $(\delta,\ \mu)$ 的标准杨表数量显然为:

$$d_{\delta,\mu}=\binom{n}{|\delta|}d_\delta d_\mu\ . \tag{3.34}$$

因此，由等式 (3.34) 可得与 (3.32) 中定义的一维表示相关联的四个本原中心幂等元。

我们将分拆 $(1,\dots,1)\ \in\mathcal{P}_n$ 记为 (1^n)。
我们尤其关注 $F_{\mathfrak{t}^{\boldsymbol{\lambda}}}$，其中

$$\boldsymbol{\lambda}\in\{\,((n),\emptyset),\ ((1^n),\emptyset),\ (\emptyset,(1^n)),\ (\emptyset,(n))\}.$$

对于这些双分拆，我们固定:

$$F_n^{(\alpha_1,\alpha_2)}:=F_{\mathfrak{t}^{\boldsymbol{\lambda}}}, \tag{3.35}$$

其中，α_1（分别为 α_2）是由 (3.32) 中定义的、与 $\boldsymbol{\lambda}$ 相关联的一维表示作用于 s_i（对 $i=1,\dots,n$，分别作用于 x_1）所得的像。特别地，我们有 $\alpha_1\in\{-1,1\}$ 和 $\alpha_2\in\{\kappa_1,\kappa_2\}$。

我们回顾一下，以下乘积构成了.....的一组基 $\hat{\mathcal{H}}_n^\kappa$（参见命题 3.4）:

$$\left\{\begin{array}{c}1,\\ x_1\end{array}\right\}\cdot\left\{\begin{array}{c}1,\\ s_1,\\ s_1x_1,\\ s_1x_1s_1\end{array}\right\}\cdot\left\{\begin{array}{c}1,\\ s_2,\\ s_2s_1,\\ s_2s_1x_1,\\ s_2s_1x_1s_1,\\ s_2s_1x_1s_1s_2\end{array}\right\}\cdot\ \dots\ \cdot\left\{\begin{array}{c}1,\\ s_{n-1},\\ \vdots\\ s_{n-1}\dots s_1x_1,\\ s_{n-1}\dots s_1x_1s_1,\\ \vdots\\ s_{n-1}\dots s_1x_1s_1\dots s_{n-1}\end{array}\right\}.$$

我们用 0，...，$n-1$为这些集合编号。例如，$s_2s_1x_1$属于第二个集合，而 s_{n-1}属于第（$n-1$）个集合。

我们将 $\ell(\omega)$ 定义为 ω 的**长度**，将 $\ell_0(\omega)$定义为约化表达式中生成元 x_1 出现的次数。

给定一个元素 $\omega\in B_n$，如果将ω写成其标准形式时，x_1 出现在第 i 个集合中，则我们定义 $m_i(\omega)=1$；否则定义 $m_i(\omega)=0$。

在下文中，将 κ_1、κ_2 的指标视为模 2 是方便的，因此当 $b=2$ 时有 $\kappa_{b+1}=\kappa_1$。

ˆ我们回顾一下，我们处于代数$\mathcal{H}_n^\kappa$ 为半单的条件下，即:

$$\kappa_1-\kappa_2\in\mathbb{C}\setminus\{0,\pm1,\pm2,\dots,\pm(n-1)\}.$$

ˆ**命题 3.8**。对于 $b=1$、2 和 $\alpha=\pm1$，在 H_n^κ 中有:

$$F_n^{(\alpha,\kappa_b)}=D_n(\alpha,\kappa_b)\sum_{\omega\in B_n}\alpha^{\ell(\omega)}\left(\prod_{i=0}^{n-1}(i-\alpha\kappa_{b+1})^{1-m_i(\omega)}\right)s_\omega, \tag{3.36}$$

其中:

$$D_n(\alpha,\kappa_b)=\left(n!\prod_{i=0}^{n-1}(i+\alpha(\kappa_b-\kappa_{b+1}))\right)^{-1}.$$

证明。我们先证明 $F^{(1,\kappa_1)_n}$ 的情形。

证明通过对 $n\geq1$ 使用归纳法进行。对于 $n=1$，有

$$F_1^{(1,\kappa_1)}=\frac{x_1-\kappa_2}{\kappa_1-\kappa_2}.$$

事实上，我们有 $\mathcal{C}_1\ =\ \{\kappa_1,\kappa_2\}$，然后根据定义 (3.29) 得出所需结果。

这与 $n=1$ 的 (3.36) 一致。
假设该命题对 n 成立。根据递推关系 (3.30)，我们有:

$$F_{n+1}^{(1,\kappa_1)}=F_n^{(1,\kappa_1)}\frac{(x_{n+1}-(\kappa_1-1))(x_{n+1}-\kappa_2)}{(\kappa_1+n-(\kappa_1-1))(\kappa_1+n-\kappa_2)}=F_n^{(1,\kappa_1)}\frac{(x_{n+1}-\kappa_1+1)(x_{n+1}-\kappa_2)}{(n+1)(n+\kappa_1-\kappa_2)}.$$

我们有:

$$(x_{n+1}-\kappa_1+1)(x_{n+1}-\kappa_2)=x_{n+1}^2+(1-\kappa_1-\kappa_2)x_{n+1}+\kappa_2(\kappa_1-1). \tag{3.37}$$

引理 3.9. 对于 $i,j=1,\dots,n$, 其中 $i\neq j$, 有:

$$[n,-n][n,j]s_{j+1}\dots s_n=s_j\dots s_{n-1}[n,-(j-1)],$$

$$[n,j]s_{j+1}\dots s_n[n,-n]=s_{j-1}\dots s_1x_1s_1\dots s_{n-1}n,j],$$

$$(s_n\dots s_i\dots s_n)(s_n\dots s_j\dots s_n)=\begin{cases} s_j\dots s_{n-1}s_i\dots s_{j-2}[n,i], & \text{if } i<j,\\ s_{i-1}\dots s_j\dots s_{i-1}s_i\dots s_{n-1}[n,i], & \text{if } i>j.\end{cases}$$

证明. 利用下列等式即可直接证明:

$$[n,j]s_k=s_{k-1}[n,j]\quad\text{for}\quad k\in\{j+1,\dots,n\},$$

$$s_\ell^2=1\quad\text{and}\quad[n,-n]s_\ell=s_\ell[n,-n]\quad\text{for}\quad\ell\in\{1,\dots,n-1\}.$$

□

回想 $x_{n+1}=[n,-n]+\sum_{j=1}^n[n,j]s_{j+1}\dots s_n$, 我们可推出 $\mathcal{H}_{n+1}^\kappa$ 中的下列ˆ等式:

$$\begin{aligned}x_{n+1}^2&=(\kappa_1+\kappa_2)[n,-n]-\kappa_1\kappa_2+\sum_{j=1}^n[n,-n][n,j]s_{j+1}\dots s_n\\&\quad+\sum_{j=1}^n[n,j]s_{j+1}\dots s_n[n,-n]+\left(\sum_{j=1}^n[n,j]s_{j+1}\dots s_n\right)^2\\&=(\kappa_1+\kappa_2)[n,-n]-\kappa_1\kappa_2+\sum_{j=1}^n[n,-n][n,j]s_{j+1}\dots s_n\\&\quad+\sum_{j=1}^n[n,j]s_{j+1}\dots s_n[n,-n]+n+\sum_{i\neq j}[n,i]s_{i+1}\dots s_n[n,j]s_{j+1}\dots s_n.\end{aligned}$$

回想一下, $F^{(1,\kappa_1)}{}_n$ 具有以下性质:

$$F_n^{(1,\kappa_1)}\,\omega=\begin{cases}F_n^{(1,\kappa_1)} & \text{if}\quad\omega=s_i,\ i=1,\dots,n-1,\\ \kappa_1F_n^{(1,\kappa_1)} & \text{if}\quad\omega=x_1.\end{cases} \tag{3.38}$$

利用引理 3.9 和等式 (3.38), 我们有:

$$\begin{aligned}F_n^{(1,\kappa_1)}\sum_{j=1}^n[n,-n][n,j]s_{j+1}\dots s_n&=F_n^{(1,\kappa_1)}\sum_{j=1}^n[n,-(j-1)]=F_n^{(1,\kappa_1)}\sum_{j=0}^{n-1}[n,-j],\\F_n^{(1,\kappa_1)}\sum_{j=1}^n[n,j]s_{j+1}\dots s_n[n,-n]&=F_n^{(1,\kappa_1)}\sum_{j=1}^n s_{j-1}\dots s_1x_1s_1\dots s_{n-1}[n,j]\\&=\kappa_1F_n^{(1,\kappa_1)}\sum_{j=1}^n[n,j],\\F_n^{(1,\kappa_1)}\sum_{i\neq j}^n[n,i]s_{i+1}\dots s_n[n,j]s_{j+1}\dots s_n&=F_n^{(1,\kappa_1)}\sum_{i\neq j}^n(s_n\dots s_i\dots s_n)(s_n\dots s_j\dots s_n)\\&=(n-1)F_n^{(1,\kappa_1)}\sum_{j=1}^n[n,j].\end{aligned}$$

那么我们有:

$$F_n^{(1,\kappa_1)}x_{n+1}^2=F_n^{(1,\kappa_1)}\left[(\kappa_1+\kappa_2)[n,-n]-\kappa_1\kappa_2+\sum_{j=0}^{n-1}[n,-j]+n\right.$$
$$\left.+(n-1+\kappa_1)\sum_{j=1}^n[n,j]\right]. \tag{3.39}$$

现在，利用辫关系，对于 $j=1$，.....，$n-1$，我们有：

$$s_n \dots s_{j+1} s_j s_{j+1} \dots s_n = s_j s_{j+1} \dots s_{n-1}[n,j].$$

然后利用等式 (3.38)，我们推导出以下等式：

$$F_n^{(1,\kappa_1)} s_n \dots s_{j+1} s_j s_{j+1} \dots s_n = F_n^{(1,\kappa_1)} s_j s_{j+1} \dots s_{n-1}[n,j] = F_n^{(1,\kappa_1)}[n,j],$$

然后，根据 x_{n+1} 的定义：

$$F_n^{(1,\kappa_1)} x_{n+1} = F_n^{(1,\kappa_1)} \left([n,-n] + \sum_{j=1}^{n} [n,j] \right). \tag{3.40}$$

最后，由 (3.37)，结合 (3.39) 和 (3.40)，我们推导出以下等式：

$$\begin{aligned} & F_n^{(1,\kappa_1)}(x_{n+1}^2 + (1-\kappa_1-\kappa_2)x_{n+1} + \kappa_2(\kappa_1-1)) \\ =& F_n^{(1,\kappa_1)} \left(\sum_{j=0}^{n} [n,-j] + (n-\kappa_2) \sum_{j=1}^{n+1} [n,j] \right), \end{aligned}$$

其中按约定，若 $j=n+1$，则 $[n,j] := 1$。

根据归纳假设，我们得到：

$$\begin{aligned} F_{n+1}^{(1,\kappa_1)} &= D_n(1,\kappa_1) \sum_{\omega \in B_n} \left(\prod_{i=0}^{n-1} (i-\kappa_2)^{1-m_i(\omega)} \right) s_\omega \frac{1}{(n+1)(\kappa_1-\kappa_2+n)} \\ &\left(\sum_{j=0}^{n} [n,-j] + (n-\kappa_2) \sum_{j=1}^{n+1} [n,j] \right) \\ &= D_{n+1}(1,\kappa_1) \left(\sum_{\omega \in B_n} \left(\prod_{i=0}^{n-1} (i-\kappa_2)^{1-m_i(\omega)} \right) s_\omega \right) \left(\sum_{j=0}^{n} [n,-j] \right. \\ &\left. + (n-\kappa_2) \sum_{j=1}^{n+1} [n,j] \right) \\ &= D_{n+1}(1,\kappa_1) \sum_{\nu \in B_{n+1}} \left(\prod_{i=0}^{n} (i-\kappa_2)^{1-m_i(\omega)} \right) s_\nu. \end{aligned}$$

这就完成了 $F^{(1,\kappa_1)_n}$ 的证明。

对于幂等元 $F^{(-1,\kappa_1)_n}$，我们考虑以下映射：

$$\begin{aligned} x_1 &\longmapsto -x_1 \\ s_i &\longmapsto -s_i, \quad i=1,2,\dots,n-1. \end{aligned}$$

直接检验关系 (3.8)-(3.11) 可知，该映射可扩展为 $\mathcal{H}_n^{-\kappa}$ 与 $\mathcal{H}_n^{\kappa}$ 之间的代数态射。

此外，$\hat{}\mathcal{H}_n^{-\kappa}$中的幂等元 $F^{(1,-\kappa_1)_n}$ 经由此映射被送到 $\hat{}\mathcal{H}_n^{\kappa}$ 中的幂等元 $F^{(-1,\kappa_1)_n}$，因为它们分别由以下条件刻画：

$$\begin{aligned} & s_i F_n^{(1,-\kappa_1)} = F_n^{(1,-\kappa_1)} s_i = F_n^{(1,-\kappa_1)}, \\ & x_1 F_n^{(1,-\kappa_1)} = F_n^{(1,-\kappa_1)} x_1 = -\kappa_1 F_n^{(1,-\kappa_1)}, \\ & (F_n^{(1,-\kappa_1)})^2 = F_n^{(1,-\kappa_1)}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} & s_i F_n^{(-1,\kappa_1)} = F_n^{(-1,\kappa_1)} s_i = -F_n^{(\alpha_1,\kappa_1)}, \\ & x_1 F_n^{(-1,\kappa_1)} = F_n^{(-1,\kappa_1)} x_1 = \kappa_1 F_n^{(-1,\kappa_1)}, \\ & (F_n^{(-1,\kappa_1)})^2 = F_n^{(-1,\kappa_1)}, \end{aligned}$$

对 $i = 1,2,\ldots,n-1$。

因此，这表明，$\hat{}_{(-1,\kappa_1)_n}$的幂等元是由 $F^{(1,\kappa_1)_n}$得到的：将每个生成元 $x_1, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ 替换为其相反数，并将 κ_1, κ_2替换为 $-\kappa_1, -\kappa_2$。这就证明了 $\alpha = -1$的公式（3.36）。

最后，显然，对于幂等元 $F^{(\alpha,\kappa_2)_n}$，其公式可由 $F^{(\alpha,\kappa_1)_n}$ 的公式交换 κ_1 和 κ_2 得到。 □

注记 3.10. 由上一个命题可推得以下递推关系：

$$F_{n+1}^{(\alpha,\kappa_b)} = \frac{1}{(n+1)(\alpha(\kappa_b - \kappa_{b+1}) + n)} F_n^{(\alpha,\kappa_b)} \left(\sum_{j=0}^{n} \alpha^{n+j+1}[n,-j] + (n - \alpha\kappa_{b+1}) \sum_{j=1}^{n+1} \alpha^{n-j+1}[n,j] \right). \quad (3.41)$$

例 3.11. 设 $n = 2$。回顾$\hat{}H_2^{\natural}$的（标准）基：

$$\{1, s_1, s_1x_1, s_1x_1s_1, x_1, x_1s_1, x_1s_1x_1, (x_1s_1)^2\},$$

我们有：

$$F_2^{(1,\kappa_1)} = \frac{1}{2(\kappa_1 - \kappa_2)(1 + \kappa_1 - \kappa_2)} (\kappa_2(1-\kappa_2)(1+s_1) - \kappa_2(s_1x_1 + s_1x_1s_1) + (1-\kappa_2)(x_1 + x_1s_1) + x_1s_1x_1 + (x_1s_1)^2),$$

$$F_2^{(-1,\kappa_1)} = \frac{1}{2(\kappa_2 - \kappa_1)(1 + \kappa_2 - \kappa_1)} (\kappa_2(1+\kappa_2)(1-s_1) + \kappa_2(s_1x_1 - s_1x_1s_1) + (1+\kappa_2)(x_1s_1 - x_1) + (x_1s_1)^2 - x_1s_1x_1).$$

我们通过将 κ_1 替换为 κ_2，由 $F^{(1,\kappa_1)_2}$（分别由 $F^{(-1,\kappa_1)_2}$）得到幂等元 $F_{(1,\kappa_2)_2}$（分别为 $F_{(-1,\kappa_2)_2}$）。

特殊情形 $(\kappa_1,\ \kappa_2) = (0,\ k+1)$。设 $k \geq 1$。

现在我们关注这样一个特殊情形：将参数（κ_1，κ_2）特化为：

$$\kappa_1 = 0, \quad \kappa_2 = k+1. \quad (3.42)$$

进行这种特化的动机，源于我们稍后将建立的 $\hat{}\mathcal{H}_n^{(0,k+1)}$ 与融合置换代数之间的联系。

从现在起，在本节余下部分中，我们假设 $n \leq k+1$，从而处于半单情形（见 (3.24)）。

推论 3.12。在 $\hat{}\mathcal{H}_n^{(0,k+1)}$ 中，我们有：

$$F_n^{(1,0)} = n!^{-1} \sum_{\omega \in B_n} \left(\prod_{i=0}^{n-1} (i-k-1)^{-m_i(\omega)} \right) s_\omega, \quad (3.43)$$

$$F_n^{(1,k+1)} = \left(n \prod_{i=0}^{n-1} (k+1+i) \right)^{-1} \sum_{\omega \in B_n} \left(\prod_{i=0}^{n-1} i^{-m_i(\omega)} \right) s_\omega, \quad (3.44)$$

$$F_n^{(-1,0)} = n!^{-1} \sum_{\omega \in B_n} (-1)^{\ell(\omega)} \left(\prod_{i=0}^{n-1} (i+k+1)^{-m_i(\omega)} \right) s_\omega, \quad (3.45)$$

$$F_n^{(-1,k+1)} = \left(n \prod_{i=0}^{n-1} (i-k-1) \right)^{-1} \sum_{\omega \in B_n} (-1)^{\ell(\omega)} \left(\prod_{i=0}^{n-1} i^{-m_i(\omega)} \right) s_\omega. \quad (3.46)$$

证明。 利用参数的特化 (3.42) 应用命题 3.8，证明显而易见。

□

注记 3.13。 由以上表达式，我们得到以下递推关系：

$$F_{n+1}^{(1,0)} = \frac{1}{n+1} F_n^{(1,0)} \left[\frac{1}{(n-(k+1))} \sum_{j=0}^{n} [n,-j] + \sum_{j=1}^{n+1} [n,j] \right], \tag{3.47}$$

$$F_{n+1}^{(1,k+1)} = \frac{1}{(n+1)(k+1+n)} F_n^{(1,k+1)} \left[\sum_{j=0}^{n} [n,-j] + n \sum_{j=1}^{n+1} [n,j] \right], \tag{3.48}$$

$$F_{n+1}^{(-1,0)} = \frac{F_n^{(-1,0)}}{n+1} \left[\frac{1}{(n+k+1)} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n+j+1} [n,-j] + \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{n-j+1} [n,j] \right], \tag{3.49}$$

$$F_{n+1}^{(-1,k+1)} = \frac{F_n^{(-1,k+1)}}{(n+1)(n-k-1)} \left[\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n+j+1} [n,-j] + n \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{n-j+1} [n,j] \right], \tag{3.50}$$

其中 $F^{(\pm 1,\kappa_b)_n}$, $b = 1, 2$ 被视为 $\hat{H}_{n+1}^{\kappa}$ 的元素。

例 3.14。对于 $n = 2$，中心幂等元 $F^{(\pm 1,\kappa_b)_2}$（其中 $b = 1, 2$）为：

$$F_2^{(1,0)} = \frac{1}{2} \left(1 + s_1 - \frac{1}{k} (s_1 x_1 + s_1 x_1 s_1) - \frac{1}{k+1} (x_1 + x_1 s_1) + \frac{1}{k(k+1)} \left(x_1 s_1 x_1 + (x_1 s_1)^2 \right) \right), \tag{3.51}$$

$$F_2^{(-1,0)} = \frac{1}{2} \left((1 - s_1) + \frac{1}{(k+1)} (x_1 s_1 - x_1) + \frac{1}{(k+2)} (s_1 x_1 - s_1 x_1 s_1) + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \left((x_1 s_1)^2 - x_1 s_1 x_1 \right) \right), \tag{3.52}$$

$$F_2^{(1,k+1)} = \frac{1}{2(k+1)(k+2)} \left(x_1 + x_1 s_1 + x_1 s_1 x_1 + (x_1 s_1)^2 \right), \tag{3.53}$$

$$F_2^{(-1,k+1)} = \frac{1}{2k(k+1)} \left(x_1 s_1 + (x_1 s_1)^2 - x_1 - x_1 s_1 x_1 \right). \tag{3.54}$$

4 与融合置换代数的联系

$\hat{}$4.1 $H_{k,n}$ 作为$\mathcal{H}_n^{\kappa}$的商

本节旨在建立给定 $k \geq 1$ 的融合置换代数与退化仿射圆分 Hecke 代数之间的联系。

我们回顾 $H_{k,n}$ 的定义（见第 2 节）以及 $\hat{}\mathcal{H}_n^{\kappa}$ 的定义（见定义 3.1）。

4.1.1 通过表示论

固定 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $k \geq 1$，并假设 $n \leq k$。特别地，代数 $\hat{}\mathcal{H}_n^{(0,k+1)}$ 是半单的（见 (3.24)）。

回顾一下，给定不可约表示的参数化集合 $Par_2(n)$ 中的一个子集 Γ，它对应于 $\mathcal{H}_n^{\kappa}$ 的不可约表示集，我们有一个相应的子代数。也就是说，应用 Wedderburn 分解并采用 (3.25) 中的记号后，该子代数为 $\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} End(W_\gamma)$。

命题 4.1。 *($H_{k,\,n}$ 作为 $\hat{}\mathcal{H}_n^{(0,k+1)}$ 的一个商。)*

令 $I_{k,\,n}$ 为 $\hat{}H_n^{(0,k+1)}$ 中与以下分拆子集相对应的理想：

$$L_{k,n} := \{ \boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}) \in Par_2(n) \mid \ell(\lambda^{(2)}) \geq 2 \}.$$

那么，商 $\hat{}H_n^{(0,k+1)}/I_{k,\,n}$ 与 $H_{k,\,n}$同构。

证明。 商 $\hat{\mathcal{H}}_n^{(0,k+1)}/I_{k,\ n}$ 与 $\hat{\mathcal{H}}_n^{(0,k+1)}$的子代数同构，该子代数对应于 $Par_2(n)$ 中与 $L_{k,\ n}$互补的子集。该子集为:

$$D_{k,n} := \{\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}) \in Par_2(n) \mid \ell(\lambda^{(2)}) < 2\}.$$

因此，只需给出集合 $Irr(H_{k,n})$ 与 $D_{k,n}$ 之间的一个双射，并使其保持相应不可约表示的维数。

设 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in Irr(H_{k,n})$, $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。因此，我们有 $\lambda = (k+a, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \vdash k+n$，其中 $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。

我们定义:

$$\begin{array}{rccc} \phi_n: & Irr(H_{k,n}) & \longrightarrow & D_{k,n} \\ & \lambda = (k+a, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) & \longmapsto & \phi_n(\lambda) := ((\lambda_2, \ldots, \lambda_p), (a)) \end{array}.$$

首先， $\phi_n(\lambda)$ 的取值属于 $D_{k,n}$。事实上， $\phi_n(\lambda)$ 的大小正确，因为 $|\lambda| = k+n$，于是 $|\phi_n(\lambda)| = |(\lambda_2, \ldots, \lambda_p)| + a = n$。

类似的论证表明，下面的映射:

$$\begin{array}{rccc} \psi_n: & D_{k,n} & \longrightarrow & Irr(H_{k,n}) \\ & ((\lambda_2, \ldots, \lambda_p), (a)) & \longmapsto & (k+a, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \end{array}$$

它给出了逆映射（回想一下， $n \leq k$，因此我们有 $\lambda_2 \leq k+a$）。

现在令 $\lambda \in Irr(H_{k,n})$，并设 $\lambda' = \phi_n(\lambda)$。接下来要证明， $SStab(\lambda, k)$ 的基数等于 $Std(\lambda')$ 的基数。

我们考虑由 ϕ_n 诱导的映射（仍记为 ϕ_n），其定义如下:

$$\begin{array}{rccc} \phi_n: & SStab(\lambda, k) & \longrightarrow & Std(\lambda') \\ & \mathbf{T} & \longmapsto & \phi_n(\mathbf{T}) \end{array},$$

其中， $\phi_n(\mathbf{T})$ 是按以下方式从 $\mathbf{T}$ 得到的杨表：首先，将 $\mathbf{T}$ 中所有条目的值减 1。其次，保留 $\mathbf{T}$ 中除第一行以外的所有行：这得到一个形状为 $(\lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ 的杨表 t_1。第三，保留第一行中位于前 k 个方格之后的方格：这得到第二个形状为 (a) 的杨表 t_2。最后，令 $\phi_n(\mathbf{T}) := (t_1, t_2)$。

由于 $\mathbf{T}$ 满足相应条件，此映射定义良好（见下例）。

我们还考虑由 ψ_n 导出的映射（仍记为 ψ_n）:

$$\begin{array}{rccc} \psi_n: & Std(\lambda') & \longrightarrow & SStab(\lambda, k) \\ & \mathfrak{t} & \longmapsto & \psi_n(\mathfrak{t}) \end{array}$$

其中， $\psi_n(\mathfrak{t})$ 按以下方式定义：首先，将 $\mathfrak{t}$ 中所有条目的值加 1。其次，考虑形状为 $(k+a, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ 的杨表 $\psi_n(\mathfrak{t})$，其中第一行前 k 个方格中的条目为 1，其余条目则与 $\mathfrak{t}$ 中对应方格的条目相同。接下来要验证后者定义良好，并且给出 ϕ_n 的逆映射。

考虑 $n \leq k$，特别地，我们有 $n+k \leq 2k$。那么，若 $\lambda \in Irr(H_{k,\ n})$ 具有 $(k+a,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_p)$ 的形式，则前述条件要求 $\lambda_i \leq k$, $i = 2, \ldots\ldots, p$。那么， $\psi_n(\mathbf{t})$ 满足半标准条件，也就是 $\mathbf{t} \in Std(Par_2(n))$ 对$\mathbf{t}$ 为标准的条件。因此， $\psi_n(\mathbf{t})$ 的取值属于 $SStab(\lambda,\ k)$。

因此， ψ_n 是良定义的。最后， ϕ_n 是一个双射，故:

$$|SStab(\lambda, k)| = |Std(\lambda')|.$$

因此结论得证。 □

例4.2。 设 $k = 3$ 和 $n = 5$。令 $\mathbf{T} \in SStab((5, 2, 1), 3)$ 为如下半标准杨表:

$$\mathbf{T} := \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \cline{1-2} 6 \\ \cline{1-1} \end{array}.$$

那么，根据上一个证明中的构造，我们得到以下杨表 t_1 和t_2:

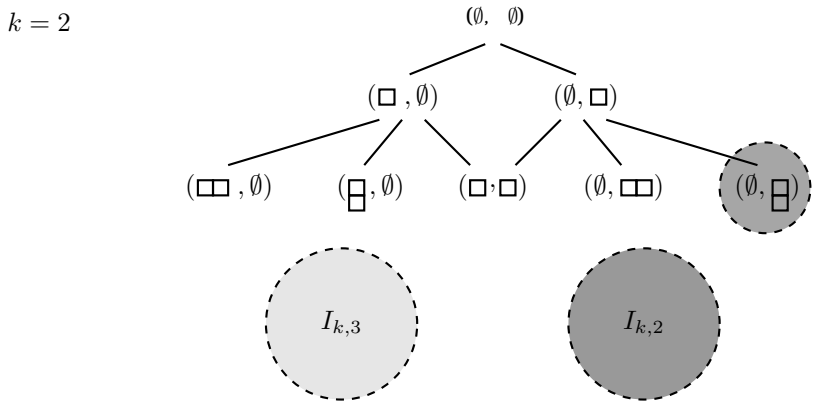
$$t_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 5 \\ \cline{1-1} \end{array}, \quad t_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}.$$

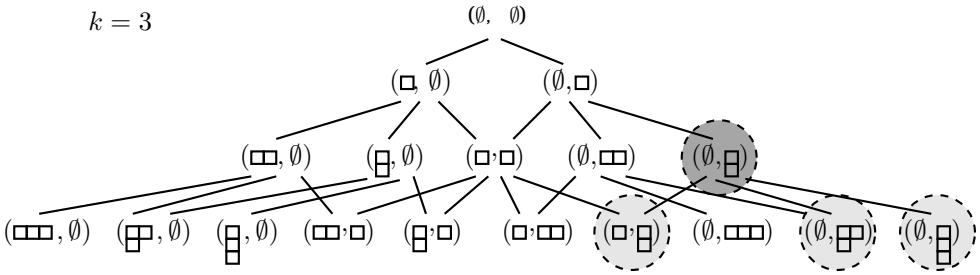
Then

$$\phi_5(\mathbf{T}) = \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 5 \\ \cline{1-1} \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \right).$$

注记 4.3. 由上一个证明可知，沿用相同的记号，我们已经证明，给定 $\lambda \vdash k+n$, $|SSTab(\lambda, k)| = |Std(\lambda')|$ 若 $n \leq k$。

对于 $k=2$，3，代数链 $\{\hat{\mathcal{H}}_n^{(0,k+1)}\}_{n\geq 0}$ 的布拉泰利图起始如下：





因此，代数 $\hat{\mathcal{H}}_n^{(0,k+1)}$和$H_{k,\ n}$ 的表示论以及推论 4.1，为我们考虑代数 $\hat{\mathcal{H}}_n^{(0,k+1)}$ 以便为 $H_{k,\ n}$提供典范基以及由生成元与关系给出的表示，提供了依据和动机。

然而，目前根据推论4.1，我们只知道，当 $n \leq k$ 时，$H_{k,\ n}$ 同构于 $\hat{\mathcal{H}}_n^{(0,k+1)}$ 的一个商。

4.1.2 通过代数构造

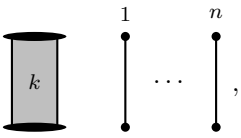
现在的目标是将这一商推广到任意整数 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $k \geq 1$。

为此，我们将构造一个从 $\hat{\mathcal{H}}_n^{(0,k+1)}$ 到$H_{k,n}$的满射代数同态。

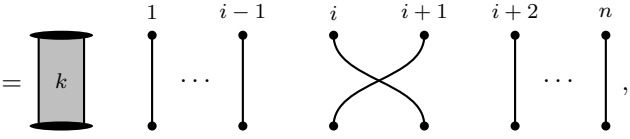
现在固定 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $k \geq 1$，不施加任何其他限制。

定义 4.4。 在 $H_{k,n}$中，我们定义：

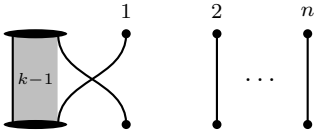
$$\mathbf{1} := \quad (4.1)$$



$$\sigma_i := \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad (4.2)$$



$$\sigma_0 := \quad (4.3)$$



最后，我们设：

$$t := \mathbf{1} + k\sigma_0.$$

对于 $i=1$、2,. . ., $n-1$，我们有如下代数对应关系（在 $H_{k,\ n}$ 中）：

$$\mathbf{1} = \mathbf{H}(P_k), \quad (4.4)$$

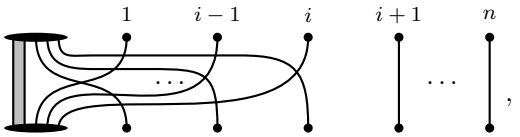
$$\sigma_i = \mathbf{H}(P_k\delta_{k+i}P_k) = \mathbf{H}(P_k\delta_{k+i}) = \mathbf{H}(\delta_{k+i}P_k), \tag{4.5}$$

$$\sigma_0 = \mathbf{H}(P_k\delta_k P_k), \tag{4.6}$$

其中 **H** 是在 *(2.5)* 中定义的代数同构。

我们已用到，当 $i \geq 1$时， δ_{k+i} 与 P_k 可交换。

从 $\mathcal{H}_n^\kappa$ 到 $H_{k,n}$. 我们定义$H_{k,n}$中的以下元素：

$h_i :=$ 

$, \quad i = 1, 2, \ldots, \min(k, n).$

引理 4.5. 以下等式在$H_{k,n}$中成立：

$$(t\sigma_1)^2 = t(\sigma_1 t - \sigma_1 + \mathbf{1}), \tag{4.7}$$

$$(\sigma_1 t)^2 = (t\sigma_1 - \sigma_1 + \mathbf{1})t. \tag{4.8}$$

证明. 首先，若 $k = 1$，容易验证 $\sigma_0\sigma_1\sigma_0 = \sigma_1\sigma_0\sigma_1$。此外，我们有 $\sigma_i^2 = \mathbf{1}$, $i = 0$,$\mathbf{1}$。

由前面的等式，一方面有：

$$(t\sigma_1)^2 = ((\mathbf{1} + \sigma_0)\sigma_1)^2 = (\sigma_1 + \sigma_0\sigma_1)^2 = \mathbf{1} + \sigma_1\sigma_0\sigma_1 + \sigma_0 + \sigma_1\sigma_0.$$

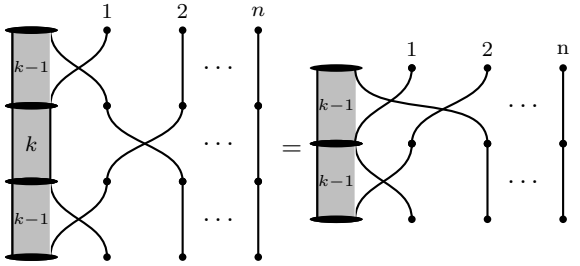
另一方面，我们得到：

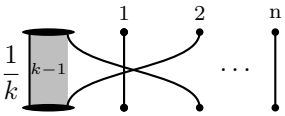
$$t(\sigma_1 t - \sigma_1 + \mathbf{1}) = (\mathbf{1} + \sigma_0)(\sigma_1\sigma_0 + \mathbf{1}) = \sigma_1\sigma_0 + \mathbf{1} + \sigma_1\sigma_0\sigma_1 + \sigma_0.$$

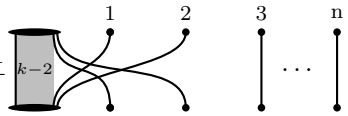
于是我们得到等式 (4.7)。

类似的计算给出第二个等式 (4.8)。现在假设 $k \geq 2$。

对于 (4.7)，我们首先计算：

$\sigma_0\sigma_1\sigma_0 =$ 

$$= \frac{1}{k}$$ 

$$+ \frac{k-1}{k}$$ 

$$= \frac{1}{k}\sigma_1\sigma_0\sigma_1 + \frac{k-1}{k}h_2.$$

特别地，

$$h_2 = \frac{k}{k-1}\sigma_0\sigma_1\sigma_0 - \frac{1}{k-1}\sigma_1\sigma_0\sigma_1. \tag{4.9}$$

由于 $\sigma_1 h_2 = h_2\sigma_1 = h_2$，我们推得：

$$\begin{aligned}(\sigma_0\sigma_1)^2 &= \frac{1}{k}\sigma_1\sigma_0 + \frac{k-1}{k}h_2 \\ &= \frac{1}{k}\sigma_1\sigma_0 + \sigma_0\sigma_1\sigma_0 - \frac{1}{k}\sigma_1\sigma_0\sigma_1 \quad \text{(from (4.9))}.\end{aligned}$$

因此：

$$\begin{aligned}(t\sigma_1)^2 &= ((\mathbf{1}+k\sigma_0)\sigma_1)^2\\ &= \mathbf{1}+k\sigma_1\sigma_0\sigma_1+k\sigma_0+k^2(\sigma_0\sigma_1)^2\\ &= \mathbf{1}+k\sigma_0+k\sigma_1\sigma_0+k^2\sigma_0\sigma_1\sigma_0\\ &= \mathbf{1}+(t-\mathbf{1})+\sigma_1(t-\mathbf{1})+(t-\mathbf{1})\sigma_1(t-\mathbf{1})\\ &= t(\sigma_1 t-\sigma_1+\mathbf{1}).\end{aligned}$$

类似的计算给出了第二个等式 (4.8)。 □

命题 4.6. 存在一个满射（含幺）代数同态 φ，从 $\hat{H}_n^{(0,k+1)}$ 到 $H_{k,\,n}$，其在生成元上的定义如下：

$$\begin{array}{rccc}\varphi: & \hat{\mathcal{H}}_n^{(0,k+1)} & \longrightarrow & H_{k,n}\\ & s_i & \longmapsto & \sigma_i,\\ & x_1 & \longmapsto & t,\end{array}$$

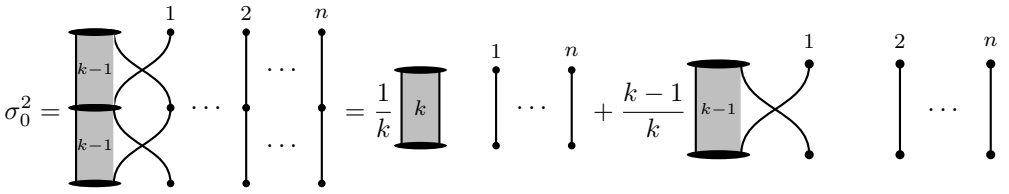
其中 $i=1,\dots,n-1$。

特别地，代数 $H_{k,n}$ 同构于 $\hat{H}_n^{(0,k+1)}$ 的一个商。

证明. 为了证明所定义的映射确实是满射代数同态，我们将使用以下两个引理：

引理 4.7. 对于生成元在 φ 下的像，代数 $\hat{H}_n^{\kappa}$ 的定义关系 *(3.8)-(3.11)* 均成立。

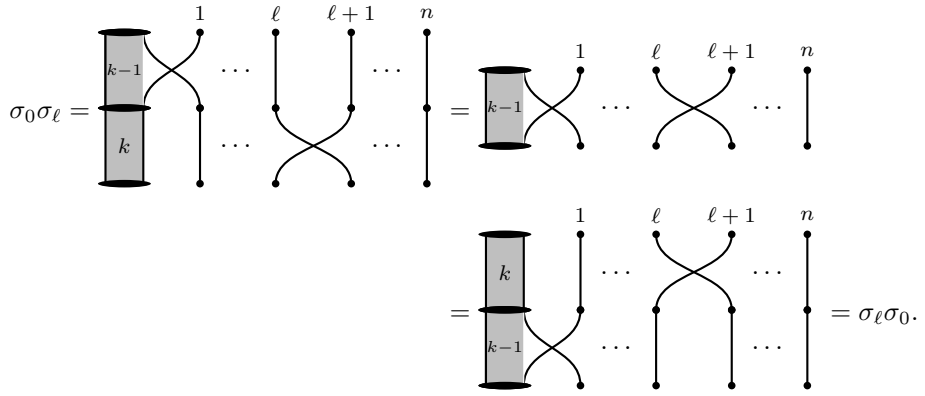
证明。 对于 (3.8)，我们有：



$$= \frac{1}{k}\mathbf{1}+\frac{k-1}{k}\sigma_0.$$

因此，$t^2=(\mathbf{1}+k\sigma_0)^2=\mathbf{1}+2k\sigma_0+k\mathbf{1}+k(k-1)\sigma_0=(k+1)t.$

对于 (3.9)，给定 $\ell=2,\dots,n-1$，我们有：



$$= \sigma_\ell\sigma_0.$$

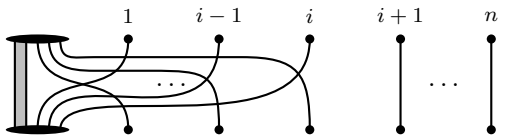
因此，根据 t 的定义，$\sigma_\ell t = t\sigma_\ell$。

等式 (3.10) 立即由引理 4.5 得出。事实上，将方程 (4.7)-(4.8) 相减即可直接得到该结果。

最后，(3.11) 是由以下事实得出的：由 $\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}$ 生成的 $H_{k,n}$ 的子代数与 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ 同构。 □

对于 $1\le p\le q\le n-1$，我们记 $\sigma_{q,p}:=\sigma_q\sigma_{q-1}\dots\sigma_p$ 和 $\sigma^{p,q}:=\sigma_p\sigma_{p+1}\dots\sigma_q$。

引理 4.8. 这些元素：

$h_i :=$ 

$, \quad i = 1, 2, \ldots, \min(k, n),$

连同元素 $(\sigma_i)_{i=1,\ldots,n-1}$ ，生成 $H_{k,n}$。

证明. 只需证明任意图表都由这些元素生成，因为图表生成 $H_{k,\ n}$。

给定一个图表，令 $i = 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ \min(k,\ n)$ 表示将顶部椭圆（分别是底部椭圆）与底部（分别是顶部）的点相连的边数。

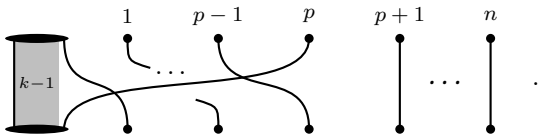
于是，左乘（分别是右乘） h_i by the $(\sigma_i)_{i=1,\ \ldots\ldots,\ n-1}$ ，会在这些 i 条边的 n 个点之间置换顶部（分别是底部）的端点，从而得到这种形式的任意图表。

最后，任何具有 k 条平行边连接顶部和底部椭圆的图表，均由 $(\sigma_i)_{i=1,\ \ldots\ldots,\ n-1}$ 生成，由此得证。 □

由引理 4.7 可知，映射 φ 确实是一个代数同态。现在我们来证明该映射是满射。为此，需要证明 $H_{k,\ n}$ 的生成元都属于 φ 的像。注意，对于 $i = 0$、 $h_0 = 1$ 以及对于 $i = 1$、 $h_1 = \sigma_0$。由引理 4.8，只需证明元素 $(h_i)_{i=1,\ \ldots\ldots,\ \min(k,n)}$ 属于 φ 的像。我们对此关于 $i \geq 1$ 使用归纳法证明。

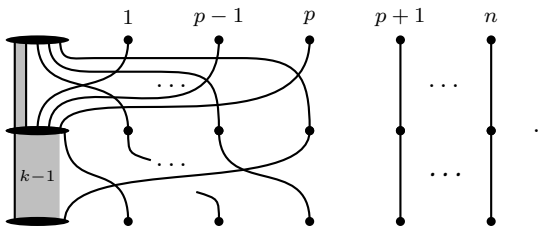
对于 $i = 1$, $h_1 = \varphi\left(\frac{1}{k}(t-1)\right)$。

假设对于某个 $p \in \{1, \ldots, \min(k, n) - 1\}$，元素 h_i 属于 φ 在 $i = 1, \ldots, p$ 下的像。现在我们证明 h_{p+1} 也属于该像。我们有：

$\sigma_{p,1}\sigma_0 =$ 

.

那么我们有：

$h_p\sigma_{p,1}\sigma_0 =$ 

.

正上方这两个图的乘法给出了$k!$ 个图的线性组合。

其中，元素 h_{p+1} 出现的条件是：在正上方的乘法中，底部图表里唯一一条连接顶部椭圆与第一个底部点的边，与连接顶部图表中两个不同椭圆的 $k - p$ 条平行竖直边之一相连。这相当于存在一个元素 $\pi \in \mathfrak{S}_k$ ，使得 $\pi^{-1}(k) \in \{1, \ldots, k-p\}$。集合 $\mathfrak{S}_k$ 中这些元素组成的子集的基数为：

$$|\{\pi \in \mathfrak{S}_k \mid \pi^{-1}(k) \in \{1, \ldots, k-p\}\}| = (k-p)(k-1)!.$$

因此，元素 h_{p+1} 以非零系数出现，即：

$$\frac{(k-p)(k-1)!}{k!} = \frac{k-p}{k}.$$

其余的元素是$(\sigma^{j,\ p}h_p\sigma_{p,1})_{j=1,\ldots,p}$，每个都以相同的非零系数出现，即 k^{-1}。

根据归纳假设，这些后一组元素的和在 φ 下有一个原像；记为 ω $\left(\text{即 } \varphi(\omega) = \sum_{j=1}^{p} \sigma^{j,\ p}h_p\sigma_{p,\ 1}\right)$. 然后我们有：

$$h_{p+1} = \frac{1}{k-p}\varphi\left((h_p\sigma_{p,1}(t-1) - \omega)\right),$$

因此 $h_{p+1} \in \mathrm{Im}(\varphi)$，其一个原像为 $\frac{1}{k-p}(h_p \sigma_{p,\,1}(t-1) - \omega) \in \hat{\mathcal{H}}_n^\kappa$.

证明至此结束。 □

注释 4.9。 由引理 *4.7* 的证明，我们可推出 σ_0 在 $H_{k,\,n}$中满足的特征方程：

$$(\sigma_0 - 1)\left(\sigma_0 + \frac{1}{k}\right) = 0, \tag{4.10}$$

它在代数上对应于（在 $H_{k,\,n}$中）：

$$(P_k \delta_k P_k - P_k)\left(P_k \delta_k P_k + \frac{1}{k} P_k\right) = 0. \tag{4.11}$$

容易看出，当 $2 \le n \le k$ 时，$H_{k,\,n}$有三个一维表示。它们由以下分拆给出：

$$\lambda = (k+n): \begin{array}{l}\sigma_0 \mapsto 1\,,\\ \sigma_i \mapsto 1\,,\end{array} \quad \lambda = (k, 1^n): \begin{array}{l}\sigma_0 \mapsto -\frac{1}{k}\,,\\ \sigma_i \mapsto -1\,,\end{array} \quad \lambda = (k,n): \begin{array}{l}\sigma_0 \mapsto -\frac{1}{k}\,,\\ \sigma_i \mapsto 1\,,\end{array} \tag{4.12}$$

其中给出了元素 σ_0 和 σ_i （$i \ge 1$）的相应取值。这些值可由 *[4]* 中的描述轻易得到。

特别地， σ_0 的特征值出现在特征方程(4.10)中，它们解释了(4.12)中定义的$H_{k,\,n}$ 的一维表示中的取值。

当 $n > k$ 时，只剩下两个一维表示；与 $\lambda =$ （k, n） 对应的表示从列表中删去（对于 $n > k$ 来说，它没有意义）。

根据命题 4.6，我们有一个代数同构：

$$\hat{\mathcal{H}}_n^\kappa / Ker(\varphi) \cong H_{k,n}.$$

接下来，我们将研究 φ 的核，对其作出精确描述，并推导出：

- $H_{k,n}$ 的典范基。
- $H_{k,n}$ 的生成元与关系表示。

4.2 $n \le k$ 的情形

$\hat{}$ 我们回顾$\mathcal{H}_n^\kappa$ 的四个中心本原幂等元在标准基$\{s_\omega\}_{\omega \in B_n}$中的表达式，见 (3.36)。

定义 4.10. 我们将代数 A_n^κ 定义为$\hat{}H_n^\kappa$ 关于以下关系的商：

$$(x_1 s_1)^2 = \kappa_1(1+\kappa_1)(s_1 - 1) + \kappa_1(s_1 x_1 s_1 - s_1 x_1) + (1+\kappa_1)(x_1 - x_1 s_1) + x_1 s_1 x_1. \tag{4.13}$$

约定：如果 $n = 0,1$，则 $A_n^\kappa = \hat{}H_n^\kappa$ 。

注 4.11. 如果 $\kappa_2 - \kappa_1 \neq 0, 1$，利用 $F^{(-1,\kappa_2)}{}_2$ 的显式表达式（见例 *3.11*），这等价于在$\hat{}H_n^\kappa$中施加以下关系：

$$F_2^{(-1,\kappa_2)} = 0, \tag{4.14}$$

其中， $F^{(-1,\kappa_2)}{}_2$ 被视为$\hat{}H_n^\kappa$中的一个元素。

阿廷-韦德伯恩分解 A_n^κ. 这里我们假设条件 (3.24) 已满足。

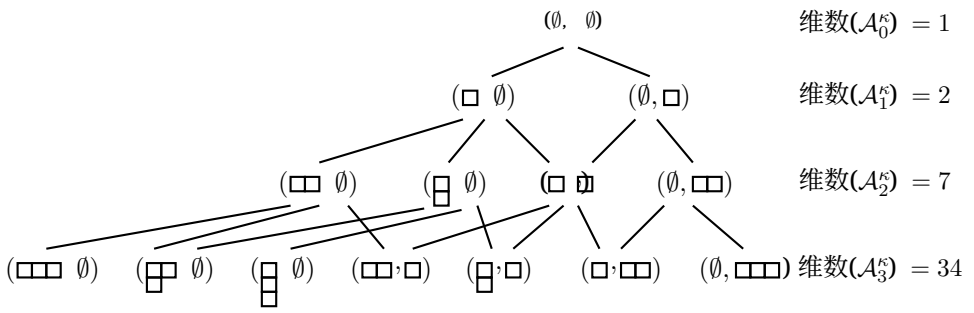
元素 $F^{(\alpha_1,\alpha_2)}{}_m$ （见（3.35））是 $\hat{}\mathcal{H}_m^\kappa$ 中与 (α_1, α_2) 对应的一维表示的极小中心幂等元（见（3.32））。这意味着它在这一维表示中非零，并在其他任何不可约表示中都作用为 0。现在，如果 $n \ge m$，那么 $F^{(\alpha_1,\alpha_2)}{}_m$ 作为$\mathcal{H}_n^\kappa$ 中的一个元素，在某个不可约表示中非零，当且仅当该表示

ˆ不可约表示在其对$\mathcal{H}_m^\kappa$ 的限制中包含给定的一维表示。因此，除以 $F^{(\alpha_1,\alpha_2)}{}_m = 0$ 恰好消去了这些不可约表示。

对于$\mathcal{A}_n^\kappa$这一特殊情形，它是ˆ$\mathcal{H}_n^\kappa$ 关于关系 $F^{(-1,\kappa_2)}{}_2 = 0$的商。我们回顾式（3.32）中建立的一维表示集合的编号，并发现，消失的表示是那些 $V_{(\lambda,\mu)}$ 具有 μ 至少两行非空行的表示。于是，代数$\mathcal{A}_n^\kappa$ 是半单的，其不可约表示集合如下：

$$Irr(\mathcal{A}_n^\kappa) = \{V_{(\lambda,\mu)} \mid (\lambda,\mu) \in Par_2(n) \text{ and } \ell(\mu) < 2\} .$$

代数$\mathcal{A}_n^\kappa$ 的布拉泰利图由ˆ代数$\mathcal{H}_n^\kappa$的布拉泰利图得到，其中删去了第二个分量中行数超过一行的所有双分拆：



$\mathcal{A}_n^\kappa$ 的维数可以通过将不可约表示的维数平方求和轻松计算得出：

$$\dim(\mathcal{A}_n^\kappa) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{\lambda \vdash n-i} (\dim V_{(\lambda,(i))})^2 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 \sum_{\lambda \vdash n-i} d_\lambda^2 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 (n-i)! \ , \quad (4.15)$$

其中，我们首先根据第二个分拆 μ 的大小拆分求和；该分拆必须是一行 i 个方格，然后依次使用 (3.34) 和 (3.33)。上方的图中写出了 $n = 0,1,2,3$ 的维数。

中的避开词。 $b = b_1 b_2 \ldots b_n$ 是 B_n 的一个词，若 b 中的所有带横线数字均按递减顺序出现，则称其为 $\bar{1}\bar{2}$-避开词，见 [8]。例如，在 B_6 中，$35\bar{6}\bar{4}\bar{2}$ 是 $\bar{1}\bar{2}$-避开词，而 354162 不是，因为其中有子序列 46。

我们将 $B_n(\bar{1}\bar{2})$ 记作 B_n 中所有避免 $\bar{1}\bar{2}$ 的带符号排列所构成的子集。与 $B_n(\bar{1}\bar{2})$ 中某个置换对应的词 $b = b_1 b_2 \ldots b_n$ 可按如下方式写出：从 $\{1,2,\ldots,n\}$ 中选出 i 个数字加上横线，从 n 个位置中选出 i 个位置，将这些带横线数字按降序放入 b 中，然后将剩余的 $n-i$ 个数字在剩余的 $n-i$ 个位置上按 b 排列。因此：

$$|B_n(\bar{1}\bar{2})| = \sum_{i=0}^{n} (n-i)! \binom{n}{i}^2 . \quad (4.16)$$

命题 4.12. 令 $\kappa \in \mathbb{C}^2$。

集合 $\{s_\omega \mid \omega \in B_n(\bar{1}\bar{2})\}$ 是 A_n^κ 的生成集。

证明。 由于代数 $\mathcal{A}_n^\kappa$ 是 ˆ$\mathcal{H}_n^\kappa$ 的商，集合 $\{s_\omega \mid \omega \in B_n\}$ 生成 $\mathcal{A}_n^\kappa$。我们将证明此集合可以缩减为 $\{s_\omega \mid \omega \in B_n(\bar{1}\bar{2})\}$。

我们对 B_n中元素的长度使用归纳法。

满足 $\ell(\omega) < 4$ 的 B_n 中唯一一个在$\{1,2,\ldots,n\}$ 中有多个带横线整数的元素是 $\tau_0\tau_1\tau_0$，它对应于词 $\bar{2}\bar{1}$。事实上，元素 ω 的带横线整数个数等于 $\ell_0(\omega)$。因此，考虑 B_n中元素的集合(3.17)，其他所有满足 $\ell(\omega) < 4$ 的元素至多有一个带横线数字。

因此，任何这样的元素都避免 $\bar{1}\bar{2}$，所以 $s_\omega \in \{s_\delta \mid \delta \in B_n(\bar{1}\bar{2})\}$.

现在假设，对于某个 $p \geq 3$，任何满足 $\ell(\omega) \leq p$ 的 $\mathcal{A}_n^\kappa$ 中的元素 s_ω 都属于 Vect$\{s_\omega \mid \omega \in B_n(\bar{1}\bar{2})\}$。考虑一个满足 $\ell(\omega) = p+1$ 的元素 s_ω，使得

$\omega \notin B_n(\bar{1}\bar{2})$。那么， ω 必然在某个约化表达式中包含 $(\tau_0\tau_1)^2$ （参见 [8,定理 2.3]）。

众所周知，群 B_n 的任一元素的约化表达式，都可以通过辫关系 (3.16) 从任意另一约化表达式得到（例如 [12, §IV.1.5]）。

使用类型 A 的辫关系不会在 $\hat{}\mathcal{H}_n^\kappa$ 中得到不同的元素，而辫关系 $(x_1s_1)^2 = (s_1x_1)^2$ 在 $\hat{}\mathcal{H}_n^\kappa$ 中给出一个线性组合，其中包含一个含有 $(x_1s_1)^2$ 的元素，以及其他长度小于或等于 p 的元素（见注 3.6）。

因此，剩下要研究的是一个长度为 $p+1$ 且含有 $(x_1s_1)^2$, 的元素，我们将其记为 Λ；其余出现的元素长度均小于或等于 p，因而根据递推假设，它们属于 $Vect\{s_\omega \mid \omega \in B_n(\bar{1}\bar{2})\}$

但在 $\mathcal{A}_n^\kappa$ 中，关系式 (4.13) 允许我们将 Λ 表示为长度小于或等于 p 的项的线性组合。根据归纳假设，可得$s_\omega \in$ 线性张成$\{s_\delta \mid \delta \in B_n(\bar{1}\bar{2})\}$。

因此，这个族生成代数 $\mathcal{A}_n^\kappa$。 □

推论 4.13。 假设我们处于条件 (3.24)下。

则集合 $\{s_\omega \mid \omega \in B_n(\bar{1}\bar{2})\}$ 是 A_n^κ 的一组基。

证明。 集合$\{s_\omega \mid \omega \in B_n(\bar{1}\bar{2})\}$ 根据命题 4.12 是 $\mathcal{A}_n^\kappa$ 的一个生成集。此外，条件 (3.24) 使我们能够得到代数 $\mathcal{A}_n^{\kappa^{--}}$ 的维数 (4.15)，它等于 B_n(12) 中元素的数量 (4.16)。 □

注 4.14。 更一般地，假设 κ_1、κ_2 是不定元，并且我们在环 $\mathbb{C}[\kappa_1, \kappa_2]$ 上工作。那么命题 *4.12* 仍然成立而无需任何修改；利用在 $\mathbb{C}(\kappa_1, \kappa_2)$ 上的半单性，我们可以像在推论 *4.13* 中那样证明，A_n^κ 是在 $\mathbb{C}[\kappa_1, \kappa_2]$ 上的自由$^{--}$，其基为 $\{s_\omega \mid \omega \in B_n(12)\}$。

特殊情形 $\kappa = (0,\ k+1)$。 令 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $k \geq 1$ 满足 $n \leq k$。

我们将使用参数 (κ_1, κ_2) 的特化 (3.42)，即:

$$\kappa_1 = 0, \quad \kappa_2 = k+1.$$

这由命题 4.3 得到启发，因为这两个值是元素 t 的特征值。

可以看出，条件 $n \leq k$ 蕴含代数 $\hat{}\mathcal{H}^{(0,k+1}$ 的半单性)
$_n$（见 (3.24)）。

回顾命题 4.6 中定义的映射 φ。

定理 4.15. 假设 $n \leq k$。那么，代数 $H_{k,\ n}$ 与 $A_n^{(0,k+1)}$ 同构。

等价地，映射 φ 的核是由幂等元 $F_2^{(-1,k+1)}$ 生成的双边理想。

证明。 我们已经看到，以下含幺代数同态是满射:

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \hat{\mathcal{H}}_n^{(0,k+1)} & \longrightarrow & H_{k,n} \\ & s_i & \longmapsto & \sigma_i, \\ & x_1 & \longmapsto & t, \end{array}$$

对于 $i = 1,\ \ldots\ldots,\ n-1$。

由引理 4.5，我们可以取商并得到一个代数态射，仍记作 $\varphi : \mathcal{A}_n^{(0,k+1)} \to H_{k,\ n}$。取商不会影响满射性，因此该态射仍然是满射。

最后，假设 $n \leq k$，则$\mathcal{A}_n^{(0,k+1)}$ 的维数（见 (4.15)）等于 dim($H_{k,\ n}$)（见 (2.2)），因此特别地，它不超过 $H_{k,\ n}$ 的维数，这就证明了结论。于是， φ 是单射。

因此它是一个代数同构。 □

推论 4.16。假设 $n \leq k$。

集合 $\{\varphi(s_\omega) \mid \omega \in B_n(\bar{1}\bar{2})\}$ 是代数 $H_{k,\ n}$ 的一组基。

证明。 根据定理 4.15 和推论 4.13，证明是直接的，只需利用这一经典事实：同构下基的元素的像所形成的集合仍然是一个基。 □

例 4.17。 • $n=2$: 基为:

$$\{1,\sigma_1,t,\sigma_1t,t\sigma_1,\sigma_1t\sigma_1,t\sigma_1t\},$$

分别对应于.....的像

$$\{1,s_1,x_1,s_1x_1,x_1s_1,s_1x_1s_1,x_1s_1x_1\}.$$

将 $(x_1s_1)^2$ 加入该集合，即得到 $\hat{}H_2^\kappa$ 的一组基；但取商后，它会成为其他元素的线性组合。注意，将 x_1 与 s_0 认同后，词$(x_1s_1)^2$ 对应于词 $\bar{1}\bar{2}$，而后者并非 $\bar{1}\bar{2}$-避免的。

- $n=3$: 基为:

$$\begin{aligned}&\{1,\ \sigma_2,\ \sigma_2\sigma_1,\ \sigma_2\sigma_1t,\ \sigma_2\sigma_1t\sigma_1,\ \sigma_2\sigma_1t\sigma_1\sigma_2,\ \sigma_1,\ \sigma_1\sigma_2,\ \sigma_1\sigma_2\sigma_1,\\ &\sigma_1\sigma_2\sigma_1t,\ \sigma_1\sigma_2\sigma_1t\sigma_1,\ \sigma_1\sigma_2\sigma_1t\sigma_1\sigma_2,\ \sigma_1t,\ \sigma_1t\sigma_2,\ \sigma_1t\sigma_2\sigma_1,\\ &\sigma_1t\sigma_2\sigma_1t,\ \sigma_1t\sigma_1,\ \sigma_1t\sigma_1\sigma_2,\ \sigma_1t\sigma_1\sigma_2\sigma_1,\ \sigma_1t\sigma_1\sigma_2\sigma_1t,\ \sigma_1t\sigma_1\sigma_2\sigma_1t\sigma_1,\\ &t,\ t\sigma_2,\ t\sigma_2\sigma_1,\ t\sigma_2\sigma_1t,\ t\sigma_1,\ t\sigma_1\sigma_2,\ t\sigma_1\sigma_2\sigma_1,\ t\sigma_1\sigma_2\sigma_1t,\ t\sigma_1\sigma_2\sigma_1t\sigma_1,\\ &t\sigma_1t,\ t\sigma_1t\sigma_2,\ t\sigma_1t\sigma_2\sigma_1,\ t\sigma_1t\sigma_2\sigma_1t\}.\end{aligned}$$

$\hat{}$取商时被去掉的元素是 H_3^κ 中具有以下形式的元素:

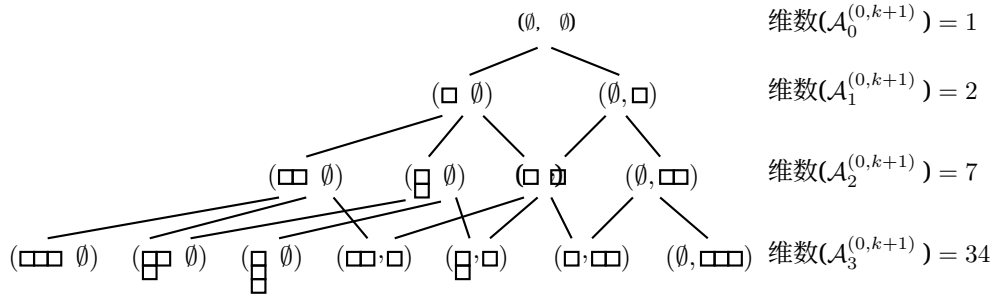
$$\begin{aligned}&\{s_1x_1s_2s_1x_1s_1,\ s_1x_1s_2s_1x_1s_1s_2,\ s_1x_1s_1s_2s_1x_1s_1s_2,\ x_1s_2s_1x_1s_1,\\ &x_1s_2s_1x_1s_1s_2,\ x_1s_1s_2s_1x_1s_1s_2,\ x_1s_1x_1s_2s_1x_1s_1,\ x_1s_1x_1s_2s_1x_1s_1s_2,\\ &x_1s_1x_1s_1,\ x_1s_1x_1s_1s_2,\ x_1s_1x_1s_1s_2s_1,\ x_1s_1x_1s_1s_2s_1x_1,\\ &x_1s_1x_1s_1s_2s_1x_1s_1,\ x_1s_1x_1s_1s_2s_1x_1s_1s_2\},\end{aligned}$$

它们对应于以下词:

$$\begin{array}{ccc}
s_1x_1s_2s_1x_1s_1 & \leftrightsquigarrow & \bar{2}\bar{3}1\\
s_1x_1s_2s_1x_1s_1s_2 & \leftrightsquigarrow & \bar{2}1\bar{3}\\
s_1x_1s_1s_2s_1x_1s_1s_2 & \leftrightsquigarrow & 1\bar{2}\bar{3}\\
x_1s_2s_1x_1s_1 & \leftrightsquigarrow & \bar{1}\bar{3}2\\
x_1s_2s_1x_1s_1s_2 & \leftrightsquigarrow & \bar{1}2\bar{3}\\
x_1s_1s_2s_1x_1s_1s_2 & \leftrightsquigarrow & 2\bar{1}\bar{3}\\
x_1s_1x_1s_2s_1x_1s_1 & \leftrightsquigarrow & \bar{2}\bar{3}\bar{1}\\
x_1s_1x_1s_2s_1x_1s_1s_2 & \leftrightsquigarrow & \bar{2}\bar{1}\bar{3}\\
x_1s_1x_1s_1 & \leftrightsquigarrow & \bar{1}\bar{2}3\\
x_1s_1x_1s_1s_2 & \leftrightsquigarrow & \bar{1}3\bar{2}\\
x_1s_1x_1s_1s_2s_1 & \leftrightsquigarrow & 3\bar{1}\bar{2}\\
x_1s_1x_1s_1s_2s_1x_1 & \leftrightsquigarrow & \bar{3}\bar{1}\bar{2}\\
x_1s_1x_1s_1s_2s_1x_1s_1 & \leftrightsquigarrow & \bar{1}\bar{3}\bar{2}\\
x_1s_1x_1s_1s_2s_1x_1s_1s_2 & \leftrightsquigarrow & \bar{1}\bar{2}\bar{3}
\end{array}$$

这些恰好是 $B_3 \mid B_3(\bar{1}\bar{2})$ 中的元素。

链$\{\mathcal{A}_n^{(0,k+1)}\}_{n\geq 0}$ 前四层的布拉泰利图，其中 $n\leq k$，所示双分拆的第二个分量是长度至多为 1 的分拆，如下所示:



请注意，与第 2.2 节所示图的双射，使用第 4.1.1 节中说明的双射。

4.3 $n > k$的情形

设 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $k \geq 1$ 使得 $n > k$。

我们指出，$\hat{}\mathcal{H}_n^\kappa$ 的基 (3.18) 与包含 $B_{n-1} \subset B_n$十分相适，因此我们通过此包含将 B_k 的一个元素视为 B_n 的一个元素。

我们定义以下元素： $\hat{\mathcal{H}}_n^\kappa$:

$$\tilde{F}_{k+1}^{(1,\kappa_1)} = \sum_{\omega \in B_{k+1}} \left(\prod_{i=0}^{k} (i - \kappa_2)^{1-m_i(\omega)} \right) s_\omega. \tag{4.17}$$

定义 4.18. 我们将代数 $A_n^{\kappa\,(k)}$,定义为 A_n^κ 关于以下关系的商：

$$\tilde{F}_{k+1}^{(1,\kappa_1)} = 0, \tag{4.18}$$

其中 $\tilde{F}^{(1,\kappa_1)}{}_{k+1}$ 被视为 A_n^κ的一个元素。

约定当 $n \leq k$时，$A_n^{\kappa\,(k)} = A_n^\kappa$。

注记 4.19. 若 $\kappa_2 - \kappa_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \ldots, k\}$，利用 $F^{(1,\kappa_1)}{}_{k+1}$ 的显式表达式（见 (3.36)），这等价于在 A_n^κ 中施加以下关系：

$$F_{k+1}^{(1,\kappa_1)} = 0, \tag{4.19}$$

其中， $F^{(1,\kappa_1)}{}_{k+1}$ 被视为 A_n^κ 的一个元素。

Indeed, one sees that $F_{k+1}^{(1,\kappa_1)} = D_{k+1}(1,\kappa_1)\tilde{F}_{k+1}^{(1,\kappa_1)}$ *with* $D_{k+1}(1,\kappa_1) \neq 0$.

ˆ 对于 $k = 1, \ldots, n-1$，我们定义 H_n^κ 中的以下元素：

$$\Delta_k := x_1 s_1 x_1 \ldots s_k \ldots s_1 x_1. \tag{4.20}$$

约定 $\Delta_0 = x_1$。

命题 4.20. 令 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$。

当 $\tilde{F}^{(1,\kappa_1)}{}_n$ 用 A_n^κ 的基 $\{s_\omega \mid \omega \in B_n(\bar{12})\}$ 表示时， $k = n-1$ 对应的基元素(4.20) 的系数为 $n!$

证明。 我们对 n 使用归纳法证明该结论。

对于 $n = 1$，我们有 $\tilde{F}^{(1,\kappa_1)}{}_1 = x_1 - \kappa_2$，因此 $\Delta_0 = x_1$ 前面的系数为 1。

假设该结论对 $n \geq 1$ 成立。由 (3.41) 可得以下递推公式：

$$\tilde{F}_{n+1}^{(1,\kappa_1)} = \tilde{F}_n^{(1,\kappa_1)} \left(\sum_{j=0}^{n} [n, -j] + (n - \kappa_2) \sum_{j=1}^{n+1} [n, j] \right). \tag{4.21}$$

利用递推假设，并着眼于对 Δ_n 前面的系数有贡献的项，我们有：

$$n! \Delta_n \left(1 + \sum_{j=1}^{n} s_1 \ldots s_j \right). \tag{4.22}$$

固定 $j = 1, \ldots, n$。我们有：

$$\Delta_n(s_1 \ldots s_j) = x_1 s_1 x_1 \ldots s_{n-1} \ldots s_1 s_n \ldots s_2 (x_1 s_1)^2 s_2 \ldots s_j.$$

在 $\mathcal{A}_n^\kappa$ 中利用关系式 (4.13)，可将 $(x_1 s_1)^2$ 在 $\mathcal{A}_n^\kappa$ 中重写。

唯一不会减少 (4.13) 中 x_1 出现次数的项是 $x_1 s_1 x_1$。每个 $s_1, s_2, \ldots, s_j$都可以依次穿过剩余的表达式，得到一个新的 $(x_1 s_1)^2$, ，它又会化简为 $x_1 s_1 x_1$。因此，(4.22) 中的每一项都会恰好产生一个形如 Δ_n 的完整表达式，从而得到 $(n+1)$ 个这样的项。

最后，当 $\tilde{F}^{(1,\kappa_1)}{}_{n+1}$ 用 $\mathcal{A}_{n+1}^\kappa$ 的基 $\{s_\omega \mid \omega \in B_{n+1}(\bar{12})\}$ 表示时， Δ_n 前的系数为 $(n+1)!$。

证明至此结束。 □

利用命题 4.20 和推论 4.13 对 $n = k+1$ 的应用，我们可以将关系 (4.18) 改写为：

$$\Delta_k = \sum_{\omega \in B_{k+1}(\bar{1}\bar{2}) \setminus \{\Delta_k\}} \lambda_\omega s_\omega, \tag{4.23}$$

对于 $\lambda_\omega \in \mathbb{C}$。

存在唯一的元素 ω，属于 $B_{k+1}(\bar{1}\bar{2})$，使得 $\ell_0(\omega) = k+1$；其余元素的 x_1 出现次数都严格更少。该元素为 Δ_k，对应于词 $k+1k\ldots1$。

特别地，(4.23) 的右端是由按 $\omega \in B_{k+1}(\bar{1}\bar{2})$ 编号的元素构成的线性组合，其中 $\ell_0(\omega) \leq k$。

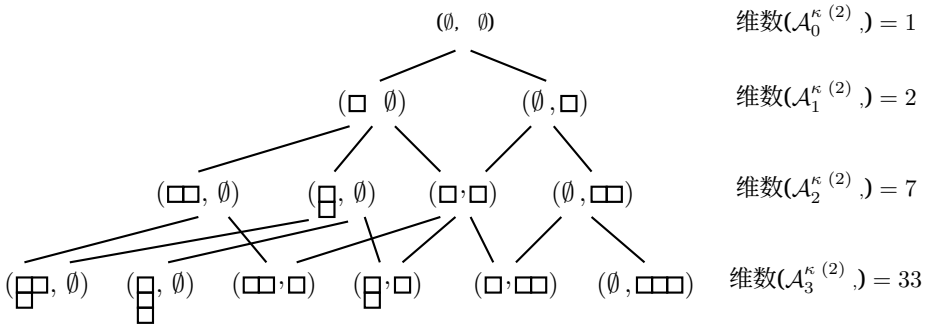
关于 $\mathcal{A}_n^{\kappa\,(k)}$ 的阿廷-韦德伯恩分解。 我们假设条件 (3.24) 成立，即：

$$\kappa_1 - \kappa_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm1, \ldots, \pm(n-1)\}.$$

对于 $\mathcal{A}_n^{\kappa\,(k)}$ 的特殊情形，它是 $\mathcal{A}_n^{\kappa}$ 在关系 $F^{(1,\kappa_1)\,k+1} = 0$ 下的商。回顾 (3.32) 中建立的一维表示集的编号，可知消失的表示是那些 $V_{(\lambda,\mu)}$，其中 λ 至少有 $k+1$ 列，且 μ 至少有两行非空。于是，代数 $\mathcal{A}_n^{\kappa\,(k)}$ 是半单的，其不可约表示集如下：

$$Irr(\mathcal{A}_n^{\kappa,(k)}) = \{V_{(\lambda,\mu)} \mid (\lambda,\mu) \in Par_2(n) \text{ such that } \lambda_1 < k+1 \text{ and } \ell(\mu) < 2\}\ .$$

对于 $k = 2$，链 $\{\mathcal{A}_n^{\kappa\,(2)},\}_{n\geq 0}$ 前四层的布拉泰利图，其中展示的双分拆满足第二个分量是长度至多为 1 的分拆；仅对于 $n = 3$，我们删除分拆 ((3) ∅)：



避开词 $B_n(12)$。我们将 $B_n(\bar{1}\bar{2}, k+1\ldots\bar{1})$ 定义为 $B_n(\bar{1}\bar{2})$ 的子集，即由至多含有 k 个带横线整数的避开12的词组成的集合。例如，$254136 \in B_6(12,4321)$，但不属于 $B_6(12,321)$。

引理4.21。我们有以下恒等式：

$$|B_n(\bar{1}\bar{2}, \overline{k+1}\ldots\bar{1})| = \sum_{i=0}^{\min(k,n)} \binom{n}{i}^2 (n-i)!. \tag{4.24}$$

证明。我们选取一个数 $i \in \{1,\ldots,n\}$ 的带横线元素，其中 $i \leq k$。接着，从 n 个可用位置中选取 i 个位置放置带横线元素。最后，将其余 $n-i$ 个整数置换后填入剩余位置。由此得到所述公式。 □

注4.22。集合 $B_n(\bar{1}\bar{2}, k+1\ldots\bar{1})$ 还有另一种有用的描述，即：

$$B_n(\bar{1}\bar{2}, \overline{k+1}\ldots\bar{1}) = B_n(\bar{1}\bar{2}) \cap \{\omega \in B_n \mid \ell_0(\omega) < k+1\}. \tag{4.25}$$

特别地，当且仅当 $n \leq k$（见 *[13]*）时，有 $B_n(\bar{1}\bar{2}, k+1\ldots\bar{1}) = B_n(\bar{1}\bar{2})$。

定理 4.23。令 $\kappa \in \mathbb{C}^2$。

集合 $\{s_\omega \mid \omega \in B_n(\bar{1}\bar{2}, k+\overline{1\ldots1})\}$ 张成 $A_n^{\kappa\,(k)}$。

证明。回忆一下，$\{s_\omega \mid \omega \in B_n(\bar{1}\bar{2})\}$ 张成 $\mathcal{A}_n^\kappa$ （命题 4.12）。还要回忆的是，在这个基中存在唯一一个元素满足 $\ell_0(\omega) = n$，其他所有元素中 x_1 的出现次数都严格更少。该元素是：

$$\bar{n}\overline{n-1}\dots\bar{1} \leftrightsquigarrow \Delta_{n-1} = x_1 s_1 x_1 s_2 s_1 x_1 \dots s_{n-1} \dots s_1 x_1. \tag{4.26}$$

现在利用引理 4.20 证明，任意满足 $\omega \in B_n$ 且 $\ell_0(\omega) \geq k+1$ 的 s_ω，都可以改写为$\mathcal{A}_n^{\kappa\,(k)}$,中的线性组合，其中各元素满足 $\ell_0(\delta) \leq k$。

将这样的元素写成标准形式（见 (3.19)）。利用辫关系，我们可以分离出如下形式的子表达式：

$$(s_{i_1} \dots s_1 x_1)(s_{i_2} \dots s_1 x_1) \dots (s_{i_{k+1}} \dots s_1 x_1), \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_{k+1}.$$

利用交换关系将 s_i 推到左边，我们得到$n = k+1$对应的元素 (4.20)。由命题 4.20 应用于 $n = k+1$，$\mathcal{A}_n^{\kappa\,(k)}$,中的关系式 (4.23) 随即允许我们将该元素改写为满足 $\ell_0(\delta) \leq k$ 的元素的线性组合，从而减少 x_1 出现的次数。由归纳法可得，$\mathcal{A}_n^{\kappa\,(k)}$,由这类元素生成。

最后，对于任意满足 $\ell_0(\omega) \leq k$ 的 $\omega \in B_n \setminus B_n(\bar{1}\bar{2})$，关系式 (4.13) 允许我们将 s_ω （如定理 4.12 中所示）表示为关于 s_δ, $\delta \in B_n(\bar{1}\bar{2})$ 的形式。此外， ℓ_0 不会增加，因为该关系式涉及的项中， x_1 至多出现两次。结论得证。 □

现在我们可以给出融合置换代数的代数描述。

令 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $k \geq 1$。

现在考虑特化 (3.42)，即：

$$\kappa_1 = 0, \quad \kappa_2 = k+1.$$

定理 4.24. 存在一个代数同构，将 $A_n^{(0,k+1)\,(k)}$,与$H_{k,n}$对应起来，其定义如下：

$$\begin{array}{rccll} \varphi: & \mathcal{A}_n^{(0,k+1),(k)} & \longrightarrow & H_{k,n} & \\ & s_i & \longmapsto & \sigma_i, & i = 1, \dots, n-1, \\ & x_1 & \longmapsto & t := \mathbf{1} + k\sigma_0. & \end{array} \tag{4.27}$$

证明. 在定理 4.15 的证明中定义的态射 $\varphi : \mathcal{A}_n^{(0,k+1)} \longrightarrow H_{k,n}$，在对由$\tilde{F}_{k+1}^{(1,0)}$ 生成的双边理想取商后，仍然是一个态射。事实上，若 $n \leq k$，则无需验证，因为 $\mathcal{A}_n^{(0,k+1)\,(k)} = \mathcal{A}_n^{(0,k+1)}$; 而在 $n > k$ 的情形下，若 $\tilde{F}_{k+1}^{(1,0)}$ 在 φ 下的像在 $H_{k,n}$ 中非零，则这将进而推出存在以下 $H_{k,n}$ 的一维表示，其定义在以下生成元上（见命题 4.6）：

$$\begin{array}{rcl} t & \longmapsto & 0, \\ \sigma_i & \longmapsto & 1, \end{array}$$

对于 $i = 1, \dots, n-1$。特别地，由于 $t = 1 + k\sigma_0$，我们将有 σ_0通过该表示被映射到 $-\frac{1}{k}$上。但我们已经在(4.12)附近讨论过，此类一维表示并不存在。因此， $\tilde{F}_{k+1}^{(1,0)}$ 在$H_{k,\,n}$ 上的像经过 φ 后为零，进而得到态射性质。

此外，态射 φ 在取商后仍然是满射。

因此，还需证明后者是单射。

由于族 $\{s_\omega \mid \omega \in B_n(\bar{1}\bar{2},\ k+1\dots\overline{1)}\}$生成 $\mathcal{A}_n^{(0,k+1)\,(k)}$, ，且其基数等于代数 $H_{k,\,n}$的维数，我们推得

$$\dim(\mathcal{A}_n^{(0,k+1),(k)}) \leq \dim(H_{k,n}),$$

因此该映射是单射。

由于该映射既是满射又是单射，所以它是同构。 □

特别地，在定理 4.24 中，我们已经证明集合

$$\{s_\omega \mid \omega \in B_n(\bar{1}\bar{2}, \overline{k+1}\dots\bar{1})\}$$

是$\mathcal{A}_n^{(0,k+1)\,(k)}$的基集。

推论 4.25. 族 $\{\varphi(s_\omega) \mid \omega \in B_n(\bar{1}\bar{2}, k+1 \ldots \bar{1})\}$ 是代数$H_{k,n}$的一组基。

证明。 使用与推论 4.16 证明中相同的推理即可轻松得证。

□

例 4.26。 • $n=2$ 和 $k=1$: 基为

$$\{1, \sigma_1, t, \sigma_1 t, t\sigma_1, \sigma_1 t\sigma_1\},$$

分别对应于以下元素的像

$$\{1, s_1, x_1, s_1x_1, x_1s_1, s_1x_1s_1\}. \tag{4.28}$$

取商 $A_2 \twoheadrightarrow A_2^{(0,2)\,(1)}$,时，唯一被删除的元素是 $x_1s_1x_1$。它恰好是 $B_3(\bar{1}\bar{2}) \mid B_3(\bar{1}\bar{2}, \bar{2}\bar{1})$ 中的元素。

- $n=3$ 和 $k=2$: 基为:

$$\begin{aligned}\{&1,\ \sigma_2,\ \sigma_2\sigma_1,\ \sigma_2\sigma_1 t,\ \sigma_2\sigma_1 t\sigma_1,\ \sigma_2\sigma_1 t\sigma_1\sigma_2,\ \sigma_1,\ \sigma_1\sigma_2,\ \sigma_1\sigma_2\sigma_1,\\ &\sigma_1\sigma_2\sigma_1 t,\ \sigma_1\sigma_2\sigma_1 t\sigma_1,\ \sigma_1\sigma_2\sigma_1 t\sigma_1\sigma_2,\ \sigma_1 t,\ \sigma_1 t\sigma_2,\ \sigma_1 t\sigma_2\sigma_1,\\ &\sigma_1 t\sigma_2\sigma_1 t,\ \sigma_1 t\sigma_1,\ \sigma_1 t\sigma_1\sigma_2,\ \sigma_1 t\sigma_1\sigma_2\sigma_1,\ \sigma_1 t\sigma_1\sigma_2\sigma_1 t,\ \sigma_1 t\sigma_1\sigma_2\sigma_1 t\sigma_1,\\ &t,\ t\sigma_2,\ t\sigma_2\sigma_1,\ t\sigma_2\sigma_1 t,\ t\sigma_1,\ t\sigma_1\sigma_2,\ t\sigma_1\sigma_2\sigma_1,\ t\sigma_1\sigma_2\sigma_1 t,\ t\sigma_1\sigma_2\sigma_1 t\sigma_1,\\ &t\sigma_1 t,\ t\sigma_1 t\sigma_2,\ t\sigma_1 t\sigma_2\sigma_1\}.\end{aligned}$$

取商 $A_3^{(0,3)} \twoheadrightarrow A_3^{(0,3)\,(2)}$,时，唯一被删除的元素是$x_1s_1x_1s_2s_1x_1$。它恰好是 $B_3(\bar{1}\bar{2}) \mid B_3(\bar{1}\bar{2}, \bar{3}\bar{2}\bar{1})$ 中的元素。

维数$\mathcal{A}_n^{\kappa\,(k)}$。 令 $\kappa \in \mathbb{C}^2$。

由定理 4.23、(2.2) 和 (4.24)，可得以下不等式:

$$\dim(\mathcal{A}_n^{\kappa,(k)}) \leq \dim(H_{k,n}). \tag{4.29}$$

现在假设 κ 满足条件 (3.24)。

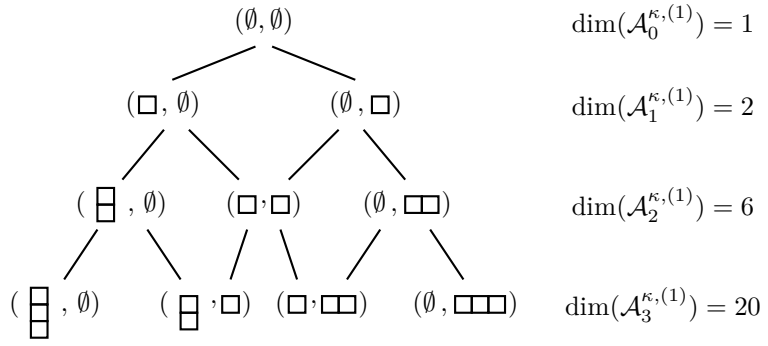
因此，利用代数 $\mathcal{A}_n^{\kappa\,(k)}$ 的半单性，不等式 (4.29) 可改写为:

$$\sum_{\boldsymbol{\lambda} \in Irr(\mathcal{A}_n^{\kappa,(k)})} d_{\boldsymbol{\lambda}}^2 \leq \sum_{i=0}^{\min(k,n)} \binom{n}{i}^2 (n-i)!. \tag{4.30}$$

若 $n \leq k+1$，则不等式 (4.30) 是一个等式。事实上，在这种情况下，代数$\mathcal{A}_n^{\kappa\,(k)}$和 $\mathcal{A}_n^{(0,k+1)\,(k)}$均为半单代数，且 $Irr(\mathcal{A}_n^{\kappa\,(k)}) = Irr(\mathcal{A}_n^{(0,k+1)\,(k)})$；对于每个 $\boldsymbol{\lambda} \in Irr(\mathcal{A}_n^{\kappa\,(k)})$，两个代数中由 $\boldsymbol{\lambda}$ 标记的不可约表示维数相同（见 (3.26)）。由同构 (2.6)，可推出这两个代数的维数相同，因此根据定理 4.24，可得维数相等。

然而，在 $n > k+1$ 的情况下，不等式 (4.30) 可能是严格的。

事实上，对于 $k=1$，链$\{\mathcal{A}_n^{\kappa\,(1)}\}_{n\geq 0}$ 前四层的布拉泰利图如下，其中所示的双分拆中，第一个分量是至多有 1 列的分拆，第二个分量是长度至多为 1 的分拆:



于是很容易计算出$\mathcal{A}_n^{\kappa\ (1)}$,的维数:

$$\dim(\mathcal{A}_n^{\kappa,(1)}) = \sum_{i=0}^{n} d^2_{((1^{n-i}),(i))} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}\ . \tag{4.31}$$

例如，等式 (4.31) 对于 $n=3$ 给出 $\dim(\mathcal{A}_3^{\kappa\ (1)},) = 20$。但我们知道，$H_{1,n} \cong \mathbb{C}\mathfrak{S}_{n+1}$ 作为代数是相同的。因此，对于 $n=3$，我们有 $\dim(\mathbb{C}\mathfrak{S}_4) = 24$，于是维数满足严格不等式。

特别地，集合 $\{s_\omega \mid \omega \in B_3(\bar{1}\bar{2}, \bar{2}\bar{1})\}$，也就是元素 s_ω 中 x_1 至多出现 1 次的集合，在$\mathcal{A}_3^{\kappa\ (1)}$,是半单的情况下并非线性无关，但对于$\mathcal{A}_3^{(0,2)\ (1)}$,则是线性无关的（见定理 4.24），后者不是半单的。

对于更大的 k 值，也会出现同样的现象。

例如，对于 $k=2$，属于 $Irr(\mathcal{A}_4^{\kappa\ (2)},)$ 的双分拆恰好是第一分量为至多有 2 列的分拆、第二分量为长度至多 1 的分拆的那些双分拆，即:

$$\begin{aligned} Irr(\mathcal{A}_4^{\kappa,(2)}) = \{&((2,2),\emptyset),((2,1,1),\emptyset),((1,1,1,1),\emptyset),((2,1),(1)),((1,1,1),(1)),((2),(2)),\\ &((1,1),(2)),((1),(3)),(\emptyset,(4))\}\,. \end{aligned}$$

由等式 (3.34) 以及 $\mathfrak{A} = \mathcal{A}_4^{\kappa\ (2)},$ 的同构 (2.6)，我们得到:

$$\dim(\mathcal{A}_4^{\kappa,(2)}) = 183,$$

而融合置换代数的维数如下（见 (2.2)）:

$$\dim(H_{2,4}) = \sum_{i=0}^{2} \binom{4}{i}^2 (4-i)! = 192.$$

因此，在这种情况下，不等式 (4.30) 是严格的。

特别地，当后者是半单代数时，集合 $\{s_\omega \mid \omega \in B_4(\bar{1}\bar{2}, \bar{3}\bar{2}\bar{1})\}$ 在 $\mathcal{A}_4^{\kappa\ (2)}$,中线性相关；但在非半单的 $\mathcal{A}_4^{(0,3)\ (2)}$,中则线性无关。

回顾一下，基 (3.18) 与包含 $B_{n-1} \subset B_n$相适配。于是，对于 $k<n$，我们通过此包含将 B_k 中的一个元素视为 B_n 中的一个元素。

推论 4.27. 代数 $H_{k,n}$ 由生成元 $x_1, s_1, \ldots, s_{n-1}$生成，且仅满足关系 (3.8)-(3.11) 以及以下两个附加关系:

$$(x_1 s_1)^2 = x_1 s_1 x_1 - x_1 s_1 + x_1 s_1, \tag{4.32}$$

$$\Delta_k = \sum_{\omega \in B_{k+1}(\bar{1}\bar{2}) \setminus \{\Delta_k\}} \lambda_\omega s_\omega, \tag{4.33}$$

其中 λ_ω 是式(4.23)中出现的系数。

证明。 根据定义，代数$\mathcal{A}_n^{(0,k+1)\ (k)},$（见定义 4.18）正是陈述中提到的代数。

因此，由代数$\mathcal{A}^{(0,k+1)},_{(k}$之间的同构 (4.27) 可得结论)
$_n$和 $H_{k,n}$. □

参考文献

[1] R. Goodman, N. Wallach, 《对称性、表示与不变量》, 《数学研究生教材》, 255 施普林格, 多德雷赫特, 2009.[2] A. Kleshchev, 对称群的线性表示与射影表示, 剑桥数学专著, 163剑桥大学出版社, 剑桥, 2005.[3] J. Hu, A. Mathas, *A* 型半正规形与分圆拟箭图 *Hecke* 代数,《数学年刊》364 (2016), 第 3-4 期, 1189–1254, arXiv:1304.0906.[4] N. Crampé and L. Poulain d'Andecy, 融合辫与张量表示的中心化子（ $U_q(gl_N)$, 《代数表示论》 (2023), 第 3 期, 901–955,arXiv:2001.11372.

[5] L. Poulain d'Andecy and M. Zaimi, 融合 *Hecke* 代数与单边界代数, 《太平洋数学杂志》328 (2024), 第 1 期, 77–118, arXiv:2306.10937.[6] M. Geick, G. Pfeiffer, 有限 *Coxeter* 群的特征标与 *Iwahori-Hecke* 代数, 伦敦数学会专著（新系列）, 21 克拉伦登出版社 , 牛津大学出版社 , 纽约 , 2000.[7] A.I. Molev, 对称群的融合过程 , 《数学物理报告》 61 (2008), 第 2 期 , 181–188, arXiv:math/0612207v5.[8] J.R. Stembridge, 有限 *Coxeter* 群约化词的若干组合方面, 《美国数学会汇刊》349 (1997), 第 4 期, 1285–1332.[9] A. M. Vershik, A. Yu. Okounkov, 对称群表示论的新方法 *II*, 圣彼得堡数学研究所科学研讨会纪要 (POMI) 307 (2004), 表示论、动力系统、组合与算法方法 10, 57–98, 281；译文见《数学科学杂志》（纽约）131 (2005), 第 2 期, 5471–5494,arXiv:math/0503040.[10] J. A. Green, 的多项式表示, 《数学讲义》, 830 施普林格 , 柏林 , 2007.[11] S. Lang, 代数 , 《数学研究生教材》 , 211 施普林格出版社, 纽约, 2002.[12] N. Bourbaki, 李群与李代数，第 *IV–VI* 章, 《数学基础》（柏林）施普林格出版社, 柏林, 2002.[13] Stanley, Richard P., 《计数组合学》第 *2* 卷, 剑桥高等数学研究, 208 剑桥大学出版社, 剑桥, [2024].