arXiv:2512.15287v1 [math.CV] 17 Dec 2025

# 作用于 de Branges–Rovnyak 空间上的加权复合算子

EMMANUEL ¨FRICAIN、MUATH KARAKI、JAVAD MASHREGHI 和 MAEVA OSTERMANN

ABSTRACT.本文刻画了作用于 de Branges–Rovnyak 空间 $\mathcal{H}(b)$ 上的加权复合算子的有界性与紧性，其中符号 $b$ 是 $H^\infty$ 单位球中的有理函数，且不是有限 Blaschke 乘积。通过利用 [2] 上的加权复合算子与 Hardy 空间 $\mathcal{H}(b)$ 上相应算子之间的密切关系，我们推广了 $H^2$的结果。

## 1. INTRODUCTION

在复平面开单位圆盘 D 上的解析函数希尔伯特空间中，受到广泛研究的一类重要算子是复合算子

$$C_\varphi : f \longmapsto f \circ \varphi,$$

其中 $\varphi$ 是 D 上的解析自映射，称为 $C_\varphi$的符号。特别地，由于 Littlewood 从属原理，众所周知， $C_\varphi$ 在开单位圆盘的 Hardy 空间 $H^2$ 上总是有界的。这类算子的一种自然推广是加权复合算子族

$$W_{u,\varphi} : f \longmapsto u \cdot f \circ \varphi,$$

其中 $u$ 是某个解析函数，称为$W_{u,\ \varphi}$的权函数。换言之，加权复合算子是复合算子与乘法算子的组合。

加权复合算子广泛研究于诸如 $H^2$、Bergman 空间 $A^2$以及各种解析函数或调和函数空间中。与普通复合算子相比，它们表现出更丰富的行为，因为权函数的存在会显著影响映射的有界性、紧性、谱性质和动力学特征。此外，加权复合算子在线性等距算子的研究中也自然出现。例如参见[3]。关于 $H^2$ 上加权复合算子有界性的刻画，已通过 Carleson 测度 [4, 12]得到。值得注意的是，可以找到这样的例子：权函数 $u$无界（因此相应的乘法算子在 $H^2$上并非有界），但符号 $\varphi$ 的选取却能确保加权复合算子 $W_{u,\ \varphi}$ 在 $H^2$上仍然有界。

2020 年数学主题分类：30H45,47B32,47B33,46E22。关键词与短语：复合算子、加权复合算子、de Branges–Rovnyak 空间、乘子、边界行为、紧性。

本文研究一类特殊的 de Branges–Rovnyak 空间 $\mathcal{H}(b)$上的加权复合算子。更确切地说，我们关注以下情形： $b$ 是 $H^\infty$单位球中的一个有理函数（但不是有限布拉施克乘积），且满足 $\|b\|_\infty = 1$。已知 $b$ 具有一个勾股伴函数 $\tilde{a}$，即 $\tilde{a}$ 是满足 $|\tilde{a}| + |b| = 1$ 在 $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ 上几乎处处成立且 $\tilde{a}(0) > 0$的唯一外函数。事实上，在这种情况下，勾股伴函数可由 Fej´er–Riesz 定理得到。因此，特别地，它也是一个在 $\mathbb{D}$ 中没有零点且在 $\mathbb{D}$ 中没有极点的有理函数。由于 $\|b\|_\infty = 1$，函数 $\tilde{a}$ 在 $\mathbb{T}$ 上有一些零点 $\zeta_1$、$\zeta_2$、……、$\zeta_n$，其对应重数分别为 $m_1$、……、$m_n$。此外，已知[6, 8] 空间 $\mathcal{H}(b)$可分解为

$$\mathscr{H}(b) = \prod_{i=1}^{n} (z - \zeta_i)^{m_i} H^2 \oplus \mathscr{P}_{N-1}, \tag{1.1}$$

其中 $N = \sum_{i=1}^{n} m_i$ 和 $\mathscr{P}_{N-1}$ 是次数小于或等于 $N - 1$的多项式集合。注意，(1.1) 中的和是直和。在这一特殊情形下，de Branges–Rovnyak 空间恰好与共解析 Toeplitz 算子的值域空间重合。更确切地说，若记 $a = \prod_{i=1}^{n} a_i,\ a_i(z) = (z - \zeta_i)^{m_i}$，则已知

$$\mathscr{H}(b) = \mathcal{M}(\overline{\tilde{a}}) = \mathcal{M}(\overline{a}), \tag{1.2}$$

其中 $\mathcal{M}(v)$ 表示 Toeplitz 算子 $T_v$ 的值域，该算子 $v \in L^\infty(\mathbb{T})$ 的符号为，并赋予值域范数，从而使 $T_v$ 成为从 $H^2$ 到 $\mathcal{M}(v)$ 上的满射部分等距算子。同时，(1.1) 可改写为 $\mathcal{H}(b) = \mathcal{M}(a) \oplus \mathscr{P}_{N-1}$。我们将在空间 $\mathscr{H}(b)$ 上赋予如下范数

$$\|f\|_b^2 := \|g\|_2^2 + \|p\|_2^2, \qquad f = ag + p,\ (g, p) \in H^2 \times \mathscr{P}_{N-1}. \tag{1.3}$$

这个范数并非 de Branges–Rovnyak 空间中的通常范数，但在此特定情形下，它是一个等价范数。

函数 $f$ 在 $\mathscr{H}(b)$ 中的一个重要性质，可由 (1.1) 轻易推出：对每个 $1 \le i \le n$，函数 $f$ 及其直到 $m_i - 1$ 阶的导数在点 $\zeta_i$处都有非切向极限。此外，若 $f = ag + p$，其中 $g \in H^2$ 且 $p \in \mathscr{P}_{N-1}$，则多项式 $p$ 满足以下插值问题：

$$p^{(k)}(\zeta_i) = f^{(k)}(\zeta_i), \qquad \text{for every } 1 \le i \le n,\ 0 \le k \le m_i - 1. \tag{1.4}$$

特别地，

$$\mathcal{M}(a) = \left\{ f \in \mathscr{H}(b) : f^{(k)}(\zeta_i) = 0 \text{ for every } 1 \le i \le n,\ 0 \le k \le m_i - 1 \right\}. \tag{1.5}$$

我们也可以从 (1.1) 轻易看出， $\mathscr{H}(b)$ 包含多项式集合。可以证明该集合在 $\mathscr{H}(b)$ 中稠密。关于 [11] ( $\mathscr{H}$) 空间的详细介绍，以及更具体地说，其中关于有理 $b$的特殊情形，请参见第 27.5 节。 $b$。

在[2], 作者全面刻画了符号 $\varphi$ ，使得相应的复合算子 $C_\varphi$ 从 $\mathcal{H}(b$到自身有界/紧，其中 $b$ 是 $H^\infty$单位球中的有理函数（不是有限布拉施克乘积）。 [2] 所得结果的要点在于，利用（1.1），可以建立 $C_\varphi$ 在 $\mathcal{H}(b)$上的性质与相关加权复合算子$W_{u\text{的性质之间}\varphi}$ 的真正联系，其中定义在 $H^2$

某个适当的权函数 $u$ 下。另一方面，还应提及，在[15], 作者全面刻画了复合算子 $C_\varphi$ : $\mathcal{H}(\Theta) \longrightarrow H^2$ 在 $\Theta$ 为内函数时紧的条件。注意，在这种情况下，空间$\mathcal{H}(\Theta)$与所谓的模型空间 $K_\Theta = (\Theta H^2)^\perp$一致，且当且仅当 $\Theta$为有限布拉施克乘积时，它是有限维的。在 [1], 中，研究了$C_\varphi : \mathcal{H}(\Theta) \longrightarrow H^2$ 属于 Schatten 类的条件，尤其考虑了内函数 $\Theta$ 为单分量内函数的情形。 [15] 的一些推广见于 [10], ，作者在其中研究了 $C_\varphi$ : $\mathcal{H}(b) \longrightarrow H^2$ 在闭单位球 $H^\infty$中某个任意函数 $b$ 时的紧性。由于 $\mathcal{H}(b)$收缩地包含于 $H^2$, Littlewood 从属原理显然表明，算子 $C_\varphi : \mathcal{H}(b) \longrightarrow H^2$ 总是有界的。[2] 的情形则不同，因为尚不清楚复合算子 $C_\varphi$ 何时将$\mathcal{H}(b)$映射到自身；这里存在某些代数限制。

本文旨在沿着 [2] 的研究思路，探讨加权复合算子 $W_{u,\varphi}$ 何时是从 $\mathscr{H}(b)$ 到其自身的有界算子/紧算子。首先指出，算子 $W_{u,\varphi}$ 从 $\mathscr{H}(b)$ 到其自身有界，当且仅当对所有 $f \in \mathscr{H}(b)$，都有 $u \cdot f \circ \varphi \in \mathscr{H}(b)$。这是闭图定理以及在 $\mathcal{H}(b)$ 中收敛蕴含逐点收敛这一事实的直接推论。此外，若 $W_{u,\varphi}$ 在 $\mathscr{H}(b)$ 上有界，则 $u$ 和 $u\varphi$ 属于 $\mathscr{H}(b)$。事实上，由于 1 和 $z \in \mathscr{H}(b)$，我们应有 $u = u \cdot 1 \circ \varphi \in \mathscr{H}(b)$ 和 $u\varphi = u \cdot z \circ \varphi \in \mathscr{H}(b)$。

因此，不失一般性，我们假设
(H1) $u \in \mathscr{H}(b)$，以
及 (H²) $u\varphi \in \mathscr{H}(b)$。
特别是，对于每个 $1 \le i \le n$，函数 $u$及其直到 $m_i - 1$阶的导数在 $\zeta_i$处都有非切向极限。在引理 3.3 中，我们将证明，当 $u$ 的某个阶数小于或等于 $m_i - 1$ 的导数不为零时， $\varphi$ 在点 $\zeta_i$ 处存在非切向极限。对序列 $\zeta_i$, $1 \le i \le n$ 重新排序后，不妨设 $\{\zeta_i : \exists 0 \le \ell \le m_i - 1, u^{(\ell)}(\zeta_i) \neq 0$ 且 $\varphi(\zeta_i) \in \mathbb{D}\} = \{\zeta_{p+1}, \cdots, \zeta_n\}$。我们将看到，$W_{u,\varphi}$ 在 $\mathscr{H}(b)$ 上的连续性等价于 $W_{w,\varphi}$ 在 $H^2$ 上的连续性，其权函数如下

$$w = \frac{u \cdot a \circ \varphi \cdot \prod_{j=p+1}^{n} (\varphi - \varphi(\zeta_j))^{m_j}}{a}, \tag{1.6}$$

只要满足(H1) 和(H2) ，其定义便是良好的。

本文的主要结果如下。

定理 1.7. 设 $u$ 和 $\varphi$ 满足*(H1)* 和*(H2)*。设 $w$ 由(1.6)定义。那么以下条件等价：

(i) 算子 $W_{u,\varphi}$ 在 $\mathscr{H}(b)$ 上有界；(ii) 算子$W_{w,\varphi}$ 有界；(iii) 我们有

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{T}} (1 - |\lambda|^2) \frac{|w(\zeta)|^2}{|1 - \overline{\lambda}\varphi(\zeta)|^2} dm(\zeta) < +\infty.$$

注意，对于任意符号 $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 解析，总存在一个权函数 $u$ ，使得算子 $W_{u,\varphi}$ 在 $\mathscr{H}(b)$ 上有界。例如，取 $u = ag$ 满足$g \in H^\infty$即可。事实上，根据 Littlewood 从属原理，对于每个函数 $f \in \mathscr{H}(b)$，函数 $a \cdot g \cdot f \circ \varphi$属于 $aH^2 \subset \mathscr{H}(b)$，由此根据闭图定理可知，$W_{u,\varphi}$ 在 $\mathscr{H}(b)$ 上的有界性。这也可以利用定理 1.7 看出，因为在这种情况下，函数 $u$ 和 $u\varphi$属于 $\mathcal{M}(a)$，因此也属于 $\mathscr{H}(b)$，而相应的权函数 $w$属于 $H^\infty$。正如我们在一般思想中指出的，这表明权函数的存在改善了相应算子$W_{u,\varphi}$的性质。

本文结构安排如下。第 2 节中，我们将给出 $\mathcal{M}(\overline{a})$ 的一个有趣分解，其中 $a$ 可分解为有限个满足 Corona 条件的 $a_j$、 $1 \le j \le n$ 的乘积。第 3 节中，我们将利用这一结果证明，在条件 (H1) 和 (H2) 下，对于任意多项式 $p$，函数 $u \cdot p(\varphi)$ 属于 $\mathscr{H}(b)$。第 4 节中，我们还将说明，$W_u$、$\varphi$ 在 $\mathscr{H}(b)$ 上的有界性可能会对 $\varphi$ 在点 $\zeta_i$ 处的非切向极限施加某些限制，我们将这些限制记为 (NC)。本节还将说明，如果 $u$ 和 $\varphi$ 满足 (H1) 和 (H2)，且 $w \in H^2$，那么 (NC) 必然成立。第 5 节用于证明定理 1.7；第 6 节则给出一些例子，以及关于 $W_u$、$\varphi$ 在 $\mathscr{H}(b)$ 上有界性的若干较简单的充分条件。我们还将考察这样一个特殊情形：符号 $\varphi$ 在每个点 $\zeta_i$ 处都有非单模非切向极限；此外，也将探讨与 $\varphi$ 的角 Carath´eodory 极限之间的一些有趣联系。第 7 节用于研究可容许权，即对于固定的符号 $\varphi$，能够使算子 $W_u$、$\varphi$ 在 $\mathscr{H}(b)$ 上有界的权函数 $u$ 。最后一节用于研究算子$W_u$、$\varphi$ 在 $\mathscr{H}(b)$ 上的紧性。

## 2. Decomposition of $\mathcal{M}(\overline{a})$ spaces

回忆一下，如果 $\varphi$、$\psi \in H^\infty$，则有

$$T_{\overline{\varphi}} T_{\overline{\psi}} = T_{\overline{\psi}} T_{\overline{\varphi}} = T_{\overline{\varphi\psi}}, \tag{2.1}$$

这立即给出

$$\mathcal{M}(\overline{\varphi\psi}) \subset \mathcal{M}(\overline{\varphi}) \cap \mathcal{M}(\overline{\psi}). \tag{2.2}$$

此外，如果 $\varphi_{\mathrm{i}}$ 是一个内函数，那么 $T_{\overline{\varphi_{\mathrm{i}}}} H^2 = H^2$，于是（2.1）蕴含 $\mathcal{M}(\overline{\varphi}) = \mathcal{M}(\overline{\varphi_{\mathrm{o}}})$，其中 $\varphi_{\mathrm{o}}$ 是 $\varphi$的外因子。换言之，在研究 $\mathcal{M}(\overline{a})$ 的性质时，我们可以假设 $a$ 是 $H^\infty$ 中的外函数。于是算子 $T_{\overline{a}}$ 是一一映射，因此是从 $H^2$ 到 $\mathcal{M}(\overline{a}) = T_{\overline{a}} H^2$ 的等距映射，并赋予其值域范数

$$\|f\|_{\mathcal{M}(\overline{a})} = \|g\|_2, \qquad f = T_{\overline{a}}(g) \in \mathcal{M}(\overline{a}). \tag{2.3}$$

由（2.3）很容易得到 $\mathcal{M}(\overline{a})$ 有界地包含于 $H^2$中，因此是一个再生核希尔伯特空间。参见 [11, 第17节。2]。

一个自然的问题是，我们何时在（2.2）中取得等号。下面的结果本身就很有趣，并且将有助于我们研究 $W_{u,\ \varphi}$ 在$\mathscr{H}(b)$上的有界性。

定理 2.4. 设 $a_1$, ..., $a_n \in H^\infty$ 为外函数。则以下断言等价。

(i) 对于每个 $1 \le i, j \le n$，若满足 $i \ne j$，则有 $\inf_{\mathbb{D}}(|a_i| + |a_j|) > 0$。(ii) $\mathcal{M}(\overline{a_1 \cdots a_n}) = \mathcal{M}(\overline{a_1}) \cap \cdots \cap \mathcal{M}(\overline{a_n})$。

证明。我们首先证明蕴含关系 $(i) \implies (ii)$。Hartmann 和 Lamberti 在[14]中得出了这一蕴含关系。为方便读者，我们给出[14, 命题 37] 中针对 $n = 2$情形所作论证的说明，然后解释如何使用归纳论证来证明对所有 $n$都成立。

– 情形 $n = 2$: 假设 $\inf_{\mathbb{D}}(|a_1| + |a_2|) > 0$。根据 Corona 定理，存在$h_1, h_2 \in H^\infty$，使得 $a_1h_1 + a_2h_2 = 1$。

设 $f \in \mathcal{M}(\overline{a_1}) \cap \mathcal{M}(\overline{a_2})$，并令 $g_1, g_2 \in H^2$ 满足 $f = T_{\overline{a_1}}g_1 = T_{\overline{a_2}}g_2$。因此我们有

$$\begin{aligned} T_{\overline{a_1a_2}}\Big(T_{\overline{h_1}}g_2 + T_{\overline{h_2}}g_1\Big) &= T_{\overline{a_1h_1}}\Big(T_{\overline{a_2}}g_2\Big) + T_{\overline{a_2h_2}}\Big(T_{\overline{a_1}}g_2\Big) \\ &= T_{\overline{a_1h_1}}f + T_{\overline{a_2h_2}}f \\ &= T_{\overline{a_1h_1+a_2h_2}}f = f. \end{aligned}$$

因此 $f \in \mathcal{M}(\overline{a_1a_2})$，这证明了包含关系 $\mathcal{M}(\overline{a_1}) \cap \mathcal{M}(\overline{a_2}) \subset \mathcal{M}(\overline{a_1a_2})$。由于另一个包含关系总是成立（见公式（2.2）），我们得出 $\mathcal{M}(\overline{a_1}) \cap \mathcal{M}(\overline{a_2}) = \mathcal{M}(\overline{a_1a_2})$。

– 归纳：现在假设对于某个整数 $n \ge 2$，该蕴含关系对所有 $k$ 元组都成立，其中 $2 \le k \le n$。

设 $a_1, \ldots, a_{n+1}$ 为满足 $\|a_j\|_\infty \le 1$ 的外函数，并且对于每个 $1 \le i, j \le n, i \ne j$, $|a_i| + |a_j| \ge c$ 对某个常数 $c > 0$ 成立。令 $a = a_1 \cdots a_n$。将所有不等式 $|a_j| + |a_{n+1}| \ge c$（其中 $1 \le j \le n$）相乘并展开后，我们得到由 $2^n$ 个 $|a_j|$ 乘积组成的线性组合，其中只有一项不含 $|a_{n+1}|$，即 $|a|$。因此我们有

$$2^n(|a| + |a_{n+1}|) \ge |a| + (2^n - 1)|a_{n+1}| \ge \prod_{j=1}^{n}(|a_j| + |a_{n+1}|) \ge c^n.$$

于是 $|a| + |a_{n+1}| \ge c'$，其中 $c' = (c/2)^n > 0$。根据归纳假设，将其应用于配对 $(a, a_{n+1})$ 以及 $n$ 元组 $(a_1, \ldots, a_n)$，我们便可推出

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\overline{a_1 \ldots a_{n+1}}) = \mathcal{M}(\overline{aa_{n+1}}) &= \mathcal{M}(\overline{a}) \cap \mathcal{M}(\overline{a_{n+1}}) \\ &= \mathcal{M}(\overline{a_1 \ldots a_n}) \cap \mathcal{M}(\overline{a_{n+1}}) = \mathcal{M}(\overline{a_1}) \cap \cdots \cap \mathcal{M}(\overline{a_{n+1}}). \end{aligned}$$

因此，该蕴含对于 $(n + 1)$ 元组也成立，进而由归纳法可知它对任意元组都成立，这就完成了蕴含式 $(i) \implies (ii)$ 的证明。

现在证明蕴含式 $(ii) \implies (i)$。关于第一个蕴含，我们先考虑 $n = 2$ 的情形，再推出一般结论。

– 情形 $n = 2$: 假设 $\mathcal{M}(\overline{a_1}) \cap \mathcal{M}(\overline{a_2}) = \mathcal{M}(\overline{a_1a_2})$。我们在 $\mathcal{M}(\overline{a_1a_2})$ 上赋予范数

$$\|f\| = \sqrt{\|f\|^2_{\mathcal{M}(\overline{a_1})} + \|f\|^2_{\mathcal{M}(\overline{a_2})}}, \qquad f \in \mathcal{M}(\overline{a_1a_2}).$$

这个范数是完备的。事实上，设 $(f_n) \subset \mathcal{M}(\overline{a_1a_2})$ 是关于 $\|\cdot\|$ 的柯西序列。那么 $(f_n)$ 也是 $\mathcal{M}(\overline{a_1})$ 和 $\mathcal{M}(\overline{a_2})$ 中的柯西序列。由于 $\mathcal{M}(\overline{a_1})$ 和 $\mathcal{M}(\overline{a_2})$ 是完备空间，因此存在 $g_1 \in \mathcal{M}(\overline{a_1})$ 和 $g_2 \in \mathcal{M}(\overline{a_2})$，使得

$$\|f_n - g_1\|_{\mathcal{M}(\overline{a_1})} \longrightarrow 0 \text{ and } \|f_n - g_2\|_{\mathcal{M}(\overline{a_2})} \longrightarrow 0 \text{ when } n \to \infty.$$

但是， $\mathcal{M}(\overline{a_1})$ 和 $\mathcal{M}(\overline{a_2})$ 是再生核希尔伯特空间，因此这意味着 $(f_n)$ 逐点收敛到 $g_1$，且同时逐点收敛到 $g_2$。于是， $f := g_1 = g_2 \in \mathcal{M}(\overline{a_1}) \cap \mathcal{M}(\overline{a_2}) = \mathcal{M}(\overline{a_1a_2})$ 和

$$\|f_n - f\| = \sqrt{\|f_n - g_1\|^2_{\mathcal{M}(\overline{a_1})} + \|f_n - g_2\|^2_{\mathcal{M}(\overline{a_2})}} \longrightarrow 0 \text{ when } n \to \infty.$$

We 从而证明 $\mathcal{M}(\overline{a_1a_2})$ 是一个巴拿赫空间，其范数为 $\|\cdot$ $\|$.

现在，令 $f \in \mathcal{M}(\overline{a_1a_2})$，并令 $g \in H^2$ 满足 $f = T_{\overline{a_1a_2}}g$。根据（2.3），我们有$\|f\|_{\mathcal{M}(\overline{a_1a_2})} = \|g\|_{H^2}$。此外，由于 $\|a_1\|_\infty \le 1$ 且 $\|a_2\|_\infty \le 1$，算子 $T_{\overline{a_1}}$和 $T_{\overline{a_2}}$是 $H^2$ 上的压缩算子，并且利用（2.1）和（2.3），我们有

$$\|f\|_{\mathcal{M}(\overline{a_1})} = \|T_{\overline{a_2}}g\|_{H^2} \le \|T_{\overline{a_2}}\|\|g\|_{H^2} \le \|g\|_{H^2} \text{ and } \|f\|_{\mathcal{M}(\overline{a_2})} \le \|g\|_{H^2}.$$

因此，我们推得

$$\|f\| = \sqrt{\|f\|^2_{\mathcal{M}(\overline{a_1})} + \|f\|^2_{\mathcal{M}(\overline{a_2})}} \le \sqrt{2}\|f\|_{\mathcal{M}(\overline{a_1a_2})}.$$

由于 $\mathcal{M}(\overline{a_1a_2})$ 在这两个范数下都是完备的，根据巴拿赫同构定理，存在一个常数 $c > 0$，使得对所有 $f \in \mathcal{M}(\overline{a_1a_2})$,

$$\|f\|_{\mathcal{M}(\overline{a_1a_2})} \le c\|f\| = c\sqrt{\|f\|^2_{\mathcal{M}(\overline{a_1})} + \|f\|^2_{\mathcal{M}(\overline{a_2})}}. \tag{2.5}$$

现在回想一下，对所有 $z \in \mathbb{D}$ 以及每个函数 $u \in H^\infty$，都有 $T_{\overline{u}}k_z = u(z)\overline{k_{z\circ}}$ 因此，若 $u$ 是外函数，则有 $\|k_z\|_{\mathcal{M}(\overline{u})} = \frac{\|k_z\|_{H^2}}{|u\ z\ |}()\circ$。然后将（2.5）应用于 $f = k_z$ 可得

$$\frac{\|k_z\|_{H^2}}{|a_1(z)a_2(z)|} \le c\sqrt{\frac{\|k_z\|^2_{H^2}}{|a_1(z)|^2} + \frac{\|k_z\|^2_{H^2}}{|a_2(z)|^2}},$$

因此

$$|a_1(z)| + |a_2(z)| \ge |a_1(z)|^2 + |a_2(z)|^2 \ge \frac{1}{c^2}.$$

这意味着 $a_1$ 和 $a_2$ 满足（$i$）。

–一般情形：假设 $\mathcal{M}(\overline{a_1 \dots a_n}) = \mathcal{M}(\overline{a_1}) \cap \dots \cap \mathcal{M}(\overline{a_n})\circ$ 固定 $1 \le j \le n$并令 $a_j^\sharp$ 由 $a_j^\sharp = \prod_{k\neq j} a_k$定义。另一方面，根据（2.2），有 $\mathcal{M}\left(\overline{a_j a_j^\sharp}\right) \subset \mathcal{M}(\overline{a_j}) \cap \mathcal{M}\left(\overline{a_j^\sharp}\right)$。另一方面，

$$\mathcal{M}(\overline{a_j}) \cap \mathcal{M}\left(\overline{a_j^\sharp}\right) = \mathcal{M}(\overline{a_j}) \cap \mathcal{M}\left(\overline{\prod_{k\neq j} a_k}\right) \subset \bigcap_{k=1}^n \mathcal{M}(\overline{a_k}) = \mathcal{M}(\overline{a_1 \dots a_n}) = \mathcal{M}\left(\overline{a_j a_j^\sharp}\right).$$

于是我们推得 $\mathcal{M}\left(\overline{a_j a_j^\sharp}\right) = \mathcal{M}(\overline{a_j}) \cap \mathcal{M}\left(\overline{a_j^\sharp}\right)$。但我们已经证明，对于外函数对，蕴含关系 $(ii) \implies (i)$ 成立，因此存在 $c > 0$ 使得 $|a_j^\sharp| + |a_j| \geq c$。由于对每个 $k \neq j$，都有 $|a_k| \geq |a_j^\sharp|$，我们推得 $|a_k| + |a_j| \geq c$，因此 $(i)$ 得以满足。□

## 3. Multiplicative properties of $\mathscr{H}(b)$ 函数的 functions

从现在起，我们假设 $b$ 是 $H^\infty$ 闭单位球中的一个有理（非内）函数，满足 $\|b\|_\infty = 1$，且其勾股伴函数在单位圆上的零点为 $\zeta_1$、……、$\zeta_n$，相应的重数为 $m_1$、……、$m_n$。因此，$\mathscr{H}(b)$可按（1.1）分解。在此情形下，其乘子集合 $\mathfrak{M}(\mathscr{H}(b)) = \{\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \varphi f \in \mathscr{H}(b) \ \forall f \in \mathscr{H}(b)\}$ 可描述为

$$\mathfrak{M}(\mathscr{H}(b)) = \mathscr{H}(b) \cap H^\infty. \tag{3.1}$$

见[9, 命题 3。1]。

定理 3.2。设 $u$ 和 $\varphi$ 满足 *(H1)* 和 *(H2)*。则，对于每个多项式 $p$，函数 $u \cdot p \circ \varphi$ 属于 $\mathscr{H}(b)$。

需要指出的是，如果我们进一步假设 $\varphi \in \mathscr{H}(b)$，那么定理3.2 的证明显然成立，因为根据（3.1），我们可以推得 $\varphi \in \mathfrak{M}(\mathscr{H}(b))$，于是(H1) 和(H2) 立即推出 $u\varphi^k \in \mathscr{H}(b)$ 对每个 $k \geq 0$都成立。在一般情形下，定理3.2 的证明更为复杂，我们需要建立若干技术引理。首先给出如下结果。

引理 3.3. 设 $u$ 和 $\varphi$ 满足*(H1)* 和*(H2)*。再假设存在 $1 \leq i \leq n$和 $0 \leq \ell_i \leq m_i - 1$，使得 $u(\zeta_i) = \cdots = u^{(\ell_i - 1)}(\zeta_i) = 0$ 且 $u^{(\ell_i)}(\zeta_i) \neq 0$。那么$\varphi \in \mathcal{M}(a_{i,\ell_i})$，其中 $a_{i,\ell_i}(z) = (z - \zeta_i)^{m_i - \ell_i}$. 特别地，函数 $\varphi$ 在 $\zeta_i$处有非切向极限。

证明。由（1.2）可知，$\mathscr{H}(b) = \mathcal{M}(\overline{a})$，其中 $a = \prod_{j=1}^n a_j$且 $a_j(z) = (z - \zeta_j)^{m_j}$。因此，定理 2.4 表明 $u$ 和 $u\varphi$属于 $\mathcal{M}(\overline{a_i})$，对每个 $1 \leq i \leq n$. 特别地，利用（1.4），可写为

$$u(z) = (z - \zeta_i)^{m_i} u_i(z) + \sum_{k=\ell_i}^{m_i - 1} \frac{u^{(k)}(\zeta_i)}{k!} (z - \zeta_i)^k, \tag{3.4}$$

对某个 $u_i \in H^2$。两边乘以 $\varphi$，得到

$$u(z)\varphi(z) = (z - \zeta_i)^{m_i} u_i(z)\varphi(z) + \sum_{k=\ell_i}^{m_i - 1} \frac{u^{(k)}(\zeta_i)}{k!} (z - \zeta_i)^k \varphi(z).$$

但由于 $u\varphi \in \mathcal{M}(\overline{a_i})$，类似地，存在 $v_i \in H^2$ 和 $p_1 \in \mathscr{P}_{m_i - 1}$，使得 $u(z)\varphi(z) = (z - \zeta_i)^{m_i} v_i(z) + p_1(z)$。现在写作 $p_1(z) = (z - \zeta_i)^{\ell_i} \widetilde{q}_1(z) + r_1(z)$，其中 $\widetilde{q}_1$、$r_1$是多项式

且 $\deg(r_1) < \ell_i$. 由此可得

$$(z-\zeta_i)^{m_i}u_i(z)\varphi(z) + \sum_{k=\ell_i}^{m_i-1} \frac{u^{(k)}(\zeta_i)}{k!}(z-\zeta_i)^k\varphi(z) = (z-\zeta_i)^{m_i}v_i(z) + (z-\zeta_i)^{\ell_i}\widetilde{q}_1(z) + r_1(z).$$

两边除以 $(z-\zeta_i)^{\ell_i}$，可得 $r_1/(z-\zeta_i)^{\ell_i} \in H^2$。又由于 $\deg(r_1) < \ell_i$，必然有$r_1 = 0$。因此，我们得到

$$(z-\zeta_i)^{m_i}u_i(z)\varphi(z) + \sum_{k=\ell_i}^{m_i-1} \frac{u^{(k)}(\zeta_i)}{k!}(z-\zeta_i)^k\varphi(z) = (z-\zeta_i)^{m_i}v_i(z) + (z-\zeta_i)^{\ell_i}\widetilde{q}_1(z).$$

由于 $\ell_i \le m_i - 1$，我们可以将其改写为

$$\frac{u^{(\ell_i)}(\zeta_i)}{\ell_i!}(z-\zeta_i)^{\ell_i}\varphi(z) = (z-\zeta_i)^{\ell_i+1}w_1(z) + (z-\zeta_i)^{\ell_i}\widetilde{q}_1(z),$$

对于某个 $w_1 \in H^2$。现在记住，$u^{(\ell_i)}(\zeta_i) \neq 0$，因此我们推得

$$\varphi(z) = (z-\zeta_i)\varphi_1(z) + q_1(z),$$

其中 $\varphi_1 \in H^2$，且 $q_1$ 是一个多项式。根据归纳法，我们假设对于某个 $1 \le \ell \le m_i - \ell_i - 1$,

$$\varphi(z) = (z-\zeta_i)^{\ell}\varphi_\ell(z) + q_\ell(z), \tag{3.5}$$

其中 $\varphi_\ell \in H^2$ 且 $q_\ell$ 是一个多项式。由于 $u\varphi \in \mathcal{M}(\overline{a_i})$ 且 $q_\ell u \in \mathcal{M}(\overline{a_i})$（因为 $q_\ell$ 是一个多项式，因而是 $\mathcal{M}(\overline{a_i})$ 的乘子），由（3.5）可得函数 $(z-\zeta_i)^{\ell}\varphi_\ell u$属于 $\mathcal{M}(\overline{a_i})$。利用（3.4），我们有

$$(z-\zeta_i)^{\ell}\varphi_\ell(z)u(z) = (z-\zeta_i)^{m_i}(z-\zeta_i)^{\ell}\varphi_\ell(z)u_i(z) + \sum_{k=\ell_i}^{m_i-1} \frac{u^{(k)}(\zeta_i)}{k!}(z-\zeta_i)^{k+\ell}\varphi_\ell(z).$$

但是 $v_\ell := (z-\zeta_i)^{\ell}\varphi_\ell u_i = (\varphi - q_\ell)u_i \in H^2$ 且我们可以写成

$$(z-\zeta_i)^{\ell}\varphi_\ell(z)u(z) = (z-\zeta_i)^{m_i}v_\ell(z) + \sum_{k=\ell_i}^{m_i-1} \frac{u^{(k)}(\zeta_i)}{k!}(z-\zeta_i)^{k+\ell}\varphi_\ell(z).$$

由于 $(z-\zeta_i)^{\ell}\varphi_\ell u \in \mathcal{M}(\overline{a_i})$，我们也可以写成 $(z-\zeta_i)^{\ell}\varphi_\ell u = (z-\zeta_i)^{m_i}w + q$，其中 $w \in H^2$且 $q \in \mathscr{P}_{m_i-1}$。现在，利用欧几里得除法，写成 $q = (z-\zeta_i)^{\ell_i+\ell}p + r$，其中存在多项式 $p$ 和 $r$，使得 $\deg(r) < \ell_i + \ell$。于是我们得到

$$(z-\zeta_i)^{m_i}v_\ell(z) + \sum_{k=\ell_i}^{m_i-1} \frac{u^{(k)}(\zeta_i)}{k!}(z-\zeta_i)^{k+\ell}\varphi_\ell(z) = (z-\zeta_i)^{m_i}w(z) + (z-\zeta_i)^{\ell_i+\ell}p(z) + r(z).$$

注意到 $\ell_i + \ell \le m_i - 1$，因此除以 $(z-\zeta_i)^{\ell_i+\ell}$，可得 $r/(z-\zeta_i)^{\ell_i+\ell} \in H^2$，从而 $r = 0$。特别地，

$$\frac{u^{(\ell_i)}(\zeta_i)}{\ell_i!}(z-\zeta_i)^{\ell_i+\ell}\varphi_\ell(z) = (z-\zeta_i)^{\ell_i+\ell+1}w_2(z) + (z-\zeta_i)^{\ell_i+\ell}p(z),$$

对于 $w_2 \in H^2$。除以 $u^{(\ell_i)}(\zeta_i)\ell_i!(z-\zeta_i)^{\ell_i+\ell}$，可得 $\varphi_\ell = (z-\zeta_i)w_3 + p_2$，其中$w_3 \in H^2$，且 $p_2$ 是一个多项式。因此，由（3.5），可得

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= (z-\zeta_i)^{\ell}\left((z-\zeta_i)w_3(z) + p_2(z)\right) + q_\ell(z)\\ &= (z-\zeta_i)^{\ell+1}\varphi_{\ell+1}(z) + q_{\ell+1}(z),\end{aligned}$$

其中 $\varphi_{\ell+1} = w_3 \in H^2$ 且 $q_{\ell+1} = (z-\zeta_i)^{\ell}p_2 + q_\ell$是一个多项式。由归纳假设，我们由此推得，对于所有 $1 \le \ell \le m_i - \ell_i$，都存在如（3.5）所示的分解，因此特别有，

$$\varphi(z) = (z-\zeta_i)^{m_i-\ell_i}\varphi_{m_i-\ell_i}(z) + q_{m_i-\ell_i}(z), \tag{3.6}$$

对于某个 $\varphi_{m_i-\ell_i} \in H^2$ 以及某个多项式 $q_{m_i-\ell_i}$。因此，$\varphi \in \mathcal{M}(a_{i,\ell_i})$。现在，由（3.6）以及 $m_i - \ell_i \ge 1$这一事实可立即推出 $\varphi$ 在 $\zeta_i$ 处有非切向极限，从而完成引理 3.3的证明。□

引理 3.3 立即推出以下结果，该结果本身也颇具意义。

推论 3.7. 设 $u$ 和 $\varphi$ 满足 $u, u\varphi \in \mathscr{H}(b)$。假设对于每个 $1 \le i \le n$，$u(\zeta_i) \ne 0$。那么 $\varphi$ 本身属于 $\mathscr{H}(b)$。

证明。我们可以对每个 $1 \le i \le n$应用引理 3.3，取 $\ell_i = 0$。在此情形下，$a_{i,\ell_i} = a_i$，从而得到 $\varphi \in \mathcal{M}(\overline{a_i})$，对每个 $1 \le i \le n$均成立。结论由（1.2）和定理 2.4得出。□

注 3.8。注意，在推论 3.7的假设下，定理 3.2 的证明很容易。事实上，根据推论 3.7，函数 $\varphi$属于 $\mathscr{H}(b) \cap H^\infty$，因此根据（3.1）它是一个乘子。现在，显然，如果 $u \in \mathscr{H}(b)$，那么我们有 $u\cdot p\circ\varphi \in \mathscr{H}(b)$。

证明定理 3.2 的第二步是下面的结果。

引理 3.9. 设 $a_i(z) = (z-\zeta_i)^{m_i}$，其中 $\zeta_i \in$ 单位圆且 $m_i \in \mathbf{N}$；设 $a_{i,\ell_i}(z) = (z-\zeta_i)^{m_i-\ell_i}$，其中某个 $0 \le \ell_i \le m_i - 1$；设 $v \in \mathcal{M}(\overline{a_i})$，使得 $v(\zeta_i) = v'(\zeta_i) = \cdots = v^{(\ell_i-1)}(\zeta_i) = 0$；并设 $\psi \in \mathcal{M}(a_{i,\ell_i}) \cap H^\infty$。则 $\psi v \in \mathcal{M}(\overline{a_i})$。

证明。情形 $\ell_i = 0$ 显然。事实上，在此情形下，我们有 $a_{i,\ell_i} = a_i$ 并且根据（3.1），函数 $\psi$ 属于 $\mathcal{M}(\overline{a_i}) \cap H^\infty = \mathfrak{M}(\mathcal{M}(\overline{a_i}))$。

现在假设 使得 $\ell_i \ge 1$。根据（1.1）和（1.4），存在 $v_1 \in H^2$ 满足

$$v(z) = (z-\zeta_i)^{m_i}v_1(z) + \sum_{k=\ell_i}^{m_i-1}\frac{v^{(k)}(\zeta_i)}{k!}(z-\zeta_i)^k.$$

Then

$$\psi(z)v(z) = (z-\zeta_i)^{m_i}v_1(z)\psi(z) + \sum_{k=\ell_i}^{m_i-1}\frac{v^{(k)}(\zeta_i)}{k!}(z-\zeta_i)^k\psi(z).$$

由于 $v_1 \in H^2$ 且 $\psi \in H^\infty$，我们有 $(z-\zeta_i)^{m_i} v_1\psi \in (z-\zeta_i)^{m_i} H^2 \subset \mathcal{M}(\overline{a_i})$。因此，只需证明函数

$$h := \sum_{k=\ell_i}^{m_i-1} \frac{v^{(k)}(\zeta_i)}{k!}(z-\zeta_i)^k \psi$$

属于 $\mathcal{M}(\overline{a_i})$。但是，利用 $\mathcal{M}(a_i,\ell_i) = a_i,\ell_i H^2 \oplus \mathscr{P}_{m_i-\ell_i-1}$，我们可以写成 $\psi = (z-\zeta_i)^{m_i-\ell_i}\psi_1 + q$，其中 $\psi_1 \in H^2$ 和 $q \in \mathscr{P}_{m_i-\ell_i-1}$。因此，

$$h(z) = \underbrace{\sum_{k=\ell_i}^{m_i-1} \frac{v^{(k)}(\zeta_i)}{k!}(z-\zeta_i)^{m_i+k-\ell_i}\psi_1(z)}_{h_1(z)} + \underbrace{q(z)\sum_{k=\ell_i}^{m_i-1} \frac{v^{(k)}(\zeta_i)}{k!}(z-\zeta_i)^k}_{h_2(z)}.$$

由于 $h_2$ 是一个多项式，$h_2 \in \mathcal{M}(\overline{a_i})$，并且

$$h_1(z) = (z-\zeta_i)^{m_i}\sum_{k=\ell_i}^{m_i-1} \frac{v^{(k)}(\zeta_i)}{k!}(z-\zeta_i)^{k-\ell_i}\psi_1(z) = (z-\zeta_i)^{m_i}\psi_2(z), \text{ with } \psi_2 \in H^2.$$

因此，$h_1 \in (z-\zeta_i)^{m_i}H^2 \subset \mathcal{M}(\overline{a_i})$。最后，我们推得 $h \in \mathcal{M}(\overline{a_i})$，由此完成引理3.9的证明。□

现在我们可以证明定理3.2。

定理3.2的证明。取 $1 \le i \le n$. 利用定理2.4 和（1.2），只需证明

$$u\varphi^k \in \mathcal{M}(\overline{a_i}), \text{ for every } k \ge 1. \tag{3.10}$$

首先注意，若对所有 $0 \le \ell \le m_i - 1$ 都有 $u^{(\ell)}(\zeta_i) = 0$，则由 (1.5) 可知 $u \in \mathcal{M}(a_i)$。由于 $\varphi^k \in H^\infty$，我们进而推出，对所有 $k \ge 1$，都有 $u\varphi^k \in \mathcal{M}(a_i) \subset \mathcal{M}(\overline{a_i})$。因此，我们可以假设存在 $0 \le \ell_i \le m_i - 1$，使得 $u(\zeta_i) = u'(\zeta_i) = \cdots = u^{(\ell_i-1)}(\zeta_i) = 0$ and $u^{(\ell_i)}(\zeta_i) \ne 0$。于是，由引理 3.3 可知 $\varphi \in \mathcal{M}(a_i,\ell_i)\cap H^\infty$。回顾 $\mathcal{M}(a_i,\ell_i)\cap H^\infty = \mathfrak{M}(\mathcal{M}(a_i,\ell_i))$（见 (3.1)），从而 $\mathcal{M}(a_i,\ell_i) \cap H^\infty$ 是一个代数。因此，对每个 $k \ge 1$，都有 $\varphi^k \in \mathcal{M}(a_i,\ell_i) \cap H^\infty$。现在由引理 3.9 可知，对每个 $k \ge 1$，都有 $u\varphi^k \in \mathcal{M}(\overline{a_i})$，这就证明了 (3.10)，进而证明了定理 3.2。□

注 3.11. 设 $1 \le \ell_i \le m_i$，并设 $u \in \mathcal{M}(\overline{a_i})$ 满足 $u^{(\ell)}(\zeta_i) = 0$，对每个 $0 \le \ell \le \ell_i - 1$ 均成立。设 $f \in H^\infty$ 使得 $v := u \cdot f \in \mathcal{M}(\overline{a_i})$。那么 $v$ 及其直至 $\ell_i - 1$ 阶的导数在 $\zeta_i$ 处具有非切向极限，并满足 $v^{(\ell)}(\zeta_i) = 0$，对每个 $0 \le \ell \le \ell_i - 1$ 均成立。

事实上，$v$ 及其直至 $\ell_i - 1$ 阶的导数在 $\zeta_i$ 处存在非切向极限，这可直接由 $v \in \mathcal{M}(\overline{a_i})$ 得出。现在注意到，由 (2.2) 可知，$u \in \mathcal{M}(\overline{a_i}) \subset \mathcal{M}((z-\zeta_i)^{\ell_i})$。结合假设和 (1.5)，我们可推出 $u(z) = (z-\zeta_i)^{\ell_i}u_1(z)$，其中 $u_1 \in H^2$。由于 $f \in H^\infty$，因此可得$v(z) = (z-\zeta_i)^{\ell_i}v_1(z)$，其中 $v_1 \in H^2$。再次利用 (1.5)，于是得出，对于每个 $0 \le \ell \le \ell_i - 1$，均有$v^{(\ell)}(\zeta_i) = 0$。

推论 3.12。 设 $u$ 和 $\varphi$ 满足 *(H1)* 和 *(H2)*。那么，对任意 $\lambda_j \in \mathbb{D}$ 和 $m_j \in \mathbb{N}$，$1 \le j \le n$，以及任意多项式 $p$，函数

$$h := \frac{u \cdot p \circ \varphi}{\prod_{j=1}^{n} (1 - \overline{\lambda_j}\varphi)^{m_j}}$$

属于 $\mathscr{H}(b)$。

证明。 固定 $1 \le i \le n$。根据定理 2.4 和 (1.2)，我们应证明 $h \in \mathcal{M}(\overline{a_i})$。注意到

$$\frac{p \circ \varphi}{\prod_{j=1}^{n} (1 - \overline{\lambda_j}\varphi)^{m_j}} \in H^\infty,$$

并且若 $u(\zeta_i) = u'(\zeta_i) = \cdots = u^{(m_i-1)}(\zeta_i) = 0$ 那么，由 (1.5)，$u \in \mathcal{M}(a_i)$。因此，$h \in \mathcal{M}(a_i) \subset \mathcal{M}(\overline{a_i})$。

因此，我们可以假设存在 $0 \le \ell_i \le m_i - 1$，使得

$$u(\zeta_i) = u'(\zeta_i) = \cdots = u^{(\ell_i-1)}(\zeta_i) = 0 \text{ and } u^{(\ell_i)}(\zeta_i) \neq 0.$$

设 $v = u \cdot p \circ \varphi$。根据定理 3.2，我们知道 $v \in \mathcal{M}(\overline{a_i})$，而注记 3.11意味着 $v(\zeta_i) = v'(\zeta_i) = \cdots = v^{(\ell_i-1)}(\zeta_i) = 0$。现在我们来说明

$$\psi := \frac{1}{\prod_{j=1}^{n} (1 - \overline{\lambda_j}\varphi)^{m_j}} \in \mathcal{M}(\overline{a_{i,\ell_i}}).$$

由引理 3.3 可知 $\varphi \in \mathcal{M}(a_{i,\ell_i}) \cap H^\infty$。现在应用 [2, 推论 2。2] 可得

$$\frac{1}{1 - \overline{\lambda_j}\varphi} \in \mathfrak{M}(\mathcal{M}(\overline{a_{i,\ell_i}})), \qquad \text{for every } 1 \le j \le n.$$

由于 $\mathfrak{M}(\mathcal{M}(\overline{a_{i,\ell_i}}))$ 是一个代数，我们推得 $\psi \in \mathfrak{M}(\mathcal{M}(a_{i,\ell_i}))$。特别地，我们得到 $\psi \in \mathcal{M}(a_{i,\ell_i}) \cap H^\infty$。现在可应用引理 3.9，从而得出 $h = \psi v \in \mathcal{M}(\overline{a_i})$，这就证明了推论3.12。 □

## 4. Restriction on non-tangential limits

本节的目标是证明：当定理 1.7 中的某一断言成立时，以下条件成立：

(NC) 对任意 $1 \le i \le n$，要么对所有 $0 \le \ell \le m_i - 1$，都有 $u^{(\ell)}(\zeta_i) = 0$；要么存在一个 $\ell$，满足 $0 \le \ell \le m_i - 1$，使得 $u^{(\ell)}(\zeta_i) \neq 0$，并且此时 $\varphi$ 在 $\zeta_i$ 处有一个非切向极限，该极限满足 $\varphi(\zeta_i) \in \mathbb{D} \cup Z(a)$。

更具体地，在第4.1节中，我们证明了在(NC) 有界性成立的条件下，$W_{u,\varphi}$ 在 $\mathscr{H}(b)$上有界的必要性；在第4.2节中，我们证明了当(NC) 时，$w \in H^2$自动成立。

4.1. (NC) 的必要性在$W_{u,\varphi}$的有界性条件下。

定理 4.1。 假设算子$W_{u,\ \varphi}$ 在 $\mathscr{H}(b)$上有界。那么*(NC)* 成立 .

证明。由于 $W_{u,\varphi}$ 在 $\mathscr{H}(b)$上有界，我们知道 $u$ 和 $\varphi$ 满足(H1) 和(H2)。

现在考虑满足条件的 $0 \le \ell_i \le m_i - 1$

$$u(\zeta_i) = u'(\zeta_i) = \cdots = u^{(\ell_i - 1)}(\zeta_i) = 0 \text{ and } u^{(\ell_i)}(\zeta_i) \neq 0.$$

由引理 3.3 可知， $\varphi$ 在 $\zeta_i$ 处有非切向极限，且满足 $|\varphi(\zeta_i)| \le 1$。接下来只需证明，若 $|\varphi(\zeta_i)| = 1$，则必有 $\varphi(\zeta_i) \in Z(a)$。根据[2, 引理 3.4], ，存在 $r_k \to 1^-$ ，使得序列 $(\varphi(r_k\zeta_i))_k$ 是 $H^\infty$的插值序列。特别地，存在 $f \in H^\infty$ 使得

$$f(\varphi(r_k\zeta_i)) = \begin{cases} 1 & \text{if } k \text{ is even,} \\ 0 & \text{if } k \text{ is odd.} \end{cases}$$

由于 $aH^\infty \subset aH^2 \subset \mathscr{H}(b)$，函数 $af$ 属于 $\mathscr{H}(b)$，因此函数$\psi = W_{u,\ \varphi}(af)$ $= u \cdot a \circ \varphi \cdot f \circ \varphi$也属于该空间。特别地，其直到 $m_i - 1$阶的导数在 $\zeta_i$处都有非切向极限。根据注 3.11，可知 $\psi^{(k)}(\zeta_i)$ $= 0$对每个 $0 \le k \le \ell_i - 1$都成立。因此，我们有

$$\frac{\psi^{(\ell_i)}(\zeta_i)}{\ell_i!} = \lim_{k \to +\infty} \frac{\psi(r_k\zeta_i)}{(r_k\zeta_i - \zeta_i)^{\ell_i}}.$$

但请注意,

$$\frac{\psi(r_k\zeta_i)}{(r_k\zeta_i - \zeta_i)^{\ell_i}} = \frac{u(r_k\zeta_i)}{(r_k\zeta_i - \zeta_i)^{\ell_i}} \cdot a(\varphi(r_k\zeta_i)) \cdot f(\varphi(r_k\zeta_i)) = \begin{cases} \frac{u(r_k\zeta_i)}{(r_k\zeta_i - \zeta_i)^{\ell_i}} \cdot a(\varphi(r_k\zeta_i)) & \text{if } k \text{ is even,} \\ 0 & \text{if } k \text{ is odd,} \end{cases}$$

and

$$\lim_{k \to \infty} \frac{u(r_k\zeta_i)}{(r_k\zeta_i - \zeta_i)^{\ell_i}} \cdot a(\varphi(r_k\zeta_i)) = u^{(\ell_i)}(\zeta_i) \cdot a(\varphi(\zeta_i)).$$

为了使 $\psi^{(\ell_i)}(\zeta_i)$ 存在，必然有 $u^{(\ell_i)}(\zeta_i)a(\varphi(\zeta_i))$ $= 0$. 由于项 $u^{(\ell_i)}(\zeta_i)$ 不为零，因此这意味着 $a(\varphi(\zeta_i))$ $= 0$，由此完成了定理4.1的证明。 □

4.2. (NC) 的必要性 当 $w \in H^2$时。

定理 4.2. 设 $u$ 和 $\varphi$ 满足 *(H1)* 和 *(H2)*，令 $w$ 由 (1.6)定义。假设$w \in H^2$。则 *(NC)* 成立。

证明。考虑满足以下条件的 $0 \le \ell_i \le m_i - 1$

$$u(\zeta_i) = u'(\zeta_i) = \cdots = u^{(\ell_i - 1)}(\zeta_i) = 0 \text{ and } u^{(\ell_i)}(\zeta_i) \neq 0.$$

由引理3.3 可知 $\varphi$ 在 $\zeta_i$ 处有非切向极限 $|\varphi(\zeta_i)| \le 1$。还需证明 $\varphi(\zeta_i) \in \mathbb{D} \cup Z(a)$。

由于 $w \in H^2$，我们知道 $u \cdot a \circ \varphi \cdot p \circ \varphi \in aH^2$，其中

$$p(z) = \prod_{j=p+1}^{n} (z - \lambda_j)^{m_j}$$

其中 $\lambda_j = \varphi(\zeta_j) \in \mathbb{D}$， $p+1 \le j \le n$。利用 (H1)，我们有 $u \in \mathcal{M}(\overline{a}) \subset \mathcal{M}((z-\zeta_i)^{m_i})$，特别地，我们可以写成

$$u(z) = (z-\zeta_i)^{m_i} u_1(z) + \sum_{k=\ell_i}^{m_i} \alpha_k (z-\zeta_i)^k,$$

其中 $u_1 \in H^2$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$， $\ell_i \le k \le m_i$ 且 $\alpha_{\ell_i} = \frac{u^{(\ell_i)}(\zeta_i)}{\ell_i!} \neq 0$。这可以改写为

$$u(z) = (z-\zeta_i)^{\ell_i} (\alpha_{\ell_i} + (z-\zeta_i) u_2(z)),$$

其中 $u_2 \in H^2$。因此

$$u(z)a(\varphi(z))p(\varphi(z)) = (z-\zeta_i)^{\ell_i} (\alpha_{\ell_i} + (z-\zeta_i) u_2(z)) a(\varphi(z))p(\varphi(z)).$$

但是，利用 $u \cdot a \circ \varphi \cdot p \circ \varphi \in aH^2 \subset (z-\zeta_i)^{m_i} H^2$，存在 $u_3 \in H^2$ 使得

$$(\alpha_{\ell_i} + (z-\zeta_i) u_2(z)) a(\varphi(z))p(\varphi(z)) = (z-\zeta_i)^{m_i - \ell_i} u_3(z).$$

因此，

$$\alpha_{\ell_i} a(\varphi(z))p(\varphi(z)) = (z-\zeta_i) u_4(z), \tag{4.3}$$

其中 $u_4(z) = (z-\zeta_i)^{m_i - (\ell_i+1)} u_3(z) - u_2(z) a(\varphi(z))p(\varphi(z))$。由于 $\ell_i \le m_i - 1$，注意到$u_4 \in H^2$，从而 $(z-\zeta_i)u_4(z) \to 0$ 在 $z \to \zeta_i$ 处非切向地成立。特别地，若令$z \to \zeta_i$ 在式 (4.3) 中非切向地成立，则得到

$$\alpha_{\ell_i} a(\varphi(\zeta_i))p(\varphi(\zeta_i)) = 0.$$

但是 $\alpha_{\ell_i} \neq 0$。因此，要么有 $a(\varphi(\zeta_i)) = 0$，这意味着 $\varphi(\zeta_i) \in Z(a)$；要么有 $p(\varphi(\zeta_i)) = 0$，这意味着存在一个 j，使得 $p+1 \le j \le n$ 满足 $\varphi(\zeta_i) = \lambda_j$，且在这种情况下 $\varphi(\zeta_i) \in \mathbb{D}$。□

## 5. Proof of Theorem 1.7

本节将证明我们的主要结果。回顾一下，在条件 (H1) 和(H2)下，权函数 $w$ 可表示为

$$w = \frac{u \cdot a \circ \varphi \cdot \prod_{j=p+1}^{n} (\varphi - \varphi(\zeta_j))^{m_j}}{a},$$

其中，对于每个 $p+1 \le j \le n$, $\varphi(\zeta_j) \in \mathbb{D}$ 和 $u^{(\ell)}(\zeta_j) \neq 0$，某个 $0 \le \ell \le m_j - 1$。证明定理1.7 的第一步，是证明当 $W_{u,\varphi}$在 $\mathscr{H}(b)$ 上有界时，该权函数 $w$ 属于 $H^2$。这由下面的引理给出。

**引理 5.1.** 假设 $u$ 和 $\varphi$ 满足 $W_{u,\varphi}$ 在 $\mathscr{H}(b)$ 上有界。那么 $w \in H^2$。

证明。 根据定理 4.1，我们知道 $u$ 和 $\varphi$ 必然满足 (H1)、(H2)和 (NC)。于是，我们可以应用定理 3.2，由此可得 $u \cdot p \circ \varphi \in \mathscr{H}(b)$，对每个多项式 $p$均成立。特别地

$$v := u \cdot (a \circ \varphi) \cdot \prod_{j=p+1}^{n} (\varphi - \varphi(\zeta_j))^{m_j} \in \mathscr{H}(b).$$

根据（1.5），为了证明 $w = \frac{v}{a} \in H^2$，只需证明

$$v^{(k)}(\zeta_i) = 0, \quad \forall\, 1 \le i \le n,\ \forall\, 0 \le k \le m_i - 1. \tag{5.2}$$

注意，由于 $v \in \mathscr{H}(b) \subset \mathcal{M}(\overline{a_i})$，我们可以写成

$$v(z) = (z - \zeta_i)^{m_i} v_1 + p(z), \tag{5.3}$$

其中 $v_1 \in H^2$ 和 $p$ 是由下式给出的多项式

$$p(z) = \sum_{k=0}^{m_i - 1} \frac{v^{(k)}(\zeta_i)}{k!} (z - \zeta_i)^k.$$

– 情形 1. 我们首先证明 5.2）对 $p + 1 \le i \le n$成立。注意到

$$v = u \cdot (\varphi - \varphi(\zeta_i))^{m_i} \cdot p_i \circ \varphi, \tag{5.4}$$

其中 $p_i$ 是由下式给出的多项式

$$p_i(z) = a(z) \prod_{j=p+1, j\neq i}^{n} (z - \varphi(\zeta_j))^{m_j}.$$

由于 $p + 1 \le i \le n$，存在 $0 \le \ell_i \le m_i - 1$ 使得

$$u(\zeta_i) = \cdots = u^{(\ell_i - 1)}(\zeta_i) = 0 \text{ and } u^{(\ell_i)}(\zeta_i) \neq 0. \tag{5.5}$$

根据 引理 3.3， $\varphi \in \mathcal{M}(\overline{a_{i,\ \ell_i}})$，其中 $a_{i,\ \ell_i}(z) = (z - \zeta_i)^{m_i - \ell_i}$. 因此，我们有 e

$$\varphi(z) = a_{i,\ell_i}(z)\varphi_1(z) + \sum_{k=0}^{m_i - \ell_i - 1} \frac{\varphi^{(k)}(\zeta_i)}{k!} (z - \zeta_i)^k, \text{ where } \varphi_1 \in H^2. \tag{5.6}$$

现在我们考虑两种子情形。

• 情形 1(a)。假设 $\ell_i \le m_i - 2$。那么 $m_i - \ell_i \ge 2$，方程（5.6）可写为

$$\varphi(z) = \varphi(\zeta_i) + (z - \zeta_i)\varphi'(\zeta_i) + (z - \zeta_i)\varepsilon(z),$$

其中 $\varepsilon$ 是 $H$ 中的一个函数，满足 $\varepsilon$（$z$） $\to 0$ 因为 $z \to \zeta_i$ 非切向地。代入（5.4），得到

$$v(z) = u(z)(z - \zeta_i)^{m_i}(\varphi'(\zeta_i) + \varepsilon(z))^{m_i} p_i(\varphi(z)).$$

因此，由（5.3），可得

$$u(z)(z - \zeta_i)^{m_i}(\varphi'(\zeta_i) + \varepsilon(z))p_i(\varphi(z)) = (z - \zeta_i)^{m_i} v_1(z) + p(z).$$

两边除以 $(z - \zeta_i)^{m_i}$，可得 $p/(z - \zeta_i)^{m_i} \in H^1$。由于 $\deg(p) \le m_i - 1$，因此推得 $p = 0$，这意味着对于每个 $0 \le k \le m_i - 1.$，都有 $v^{(k)}(\zeta_i) = 0$

• 情形 1(b)。假设 $\ell_i = m_i - 1$。在这种情况下，$a_{i,\ell_i}(z) = (z-\zeta_i)$，由 (5.6) 可得 $\varphi(z) = (z-\zeta_i)\varphi_1(z) + \varphi(\zeta_i)$。此外，由于 $u \in \mathscr{H}(b) \subset \mathcal{M}(\overline{a_i})$，并考虑到 (5.5)，我们还可得到

$$u(z) = (z-\zeta_i)^{m_i} u_1(z) + \alpha(z-\zeta_i)^{m_i-1},$$

其中 $u_1 \in H^2$ 并且 $\alpha = \frac{u^{(m_i-1)}(\zeta_i)}{(m_i-1)!} \neq 0$. 然后，代入（5.4），我们推得

$$v(z) = (z-\zeta_i)^{m_i-1}((z-\zeta_i)u_1(z) + \alpha)(z-\zeta_i)^{m_i}\varphi_1^{m_i}(z)p_i(\varphi(z)).$$

由于 $(z-\zeta_i)u_1(z) \to 0$ 且 $(z-\zeta_i)\varphi_1(z) \to 0$ 当 $z \to \zeta_i$ 非切向地，并且由于 $p_i \circ \varphi \in H^\infty$，我们看到 $v(z) = o((z-\zeta_i)^{m_i-1})$ 当 $z \to \zeta_i$ 非切向地。然而，我们还有 $(z-\zeta_i)^{m_i}v_1(z) = o((z-\zeta_i)^{m_i-1})$，因此（5.3）意味着 $p(z) = o((z-\zeta_i)^{m_i-1})$ 当 $z \to \zeta_i$ 非切向地。这意味着 $p = 0$，因此 $v^{(k)}(\zeta_i) = 0$ 对每个$0 \le k \le m_i - 1$都成立。

这就完成了第一种情形下对（5.2）的证明，其中 $p+1 \le i \le n$。

– 情形 2。现在我们证明（5.2），其中 $1 \le i \le p$。对于这一情形，我们还要考虑两个子情形。

• 情形 2(a)。假设 $u^{(\ell)}(\zeta_i) = 0$ 对所有 $0 \le \ell \le m_i - 1$均成立。那么，根据（1.5），我们得到 $u \in \mathcal{M}(a_i)$。由于 $(a\circ\varphi)\prod_{j=p+1}^n(\varphi-\varphi(\zeta_j))^{m_j} \in H^\infty$，我们立即推出$v \in \mathcal{M}(a_i)$；再次利用（1.5），可得 $v^{(\ell)}(\zeta_i) = 0$，对每个 $0 \le \ell \le m_i - 1$均成立。

• 情形 2(b)。假设存在 $0 \le \ell_i \le m_i - 1$ 使得

$$u(\zeta_i) = u'(\zeta_i) = \cdots = u^{(\ell_i-1)}(\zeta_i) = 0 \text{ and } u^{(\ell_i)}(\zeta_i) \neq 0.$$

然后，根据 （NC），由于 $1 \le i \le p$，我们有 $\varphi(\zeta_i) \in Z(a)$。为检验（5.2），我们将采用与定理 4.1的证明中类似的论证。首先，我们有

$$v(\zeta_i) = u(\zeta_i)a(\varphi(\zeta_i)) \prod_{j=p+1}^{n} (\varphi(\zeta_i) - \varphi(\zeta_j))^{m_j} = 0,$$

因为 $\varphi(\zeta_i) \in Z(a)$。现在由于 $|\varphi(\zeta_i)| = 1$，存在 $r_k \to 1^-$ 使得 $(\varphi(r_k\zeta_i))_k$ 是 $H^\infty$ 的插值序列。特别地，存在 $f \in H^\infty$ 使得

$$f(\varphi(r_k\zeta_i)) = \begin{cases} 1 & \text{if } k \text{ is even,} \\ 0 & \text{if } k \text{ is odd.} \end{cases}$$

定义

$$h(z) = a(z) \prod_{j=p+1}^{n} (z - \varphi(\zeta_j))^{m_j} f(z), \quad z \in \mathbb{D}.$$

于是 $h \in aH^\infty \subset \mathscr{H}(b)$，并且由于 $W_{u,\varphi}$ 在 $\mathscr{H}(b)$ 上有界，我们得到 $u \cdot h \circ \varphi$ 也属于 $\mathscr{H}(b)$。但是

$$u \cdot h \circ \varphi = u \cdot a \circ \varphi \cdot \prod_{j=p+1}^{n} (\varphi - \varphi(\zeta_j))^{m_j} \cdot f \circ \varphi = v \cdot f \circ \varphi.$$

Write $\psi := v \cdot f \circ \varphi$。于是 $\psi \in \mathscr{H}(b)$，函数 $\psi$ 可以写成

$$\psi(z) = \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{\psi^{(k)}(\zeta_i)}{k!}(z-\zeta_i)^k + (z-\zeta_i)^{m_i-1}\varepsilon(z), \tag{5.7}$$

其中 $\varepsilon(z) \to 0$ 当 $z \to \zeta_i$ 非切向地。注意，

$$|\psi(r\zeta_i)| \le |v(r\zeta_i)|\|f\|_\infty.$$

由于 $v(\zeta_i) = 0$，我们立即得到 $\psi(\zeta_i) = 0$。现在假设，对于某个 $0 \le \ell \le m_i - 2$，我们有 $\psi^{(k)}(\zeta_i) = v^{(k)}(\zeta_i) = 0$ 对每个 $0 \le k \le \ell$都成立。考虑到 (5.7)，我们有

$$\frac{\psi^{(\ell+1)}(\zeta_i)}{(\ell+1)!} = \lim_{k\to\infty} \frac{\psi(r_k\zeta_i)}{(r_k\zeta_i-\zeta_i)^{\ell+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{v(r_k\zeta_i)}{(r_k\zeta_i-\zeta_i)^{\ell+1}} f(\varphi(r_k\zeta_i)).$$

But

$$\frac{v(r_k\zeta_i)}{(r_k\zeta_i-\zeta_i)^{\ell+1}} f(\varphi(r_k\zeta_i)) = \begin{cases} \frac{v(r_k\zeta_i)}{(r_k\zeta_i-\zeta_i)^{\ell+1}} & \text{if } k \text{ is even,} \\ 0 & \text{if } k \text{ is odd,} \end{cases}$$

并且由 (5.3)，我们也有

$$\lim_{k\to\infty} \frac{v(r_k\zeta_i)}{(r_k\zeta_i-\zeta_i)^{\ell+1}} = \frac{v^{(\ell+1)}(\zeta_i)}{(\ell+1)!}.$$

因此，为了使 $\psi^{(\ell+1)}(\zeta_i)$存在，必须有 $\psi^{(\ell+1)}(\zeta_i) = v^{(\ell+1)}(\zeta_i) = 0$。最后，归纳论证表明，对每个 $0 \le k \le m_i - 1$，都有 $\psi^{(k)}(\zeta_i) = v^{(k)}(\zeta_i) = 0$

This 这就完成了第二种情形下 (5.2) 的证明，也就完成了引理 5.1 的证明 . □

注 5.8. 仔细考察引理 5.1 的证明可知，$W_{u,\varphi}$ 在 $\mathscr{H}(b)$ 上有界这一条件仅用于子情形 2(b)。在其他情形中，我们只用到假设 (H1) 和 (H2)。特别地，若 $u$ 和 $\varphi$ 满足 (H1) 和 (H2)，并且进一步假设，对于每个满足存在某个 $\ell$ 使得 $0 \le \ell \le m_i - 1$ 且 $u^{(\ell)}(\zeta_i) \ne 0$ 的 $1 \le i \le n$，都有 $\varphi(\zeta_i) \in \mathbb{D}$，那么情形 2(b) 不会出现，由此从证明可得 $w \in H^2$，而无需假设 $W_{u,\varphi}$ 在 $\mathscr{H}(b)$ 上有界。

现在我们可以证明定理 1.7。

定理 *1.7* 的证明。等价关系 $(ii) \iff (iii)$ 可由 [4] 得出（另见 [12]）。

下面证明蕴含关系 $(i) \implies (ii)$。假设 $W_{u,\varphi}$ 在 $\mathscr{H}(b)$ 上有界。由引理 5.1 可知 $w \in H^2$。令 $f \in H^2$ 并记

$$g(z) := a(z) \cdot \prod_{j=p+1}^{n} (z-\varphi(\zeta_j))^{m_j} f(z), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

于是 $g \in aH^2 \subset \mathscr{H}(b)$，从而

$$W_{u,\varphi}(g) = u \cdot a \circ \varphi \cdot \left( \prod_{j=p+1}^{n} (\varphi - \varphi(\zeta_j))^{m_j} \right) \cdot f \circ \varphi \in \mathscr{H}(b).$$

特别地，存在 $g \in H^2$ 和 $p \in \mathscr{P}_{N-1}$ 使得

$$u \cdot a \circ \varphi \cdot \left( \prod_{j=p+1}^{n} (\varphi - \varphi(\zeta_j))^{m_j} \right) \cdot f \circ \varphi = ag + p.$$

两边除以 $a$，得到

$$w \cdot f \circ \varphi = g + \frac{p}{a}.$$

但是， $w \in H^2$ 并且 $f \circ \varphi \in H^2$ （根据 Littlewood 从属原理），因此函数 $w \cdot f \circ \varphi$ 属于 $H^1$。于是 $p/a \in H^1$。由于 $\deg(p) \leq N-1 < \deg(a)$，得到$p = 0$。因此，对于每个 $f \in H^2$，函数 $w \cdot f \circ \varphi$ 属于 $H^2$，这就证明了（$ii$）。

现在我们证明蕴含关系（$ii$）$\Longrightarrow$ （$i$）。由于 $u$和 $\varphi$ 满足(H1) 和(H2)，根据定理 3.2，我们知道，对每个多项式 $p$，都有 $u \cdot p \circ \varphi \in \mathscr{H}(b)$。因此，特别地，$W_{u,\,\varphi}(p) \in \mathscr{H}(b)$，对每个 $p \in \mathscr{P}_{N-1}$都成立；又由于 $\mathscr{H}(b) = aH^2 \oplus \mathscr{P}_{N-1}$，接下来只需证明

$$W_{u,\varphi}(af) \in \mathscr{H}(b), \text{ for every } f \in H^2. \tag{5.9}$$

考虑有限布拉施克乘积

$$B(z) = \prod_{j=p+1}^{n} \left( \frac{z - \lambda_j}{1 - \overline{\lambda_j} z} \right)^{m_j},$$

其中我们将 $\lambda_j = \varphi(\zeta_j) \in \mathbb{D}$ 记作 $p+1 \leq j \leq n$。回顾 $H^2 = BH^2 \oplus K_B$ 以及

$$K_B = \left\{ \frac{p}{\prod_{j=p+1}^{n} \left(1 - \overline{\lambda_j} z\right)^{m_j}}, p \in \mathscr{P}_{N_1 - 1} \right\}, \text{ where } N_1 = \sum_{j=p+1}^{n} m_j.$$

参见 i 例如 [13, 命题 5。16]设 $g = p/\prod_{j=p+1}^{n} \left(1 - \overline{\lambda_j} z\right)^{m_j} \in K_B$. 则 en

$$W_{u,\varphi}(ag) = \frac{u \cdot q \circ \varphi}{\prod_{j=p+1}^{n} \left(1 - \overline{\lambda_j} \varphi\right)^{m_j}},$$

其中 $q = ap$ 是一个多项式。利用推论 3.12，我们推得 $W_{u,\,\varphi}(ag) \in \mathscr{H}(b)$ 对每个 $g \in K_B$ 都成立。因此，为了证明（5.9），还需证明$W_{u,\,\varphi}(aBH^2) \subset \mathscr{H}(b)$，即

$$u \cdot a \circ \varphi \cdot B \circ \varphi \cdot h \circ \varphi \in \mathscr{H}(b), \text{ for every } h \in H^2. \tag{5.10}$$

注意，如果 $h \in H^2$，那么

$$u \cdot a \circ \varphi \cdot B \circ \varphi \cdot h \circ \varphi = u \cdot a \circ \varphi \cdot \left( \prod_{j=p+1}^{n} (\varphi - \varphi(\zeta_j))^{m_j} \right) \cdot h_1 \circ \varphi,$$

其中

$$h_1 = \frac{h}{\prod_{j=p+1}^{n} (1 - \overline{\lambda_j} z)^{m_j}} \in H^2.$$

Then

$$u \cdot a \circ \varphi \cdot B \circ \varphi \cdot h \circ \varphi = aw \cdot h_1 \circ \varphi = a \cdot W_{w,\varphi}(h_1).$$

根据（$ii$），$W_{w,\,\varphi}(h_1) \in H^2$，然后

$$u \cdot a \circ \varphi \cdot B \circ \varphi \cdot h \circ \varphi \in aH^2 \subset \mathscr{H}(b),$$

这证明了（5.10）。因此最终可推出 $W_{u,\,\varphi}$ 在 $\mathscr{H}(b)$ 上有界，由此完成定理 1.7 的证明。□

在定理 1.7 的证明中，为了证明 $W_{u,\,\varphi}(aK_B \oplus \mathscr{P}_{N-1}) \subset \mathscr{H}(b)$，关键在于以下事实：若 $f \in aBH^2$ 且 $g \in H^2$ 满足 $f = aBg$，则

$$W_{u,\varphi} f = u \cdot f \circ \varphi = u \cdot a \circ \varphi \cdot B \circ \varphi \cdot g \circ \varphi = aW_{\widetilde{w},\varphi} g, \tag{5.11}$$

其中 $\widetilde{w} = u \cdot (a \circ \varphi \cdot B \circ \varphi)/a$。此外，由于 $\widetilde{w}$ 与 $w$ 相差一个在 $H^\infty$ 中可逆的因子，$W_{\widetilde{w},\,\varphi}$ 在 $H^2$ 上的有界性等价于 $W_{w,\,\varphi}$ 在 $H^2$ 上的有界性，进而等价于 $W_{u,\,\varphi}$ 在 $\mathscr{H}(b)$ 上的有界性。

现在，若 $P\colon \mathscr{H}(b) \to aBH^2$ 表示从 $\mathscr{H}(b)$ 到 $aBH^2$ 的正交归一投影，则（5.11）和（1.3）意味着

$$\|W_{\widetilde{w},\varphi}\|_{\mathcal{L}(H^2)} = \|W_{u,\varphi} P\|_{\mathcal{L}(\mathscr{H}(b))} \le \|W_{u,\varphi}\|_{\mathcal{L}(\mathscr{H}(b))}.$$

自然会问，$W_{\widetilde{w},\,\varphi}$ 在 $H^2$ 上的范数是否与 $W_{u,\,\varphi}$ 在 $\mathscr{H}(b)$ 上的范数等价，也就是说，是否存在一个仅依赖于 $b$ 的常数 $c > 0$，使得 $\|W_{u,\,\varphi}\|_{\mathcal{L}(\mathscr{H}(b))} \le c\|W_{\widetilde{w},\,\varphi}\|_{\mathcal{L}(H^2)}$。然而，一般情况下并非如此，下面的例子就说明了这一点。

例 5.12. 设 $b(z) = \frac{1+z}{2}$，$z \in \mathbf{D}$。那么 $\tilde{a}(z) = \frac{1-z}{2}$ 且 $a(z) = z - 1$。取 $u \equiv 1$，并令 $0 < \varepsilon < 1/2$ 和 $\varphi_\varepsilon \in \mathscr{H}(b)$ 如下定义：

$$\varphi_\varepsilon(z) = \varepsilon(z-1),\ z \in \mathbb{D}.$$

由于 $\varphi_\varepsilon(1) = 0$，我们有 $B(z) = z$，于是

$$\widetilde{w}_\varepsilon(z) = \frac{(\varphi_\varepsilon(z) - 1)\varphi_\varepsilon(z)}{z-1} = \varepsilon(\varepsilon(1-z) - 1),\ z \in \mathbb{D}.$$

特别地，我们可推出 $\|\tilde{w}_\varepsilon\|_\infty \le \varepsilon(2\varepsilon + 1) \le 2\varepsilon$。此外，利用关于 $H^2$ 上复合算子范数的一个著名估计（参见[7, 定理 3.6]），我们有

$$\|C_{\varphi_\varepsilon}\|_{\mathcal{L}(H^2)} \le \frac{1 + |\varphi_\varepsilon(0)|}{1 - |\varphi_\varepsilon(0)|} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \le 3.$$

因此，我们看到 $W_{\widetilde{w},\varphi_\varepsilon}$ 在 $H^2$ 上有界，并且

$$\|W_{\widetilde{w}_\varepsilon,\varphi_\varepsilon}\|_{\mathcal{L}(H^2)} \le \|\widetilde{w}_\varepsilon\|_\infty \|C_{\varphi_\varepsilon}\|_{\mathcal{L}(H^2)} \le 6\varepsilon.$$

但是 $W_{1,\varphi_\varepsilon} 1 = C_{\varphi_\varepsilon} 1 = 1$。因此 $\|W_{1,\varphi_\varepsilon}\|_{\mathcal{L}(\mathscr{H}(b))} \ge 1$，于是

$$\frac{\|W_{1,\varphi_\varepsilon}\|_{\mathcal{L}(\mathscr{H}(b))}}{\|W_{\widetilde{w}_\varepsilon,\varphi_\varepsilon}\|_{\mathcal{L}(H^2)}} \ge \frac{1}{6\varepsilon} \longrightarrow \infty \text{ when } \varepsilon \to 0.$$

## 6. Necessary or sufficient conditions and examples

6.1. 通过本质值域给出的有界性充分条件。设 $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 为解析函数，且 $b$ 属于 $H^\infty$ 的闭单位球。那么可容许权的集合为

$$\mathcal{M}_{\varphi,b} = \{u \in \mathscr{H}(b) : W_{u,\varphi} \text{ is bounded on } \mathscr{H}(b)\}.$$

不难看出

$$aH^\infty \subset \{u \in \mathscr{H}(b) : u\varphi \in \mathscr{H}(b) \text{ and } w \in H^\infty\} \subset \mathcal{M}_{\varphi,b}, \tag{6.1}$$

其中 $w$ 由（1.6）定义。事实上，第一个包含关系显然成立，第二个则直接由定理 1.7 得出。

在第 7 节中，我们将更精确地研究（6.1）中的包含关系，并在 $\varphi$ 是有限布拉施克乘积的情况下，给出对 $\mathcal{M}_{\varphi、\ b}$ 的另一种描述。在下一个结果中，我们将看到，要推出 $W_{u、\ \varphi}$ 在 $\mathscr{H}(b)$ 上有界，并不要求 $w$ 处处有界。事实上，在 [12, 定理 2.9], 中已证明，若 $w \in H^2$，且存在 $\delta > 0$ 和 $c_\delta > 0$，使得在集合 $A_\delta := \{\zeta \in \mathbb{T} : |\varphi(\zeta)| \geq 1 - \delta\}$ 上几乎处处有 $|w| \leq c_\delta$，那么 $W_{w、\ \varphi}$ 在 $H^2$ 上有界。结合定理 1.7，可得以下结果。

推论 6.2. 设 $u$ 和 $\varphi$ 满足 *(H1)*和 *(H2)*，并设 $w$ 为由下式定义的函数(1.6)。假设 $w \in H^2$ 且存在 $\delta > 0$ 使得

$$\sup_{z \in A_\delta} \operatorname{ess} |w(z)| < \infty.$$

那么，算子 $W_{u,\ \varphi}$ 在 $\mathscr{H}(b)$ 上有界。

现在我们给出一个权函数 $u$，它不是 $\mathscr{H}(b)$ 的乘子；并给出一个符号 $\varphi$，使得由 $\varphi$ 诱导的复合算子在 $\mathscr{H}(b)$ 上无界，但相应的加权复合算子 $W_{u,\ \varphi}$ 在 $\mathscr{H}(b)$ 上有界。

例 6.3. 考虑 $b(z) = \frac{1+z}{2}$，$z \in \mathbb{D}$。那么 $\tilde{a}(z) = \frac{1-z}{2}$，$a(z) = z - 1$ 和$\mathscr{H}(b) = (z - 1)H^2 \oplus \mathbb{C}$。设 $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ 定义如下

$$\varphi(z) = 1 - (1 - z)^{1/2},\ z \in \mathbb{D}.$$

那么 $C_\varphi$ 在 $\mathscr{H}(b)$ 上无界。事实上，设 $f(z) = 1 - z,\ z \in \mathbb{D}$。那么 $f \in \mathscr{H}(b)$ 和 $C_\varphi f(z) = (1 - z)^{1/2}$。函数 $C_\varphi f$ 属于圆盘代数 $A(\mathbb{D})$（即在 $\mathbb{D}$ 上解析且在 $\mathbb{D}$ 上连续的函数空间），并满足 $C_\varphi f(1) = 0$。因此，$C_\varphi f \in \mathscr{H}(b)$ 当且仅当存在 $h \in H^2$ 使得 $C_\varphi f = (z - 1)h$。但这等价于$h = -(1 - z)^{-1/2}$，而它不属于 $H^2$。因此，$C_\varphi f \notin \mathscr{H}(b)$，且 $C_\varphi$ 在 $\mathscr{H}(b)$ 上无界。现在，令 $u$ 定义如下

$$u(z) = \frac{(1 - z)^{3/4}}{(1 + z)^{1/4}},\ z \in \mathbb{D}.$$

由于当 $z \to -1$ 时，$|u(z)| \longrightarrow \infty$，函数 $u$ 不有界。不过请记住，$\mathfrak{M}(\mathscr{H}(b)) = H^\infty \cap \mathscr{H}(b)$，因此乘以 $u$ 的乘法算子在 $\mathscr{H}(b)$ 上不有界。

现在我们来验证能否应用推论 6.2 得到 $W_{u,\varphi}$ 在 $\mathscr{H}(b)$ 上的有界性。首先，请注意

$$u(z)=(z-1)\underbrace{\frac{-1}{(1-z)^{1/4}(1+z)^{1/4}}}_{\in H^2} \quad \text{and} \quad u(z)\varphi(z)=(z-1)\underbrace{\frac{(1-z)^{1/2}-1}{(1-z)^{1/4}(1+z)^{1/4}}}_{\in H^2},$$

然后 $u$， $u\varphi \in aH^2 \subset \mathscr{H}(b)$。特别地， $u$ 和 $\varphi$ 满足 (H1) 和 (H2)。因此，接下来只需证明，对于某个 $\delta>0$，$\operatorname{sup\,ess}_{A_\delta}|w|$ 是有限的。按照我们对 $u$ 和 $\varphi$的选取，有

$$w(z)=\frac{u(z)(a\circ\varphi)(z)}{a(z)}=\frac{(1-z)^{3/4}(1-z)^{1/2}}{(1+z)^{1/4}(1-z)}=\frac{(1-z)^{1/4}}{(1+z)^{1/4}},\ z\in\mathbb{D}.$$

注意， $\varphi\in A(\mathbf{D})$ 和 $\varphi(-1)=1-\sqrt{2}$。于是，由 $\varphi$ 在单位圆上的连续性，对于足够小的 $\delta>0$，并且对 $-1$ 的某个开邻域 $V$，有 $A_\delta\subset\mathbf{T}\setminus V$。由此容易得到， $w$ 在单位圆 $\mathbf{T}\setminus V$ 上有界，因而在 $A_\delta$ 上也有界。因此，我们可以应用推论 6.2 得出，$W_{u,\ \varphi}$ 在 $\mathscr{H}(b)$ 上有界。

6.2. 关于 $\varphi$ 在 $a$ 的零点处具有非幺模径向极限的有界性充分条件。

推论 6.4. 设 $u$ 和 $\varphi$ 满足 *(H1)* 和 *(H2)*。此外，假设对每个$1\le i\le n$，都有

$$\limsup_{z\to\zeta_i}|\varphi(z)|<1.$$

那么，对每个 $1\le i\le n$，都存在一个包含 $\zeta_i$ 的开弧 $V_i$，使得若 $u$ 在 $\mathbf{T}\setminus(\bigcup_{i=1}^n V_i)$ 上本质有界，则算子 $W_{u,\varphi}$ 在 $\mathscr{H}(b)$ 上有界。

此结果的证明与 [2] 中推论 4.12 的证明类似。

证明。由于对每个 $1\le i\le n$，$\limsup_{z\to\zeta_i}|\varphi(z)|<1$，存在 $\delta>0$ 和 $0<L<1$，使得对每个 $1\le i\le n$ 以及每个 $z\in\mathbf{D}$，若 $|z-\zeta_i|<\delta$，则 $|\varphi(z)|\le L$。令$V_i=\{\zeta\in\mathbf{T}:|\zeta-\zeta_i|<\delta\}$ 且 $V=\bigcup_{i=1}^n V_i$。那么在 $V$ 上几乎处处有 $|\varphi|\le L$。现在假设存在 $1\le i\le n$ 和 $0\le\ell\le m_i-1$，使得 $u^{(\ell)}(\zeta_i)\neq 0$。那么，根据引理 3.3，我们知道 $\varphi$ 在 $\zeta_i$ 处有非切向极限，并由假设可得 $\varphi(\zeta_i)\in\mathbf{D}$。特别地，由注 5.8 可推知，权函数 $w$ 属于 $H^2$。

现在假设 $u$ 在单位圆 $\setminus V$ 上本质有界，并让我们证明

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{D}}\int_{\mathbb{T}}(1-|\lambda|^2)\frac{|w(\zeta)|^2}{|1-\overline{\lambda}\varphi(\zeta)|^2}dm(\zeta)<\infty.$$

首先注意，对于每个 $\zeta\in$单位圆 $\setminus V$，都有 $|a(\zeta)|\ge\delta^N$。特别地，由于 $u$在单位圆$\mathbf{T}\setminus V$上本质有界，我们可推得存在 $C>0$，使得 $|w|\le C$在单位圆$\mathbf{T}\setminus V$上几乎处处成立。因此，对于每个 $\lambda\in\mathbf{D}$，我们得到

$$\int_{\mathbb{T}\setminus V}(1-|\lambda|^2)\frac{|w(\zeta)|^2}{|1-\overline{\lambda}\varphi(\zeta)|^2}dm(\zeta)\le C^2(1-|\lambda|^2)\|C_\varphi k_\lambda\|_2^2.$$

根据 Littlewood 从属原理，算子 $C_\varphi$ 在 $H^2$上有界，因此$\|C_\varphi k_\lambda\|_2^2 \le \|C_\varphi\|^2_{\mathcal{L}(H^2)}$ $\|k_\lambda\|_2^2 = \|C_\varphi\|^2_{\mathcal{L}(H^2)}(1-|\lambda|^2)^{-1}$，由此得到

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{D}}\int_{\mathbb{T}\setminus V} 1-|\lambda|^2)\frac{|w(\zeta)|^2}{|1-\overline{\lambda}\varphi(\zeta)|^2}dm(\zeta) \le C^2\|C_\varphi\|^2_{\mathcal{L}(H^2)}.$$

对于 $V$ 上的积分，利用 $|\varphi| \le L < 1$ 在 $V$ 上几乎处处成立这一事实，我们有

$$\int_V (1-|\lambda|^2)\frac{|w(\zeta)|^2}{|1-\overline{\lambda}\varphi(\zeta)|^2}dm(\zeta) \le \frac{\|w\|^2_{H^2}}{(1-L)^2}.$$

因此，我们得到

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{D}}\int_{\mathbb{T}} (1-|\lambda|^2)\frac{|w(\zeta)|^2}{|1-\overline{\lambda}\varphi(\zeta)|^2}dm(\zeta) \le C^2\|C_\varphi\|^2_{\mathcal{L}(H^2)} + \frac{\|w\|^2_{H^2}}{(1-L)^2} < \infty.$$

现在由定理 1.7 可知 $W_{u,\varphi}$ 在 $\mathscr{H}(b)$ 上有界。 □

6.3. 通过 Carath´eodory 导数得到有界性的必要条件。首先回顾一下，闭单位球中的函数 $\varphi$ $H^\infty$ 在点 $\zeta \in \mathbb{T}$ 处具有 Carath´eodory 意义下的角导数（简称 ADC），是指 $\varphi$ 和 $\varphi'$ 在 $\zeta$ 处均有非切向极限，且 $|\varphi(\zeta)| = 1$。Carath´eodory 的一个著名刻画指出，$\varphi$ 在 $\zeta \in \mathbb{T}$ 处具有 ADC，当且仅当

$$c := \liminf_{z\to\zeta}\frac{1-|\varphi(z)|}{1-|z|} < \infty.$$

此外，在这种情况下，$c = |\varphi'(\zeta)| > 0$。例如参见 [7, 定理 2。44] 或 [11, 定理 21。1]。

我们在定理 4.1 中看到，如果 $W_{u,\varphi}$ 在 $\mathscr{H}(b)$ 上有界，并且存在 $1 \le k \le n$ 使得 $u(\zeta_k) \ne 0$，那么 $\varphi$ 在 $\zeta_k$ 处有非切向极限，且 $\varphi(\zeta_k) \in Z(a) \cup \mathbb{D}$。如果 $\varphi(\zeta_k) \in Z(a)$，那么我们可以对 $\varphi$的边界行为作出更多说明。

推论 6.5. 设 $u$ 和 $\varphi$ 满足 $W_{u,\varphi}$ 在 $\mathscr{H}(b)$ 上有界。假设存在$1 \le k, \ell \le n$ 使得 $\varphi(\zeta_k) = \zeta_\ell$。那么

$$\liminf_{z\to\zeta_k}|u(z)|^2\frac{(1-|\varphi(z)|)^{2m_\ell-1}}{(1-|z|)^{2m_k-1}} < \infty.$$

特别地，如果 $u(\zeta_k) \ne 0$，那么 $m_k \le m_\ell$。此外，如果 $m_\ell = m_k$，那么 $\varphi$ 在 $\zeta_k$处具有 Carath´eodory 意义下的角导数。

这一结果的证明与 [2] 中推论 4.5 的证明类似。

证明。由于 $W_{u,\varphi}$ 在 $\mathscr{H}(b)$上有界，定理 1.7 表明，$W_{w,\varphi}$ 在 $H^2$上有界，其伴随算子$W^*_{w,\varphi}$ 在 $H^2$上也有界。容易验证，对于 $\lambda \in \mathbb{D}$，有$W^*_{w,\varphi}k_\lambda = w(\lambda)k_{\varphi(\lambda)}$。因此，我们推得

$$\frac{|w(\lambda)|^2}{1-|\varphi(\lambda)|^2} \le \frac{C^2}{1-|\lambda|^2}, \qquad \text{for every } \lambda \in \mathbb{D},$$

其中， $C$ 是$W_{w,\ \varphi}$ 在 $H^2$上的范数。将前一个不等式应用于 $\lambda = r\zeta_k$ ， 其中$0 < r < 1$，可得

$$|w(r\zeta_k)|^2 \frac{1-r^2}{1-|\varphi(r\zeta_k)|^2} \leq C^2. \tag{6.6}$$

注意到

$$\begin{aligned} w(r\zeta_k) &= u(r\zeta_k) \prod_{j=1}^{n} \left( \frac{\varphi(r\zeta_k) - \zeta_j}{r\zeta_k - \zeta_j} \right)^{m_j} \prod_{j=p+1}^{n} (\varphi(r\zeta_k) - \varphi(\zeta_j))^{m_j} \\ &= u(r\zeta_k) \frac{(\varphi(r\zeta_k) - \zeta_l)^{m_\ell}}{\big((r-1)\zeta_k\big)^{m_k}} \frac{\prod_{j\neq\ell} (\varphi(r\zeta_k) - \zeta_j)^{m_j}}{\prod_{j\neq k} (r\zeta_k - \zeta_j)^{m_j}} \prod_{j=p+1}^{n} (\varphi(r\zeta_k) - \varphi(\zeta_j))^{m_j}. \end{aligned}$$

那么（6.6）蕴含

$$|u(r\zeta_k)|^2 \frac{(1-|\varphi(r\zeta_k)|)^{2m_\ell - 1}}{(1-r)^{2m_k - 1}} \leq h(r), \tag{6.7}$$

其中

$$h(r) = C^2 \frac{(1+|\varphi(r\zeta_k)|) \prod_{j\neq k} |r\zeta_k - \zeta_j|^{2m_j}}{(1+r) \prod_{j\neq\ell} |\varphi(r\zeta_k) - \zeta_j|^{2m_j} \prod_{j=p+1}^{n} |\varphi(r\zeta_k) - \varphi(\zeta_j)|^{2m_j}}.$$

但请注意，对于 $j \geq p+1$， $\varphi(\zeta_j)$ 属于 D，因此

$$A := \lim_{r\to 1} h(r) = C^2 \frac{\prod_{j\neq k} |\zeta_k - \zeta_j|^{2m_j}}{\prod_{j\neq\ell} |\zeta_\ell - \zeta_j|^{2m_j} \prod_{j=p+1}^{n} |\zeta_\ell - \varphi(\zeta_j)|^{2m_j}} < \infty.$$

由此我们推得

$$\liminf_{z\to\zeta_k} |u(z)|^2 \frac{(1-|\varphi(z)|)^{2m_\ell - 1}}{(1-|z|)^{2m_k - 1}} \leq A < \infty.$$

现在假设 $u(\zeta_k) \neq 0$。那么 (6.7) 得出

$$\left( \frac{1-|\varphi(r\zeta_k)|}{1-r} \right)^{2m_\ell - 1} \leq h(r) \frac{(1-r)^{2(m_k - m_\ell)}}{|u(r\zeta_k)|^2}. \tag{6.8}$$

若 $m_k > m_\ell$，则 (6.8) 表明，当 $r \to 1$ 时，$\frac{1-|\varphi(r\zeta_k)|}{1-r} \longrightarrow 0$，于是我们得到

$$c = \liminf_{z\to\zeta_k} \frac{1-|\varphi(z)|}{1-|z|} = 0,$$

这根据 Carath´eodory 定理是不可能的（参见本小节开头的讨论）。若 $m_k = m_\ell$ 则（6.8）给出

$$c = \liminf_{z\to\zeta_k} \frac{1-|\varphi(z)|}{1-|z|} \le \left(\frac{A}{|u(\zeta_k)|^2}\right)^{\frac{1}{2m_l-1}} < \infty,$$

因此，根据 Carath´eodory 定理，函数 $\varphi$ 在 $\zeta_k$处有角导数。 □

在 $b(z) = \frac{1+z}{2}$ 这一特殊情形下，我们将看到，在 1 处存在角导数也是存在权函数 $u$ 的充分条件，该权函数可确保 $W_{u,\,\varphi}$在 $\mathscr{H}(b)$ 上有界。

推论 6.9. 设 $b(z) = \frac{1+z}{2}$，$z \in \mathbb{D}$，且设 $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 为解析函数，在 1 处有非切向极限，且 $\varphi(1) = 1$。那么以下断言等价。

(i) 存在 $u \in \mathscr{H}(b)$，使得 $u(1) \neq 0$，且 $W_{u,\,\varphi}$ 在 $\mathscr{H}(b)$ 上有界。(ii) $\varphi$ 在 1 处有 Carath´eodory 意义下的角导数。(iii) 算子 $C_\varphi$ 在 $\mathscr{H}(b)$ 上有界。

证明。 蕴含关系 $(i) \implies (ii)$ 是推论 6.5的结果。

假设 $(ii)$，即 $\varphi$ 在 Carath´eodory 意义下于 1 处具有角导数。于是根据 [11, 定理 21。1]，$g = \frac{\varphi-1}{z-1} \in H^2$ 从而 $\varphi = (z-1)g + 1 \in \mathscr{H}(b)$。现在我们可以在 [2] 中应用推论 4.9，得到 $(iii)$。蕴含关系 $(iii) \implies (i)$ 显然成立（例如取 $u \equiv 1$即可）。□

## 7. Admissible weights

在小节 6.1 中，我们定义可容许权的集合如下：

$$\mathcal{M}_{\varphi,b} = \{u \in \mathscr{H}(b) : W_{u,\varphi} \text{ is bounded on } \mathscr{H}(b)\},$$

其中 $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 是解析函数。我们还在 (6.1) 中注意到，始终有

$$aH^\infty \subset \{u \in \mathscr{H}(b) : u\varphi \in \mathscr{H}(b) \text{ and } w \in H^\infty\} \subset \mathcal{M}_{\varphi,b}, \tag{7.1}$$

其中 $w$ 由 (1.6) 定义。

若 $\|b\|_\infty < 1$，则其勾股伴函数 $\tilde{a}$ 在 $\mathbb{D}$中没有零点，因此 $a \equiv 1$，这意味着 $\mathscr{H}(b) = H^2$。在这种情况下，(7.1) 中的第一个包含关系显然是等式，而我们知道第二个包含关系何时是严格的。事实上，Contreras 和 Hern´andez-D´ıaz 在 [5]中证明了

$$\mathcal{M}_\varphi = H^\infty \iff \varphi \text{ is a finite Blaschke product}, \tag{7.2}$$

其中 $\mathcal{M}_\varphi = \{v \in H^2 : W_{v,\,\varphi} \text{ 在 } H^2\}$上有界。本节特别将证明，若 $b$ 是 $H^\infty$ 的闭单位球中的一个有理函数，不是有限布拉施克乘积，且满足 $\|b\|_\infty = 1$，那么包含关系 $aH^\infty \subset \mathcal{M}_{\varphi,\,b}$ 总是严格的。

7.1. 可容许权与有限布拉施克乘积。在下一个结果中，我们证明，只要 $\varphi$ 是有限布拉施克乘积，式（7.1）中的第二个包含关系就是等式。

定理 7.3. 设 $b$ 是 $H^\infty$ 闭单位球中的一个有理函数，它不是有限布拉施克乘积，且满足 $\|b\|_\infty = 1$。设 $\varphi$ 是一个有限布拉施克乘积。那么

$$M_{\varphi,b} = \{u \in \mathscr{H}(b) \,:\, u\varphi \in \mathscr{H}(b) \text{ and } w \in H^\infty\}\,.$$

证明. 由 (7.1) 可知，我们总有 $\{u \in \mathscr{H}(b) : u\varphi \in \mathscr{H}(b)$，且 $w \in H^\infty\} \subset \mathcal{M}_{\varphi,\, b}$，因此只需在 $\varphi$ 是有限布拉施克乘积时验证另一个包含关系。

设 $u \in \mathcal{M}_{\varphi,\, b}$，即 $u \in \mathscr{H}(b)$ 且 $W_{u,\ \varphi}$ 在 $\mathscr{H}(b)$ 上有界。特别地，(H1) 和 (H2) 均成立；根据定理 1.7，算子 $W_{w,\ \varphi}$ 在 $H^2$ 上有界，其中 $w = u \cdot a \circ \varphi / a$（注意，由于 $\varphi$ 是有限布拉施克乘积，对每个 $1 \le i \le n$，$\varphi(\zeta_i) \in \mathbb{T}$）。特别地，$w \in \mathcal{M}_\varphi$，且由 (7.2) 可知，我们必然有 $w \in H^\infty$。因此

$$\mathcal{M}_{\varphi,b} \subset \{u \in \mathscr{H}(b) \,:\, u\varphi \in \mathscr{H}(b) \text{ and } w \in H^\infty\}\,.$$

结合（7.1），即可得出等式，并完成证明。 □

我们可以探讨定理 7.3中的等价性是否成立。更准确地说：

问题 7.4. 设 $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 解析，且假设对于每个有理函数 $b$ 满足 $\|b\|_\infty = 1$ 且不是有限布拉施克乘积的函数，我们都有 $M_{\varphi,\ b} = \{u \in \mathscr{H}(b) : u\varphi \in \mathscr{H}(b)$ 并且 $w \in H^\infty\}$，其中 $w$ 由（1.6）定义。是否必然有 $\varphi$ 是有限布拉施克乘积?

下面的结果对此问题给出了一个部分答案。

命题 7.5. 设 $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 解析，且假设 $\varphi(\mathbb{D}) \cap \mathbb{T} \neq \mathbb{T}$。那么存在有理函数 $b : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$，满足 $\|b\|_\infty = 1$ 且不是有限布拉施克乘积，使得

$$\{u \in \mathscr{H}(b) \,:\, u\varphi \in \mathscr{H}(b) \text{ and } w \in H^\infty\} \subsetneq \mathcal{M}_{\varphi,b}.$$

证明. 由于 $\varphi(\mathbb{D}) \cap \mathbb{T} \neq \mathbb{T}$，因此 $\varphi$ 不可能是有限布拉施克乘积；于是由（7.2），存在 $w \in H^2 \setminus H^\infty$ 使得 $W_{w,\ \varphi}$ 在 $H^2$ 上有界。

此外，根据假设，存在 $\zeta \in$ 单位圆 和 $\varepsilon > 0$，使得对于每个 $z \in \mathbb{D}$，都有 $|\varphi(z) - \zeta| > \varepsilon$。因此，令 $b(z) = \frac{z+\zeta}{2}$, $z \in \mathbb{D}$。于是我们有 $a(z) = z - \zeta$, $z \in \mathbb{D}$，并令

$$u(z) = \frac{(z-\zeta)w(z)}{\varphi(z) - \zeta},\ z \in \mathbb{D}.$$

由于 $|\varphi - \zeta| > \varepsilon$，我们有 $w/(\varphi - \zeta) \in H^2$。因此可推得 $u$ 和 $u\varphi$ 属于 $aH^2 \subset \mathscr{H}(b)$ 和 $u(\zeta) = 0$。这意味着 $w$ 与（1.6）中定义的权函数一致。由于算子 $W_{w,\varphi}$ 在 $H^2$ 上有界，根据定理 1.7，算子 $W_{u,\varphi}$ 在 $\mathscr{H}(b)$ 上有界，这意味着 $u \in \mathcal{M}_{\varphi,b}$。但由于 $w \notin H^\infty$，证明至此完成。□

7.2. 不属于 $aH^\infty$ 的可容许权的存在性。本小节的目标是证明包含关系 $aH^\infty \subset \mathcal{M}_{\varphi,b}$ 总是严格的。

定理7.6. 设 $b$ 是 $H^\infty$ 闭单位球中的一个有理函数，它不是有限布拉施克乘积，且满足 $\|b\|_\infty = 1$。那么，对于每个解析函数 $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$，都有 $aH^\infty \subsetneq \mathcal{M}_{\varphi,\, b}$。

为证明这一结果，我们将采用反证法。首先，我们将证明，若 $\mathcal{M}_{\varphi,\, b} = aH^\infty$，那么 $\varphi$ 必定是有限布拉施克乘积（见引理7.7）。接着，作为 (7.1) 的推论，我们将证明，若 $\varphi$ 是有限布拉施克乘积，那么 $\mathcal{M}_{\varphi,\, b} \neq aH^\infty$（见引理7.8），由此得到所需的矛盾。

引理7.7. 设 $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 是解析的，并假设存在一个有理函数$b : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$，它不是内函数，且满足 $\mathcal{M}_{\varphi,\, b} = aH^\infty$。那么 $\varphi$ 是有限布拉施克乘积。

证明。假设 $\mathcal{M}_{\varphi,b} = aH^\infty$，并证明 $\mathcal{M}_\varphi = H^\infty$。由 Littlewood 从属原理，包含关系 $H^\infty \subset \mathcal{M}_\varphi$ 总是成立。现在取 $v \in \mathcal{M}_\varphi$。于是 $v \in H^2$ 且 $W_{v,\varphi}$ 在 $H^2$上有界。记 $u = av$。由于 $u \in \mathcal{M}(a)$，(1.5) 表明，对于每个 $1 \le i \le n$, $0 \le k \le m_i - 1$, $u^{(k)}(\zeta_i) = 0$。特别地，(H1) 和 (H2) 均成立，且相应的权函数 $w$ 由 $w = u \cdot a \circ \varphi / a = v \cdot a \circ \varphi$给出。由于$W_{v,\varphi}$ 在 $H^2$ 上有界，且 $a \circ \varphi \in H^\infty = \mathfrak{M}(H^2)$，我们得到 $W_{w,\varphi}$ 在$H^2$ 上也有界。于是定理 1.7 推出，$W_{u,\varphi}$ 在 $\mathscr{H}(b)$上有界。换言之，$u \in \mathcal{M}_{\varphi,b} = aH^\infty$。因此 $av \in aH^\infty$，也就是说 $v \in H^\infty$。由此我们证明了$\mathcal{M}_\varphi = H^\infty$，并且由 (7.2) 可知，$\varphi$ 是有限布拉施克乘积。□

引理7.8. 设 $\varphi$ 是一个有限布拉施克乘积。那么，对于闭单位球 $H^\infty$ 中的每个有理函数 $b$，只要它不是有限布拉施克乘积且满足 $\|b\|_\infty = 1$，就有 $aH^\infty \subsetneq \mathcal{M}_{\varphi,\, b}$。

证明. 设 $b$ 是闭单位球 $H^\infty$ 中的一个有理函数，它不是有限布拉施克乘积，且满足 $\|b\|_\infty = 1$。由于 $\|b\|_\infty = 1$，我们知道相应的勾股伴函数 $\tilde{a}$ 至少有一个零点 $\zeta_1 \in \mathbb{T}$。由于 $\varphi$ 是一个有限布拉施克乘积，它将 T 映到 T 上，因此存在 $\zeta \in \mathbb{T}$，使得 $\varphi(\zeta) = \zeta_1$。令 $f(z) = (z - \xi)^{-1/3}$, $z \in \mathbb{D}$，并令 $u = af$。注意到 $f \in H^2 \setminus H^\infty$。特别地，$u \in aH^2 \subset \mathscr{H}(b)$。此外，由于 $a \circ \varphi$ 是一个在 D 的某个邻域上解析的有理函数，且在$\zeta$处为零，因此存在一个在 D 内没有极点的有理函数 $r$，使得 $a \circ \varphi(z) = (z - \xi) r(z)$,$z \in \mathbb{D}$。因此

$$u(z)(a \circ \varphi)(z) = a(z) f(z)(z - \zeta) r(z) = a(z)(z - \zeta)^{2/3} r(z),$$

然后是 $w \in H^\infty$。根据（7.1），我们由此得出 $u \in \mathcal{M}_{\varphi,\, b}$ 以及 $u \notin aH^\infty$，这证明了 $aH^\infty \subsetneq \mathcal{M}_{\varphi,\, b}$。□

定理 7.6 由引理 7.7 和引理 7.8立即得出。

## 8. Compact composition operators

回忆一下， $B$ 表示由下式定义的有限布拉施克乘积

$$B(z) = \prod_{j=p+1}^{n} \left( \frac{z - \lambda_j}{1 - \overline{\lambda_j} z} \right)^{m_j},$$

其中 $\lambda_j = \varphi(\zeta_j) \in \mathbb{D}$ 对每个 $p+1 \leq j \leq n$。于是，利用 (1.1)，空间 $\mathscr{H}(b)$ 可通过直和分解为

$$\mathscr{H}(b) = aH^2 \oplus \mathscr{P}_{N-1} = aBH^2 \oplus aK_B \oplus \mathscr{P}_{N-1},$$

并且子空间 $aK_B \oplus \mathscr{P}_{N-1}$ 是有限维的。还要回顾一下，(5.11)给出 $W_{u,\varphi}(f) = aW_{\widetilde{w},\varphi}(g)$ 对每个 $f = aBg$ （其中 $g \in H^2$ ，且 $\widetilde{w}$ 是由 $\widetilde{w} = u \cdot (a \circ \varphi \cdot B \circ \varphi)/a$定义的权函数）。

现在注意，多项式 $q(z) = \prod_{j=p+1}^{n} (1 - \overline{\lambda_j} z)^{m_j}$ 在 D 上不为零，因此 Toeplitz 算子 $T_q$ 在 $H^2$上可逆。此外，我们有

$$W_{\tilde{w},\varphi} T_q = W_{w,\varphi}. \tag{8.1}$$

特别地，$W_{w,\varphi}$ 在 $H^2$ 上有界（分别为紧/希尔伯特–施密特）当且仅当 $W_{\widetilde{w},\varphi}$也是如此。因此，由于 (5.11)，我们得到以下关于紧性的刻画。

定理 8.2。 设 $u$ 和 $\varphi$ 满足 *(H1)* 和 *(H2)*。令 $w$ 由 (1.6)定义。则以下条件等价：

(i) $W_{u,\varphi}$ 在 $\mathscr{H}(b)$ 上是紧算子；
(ii) $W_{w,\varphi}$ 在 $H^2$ 上是紧算子；(iii) 有

$$\lim_{|\lambda| \to 1} \int_{\mathbb{T}} (1 - |\lambda|^2) \frac{|w(\zeta)|^2}{|1 - \overline{\lambda} \varphi(\zeta)|^2} dm(\zeta) = 0.$$

证明。 首先注意，根据定理 1.7，断言 $(i)$、$(ii)$ 和 $(iii)$ 中的每一个都蕴含 $W_{u,\varphi}$ 在 $\mathscr{H}(b)$ 上有界。现在，等价关系 $(i) \iff (ii)$ 由 (5.11) 以及 $\dim(aK_B \oplus \mathscr{P}_{N-1})$ 有限这一事实可得。等价关系 $(ii) \iff (iii)$ 可由[12]推出。 □

希尔伯特–施密特性质的刻画类似。

定理 8.3。 设 $u$ 和 $\varphi$ 满足 *(H1)* 和 *(H2)*。令 $w$ 由 (1.6)定义。则以下条件等价：

(i) $W_{u,\varphi}$ 在 $\mathscr{H}(b)$ 上是希尔伯特–施密特算子；(ii) $W_{w,\varphi}$ 在 $H^2$ 上是希尔伯特–施密特算子；(iii) 我们有

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{|w(\zeta)|^2}{1 - |\varphi(\zeta)|^2} dm(\zeta) < \infty.$$

证明。 首先注意，由定理 1.7可知，断言 $(i)$、$(ii)$ 和 $(iii)$ 中的每一个都意味着 $W_{u,\ \varphi}$ 在 $\mathscr{H}(b)$ 上有界。现在，等价关系 $(i) \iff (ii)$ 由 (5.11) 以及 $\dim(aK_B \oplus \mathscr{P}_{N-1})$ 有限这一事实得出。等价关系 $(ii) \iff (iii)$ 可由以下计算得出：

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} \|W_{w,\varphi}(z^n)\|_2^2 &= \sum_{n\geq 0} \|w\varphi^n\|_2^2 \\ &= \sum_{n\geq 0} \int_{\mathbb{T}} |w(\zeta)|^2 |\varphi(\zeta)|^{2n}\, dm(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{T}} \frac{|w(\zeta)|^2}{1-|\varphi(\zeta)|^2} dm(\zeta).\end{aligned}$$

但是，$W_{w,\ \varphi}$ 是 $H^2$ 上的希尔伯特–施密特算子，当且仅当 $\sum_{n\geq 0} \|W_{w,\ \varphi}(z^n)\|_2^2 < \infty$，因此当且仅当 $\int_{\text{单位圆}} \frac{|w\ \zeta\ |^2}{1-|\varphi\ \zeta\ \ ()()|^2} dm(\zeta) < \infty$，这就给出了等价关系 $(ii) \iff (iii)$。□

推论 8.4. 设 $\varphi \in H^\infty$，并假设 $\|\varphi\|_\infty < 1$。那么，对于所有满足 $u\varphi \in \mathscr{H}(b)$ 的 $u \in \mathscr{H}(b)$，算子 $W_{u,\ \varphi}$ 是 $\mathscr{H}(b)$ 上的希尔伯特–施密特算子。

证明。设 $\delta = \|\varphi\|_\infty < 1$。显然条件 (H1)、(H2) 均满足。现在令 $w$ 由式（1.6）定义。由注 5.8，可推得 $w \in H^2$。于是

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{|w(\zeta)|^2}{1-|\varphi(\zeta)|^2} dm(\zeta) \leq \frac{\|w\|_2^2}{(1-\delta)^2} < \infty.$$

因此，定理 8.3 意味着 $W_{u,\varphi}$ 是 $\mathscr{H}(b)$ 上的希尔伯特–施密特算子。 □

致谢：本研究部分由法国国家研究署的 COMOP 项目（资助编号 ANR-24-CE40-0892-01）资助。作者感谢 CDP C²EMPI 项目的支持，也感谢法国政府通过法国2030计划、里尔大学、里尔大学卓越倡议以及里尔欧洲大都会为 R-CDP-24-004-C2EMPI项目提供的资助与支持。第二作者获得了巴勒斯坦—魁北克科学桥（PQSB）的资助。该项目通过巴勒斯坦科学与技术学院和加拿大魁北克研究基金（FRQ），以及其三个分支机构——魁北克卫生研究基金（FRQS）、魁北克自然与技术研究基金（FRQNT）和魁北克社会与文化研究基金（FRQSC）——促进魁北克、加拿大与巴勒斯坦之间的科研合作。第三作者获得了加拿大研究讲席计划和加拿大 NSERC 的发现基金资助。第四作者也感谢法国国家科学研究中心的支持。

## References

[1] Alexandru Aleman、Yurii Lyubarskii、Eugenia Malinnikova 和 Karl-MikaelPerfekt，《模型空间中嵌入与复合算子的迹理想判据》，《泛函分析杂志》270 (2016)，第 3 期，861–883。MR3438324

[2] Rim Alhajj 和 Emmanuel Fricain，《与有理（非内）函数相关的 de Branges–Rovnyak 空间上的复合算子》，数学分析与应用杂志 531 (2024)，第 1 期，第 1 部分，论文编号 127811，32 页。MR4653340[3] I. Chalendar、L. Oger 和 J. R. Partington，《H$ol$(D) 上的线性等距算子》，数学分析与应用杂志 540 (2024)，第 1 期，论文编号 128619，19 页。MR4762036[4] Manuel D Contreras 和 Alfredo G Hernandez-Diaz，《Hardy 空间上的加权复合算子》，数学分析与应用杂志 263 (2001)，第 1 期，224–233。[5] Manuel D. Contreras 和 Alfredo G. Hern´andez-D´ıaz，《不同 Hardy 空间之间的加权复合算子》，积分方程与算子理论 46 (2003)，第 2 期，165–188。MR1983019[6] Constantin Costara 和 Thomas Ransford，《哪些 de Branges-Rovnyak 空间是 Dirichlet 空间（反之亦然）？》，《泛函分析杂志》265 (2013)，第 12 期，3204–3218。MR3110499[7] Carl C. Cowen 和 Barbara D. MacCluer，《解析函数空间上的复合算子》，高等数学研究，CRC 出版社，佛罗里达州博卡拉顿，1995。MR1397026[8] Emmanuel Fricain、Andreas Hartmann 和 William T. Ross，《 $\mathcal{H}(b)$ 空间的具体例子》，计算方法与函数理论 16 (2016)，第 2 期，287–306。MR3503356[9] ———,共解析 Toeplitz 算子值域空间之间的乘子，塞格德数学学报 85 (2019)，第 1–2 期，215–230。MR3967886 [10] Emmanuel Fricain、Muath Karaki 和 Javad Mashreghi，《de Branges–Rovnyak 空间上的复合算子》，数学研究成果 74 (2019)，第 1 期，论文编号 61，18 页。MR3915413[11] Emmanuel Fricain 和 Javad Mashreghi，《 $\mathcal{H}(b)$ 空间理论》，第 2 卷，新数学专著，第 21 卷，剑桥：剑桥大学出版社，2015（英文）。[12] E. A. Gallardo-Guti´errez、R. Kumar 和 J. R. Partington，《加权复合算子的有界性、紧性及 Schatten 类归属》，积分方程与算子理论 67 (2010)，第 4 期，467–479（英文）。[13] Stephan Ramon Garcia、Javad Mashreghi 和 William T. Ross，《模型空间及其算子导论》，剑桥高等数学研究，第 148 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2016。MR3526203[14] Andreas Hartmann 和 Giuseppe Lamberti，《de Branges–Rovnyak 空间中的插值与随机插值》，伦敦数学会杂志（第 2 辑）112 (2025)，第 4 期，论文编号 e70323。MR4970563[15] Yurii I. Lyubarskii 和 Eugenia Malinnikova，《模型空间上的复合算子》，《分析学近期趋势》，2013，页 149–157。MR3411049

Univ. Lille, CNRS, UMR 8524 - Laboratoire Paul Painlevé, F-59000 Lille, France电子邮箱: emmanuel.fricain@univ-lille.frDepartment of Mathematics, An–Najah National University, Nablus, Palestine电子邮箱：muath.karaki@najah.edu
Département de mathématiques et de statistique, Université Laval, Québec, QC, Canada G1K 7P4电子邮箱：javad.mashreghi@mat.ulaval.caUniv. Lille, CNRS, UMR 8524 - Laboratoire Paul Painlevé, F-59000 Lille, France电子邮箱: maeva.ostermann@univ-lille.fr