arXiv:2512.15291v1 [math.GN] 17 Dec 2025

$\mathcal{I}$ 与 $\mathcal{I}^*$-软拓扑空间中的软收敛

PRASANTA MALIK[1]* 与 ANIRBAN PAUL[2]*

Abstract. 本文引入了软拓扑空间中软点序列的 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{I}^*$-软收敛概念，并研究了这些概念的一些基本性质。此外，我们还引入了软拓扑空间中软点序列的 $\mathcal{I}$-软极限点和 $\mathcal{I}$-软聚点概念，并研究了它们之间的关系。

1. 引言与背景

软集理论的概念最早由 Molodtsov[22] 于1999年提出，软集的基本代数性质由 Maji 等人[21]进行了研究。关于这一方向的更多早期研究，可参见（[1],[2],[3] 等）。由于软拓扑具有极其重要的意义，C.a˘gman 等人 [7] 于2011年引入了软拓扑的概念。

另一方面，实数序列的统计收敛概念最早由 H.Fast [11] 提出，I.J. Schoenberg [24]也独立地提出了这一概念。随后，Kostyrko 等人 [17] 利用子集理想的概念，将统计收敛推广为理想收敛。鉴于统计收敛具有重要意义，Maio 等人 [10] 提出了拓扑空间中序列的统计收敛概念，而 Lahiri 等人 [19]则在拓扑空间中发展了理想收敛的概念。

近年来，Bayramov 等人在软拓扑空间中引入了软收敛的概念 [6] ，而 Bayrama 等人 [5] 引入了加权统计软收敛的概念，并研究了这些概念的一些基本性质。本文引入并研究软拓扑空间中软点序列的 $\mathcal{I}$-软收敛概念，它同时推广了软收敛和软统计收敛的概念。此外，我们引入 $\mathcal{I}^*$-软收敛的概念，并研究其与 $\mathcal{I}$-软

2020 *Mathematics Subject Classification.* 40A35,54A40.
Key words and phrases. 软集， $\mathcal{I}$-软收敛， $\mathcal{I}$-软极限点， $\mathcal{I}$-软聚点

* 通讯作者。

收敛之间的关系。此外，我们还引入软拓扑空间中软点序列的 $\mathcal{I}$-软极限点和 $\mathcal{I}$-软聚点的概念，并研究它们之间的联系。

2. 基本定义与符号

本节首先回顾与统计收敛和理想收敛相关的一些基本定义与符号。

定义 2.1. [11] [24] 设 $B \subset \mathbb{N}$ 且 $B(n) = \{k \in B : k \leq n\}$。若 B 具有自然密度 $d(B)$，即 $d(B) = \lim_{n\to\infty} \frac{|B(n)|}{n}$，其中 $|B(n)|$ 表示集合 $B(n)$ 的基数。

定义 2.2. [10] 设 (X, τ) 是一个拓扑空间。若序列 $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 (X, τ) 中统计收敛于点 $x \in X$，则对其每个邻域 U， x，

$$d(\{n \in \mathbb{N} : \eta_n \notin U\}) = 0.$$

在这种情况下，我们记作 $st - \lim_{n\to\infty} \eta_n = x$。

定义 2.3. [18] 设 X 是一个非空集合， $\mathcal{I}$ 是 X的子集族。那么，如果满足以下条件， $\mathcal{I}$ 称为 X 上的理想:

(i) $\emptyset \in \mathcal{I}$，$(ii)$ $A \in \mathcal{I}$ 且
$B \subset A \implies B \in \mathcal{I}$，$(iii)$ $A \in \mathcal{I}$ 且
$B \in \mathcal{I} \implies A \cup B \in \mathcal{I}$。

X 的理想 $\mathcal{I}$ 称为非平凡理想，如果 $\mathcal{I} \neq \{\emptyset\}$ 且 $X \notin \mathcal{I}$。
X 上的非平凡理想 $\mathcal{I}$ 称为可容许的，如果对于每个 $x \in X$，都有 $\{x\} \in \mathcal{I}$。

定义 2.4. 设 X 是一个非空集合， $\mathcal{F}$ 是 X的非空子集族。那么，如果满足以下条件， $\mathcal{F}$ 称为 X 上的滤子:

(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$，$(ii)$ $A \in \mathcal{F}$ 且
$B \supset A \implies B \in \mathcal{F}$，$(iii)$ $A \in \mathcal{F}$ 且
$B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$。

定义 2.5. [17] 设 $\mathcal{I}$ 是非空集合 X上的一个非平凡理想。那么，满足 $A = X - B\}$ 的集族 $\mathcal{F}(\mathcal{I}) = \{A \subset X : \exists\, B \in \mathcal{I}$ 是 X 上的一个滤子，称为与理想 $\mathcal{I}$ 相关联的滤子。

在本文中，除非另有说明，我们均认为 $\mathcal{I}$ 是$\mathbb{N}$上的一个可容许理想。

定义 2.6。 [19] 设 (X, τ) 是一个拓扑空间。若对于 x 的每个邻域 U，都有 $\{n \in \mathbb{N} : \eta_n \notin U\} \in \mathcal{I}$，则称 (X, τ) 中的序列 $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{I}$-收敛于点 $x \in X$。

定义 2.7。 [19] 设 (X,τ) 是一个拓扑空间。若存在集合 $N=\{n_1<n_2<...<n_k<...\}\in\mathcal{F}(\mathcal{I})$ 使得 $\lim_{k\to\infty}\eta_{n_k}=x$，则称 (X,τ) 中的序列$\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{I}^*$-收敛于点 $x\in X$。

定义 2.8. [19] 设 (X,τ) 是一个拓扑空间，且 $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 中的一个序列。

(a) 如果存在一个集合 $N=\{n_1<n_2<...\}\subset\mathbb{N}$，使得 $N\notin\mathcal{I}$ 且 $\lim_{k\to\infty}\eta_{n_k}=x$，则称 $x\in X$ 为 $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的 $\mathcal{I}$-极限点。(b) 如果对于每个包含 x 的邻域 V，都有 $\{n:\eta_n\in V\}\notin\mathcal{I}$，则称 $x\in X$ 为 $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的 $\mathcal{I}$-聚点。

下面我们回顾软集理论的基本概念。

定义 2.9. [7] [21] [22] 设 X 是一个初始论域集，S 是一个参数集合，且 $M\subset S$。软集 G_M 在 X 上定义为所有有序对 $G_M=\{(s,g_M(s)):s\in S\}$ 构成的集合，其中 $g_M:S\to\mathcal{P}(X)$ 是一个映射，满足 $g_M(s)=\emptyset,\ \forall\ s\in S-M$。

本文中，除非另有说明，我们取 X 为初始论域集，S 为参数集，$M\subset S$，$\mathcal{P}(X)$ 为 X的幂集，G_M 为定义在X 上的软集，$\mathcal{A}(X)$ 为定义在 X 上的所有软集构成的集合。

例 2.10. 设初始论域集 X 由五所大学组成，即 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$。设 $S=\{s_1,s_2,s_3,s_4\}$ 为参数集，其中 s_1 表示“高质量研究”，s_2 表示“优秀师资”，s_3 表示“聪明的学生”，s_4 表示“现代研究实验室”。设 $M=\{s_1,s_2,s_3\}\subset S$ 和 $g_M:S\to\mathcal{P}(X)$ 分别为

$g_M(s_1)=\{x_1\}$, $g_M(s_2)=\{x_1,x_3,x_5\}$, $g_M(s_3)=\{x_1,x_4,x_5\}$ and $g_M(s_4)=\emptyset$.

注意，$g_M\ s_i$(字)面上表示具有性质 s_i，$i=1$，2，3，4 的所有大学构成的集合。

那么 $G_M=\{(s_1,\ \{x_1\}),(s_2,\ \{x_1,x_3,x_5\}),(s_3,\ \{x_1,x_4,x_5\})\}$ 是 X上的一个软集。

定义 2.11。 [7] [21] 如果 $G_M\in\mathcal{A}(X)$ 和 $g_M(s)=\emptyset,\ \ \forall\ s\in S$，那么 $\sim G_M$ 称为空软集或零软集，记作 $G_\emptyset$ 或 $\emptyset$。

定义 2.12。 [7] [21] 如果 $G_M\in\mathcal{A}(X)$ 和 $g_M(s)=X,\ \ \forall\ s\in M$，那么 g_M称为 M-全软集，记作 $G_{\widetilde{M}}$。

如果 $M=S$，那么 $G_{\widetilde{S}}$ 称为全软集或绝对软集$\widetilde{}$，记作 X。

定义 2.13. [7] [21] 设 $G_M,H_N\in\mathcal{A}(X)$。若 $g_M(s)\subset h_N(s),\ \forall\ s\in S$，则称 G_M 是 H_N 的软子集。记作 $G_M\widetilde{\subset}H_N$。此时，$H_N$ 也称为 G_M 的软超集。

若两个软集 $G_M, H_N \in \mathcal{A}(X)$ 满足 $g_M(s) = h_N(s), \forall\ s \in S$，则称它们软相等。记作 $G_M = H_N$。

两个软集 G_M，$H_N \in \mathcal{A}(X)$ 称为软不相等，如果存在$s' \in S$使得 $g_M(s') \neq h_N(s')$。我们记为 $G_M \neq H_N$。

定义2.14。 [7] [21]设 G_M，$H_N \in \mathcal{A}(X)$。G_M 与 H_N 的软并记为 $G_M \widetilde{\cup} H_N$，定义为 $G_M \widetilde{\cup} H_N = \{(s,\ g_M(s) \cup h_N(s)) :\ s \in S\}$；$G_M$ 与 H_N的软交记为 $G_M \widetilde{\cap} H_N$，定义为 $G_M \widetilde{\cap} H_N = \{(s,\ g_M(s) \cap h_N(s)) : s \in S\}$；$G_M$ 与 H_N 的软差记为 $G_M \widetilde{-} H_N$，定义为 $G_M \widetilde{-} H_N = \{(s,\ g_M(s) - h_N(s)) :\ s \in S\}$。

G_M 的软补记作 $G_M^{\sim}$，其定义为 $G_M^{\sim} = \{(s,\ X - g_M(s)) :\ s \in S\}$。

定义2.15。 [6] [9] 若软集 G_M 属于 $\mathcal{A}(X)$，且满足 $\exists\ s \in M$和 $x \in X$，使得 $g_M(s) = \{x\}$ 且 $g_M(s') = \emptyset,\ \ \forall\ s' \in S - \{s\}$，则称其为软点。这样的软点记作 x_s^M。

若软点 $x_s^{M^*}$ 属于软集 H_M，则称 $x_s^{M^*}$ 在软集 H_M 中，当 $x \in h_M(s)$成立时。记作$x_s^{M^*} \widetilde{\in} H_M$。若软点 $x_s^{M^*}$不属于软集 H_M，则称其不在软集 H_M中，当且 $x \notin h_M(s)$成立时，记作 $x_s^{M^*} \notin H_M$。

若$s_1 \neq s_2$ 或 $x \neq y$ 成立，或二者均成立，则软集 H_M 中的两个软点 $x_{s_1}^{M^*}$ 和$y_{s_2}^{M^{**}}$ 称为不同的。

注 2.16。 任意软集都是其中所有软点的软并。

定义2.17。 [7] 设 G_M 是 X上的一个软集。若 G_M 的一个软子集族满足以下条件，则称其为 G_M上的软拓扑：

$\widetilde{\ }$ (i) $\emptyset \in \widetilde{\tau}$，$(ii)$ $G_M \in \widetilde{\tau}$，(iii) $\widetilde{\tau}$ 中任意成员的软并仍是 $\widetilde{\tau}$的成员，(iv) $\widetilde{\tau}$ 中有限个成员的软交仍是 $\widetilde{\tau}$的成员。

称有序对（G_M，$\widetilde{\tau}$）为软拓扑空间。当对 G_M上的拓扑没有歧义时，我们仅用 G_M表示软拓扑空间（G_M，$\widetilde{\tau}$）。$\widetilde{\tau}$的每个成员都称为软开集。若软子集 $H_{M'}$ 属于 G_M，且 $G_M \widetilde{-} H_{M'}$在软拓扑空间（G_M，$\widetilde{\tau}$）中是软开的，则称 $H_{M'}$ 为软拓扑空间（G_M，$\widetilde{\tau}$）中的软闭集。

定义 2.18。 [7]设 $(G_M, \widetilde{\tau})$ 是一个软拓扑空间，且 $H_{M'} \widetilde{\subset} G_M$。设 $\widetilde{\tau}_{H_{M'}} = \{R_{M''} \widetilde{\cap} H_{M'} :\ R_{M''} \in \widetilde{\tau}\}$。则 $(H_{M'}, \widetilde{\tau}_{H_{M'}})$ 称为 $(G_M, \widetilde{\tau})$ 的软子空间。

定义 2.19。 [6] [14] 设 $(G_M, \widetilde{\tau})$ 是一个软拓扑空间。软子集 $K_{M'}$ 若满足存在 $H_{M''} \in \widetilde{\tau}$ 使得 $x_s^{M^*} \widetilde{\in} H_{M''} \widetilde{\subset} K_{M'}$，则称其为软点 $x_s^{M^*} \widetilde{\in} G_M$ 的软邻域。

定义 2.20. [7] 设 $(G_M, \widetilde{\tau})$ 是一个软拓扑空间，且 $H_{M'}$ 是 G_M 的一个软子集。那么， $H_{M'}$ 的软闭包是 G_M 中所有包含软集 $H_{M'}$ 的软闭集的软交，记作 $cl(H_{M'})$。

定理 2.21. [7] $H_{M'}$ 是 G_M 的一个软子集，当且仅当 $cl(H_{M'}) = H_{M'}$ 时，它在 $(G_M, \widetilde{\tau})$ 中是软闭的。

定义 2.22. [6] 设 $(G_M, \widetilde{\tau})$ 是一个软拓扑空间。若 $cl(H_{M'}) = G_M$，则称 G_M 的软子集 $H_{M'}$ 在 $(G_M, \widetilde{\tau})$ 中软稠密。

定义 2.23. [6] 若软拓扑空间 $(G_M, \widetilde{\tau})$ 存在一个在 $(G_M, \widetilde{\tau})$ 中软稠密的可数软子集，则称其为软可分的。

定义 2.24. [15] 设 $(G_M, \widetilde{\tau})$ 是一个软拓扑空间。若对于 G_M 中任意两个不同的软点 $x_s^{M_1}$ 和 $y_{s'}^{M_2}$，存在软开集 $P_{M'}$ 和 $Q_{M''}$，使得

$$x_s^{M_1} \widetilde{\in} P_{M'}, y_{s'}^{M_2} \widetilde{\in} Q_{M''}, x_s^{M_1} \widetilde{\notin} Q_{M''}, y_{s'}^{M_2} \widetilde{\notin} P_{M'},$$

则 $(G_M, \widetilde{\tau})$ 称为软 T_1 空间。

定义 2.25. [14] 设 $(G_M, \widetilde{\tau})$ 是一个软拓扑空间。若对于 G_M 中任意两个不同的软点 $x_s^{M_1}$ 和 $y_{s'}^{M_2}$，存在软开集 $P_{M'}$ 和 $Q_{M''}$，使得

$$x_s^{M_1} \widetilde{\in} P_{M'}, y_{s'}^{M_2} \widetilde{\in} Q_{M''}, P_{M'} \widetilde{\cap} Q_{M''} = \widetilde{\emptyset},$$

则 $(G_M, \widetilde{\tau})$ 称为软豪斯多夫空间。

定义 2.26. [6] 设 $(G_M, \widetilde{\tau})$ 是一个软拓扑空间。若 β 是 $\widetilde{\tau}$ 的一个子族，则称其为 $\widetilde{\tau}$ 的软基；如果 $\widetilde{\tau}$ 中的每个元素都可以表示为 β 中某些成员的软并。

定义 2.27。 [6] 设 $(G_M, \widetilde{\tau})$ 是一个软拓扑空间，且 $x_s^{M^*}$ 是 G_M 的一个软点。设 $N_{x_s^{M^*}}$ 是 $x_s^{M^*}$ 的所有软邻域构成的集合。若对于任意 $H_{M'} \in N_{x_s^{M^*}}$, $\exists\, K_{M''} \in B_{x_s^{M^*}}$，满足 $x_s^{M^*} \widetilde{\in} K_{M''} \widetilde{\subset} H_{M'}$，则称 $B_{x_s^{M^*}}$ 是 $N_{x_s^{M^*}}$ 在 $x_s^{M^*}$ 处的软局部基。

定义 2.28。 [6] 若软拓扑空间 $(G_M, \widetilde{\tau})$ 在 $x_s^{M^0} \widetilde{\in} G_M$ 处存在一个可数软局部基 $x_s^{M^0}$，则称其在 $x_s^{M^0} \widetilde{\in} G_M$ 处软第一可数。

定义 2.29。 [6] 若软拓扑空间 $(G_M, \widetilde{\tau})$ 在其每个软点处都有可数软局部基，则称其为软第一可数的。

定理 2.30。 [6] 设$(G_M, \widetilde{\tau})$是一个软第一可数的软拓扑空间。那么，对于任意软点$x_s^{M^*}\widetilde{\in} G_M$，存在一个可数软局部基集族 $\{H_{M^i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ ，使得它在$x_s^{M^*}$ 处满足$H_{M_1}\widetilde{\supset}H_{M_2}\widetilde{\supset}\cdots\widetilde{\supset}H_{M_i}\widetilde{\supset}\cdots$。

定义 2.31。 [6]如果软拓扑空间（G_M，$\widetilde{\tau}$）具有可数软基，则称其为软第二可数的。

定理 2.32。 [6]设 （G_M，$\widetilde{\tau}$） 是软第二可数的。则它是软可分的。

定义 2.33。 [6] [14]设（G_M，$\widetilde{\tau}$）为一个软拓扑空间。若软点序列$\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 G_M 中软收敛于软点$x_s^{M^*}\widetilde{\in}G_M$，则对于 $x_s^{M^*}$ 的任意软邻域 $H_{M'}$，存在$k\in\mathbb{N}$使得$\eta_n\widetilde{\in}H_{M'}$，$\forall n\geq k$。此时，记作$\eta_n\to x_s^{M^*}$ 或$\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n=x_s^{M^*}$ 和 $x_s^{M^*}$ 称为 $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$的软极限。

定义 2.34. [5]设 $(G_M,\widetilde{\tau})$ 是一个软拓扑空间。若软点序列 $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 G_M 中统计收敛于软点$x_s^{M^*}\widetilde{\in}G_M$，则称其为统计软收敛；也就是说，对于$x_s^{M^*}$的任意软邻域 $H_{M'}$， $d(\{n\in\mathbb{N}:\ \eta_n\widetilde{\notin}H_{M'}\})=0$。此时，记作 st- li m$_{n\to\infty}\eta_n=x_s^{M^*}$或 $\eta_n\xrightarrow{st}x_s^{M^*}$。 $x_s^{M^*}$ 称为 $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$的统计软极限。

定义 2.35. [25]设 $(G_M,\widetilde{\tau})$ 是一个软拓扑空间。若软点 $x_s^{M^*}$ 属于 G_M，且是软子集 $K_{M'}$ 的软极限点，其中$\backsim G_M$，则对于 $x_s^{M^*}$ 的每个软邻域 $H_{M''}$，都有 $(H_{M''}\widetilde{-}\{x_s^{M^*}\})\widetilde{\cap}K_{M'}\neq\emptyset$

定义 2.36。 [25]设 $(G_M,\widetilde{\tau})$ 是一个软拓扑空间。若软点 $x_s^{M^*}$ 属于 G_M，且对于软点序列 $w=\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ （其中各项属于 G_M），每个以$x_s^{M^*}$为中心的软邻域 $H_{M'}$ 都使集合 $\{n\in\mathbb{N}:\eta_n\widetilde{\in}H_{M'}\}$为无限集，则称 $x_s^{M^*}$ 为该序列的软极限点。

由 $w=\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的所有软极限点构成的软集记为 L_w。

3. $\mathcal{I}$-软拓扑空间中的软收敛

本节中，我们沿用 Kostyrko 等人 [17]和 Lahiri 等人 [19], 的研究，引入软拓扑空间中软点序列的 $\mathcal{I}$-软收敛概念。

定义 3.1. 设 $(G_M,\widetilde{\tau})$ 是一个软拓扑空间。若软点序列$\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 G_M 中 $\mathcal{I}$-软收敛到软点 $x_s^{M^*}$，则称该序列为 $\mathcal{I}$-软收敛；也就是说，对于 $x_s^{M^*}$ 的任意软邻域 $U_{M'}$， $\{n\in\mathbb{N}:\backsim\eta_n\notin U_{M'}\}\in\mathcal{I}$。此时，称 $x_s^{M^*}$ 为 $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$的 $\mathcal{I}$-软极限。此时，我们记作 $\mathcal{I}-\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n=x_s^{M^*}$。

注 3.2. 若取 $\mathcal{I}=\mathcal{I}_f=\{A\subset\mathbb{N}:\ A$ 是 $\mathbb{N}\}$的有限子集，则 $\mathcal{I}_f$-软收敛与通常的软收敛 [6] [14]一致。若取 $\mathcal{I}=\mathcal{I}_d=\{A\subset\mathbb{N}:\ d(A)=0\}$，则 $\mathcal{I}_d$-软收敛与统计软收敛 [5]一致。

注 3.3. 显然，对于可容许理想 $\mathcal{I}$，软拓扑空间中的任意软点软收敛序列都是具有相同极限的 $\mathcal{I}$-软收敛序列。但反过来并不成立。

注 3.4. 请注意，软拓扑空间中的软点序列的 $\mathcal{I}$-软极限可能不唯一。

如果该软拓扑空间是软豪斯多夫空间，那么根据下述定理的证明， $\mathcal{I}$-软收敛序列的 $\mathcal{I}$-软极限是唯一的。

定理 3.5. 软豪斯多夫空间中 $\mathcal{I}$-软收敛序列的 $\mathcal{I}$-软极限是唯一的。

证明。设 $(G_M,\widetilde{\tau})$ 是一个软豪斯多夫空间，且 $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 G_M 中的软点序列，该序列是 $\mathcal{I}$-软收敛的。若可能，设 $\mathcal{I}-\lim_{n\to\infty}\widetilde{=}x_s^{M^*}$，且 $\mathcal{I}-\lim_{n\to\infty}=y_{s'}^{M^{**}}$，其中 G_M。那么，存在软开集合 $\widetilde{\sim}$、$U_{M'}$ 和 $V_{M''}$，使得 $x_s^{M^*}\widetilde{\in}U_{M'}$、$y_{s'}^{M^{**}}\widetilde{\in}V_{M''}$ 且 $U_{M'}\widetilde{\cap}V_{M''}=\widetilde{\emptyset}$。于是，$\{n\in\mathbb{N}:\ \eta_n\not\in U_{M'}\}\in\mathcal{I}$ 且 $\{n\in\mathbb{N}:\ \eta_n\not\in V_{M''}\}\in\mathcal{I}$。因此，$\{n\in\mathbb{N}:\ \eta_n\widetilde{\in}U_{M'}\}\in\mathcal{F}(\mathcal{I})$，且 $\{n\in\mathbb{N}:\ \eta_n\widetilde{\in}V_{M''}\}\in\mathcal{F}(\mathcal{I})$。进而 $\{n\in\mathbb{N}:\ \eta_n\widetilde{\in}U_{M'}\}\cap\{n\in\mathbb{N}:\ \eta_n\widetilde{\in}V_{M''}\}\in\mathcal{F}(\mathcal{I})$。这意味着 $U_{M'}\widetilde{\cap}V_{M''}\neq\emptyset$，矛盾。因此，$\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有唯一的 $\mathcal{I}$-软极限。□

注 3.6. 一个 $\mathcal{I}$-软收敛序列的每个子序列不一定都 $\mathcal{I}$-软收敛于同一个 $\mathcal{I}$-软极限。

定理 3.7. 设$(G_M,\widetilde{\tau})$是一个软拓扑空间，且 $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 G_M中的一个软点序列。若 $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的每个子序列都有一个子序列 $\mathcal{I}$-软收敛于某个软点$x_s^{M^*}\widetilde{\in}G_M$，则$\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{I}$-软收敛于 $x_s^{M^*}$。

证明。 证明显然，故略去。 □

4. $\mathcal{I}^*$-软收敛在软拓扑空间中

本节中，我们沿用 Kostyrko 等人 [17]和 Lahiri 等人 [19], 的思路，引入软拓扑空间中软点序列的 $\mathcal{I}^*$-软收敛概念。

定义 4.1. 设 $(G_M,\widetilde{\tau})$ 是一个软拓扑空间。那么，如果存在 $P=\{p_1<p_2<\cdots<p_k<\cdots\}\in$，则称 G_M 中的软点序列 $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 关于 $\mathcal{I}^*$ 软收敛到 G_M 中的软点 $x_s^{M^*}$

$\mathcal{F}(\mathcal{I})$，使得 $\lim_{k\to\infty}\eta_{p_k}=x_s^{M^*}$。在这种情况下，我们记作 $\mathcal{I}^*-\lim_{n\to\infty}=x_s^{M^*}$，并称 $x_s^{M^*}$ 为 $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的 $\mathcal{I}^*$-软极限。

定理 4.2。设 $(G_M,\widetilde{\tau})$ 为一个软拓扑空间，且 $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 G_M 中的软点序列。如果 $\mathcal{I}^*-$极限$_{n\to\infty}\eta_n=x_s^{M^*}$，那么 $\mathcal{I}-$极限$_{n\to\infty}\eta_n=x_s^{M^*}$；如果 $(G_M,\widetilde{\tau})$ 是软豪斯多夫空间，则 $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的 $\mathcal{I}^*$-软极限是唯一的。

证明。由于 $\mathcal{I}^*-$极限$_{n\to\infty}\eta_n=x_s^{M^*}$，因此存在 $P=\{p_1<p_2<\cdots<p_k<\cdots\}\in\mathcal{F}(\mathcal{I})$，使得极限$_{k\to\infty}\eta_{p_k}=x_s^{M^*}$。设 $U_{M'}$ 是 $x_s^{M^*}$ 的一个软邻域。于是，存在 $k_0\in\mathbb{N}$，使得 $\eta_{p_k}\widetilde{\in}U_{M'}$，$\forall\, k>_\sim k_0$。现在，$\{n\in\mathbb{N}:\ \eta_n\notin U_{M'}\}\subset(\mathbb{N}-P)\cup\{p_1,p_2,\cdots,p_{k_0}\}$。由于，$(\mathbb{N}-P)\cup\{p_1,p_2,\cdots,p_{k_0}\}\in\mathcal{I}$所以，$\{n\in\mathbb{N}:\ \eta_n\notin U_{M'}\}\in\mathcal{I}$。因此，$\mathcal{I}-$极限$_{n\to\infty}\eta_n=x_s^{M^*}$。现在，如果 $(G_M,\ \widetilde{\tau})$ 是软豪斯多夫空间，那么根据“定理 3.5”，$\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的 $\mathcal{I}^*$-软极限是唯一的。

□

定理 4.3。设$(G_M,\widetilde{\tau})$是一个没有软极限点的软拓扑空间。那么，$\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{I}^*$ 软收敛等价。

证明。根据“定理 4.2”，我们只需证明 $\mathcal{I}$-软收敛蕴含 $\mathcal{I}^*$-软收敛。

设 $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 G_M 中的一个软点序列，使得 $\mathcal{I}-\lim_{n\to\infty}\eta_n=x_s^{M^*}$。由于$(G_M,\widetilde{\tau})$没有软极限点，因此 $U_{M'}=x_s^{M^*}$ 是软开的。所以，$\{n\in\mathbb{N}:\ \eta_n\notin U_{M'}\}\in\mathcal{I}$。于是，$\{n\in\mathbb{N}:\ \eta_n\widetilde{\in}U_{M'}\}\in\mathcal{F}(\mathcal{I})$，即 $\{n\in\mathbb{N}:\ \eta_n=x_s^{M^*}\}\in\mathcal{F}(\mathcal{I})$。令 $\{n\in\mathbb{N}:\ \eta_n=x_s^{M^*}\}=P=\{p_1<p_2<\cdots<p_k<\cdots\}$。则 $P\in\mathcal{F}(\mathcal{I})$且$\lim_{k\to\infty}\eta_{p_k}=x_s^{M^*}$。因此，$\mathcal{I}^*-\lim_{n\to\infty}\eta_n=x_s^{M^*}$。

□

注释 4.4。在任意软拓扑空间中，$\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{I}^*$-软收敛并不等价。

现在我们来考虑一个条件，即 AP 条件，在该条件下，$\mathcal{I}$和 $\mathcal{I}^*$ 软收敛等价。Kostyrko 等人提出了这一条件（AP） [17] ，它与[8]和 [11] 中使用的（APO）条件类似。

定义 4.5. [17] $\mathbb{N}$ 的 $\mathcal{I}$ 可容许理想 $\mathbb{N}$ 若满足以下条件 AP，则称其满足条件 AP：对于属于 $\mathcal{I}$的每个两两不相交集的可数族$\{H_1,H_2,\cdots\cdots\}$，存在一个可数集族

$\{K_1, K_2, \cdots \cdots\}$ 使得 $H_i \Delta K_i$ 是有限的，对所有 $i \in \mathbb{N}$ 和 $K = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \in \mathcal{I}$ 均成立。

定理 4.6. (i) 若 $(G_M, \widetilde{\tau})$ 是软第一可数软拓扑空间，且 $\mathcal{I}$ 满足条件（AP），那么对于 G_M 中任意软点序列 $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，$\mathcal{I}-\lim_{n\to\infty} \eta_n = x_s^{M^*} \implies \mathcal{I}^*-\lim_{n\to\infty} \eta_n = x_s^{M^*}$。

(ii) 若 $(G_M, \widetilde{\tau})$ 是软第一可数的软 T_1 空间，且至少有一个软极限点，并且对于 G_M 中的每个软点序列 $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，$\{\eta_n\}$ 的 $\mathcal{I}$-收敛蕴含 $\{\eta_n\}$ 的 $\mathcal{I}^*$-收敛，那么 $\mathcal{I}$ 具有性质（AP）。

证明。(i) 设 $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 G_M 中的软点序列，且 $\mathcal{I}-\lim_{n\to\infty} \eta_n = x_s^{M^*}$，其中 $x_s^{M^*} \widetilde{\in} G_M$。由于 $(G_M, \widetilde{\tau})$ 是软第一可数的，因此根据“定理 2.30”，存在一个软局部基的可数集族 $\{G_n(x_s^{M^*}) : n \in \mathbb{N}\}$，其位于 $x_s^{M^*}$ 处，使得 $G_{n+1}(x_s^{M^*}) \widetilde{\subset} G_n(x_s^{M^*})$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$。

令 $H_1 = G_1(x_s^{M^*}) \widetilde{-} G_2(x_s^{M^*})$，$H_2 = G_2(x_s^{M^*}) \widetilde{-} G_3(x_s^{M^*})$，于是 $H_m = G_m(x_s^{M^*}) \widetilde{-} G_{m+1}(x_s^{M^*})$ $\forall\, m \in \mathbb{N}$ 和 $H_i \cap H_j = \emptyset$、$\forall\, i$、$j \in \mathbb{N}$。由于 $\mathcal{I}$ 满足 (AP) 条件，因此存在一个可数集族，其中的集合记为 $\{K_m : m \in \mathbb{N}\}$，使得 $H_m \Delta K_m$ 是有限的，$\forall m \in \mathbb{N}$ 且 $K = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} K_m \in \mathcal{I}$。于是 $R = \mathbb{N} - K = \{r_1 < r_2 < \cdots < r_p < \cdots \cdots\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$。令 $V_{M'}$ 为 $x_s^{M^*}$ 的一个软邻域。由于 $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{I}$-$\widetilde{\text{收敛到}}$ $x_s^{M^*}$，所以 $\{n \in \mathbb{N} : \eta_n \widetilde{\notin} V_{M'}\} \in \mathcal{I}$。于是存在 $q \in \mathbb{N}$，使得 $G_n(x_s^{M^*}) \widetilde{\subset} V_{M'}$、$\forall\, n \geq q$。那么，$\{n \in \mathbb{N} : \eta_n \widetilde{\notin} V_{M'}\} \subset \bigcup_{i=1}^{q} H_i$。由于 $H_m \Delta K_m$ 是有限的，$\forall m \in \mathbb{N}$，因此 $\bigcup_{i=1}^{q} (H_i \Delta K_i)$ 也是有限的。所以，存在 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得 $\forall\, n \in \mathbb{N}$ 与 $n > n_0$、$n \in \bigcup_{i=1}^{q} H_i$ 当且仅当 $n \in \bigcup_{i=1}^{q} K_i$。我们选择 $t \in \mathbb{N}$，使得 $r_t > n_0$。由于 $r_j \notin K \supset \bigcup_{i=1}^{q} K_i$ 对任意 $j \in \mathbb{N}$ 均成立，所以若 $p > t$，则 $r_p > r_t > n_0$，从而 $r_p \notin \{n \in \mathbb{N} : \eta_n \notin V_{M'}\}^C$、$\forall p > t \implies r_p \in \{n \in \mathbb{N} : \eta_n \widetilde{\in} V_{M'}\}$、$\forall p > t$。因此，$\lim_{p\to\infty} \eta_{r_p} = x_s^{M^*}$。故 $\mathcal{I}^*-\lim_{n\to\infty} \eta_n = x_s^{M^*}$。

(ii) 设 $x_s^{M^*}$ 是 G_M 的一个软极限点。由于 $(G_M, \widetilde{\tau})$ 是软第一可数软 T_1 空间，因此存在 $x_s^{M^*}$ 处的一个软局部基 $\{G_n(x_s^{M^*})\}_{n\in\mathbb{N}}$，满足 $G_{n+1}(x_s^{M^*}) \widetilde{\subset} G_n(x_s^{M^*})$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$，并且存在 G_M 中由互不相同的软点组成的序列 $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得 $\lim_{n\to\infty} \eta_n = x_s^{M^*}$，$\eta_n \widetilde{\in} G_n(x_s^{M^*})$，$\forall n \in \mathbb{N}$，且对任意 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\eta_n \neq x_s^{M^*}$。设 $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是取自 $\mathcal{I}$ 的一个互不相交的非空集合序列。定义如下软点序列

$\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 中的软点序列 G_M 为

$$\gamma_n = \begin{cases} \eta_j, & \text{if } n \in H_j \\ x_s^{M^*}, & \text{if } n \in \mathbb{N} - (\underset{j\in\mathbb{N}}{\cup} H_j). \end{cases}$$

设 $V_{M'}$ 是 $x_s^{M^*}$ 的软邻域。那么，存在 $q \in \mathbb{N}$，使得 $\widetilde{\ }$ $G_n(x_s^{M^*})\widetilde{\subset}V_{M'}$，$\forall\, n \geq q$。因此，$\{n \in \mathbb{N}:\ \gamma_n \notin V_{M'}\} \subset H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_{q-1}$。由于 $H_1, H_2, ..., H_{q-1} \in \mathcal{I}$，所以 $H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_{q-1} \in \mathcal{I}$，从而 $\{n \in \mathbb{N}:\ \gamma_n \widetilde{\notin} V_{M'}\} \in \mathcal{I}$。因此，$\mathcal{I}\text{-}\lim_{n\to\infty} \gamma_n = x_s^{M^*}$。然后，根据给定条件，$\mathcal{I}^*\text{-}\lim_{n\to\infty} \gamma_n = x_s^{M^*}$。接着，存在 $R = \{r_1 < r_2 < \cdots < r_k < \cdots\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$，使得 $\lim_{k\to\infty} \gamma_{r_k} = x_s^{M^*}$。设 $H = \mathbb{N} - R$。则 $H \in \mathcal{I}$。设 $K_j = H_j \cap H$, $\forall j \in \mathbb{N}$。由于 $H \in \mathcal{I}$ 且 $K_j \subset H$, $\forall j \in \mathbb{N}$, 所以 $K_j \in \mathcal{I}$, $\forall j \in \mathbb{N}$，并且由于 $\underset{j\in\mathbb{N}}{\cup} K_j \subset H$, $\underset{j\in\mathbb{N}}{\cup} K_j \in \mathcal{I}$。

设 $j \in \mathbb{N}$。若 $H_j \cap R$ 是无限的，则对于无穷多个 r_k，有 $\gamma_{r_k} = \eta_j$。但 $\eta_j \neq x_s^{M^*}$，因此 $G_M \widetilde{=} \{\eta_j\}$ 是 $x_s^{M^*}$ 的一个软邻域，并且对于无穷多个 r_k，有 $_\sim\gamma_{r_k} \notin G_M \widetilde{=} \{\eta_j\}$，这与 $\lim_{k\to\infty} \gamma_{r_k} = x_s^{M^*}$ 矛盾。因此 $H_j \cap R$ 是有限集合。

因此，存在 $l_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $H_j \subset (H_j \cap K_j) \cup \{r_1, r_2, \cdots, r_{l_0}\}$。于是，$H_j \Delta K_j = H_j - K_j \subset \{r_1, r_2, \cdots, r_{l_0}\}$。所以，$H_j \Delta K_j$ 是有限的。

因此，我们得到一个可数集族 $\{K_j:\ j \in \mathbb{N}\}$，使得 $H_j \Delta K_j$ 是有限的，$\forall j \in \mathbb{N}$ 且 $\underset{j\in\mathbb{N}}{\cup} K_j \in \mathcal{I}$。所以，“$\mathcal{I}$”满足 **(AP)** 条件。□

5. $\mathcal{I}$-软极限点和 $\mathcal{I}$-软聚点

在本节中，我们遵循 Kostyrko 等人 [17]和 Lahiri 等人 [19],的研究，引入软拓扑空间中软点序列的 $\mathcal{I}$-软极限点和 $\mathcal{I}$-软聚点的概念。

定义 5.1. 设 $(G_M, \widetilde{\tau})$ 是一个软拓扑空间，且 $w = \{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 G_M中的软点序列。如果存在 $\mathbb{N}$的子集 $P = \{p_1 < p_2 < \cdots < p_k < \cdots\}$，使得 $P \notin \mathcal{I}$ 且 $\lim_{k\to\infty} \eta_{p_k} = x_s^{M^*}$，则称软点 $x_s^{M^*}$ 是 $w = \{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$的$\mathcal{I}$-软极限点。

$w = \{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的所有 $\mathcal{I}$-软极限点所构成的软集记作$_\sim\mathcal{I}(\Lambda_w)$。

定义 5.2. 设 $(G_M, \widetilde{\tau})$ 为一个软拓扑空间，$w = \{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 G_M 中的一个软点序列。如果对于 $x_s^{M^*}$ 的任意软邻域 $U_{M''}$，$\{n \in \mathbb{N}:\ \eta_n \widetilde{\in} U_{M''}\} \notin \mathcal{I}$，则称软点 $x_s^{M^*}$ 为 $w = \{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的一个 $\mathcal{I}$-软聚点。

所有 $\mathcal{I}$-软聚点构成的软集记为$_\sim\mathcal{I}(\Gamma_w)$。

定理 5.3. 设$(G_M, \widetilde{\tau})$是一个软拓扑空间。那么，对于 G_M 中任意由软点组成的序列 $w = \{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，有 $\mathcal{I}(\widetilde{\Lambda}_w)\widetilde{\subset}\mathcal{I}(\widetilde{\Gamma}_w)$。

证明。设 $x_s^{M^*}\widetilde{\in}\mathcal{I}(\widetilde{\Lambda}_w)$。那么，存在集合 $P = \{p_1 < p_2 < \cdots < p_k < \cdots\} \notin \mathcal{I}$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty} \eta_{p_k} = x_s^{M^*}$。设 $U_{M'}$是 $x_s^{M^*}$的一个软邻域。那么，存在 $k_0 \in \mathbb{N}$，使得 $\eta_{p_k}\widetilde{\in}U_{M'},\ \forall\ k > k_0$。于是，$\{n \in \mathbb{N}: \eta_n\widetilde{\in}U_{M'}\} \supset P - \{p_1, p_2, \cdots, p_{k_0}\}$。如果 $\{n \in \mathbb{N}:\eta_n\widetilde{\in}U_{M'}\} \in \mathcal{I}$，那么，$P - \{p_1, p_2, \cdots, p_{k_0}\} \in \mathcal{I}$，因此 $P = (P - \{p_1, p_2, \cdots, p_{k_0}\}) \cup \{p_1, p_2, \cdots, p_{k_0}\} \in \mathcal{I}$，矛盾。因此，$\{n \in \mathbb{N}: \eta_n\widetilde{\in}U_{M'}\} \notin \mathcal{I}$。所以，$x_s^{M^*}$是 $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$的一个 $\mathcal{I}$-软聚点。因此，$\mathcal{I}(\widetilde{\Lambda}_w)\widetilde{\subset}\mathcal{I}(\widetilde{\Gamma}_w)$。□

定理 5.4. 设$(G_M, \widetilde{\tau})$是一个软拓扑空间。对于 G_M, $\mathcal{I}$中的任意软点序列 $_\sim w = \{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，$\Gamma_w)$在$(G_M, \widetilde{\tau})$中是软闭的。

证明。设 $y_s^{M^{**}}\widetilde{\in}$cl($\mathcal{I}(\widetilde{\Gamma}_w)$)，且$y_s^{M^{**}}$的一个软邻域为 $U_{M''}$。则，$U_{M''}\widetilde{\cap}\mathcal{I}(\widetilde{\Gamma}_w) \neq \widetilde{\emptyset}$。设 $w_{s'}^{M^{***}}\widetilde{\in}\mathcal{I}(\widetilde{\Gamma}_w)\widetilde{\cap}U_{M''}$。由于，$w_{s'}^{M^{***}}$是 $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的一个 $\mathcal{I}$-软聚点，且 $w_{s'}^{M^{***}}$是一个软邻域，所以 $\{n \in \mathbb{N}: \eta_n\widetilde{\in}U_{M''}\} \notin \mathcal{I}$。因此，$y_s^{M^{**}}\widetilde{\in}\mathcal{I}(\widetilde{\Gamma}_w)$。$\mathcal{I}(\widetilde{\Gamma}_w)$在（$G_M, \widetilde{\tau}$）中是软闭的。□

定理 5.5。设 $(G_M, \widetilde{\tau})$是一个软拓扑空间，且 $w = \{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$和 $v = \{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 G_M 中的软点序列，满足 $\{n \in \mathbb{N}: \eta_n \neq \gamma_n\} \in \mathcal{I}$。则

$(i)\ \mathcal{I}(\widetilde{\Lambda}_w) = \mathcal{I}(\widetilde{\Lambda}_v)$
$(ii)\ \mathcal{I}(\widetilde{\Gamma}_w) = \mathcal{I}(\widetilde{\Gamma}_v).$

证明。(i) 设 $x_s^{M^*}\widetilde{\in}\mathcal{I}(\widetilde{\Lambda}_w)$。则存在一个集合 $W = \{w_1 < w_2 < \cdots < w_k < \cdots\} \subset \mathbb{N}$使得 $W \notin \mathcal{I}$且 $\lim\limits_{k\to\infty} \eta_{w_k} = x_s^{M^*}$。

设 $Y = \{n \in \mathbb{N}: \eta_n \neq \gamma_n\}$。我们断言 $W - Y \notin \mathcal{I}$。反之，假设 $W - Y \in \mathcal{I}$。由于 $Y \in \mathcal{I}$，因此 $W = (W - Y) \cup Y \in \mathcal{I}$，矛盾。因此，$W - Y \notin \mathcal{I}$。于是 $W - Y$ 是一个无限集合。设 $W - Y = \{t_1 < t_2 < \cdots < t_l < \cdots\}$，且 $V_{M'}$是 $x_s^{M^*}$ 的一个软邻域。由于 $\lim\limits_{k\to\infty} \eta_{w_k} = x_s^{M^*}$，因此存在 $k_0 \in \mathbb{N}$，使得 $\eta_{w_k}\widetilde{\in}V_{M'},\ \forall\ k > k_0$。于是，存在 $k_0^{'} \in \mathbb{N}$使得$\gamma_{t_l}\widetilde{\in}V_{M'},\ \forall\, l > k_0^{'}$。因此，$\lim\limits_{l\to\infty}\gamma_{t_l} = x_s^{M^*}$，从而 $x_s^{M^*}\widetilde{\in}\mathcal{I}(\widetilde{\Lambda}_v)$。所以，$\mathcal{I}(\widetilde{\Lambda}_w) \widetilde{\subset}\mathcal{I}(\widetilde{\Lambda}_v)$。同理，我们有 $\mathcal{I}(\widetilde{\Lambda}_v)\widetilde{\subset}\mathcal{I}(\widetilde{\Lambda}_w)$。因此，$\mathcal{I}(\widetilde{\Lambda}_w) = \mathcal{I}(\widetilde{\Lambda}_v)$。

(ii) 设 $x_s^{M^*}\widetilde{\in}\mathcal{I}(\widetilde{\Gamma}_w)$，且 $R_{M''}$ 是 $x_s^{M^*}$ 的软邻域。则$\{n \in \mathbb{N}: \eta_n\widetilde{\in}R_{M''}\} \notin \mathcal{I}$。若可能，令 $\{n \in \mathbb{N}: \gamma_n\widetilde{\in}R_{M''}\} \in \mathcal{I}$。

由于 $\{n \in \mathbb{N}: \eta_n\widetilde{\in}R_{M''}\} \subset \{n \in \mathbb{N}: \eta_n \neq \gamma_n\} \cup \{n \in \mathbb{N}: \gamma_n\widetilde{\in}R_{M''}\}$ 且 $\{n \in \mathbb{N}: \eta_n \neq \gamma_n\} \in \mathcal{I}$，因此 $\{n \in \mathbb{N}: \eta_n \neq \gamma_n\} \cup \{n \in \mathbb{N}: \gamma_n\widetilde{\in}R_{M''}\} \in$

$\mathcal{I}$因此 $\{n \in \mathbb{N}: \eta_n \widetilde{\in} R_{M''}\} \in \mathcal{I}$，这就产生了矛盾。因此， $\{n \in \mathbb{N}: \gamma_n \widetilde{\in} R_{M''}\} \notin \mathcal{I}$。这意味着，$x_s^{M^*} \widetilde{\in} \mathcal{I}(\widetilde{\Gamma}_v)$。所以， $\mathcal{I}(\widetilde{\Gamma}_w) \widetilde{\subset} \mathcal{I}(\widetilde{\Gamma}_v)$。类似地，我们有 $\mathcal{I}(\widetilde{\Gamma}_v) \widetilde{\subset} \mathcal{I}(\widetilde{\Gamma}_w)$。因此， $\mathcal{I}(\widetilde{\Gamma}_w) = \mathcal{I}(\widetilde{\Gamma}_v)$。

□

致谢。 第二作者感谢大学拨款委员会在本文撰写期间通过 UGC-JRF 计划提供的资金支持。

References

[1] Acar, U., Koyuncu, F. 和 Tanay, B.， 《软集与软环》， *Comput. Math.*，第 ( ) 卷 ( ) *Appl.* **59** 11 2010 3458 3463 期，页码 –。[2] Akta¸s, H. 和 C¸ a˘gman, N.， 《软集与软群》， *Inform. Sci.*，第 177 卷第 13 期 (2007)，页码 2726–2735。[3] Ali, M. I.、Feng, F.、Liu, X.、Min, W. K. 和 Shabir, M.， 《软集理论中的一些新运算》， *Comput. Math. Appl.*，第 57 卷第 9 期 (2009)，页码 1547–1553。[4] Ayg *ü ˘ ü Neural Comput. Appl.* **21** 2012 113 119 noglu, A. 和 Ayg n, H.， 《关于软拓扑空间的一些注记》，，第 ( ) 卷 ( ) 期，页码 –。[5] Bayrama E.、Dervisoglua M.， 《软拓扑中的加权统计软收敛》， *Filomat* **39** 第 2 期 (2025)，页码 501–514。[6] Bayramov, S., Aras, C. G. 和 Cafarli, V.， 《软可数拓扑空间》， *Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan. Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences* **39** 1 2019 15 23 ，第 ( ) 卷 ( ) 期，页码 -。[7] C ¸ ˘ ¸ *Computers and* agman, N.、 *Mathematics with Applications* **62** 351 358 2011 351 358 KarataS, Serkan、Enginoglu Serdar， 《软拓扑》，，第 (-) 卷 ( ) 期，页码 –。[8] Connor, J. S.， 《序列的统计收敛与强 p-Cesàro 收敛》， *Analysis*，第 8 卷第 1-2 期 (1988)，页码 47-64。[9] Das, Sujoy 和 Samanta, S., K.， 《软度量》， *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics* **20** 1 2013 77 94 ，第 ( ) 卷 ( ) 期，页码 –。[10] Di Maio, G.、Ko ˘ *Topology* cinac, L. A. *and its Applications* **156** 1 2008 28 45 D.， 《拓扑中的统计收敛》。，第 ( ) 卷 ( ) 期，页码 –。[11] Fast, H.《关于统计收敛》， *In Colloquium mathematicae*，第 2 卷第 3-4 期 (1951)，页码 241–244。[12] Fridy, J. A.， 《论统计收敛》， *Analysis*，第 5 卷第 4 期 (1985)，页码 301–314。[13] Fridy, J. A.， 《统计极限点》， *Proceedings of the American mathematical society* **118** 4 1993 1187 1192 ，第 ( ) 卷 ( ) 期，页码 –。[14] Hussein, H. A.、Hamzah, S. H. 和 Abdullah, H. K.， 《软拓扑空间中的收敛》， *Journal of Indisiplinary Mathematics*，第 26 卷，页码 1193–1206。[15] Hussain, S.、Ahmad, B.， 《软拓扑空间中的软分离公理》， *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*，第 44 卷第 3 期 (2015)，页码 559–568。[16] Iguda, A.， 《软集与软拓扑概念》， *Journal of New Theory*，第 30 卷 (2020)，页码 21–34。[17] Kostyrko, P.、Wilczy´nski, W.、˘Sal´at, T， $\mathcal{I}$-收敛， *Real Analysis Exchange*，第 26 卷第 2 期 (2000)，页码 669–686。[18] Kuratowski, K， 《拓扑学》， *I. PWN*，华沙，(1962)。[19] Lahiri, B. K.、Das, P.， $\mathcal{I}$ 与 $\mathcal{I}^*$-拓扑空间中的收敛， 《波希米亚数学》，第 130 卷第 2 期 (2005)，页码 153–160。

[20] Jubair, S. A. 和 Ajam, M. H., 《软拓扑空间中的软不动点稳定性》, *International Journal of Mathematics Trends and Technology-IJMTT* **69** 10 2023 31 38 , 第 ( ) 卷 ( ) 期, 页码 –。

[21] Maji, P. K.、Biswas, R. 和 Roy, A. R., 《软集理论》, *Computers and mathematics with applications* **45** 4 5 2003 555 562 , 第 (-) 卷 ( ) 期, 页码 –。

[22] Molodtsov, D., 《软集理论——初步结果》, *Computers and mathematics with applications* **37** 4 5 1999 19 31 , 第 (-) 卷 ( ) 期, 页码 –。

[23] Šalát, T., 《实数序列的统计收敛》, *Math. Slovaca*, 第 **30** 卷第 2 期 (1980), 页码 139–150。[24] Schoenberg, I. J., 《某些函数的可积性及相关的可和方法》。 *The American mathematical monthly*, 第 **66** 卷第 5 期 (1959), 页码 361–775。[25] Xie, N., 《软点与软拓扑空间的结构》, *Ann. Fuzzy* , 第 ( ) 卷 ( ) 期, 页码 –。

Math. Inform **10** 2 2015 309 322

[1] Department of Mathematics, The University of Burdwan, Golapbag, Burdwan-713104 West Bengal , , India.
Email address: pmjupm@yahoo.co.in

[2] Department of Mathematics, The University of Burdwan, Golapbag, Burdwan-713104 West Bengal , , India.
Email address: anirban15997ap@gmail.com