arXiv:2512.15322v1 [math.QA] 17 Dec 2025

通过 Hall 代数研究量子对称对

MING LU 和 ZHUOYI ZHAO

谨以此文献给朱斌教授，祝贺他六十华诞

Abstract. 量子对称对由一个量子群 $\mathbf{U}$ 及其余理想 $\widetilde{\mathbf{U}}^{\imath}$ 子代数 $\mathbf{U}^{\imath}$构成。$\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{U}^{\imath}$ 的 Hall 代数构造分别由 Bridgeland 和 Lu–Wang 给出。本文为 $\mathbf{U}^{\imath}$ 在 $\mathbf{U}$中的余理想 $\widetilde{\mathbf{U}}^{\imath}$ 子代数结构，以及量子对称对（$\mathbf{U}$,$\mathbf{U}^{\imath}$）构造了一个 Hall 代数框架。作为 $\widetilde{\mathbf{U}}^{\imath}$ 应用，我们证明自然嵌入 $\imath:\mathbf{U}^{\imath}\to\mathbf{U}$以及余乘法 $\Delta:\mathbf{U}^{\imath}\to\widetilde{\mathbf{U}}^{\imath}\otimes\mathbf{U}$ 保持了 $\mathbf{U}^{\imath}$ 和 $\mathbf{U}$ 的整形式，这些整形式用于构造对偶典范基。

Contents

1. 引言 1
2. 量子群与i量子群 4
3. i箭图代数与iHall代数 7
4. 量子对称对的Hall代数实现 11
5. 整形式与对偶典范基 25
参考文献 30

1. Introduction

设 $\mathbf{U}=\mathbf{U}_v(\mathfrak{g})$ 为 Drinfeld–Jimbo量子群；参见 [Dr87, J85]。Ringel [Rin90]引入了箭图表示上的Hall代数，以实现$\mathbf{U}^+$ 在$\mathbf{U}$ 中的正部分，其中 U 为 Dynkin 型；参见 [Gr95] 关于推广到 Kac-Moody 型的内容。受 Ringel 构造的启发，Lusztig 利用箭图簇上的恰层给出了$\mathbf{U}^+$ 的几何实现，并构造了$\mathbf{U}^+$ [Lus90, Lus93]的典范基。

利用Hall代数来实现整个量子群$\mathbf{U}$ 是一个自然的问题。为解决这一问题，人们进行了许多尝试，较早的工作见 [X97、Ka98、PX00] ；关于导出Hall代数的构造，参见 [T06、XX08]。Bridgeland [Br13]通过考察射影$\widetilde{\mathbf{U}}^{\imath}$模的2周期复形的某种Hall代数解决了这一问题；事实上，他实现了Drinfeld双$\mathbf{U}$，即$\mathbf{U}$ 的一种变体，其Cartan部分加倍了。Bridgeland的构造后来得到了进一步推广和改进；半导出Hall代数的Frobenius范畴版本见[Go18] ，遗传范畴的半导出Ringel-Hall代数版本见 [LP21] 。

2020 数学学科分类。 主要分类号：17B37、16G20、18G80。关键词和短语。 Hall代数、量子对称对、整形式、对偶典范基。

受Bridgeland的Hall代数启发，Qin [Q16] 通过某个循环箭图簇上的恰层实现了ADE型的整个量子群$\mathbf{U}$，其基础是[Lus90、Na01、HL15]中的构造。Qin的几何实现为$\mathbf{U}$给出了一个整正基，其中包含Lusztig为$\mathbf{U}^+$和$\mathbf{U}^-$的对偶典范基（经过适度重标度）作为子集。

i量子群$\mathbf{U}^\imath$在 [Let99] 中作为量子群的余理想子代数引入$\mathbf{U}$，以 Satake图作为输入；参见 [Ko14] 关于一般 Kac-Moody 型 i量子群的论述。遵循 [Let99，Ko14], 将 ($\mathbf{U}$,$\mathbf{U}^\imath$) 和 ($\mathbf{U}$, $\mathbf{U}^\imath$) 称为量子对称对。i量子群是量子群的广泛推广，因为量子群可视为对角型 i量子群。Bao 和 Wang 发现 i典范基，是 i量子群领域的一项重大突破 [BW18a, BW18b]。本文聚焦于 ADE 型拟分裂i量子群。

Dynkin i箭图 (Q, ϱ) 由 Dynkin箭图 Q 及其上的对合 ϱ 组成。与 (Q, ϱ) 相关联的 i箭图代数 $\Lambda^\imath$ 定义于 [LW22a]。$\Lambda^\imath$ 的（扭曲）半导出的 Ringel-Hall代数（亦称 iHall代数） $\mathcal{H}(\Bbbk Q, \varrho)$ 为普适i量子群 $\mathbf{U}^\imath$提供范畴化实现。与 $\mathbf{U}^\imath$相比，普适版本 $\mathbf{U}^\imath$ 具有各种中心元，而 $\mathbf{U}^\imath$ 可通过对 $\mathbf{U}^\imath$ 作中心约化得到。量子群 $\mathbf{U}$ 也可通过使用对角型i箭图得到。在几何情形下，基于 [Q16，S19], 我们 [LW21b]使用 $\Lambda^\imath$ 的 NKS范畴/簇上的恰层来实现 ADE 型的 $\mathbf{U}^\imath$。因此，也在$\mathbf{U}^\imath$上构造了一个整正基，称为对偶典范基。

最近，第一作者与 Pan [LP25a] 借助重标度iHall基和Lusztig引理，为 ADE 型的对偶典范基 $\mathbf{U}^\imath$ 提出了一种新构造，并将其与 [LW22a] 和 [LW21b]中的早期构造联系起来。为构造和研究非对称 Dynkin 型的对偶典范基，[CLPRW25、CLPRW],引入了 iHopf代数框架，作为 Drinfeld双构造的推广。

本文旨在在 Hall代数框架下实现自然嵌入 $\imath : \mathbf{U}^\imath \to \mathbf{U}$ 以及余理想子代数结构 $\mathbf{U}^\imath$ 于 $\mathbf{U}$ 之中，从而解决 [LW24，§11.1]提出的开放问题。我们的策略是利用 iHall代数和 iHopf代数，对$\mathbf{U}$ 与 $\mathbf{U}^\imath$ 的实现进行比较并加以统一。作为应用，这使我们能够比较 $\mathbf{U}$ 与 $\mathbf{U}^\imath$的整形式和对偶典范基。下面总结主要结果。

对于 Dynkin i箭图 (Q, ϱ)，正如 [LW22a], 所证明的，存在一个代数同构 $\psi : \mathbf{U}^\imath \to \mathcal{H}(Q, \varrho)$，其中 $\mathcal{H}(Q, \varrho)$ 是泛型 iHall 代数；参见引理 3.5。对于对角型 i箭图 (Q^{dbl}, swap)（见例3.1），存在一个代数同构 $\psi^{\mathrm{dbl}} : \mathbf{U} \to \mathcal{H}(Q^{\mathrm{dbl}}$,swap)；参见 [Br13]。

Rin90、Gr95]中定义的经典扩张Hall代数可视为 $\mathcal{H}(Q^{\mathrm{dbl}}$, swap)的子代数，记作B($Q$)；参见§4.1。于是，B($Q$)是一个带有Hopf配对 $\varphi(-,-)$的Hopf代数；参见 [Gr95]。这使我们能够应用 [CLPRW25] 中介绍的 iHopf代数理论，构造iHopf代数$\mathbf{B}^\imath_\varrho(Q)$以及对角型 D的iHopf代数(B(Q))。命题4.1、4.3证明了存在代数

同构

$$\widetilde{\Phi} : \widetilde{\mathcal{H}}(Q,\varrho) \longrightarrow \widetilde{\mathbf{B}}^{\imath}_{\varrho}(Q), \qquad \widetilde{\Phi}^{\mathrm{dbl}} : \widetilde{\mathcal{H}}(Q^{\mathrm{dbl}},\mathrm{swap}) \longrightarrow D(\widetilde{\mathbf{B}}(Q)).$$

我们将 $D(\mathbf{B}(Q))$ 在 [CLPRW25，命题 2 中给出的 Hopf代数结构7] 转移到 $\widetilde{\mathcal{H}}(Q^{\mathrm{dbl}},\mathrm{swap})$，并证明 $\psi^{\mathrm{dbl}}\colon \mathbf{U} \to \mathcal{H}(Q^{\mathrm{dbl}},\mathrm{swap})$ 是Hopf代数之间的同构，从而强化了 Bridgeland 的结果 [Br13]；见定理 4.4 和推论 4.6。

我们在定理 4.11中证明，存在一个单射代数同态 $\widetilde{\Omega}$，使得

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathbf{U}}^{\imath} & \xrightarrow{\ \imath\ } & \widetilde{\mathbf{U}} \\ \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\psi}} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\psi}^{\mathrm{dbl}}} \\ \widetilde{\mathcal{H}}(Q,\varrho) & \xrightarrow{\ \widetilde{\Omega}\ } & \widetilde{\mathcal{H}}(Q^{\mathrm{dbl}},\mathrm{swap}) \end{array}$$

$\widetilde{\Omega}$ 可交换。该结果在 Hall代数框架下实现了量子对称对 $(\mathbf{U},\mathbf{U}^{\imath})$。该技术基于 [CLPRW25，命题 2。12]，，而关键之处／较难的部分在于找到 ϱ-扭曲相容线性映射 $\chi\colon \widetilde{\mathbf{B}}(Q) \to \mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$ 的闭式公式；见 (4.18)–(4.20)。χ 的公式十分特别，其中涉及多项式 $a_{2\lambda_f}(v)$ $a_{\lambda_f}(v^2)$，用于计算模在 $\mathbb{F}_q$ 和 $\mathbb{F}_{q^2}$上的自同构群的基数，以及 $a_{\lambda_c}(v)$ 的平方根 $b_{\lambda_c}(v)$。

在定理 4.14中，构造了一个代数同态 $\Delta\colon \mathcal{H}(Q,\varrho) \to \mathcal{H}(Q,\varrho) \otimes \mathcal{H}(Q^{\mathrm{dbl}},\mathrm{swap})$，使得下图可交换：

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathbf{U}}^{\imath} & \xrightarrow{\ \Delta\circ\imath\ } & \widetilde{\mathbf{U}}^{\imath} \otimes \widetilde{\mathbf{U}} \\ \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\psi}} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\psi}\otimes\widetilde{\psi}^{\mathrm{dbl}}} \\ \widetilde{\mathcal{H}}(Q,\varrho) & \xrightarrow{\ \widetilde{\Delta}\ } & \widetilde{\mathcal{H}}(Q,\varrho) \otimes \widetilde{\mathcal{H}}(Q^{\mathrm{dbl}},\mathrm{swap}) \end{array}$$

这一结果阐释了 $\mathbf{U}^{\imath}$ 在 $\mathbf{U}$中的余理想代数结构。

值得注意的是，上述构造给出了 $\widetilde{\Omega}$ 和 $\widetilde{\Delta}$ 的显式公式表达。我们期望这些映射可以推广到任意箭图。不过，在这一一般情形下，ϱ-扭曲相容线性映射 χ 将比式（4.18）–（4.20）中给出的映射复杂得多。

我们将给出一个关于 $\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{U}^{\imath}$ 的整形式与对偶典范基的应用。令 $\mathcal{Z} = \mathbb{Z}[v^{\frac{1}{2}}, v^{-\frac{1}{2}}]$。在 [LP25a]，中引入了 $\widetilde{\mathcal{H}}(Q,\varrho)$ 的整形式 $\widetilde{\mathcal{H}}(Q,\varrho)_{\mathcal{Z}}$，并且它具有对偶典范基；$\widetilde{\mathcal{H}}(Q^{\mathrm{dbl}},\mathrm{swap})$ 的情形也类似。随后，通过同构 ψ，它导出 $\widetilde{\mathbf{U}}^{\imath}$ 的整形式 $\widetilde{\mathbf{U}}^{\imath}_{\mathcal{Z}}$（也具有对偶典范基）。我们在命题 5.2 中证明，同态 $\widetilde{\Omega}\colon \mathcal{H}(Q,\varrho) \to \mathcal{H}(Q^{\mathrm{dbl}},\mathrm{swap})$ 和 $\Delta\colon \mathcal{H}(Q,\varrho) \to \mathcal{H}(Q,\varrho) \otimes \mathcal{H}(Q^{\mathrm{dbl}},\mathrm{swap})$ 保持各自的整形式。关键在于证明，ϱ-扭曲相容线性映射 $\chi\colon \widetilde{\mathbf{B}}(Q) \to \mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$ 将霍尔基元素映射到 $\mathcal{Z}$；见引理 5.1。

令 $\mathbf{C}^{\imath} = \{\mathbb{K}_{\alpha} \diamond \mathfrak{L}_{\lambda} \mid \alpha \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}, \lambda \in \mathfrak{P}\}$（分别地，$\mathbf{C} = \{\mathbb{K}_{\alpha} \diamond \mathbb{K}_{\beta^{\diamond}} \diamond \mathfrak{L}_{\lambda,\mu^{\diamond}} \mid \alpha,\beta \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}, \lambda,\mu \in \mathfrak{P}\}$）为 $\mathbf{U}^{\imath}$（分别地，$\mathbf{U}$）的对偶典范基。对于

$$\imath(b) = \sum_{c \in \mathbf{C}} f_c(v) c, \qquad \widetilde{\Delta}(b) = \sum_{b' \in \mathbf{C}^{\imath}, c \in \mathbf{C}} g_{b',c''}(v) b' \otimes c,$$

我们可以看到所有常数 $f_c(v)g_{b',c''}(v) \in \mathcal{Z}$；见命题 5.6。事实上， [LP25b] 猜想这些系数属于 $\mathbb{N}[v^{\frac{1}{2}}, v^{-\frac{1}{2}}]$。为了解决这个问题，我们将在 $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ [Q16, LW21b] 中进一步发展 U 和 $\mathrm{U}^\imath$ 的几何实现，并用恰层解释余乘法和嵌入 $\imath$ ： $\mathrm{U}^\imath \to \mathrm{U}$；参见 [Lus90, Lus93, Na01, FL21]。

本文安排如下。在第2节中，我们回顾量子群与i量子群的基础知识。在第3节中，我们回顾i箭图代数及其iHall代数的构造，以及量子群与i量子群的Hall代数实现。

在第4节中，我们给出 $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ Hall代数的Hopf代数结构 $(\mathcal{H}, \varrho)$，以及 $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ 量子对称对（$\mathbf{U}$，$\mathbf{U}^\imath$），并通过Hall代数阐释$\mathbf{U}^\imath$ 在$\mathbf{U}$中的余理想代数结构。在第5节中，我们将整形式和对偶典范基作为一项应用加以考察。

致谢。ML衷心感谢彭连刚和王伟强在相关项目中给予的指导与合作。ML的研究部分得到国家自然科学基金委员会（编号：12171333）的资助。

2. Quantum groups and iquantum groups

2.1. 量子群。 设 $\mathbb{I} = \{1, \ldots, n\}$ 为指标集。设 $C = (c_{ij})_{i,j\in\mathbb{I}}$ 为单李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan矩阵，其类型为 ADE 型。其 Dynkin图记为Γ。设 $\Delta = \{\alpha_i \mid i \in \mathbb{I}\}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的单根集合，并将根格记为$\mathbb{Z}^{\mathbb{I}} := \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\alpha_n$。我们通过如下定义，在 $\mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$ 上定义一个对称双线性形式

$$(\alpha_i, \alpha_j) = c_{ij}, \quad \forall i, j \in \mathbb{I}. \tag{2.1}$$

设 v 为一个不定元。对于 $r \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$，记为

$$[r] := [r]_v = \frac{v^r - v^{-r}}{v - v^{-1}},\ [r]! := [r]_v^! = \prod_{i=1}^{r} [i]_v,\ \begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix}_v = \frac{[m]_v[m-1]_v \ldots [m-r+1]_v}{[r]_v^!}.$$

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ 按照 [Dr87，BG17a]，，(Drinfeld双)量子群 $\mathbf{U} := \mathbf{U}_v(\mathfrak{g})$ 定义为由以下元素生成的 $\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}}$-代数，并满足以下关系：对于 $E_i, F_i, K_i^{\pm 1}, K_i'^{\pm 1}, i \in \mathbb{I}$， $i, j \in \mathbb{I}$，

$$[E_i, F_j] = \delta_{ij}(v^{-1} - v)(K_i - K_i'), \qquad [K_i, K_j] = [K_i, K_j'] = [K_i', K_j'] = 0, \tag{2.2}$$

$$K_i E_j = v^{c_{ij}} E_j K_i, \qquad K_i F_j = v^{-c_{ij}} F_j K_i, \tag{2.3}$$

$$K_i' E_j = v^{-c_{ij}} E_j K_i', \qquad K_i' F_j = v^{c_{ij}} F_j K_i', \tag{2.4}$$

对于 $i \neq j \in \mathbb{I}$，

$$\sum_{r=0}^{1-c_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1 - c_{ij} \\ r \end{bmatrix}_v E_i^r E_j E_i^{1-c_{ij}-r} = 0, \tag{2.5}$$

$$\sum_{r=0}^{1-c_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1 - c_{ij} \\ r \end{bmatrix}_v F_i^r F_j F_i^{1-c_{ij}-r} = 0. \tag{2.6}$$

Drinfeld–Jimbo量子群 $\mathbf{U}$ 定义为由以下元素生成的 $\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$-代数：$E_i$、 F_i、 K_i、 K_i^{-1} 、 $i \in \mathbb{I}$，满足由（2.2）–（2.6）修改而来的关系，其中将 K_i' 替换为

K_i^{-1}。我们可以将 $\mathbf{U}$ 视为 $\widetilde{\mathbf{U}}$ 关于理想（$K_iK_i' - 1 \mid i \in \mathbb{I}$）的商代数；参见[Dr87]。

令 $\widetilde{\mathbf{U}}^+$ 为由 E_i（$i \in \mathbb{I}$）生成的 $\mathbf{U}$ 的子代数，$\widetilde{\mathbf{U}}^0$ 为由 K_i, K_i'（$i \in \mathbb{I}$）生成的 $\widetilde{\mathbf{U}}$ 的子代数，而 $\widetilde{\mathbf{U}}^-$ 为由 F_i（$i \in \mathbb{I}$）生成的 $\mathbf{U}$ 的子代数，$\widetilde{\mathbf{U}}$ 分别如此定义。$\widetilde{\mathbf{U}}^+$、$\widetilde{\mathbf{U}}^0$ 和 $\widetilde{\mathbf{U}}^-$ 作为 $\mathbf{U}$ 的子代数，也以类似方式定义。于是，$\widetilde{\mathbf{U}}$ 和 $\mathbf{U}$ 都具有三角分解：$\widetilde{\mathbf{U}} = \widetilde{\mathbf{U}}^+ \otimes \widetilde{\mathbf{U}}^0 \otimes \widetilde{\mathbf{U}}^-$，$\mathbf{U} = \mathbf{U}^+ \otimes \mathbf{U}^0 \otimes \mathbf{U}^-$. 显然，$\widetilde{\mathbf{U}}^+ \cong \mathbf{U}^+$、$\widetilde{\mathbf{U}}^- \cong \mathbf{U}^-$以及 $\widetilde{\mathbf{U}}^0 \cong \mathbf{U}^0/(K_iK_i' - 1 \mid i \in \mathbb{I})$。

这些代数及 $\widetilde{\mathbf{U}}$ 是 Hopf代数，其余乘法为 Δ，余单位为 ε，antipode为 S，定义如下

$$\begin{aligned} \Delta(E_i) &= E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i, \quad \Delta(F_i) = 1 \otimes F_i + F_i \otimes K_i', \\ \Delta(K_i) &= K_i \otimes K_i, \quad \Delta(K_i') = K_i' \otimes K_i'; \\ \varepsilon(E_i) &= 0 = \varepsilon(F_i), \qquad \varepsilon(K_i) = 1 = \varepsilon(K_i'); \\ S(E_i) = -K_i^{-1}E_i, &\quad S(F_i) = -F_iK_i'^{-1}, \quad S(K_i) = K_i^{-1}, \quad S(K_i') = K_i'^{-1}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

引理2.1 ([BG17a])。存在一个反对合（称为横线对合）$u \mapsto \overline{u}$作用于 $\widetilde{\mathbf{U}}$（以及$\mathbf{U}$），其定义为 $v^{1/2} = v^{-1/2}$，$\overline{E_i} = E_i$，$\overline{F_i} = F_i$，以及 $\overline{K_i} = K_i$，$\overline{K_i'} = K_i'$，其中 $i \in \mathbb{I}$。

2.2. i量子群。 对于 Cartan矩阵 $C = (c_{ij})_{i,\, j \in \mathbb{I}}$，设 Inv($C$) 为集合 $\mathbb{I}$ 上满足 $c_{ij} = c_{\varrho i,\, \varrho j}$（对所有 i，j）且 $\varrho^2 = \mathrm{Id}$ 的置换 ϱ 所构成的群。于是 $\varrho \in \mathrm{Inv}(C)$ 可视为相应Dynkin图的一个对合（允许为恒等映射），该 Dynkin图在记号上与 $\mathbb{I}$ 等同。我们将这一对 ($\mathbb{I}$，ϱ) 称为（准分裂）Satake图。

与 Satake图（$\mathbb{I}$，ϱ）相关联，按照 [LW22a]，我们定义 $\mathbf{U}^\imath$ 为$\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$-子代数，它是 $\widetilde{\mathbf{U}}$ 由以下元素生成的子代数：

$$B_i = F_i + E_{\varrho i}K_i', \qquad \widetilde{k}_i = K_iK_{\varrho i}', \quad \forall i \in \mathbb{I}, \tag{2.8}$$

其中 $\widetilde{k}_i$ 可逆。令 $\varsigma = (\varsigma_i) \in (\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})^\times)^{\mathbb{I}}$ 满足：对于每个满足 $c_{i,\varrho i} = 0$ 的 $i \in \mathbb{I}$，都有 $\varsigma_i = \varsigma_{\varrho i}$。Letzter-Kolb 风格的 i量子群 `a la Letzter-Kolb [Let99, Ko14] $\mathbf{U}^\imath = \mathbf{U}^\imath_\varsigma$ 是由以下元素生成的 $\mathbf{U}$的$\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$-子代数：

$$B_i = F_i + \varsigma_i E_{\varrho i}K_i^{-1}, \quad k_i = K_iK_{\varrho i}^{-1}, \quad \forall i \in \mathbb{I}.$$

根据 [LW22a，命题 6，2]，该 $\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$-代数 $\mathbf{U}^\imath$ 与 $\widetilde{\mathbf{U}}^\imath$ 对 $\widetilde{\widetilde{\mathbf{U}}}$ 由以下元素生成的理想取商所得的代数同构：$k_i - \varsigma_i$（对于 $i = \varrho i$）以及 $k_ik_{\varrho i} - \varsigma_i\varsigma_{\tau i}$（对于 $i \neq \varrho i$）。

记为 $\widetilde{\mathbf{U}}^\imath$ 和 $\mathbf{U}^\imath$ 分别是 $\widetilde{\mathbf{U}}$ 和 $\mathbf{U}$ 的适当余理想自然嵌入对 代数 $(\widetilde{\mathbf{U}}, \widetilde{\mathbf{U}}^\imath)$ 和 $(\mathbf{U}, \mathbf{U}^\imath)$ 称为量子对称对，而 $\widetilde{\mathbf{U}}^\imath$ 和 $\mathbf{U}^\imath$ 称为泛 универсал（拟分裂）i量子群；若 $\varrho = \mathrm{Id}$，则它们是分裂的。

对于 $i \in \mathbb{I}$，任意给定 $\alpha = \sum_{i \in \mathbb{I}} a_i\alpha_i \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$，我们定义

$$\mathbb{K}_i = v^{\frac{1}{2}c_{i,\varrho i}}\widetilde{k}_i, \qquad \mathbb{K}_\alpha := \prod_{i \in \mathbb{I}} \mathbb{K}_i^{a_i}. \tag{2.9}$$

引理 2.2（参见 [CLPRW25，引理 3。6]）。存在一个反对合（称为横线对合）： $u \mapsto u$ 在 $\mathbf{U}^\imath$ 上定义为 $v^{1/2} = v^{-1/2}$、$\overline{B_i} = B_i$和 $\overline{\mathbb{K}_i} = \mathbb{K}_i$，其中 $\overline{i} \in \mathbb{I}$。特别地，$\sim$ $\sim k_i = v^{c_{i,\varrho i}} k_i$。

例 2.3. 有限型拟分裂*i*量子群与有限型*Satake*图相关联，即带有对合的*Dynkin* 图。分裂 *Satake* 图在形式上与*Dynkin*图相同。下表列出了所有这类具有 $\varrho \neq \mathrm{Id}$ 的连通有限型拟分裂*Satake*图。*1* 。

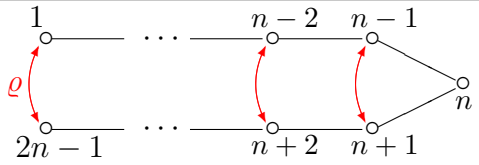
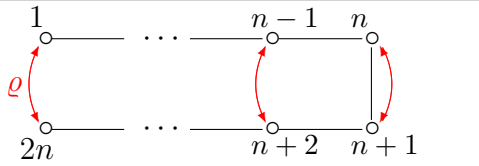
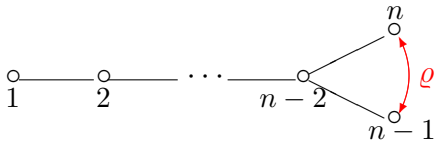
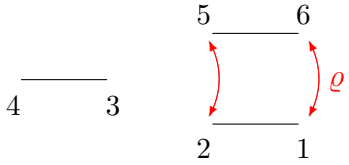
类型	*Satake* 图
AIII_{2n-1} $(n \geq 1)$	
AIII_{2n} $(n \geq 1)$	
DI_n $(n \geq 4)$	
EII_6	

TABLE 1. 带有 $\varrho \neq \mathrm{Id}$ 的有限型拟分裂Satake图

例 2.4。（将量子群视为对角型 i量子群）考虑 $\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$-$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$子代数 $(\mathbf{U} \otimes \mathbf{U})^\imath$，它是 $(\mathbf{U} \otimes \mathbf{U})$ 由以下元素生成的

$$\mathcal{K}_i := K_i K'_{i^\diamond}, \quad \mathcal{K}'_i := K_{i^\diamond} K'_i, \quad \mathcal{B}_i := F_i + E_{i^\diamond} K'_i, \quad \mathcal{B}_{i^\diamond} := F_{i^\diamond} + E_i K'_{i^\diamond}, \qquad \forall i \in \mathbb{I}.$$

这里省略张量积记号，改用 $i^\diamond$ 为第二个 $\widetilde{\ }\mathbf{U}$ 副本中的生成元编号，该副本位于 $(\widetilde{\ }\mathbf{U} \otimes \widetilde{\ }\mathbf{U})$ 中。存在一个 $\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$-代数同构 $\widetilde{\phi}$： $\widetilde{\ }\mathbf{U}^\imath \to (\widetilde{\ }\mathbf{U} \otimes \widetilde{\ }\mathbf{U})^\imath$，使得

$$\widetilde{\phi}(E_i) = \mathcal{B}_i, \quad \widetilde{\phi}(F_i) = \mathcal{B}_{i^\diamond}, \quad \widetilde{\phi}(K_i) = \mathcal{K}'_i, \quad \widetilde{\phi}(K'_i) = \mathcal{K}_i, \qquad \forall i \in \mathbb{I}.$$

在这种情况下，*Satake*图为 $(\Gamma \sqcup \Gamma^\diamond$,交换)，其中 $\Gamma^\diamond$ 是$\mathbf{U}$的 *Dynkin*图$\backsim\Gamma$的一个副本。

3. iQuiver algebras and iHall algebras

本节回顾 iquiver 代数的构造，以及通过 iHall代数实现 i量子群的方法，该方法见 [LW22a]。本文中，设 $\mathbf{k}=\mathbb{F}_q$ 为一个含有 q 个元素的有限域。

3.1. i箭图与双箭图。设 $Q=(Q_0,Q_1)$ 是一个 Dynkin箭图。Q 的一个对合定义为箭图 Q 的一个自同构 ϱ，满足 $\varrho^2=\mathrm{Id}$（我们允许平凡对合 $\mathrm{Id}: Q\to Q$）。Q 的一个对合 ϱ 会在路径代数$\mathbf{k}Q$上诱导一个对合，仍记作 ϱ。带有对合 ϱ 的箭图 (Q,ϱ) 称为一个*i*箭图。

令 R_2 表示 $1\prec^{\varepsilon}\succ 1'$ 的路径代数的根基平方零，即 $\varepsilon'\varepsilon=0=\varepsilon\varepsilon'.$

定义一个$\mathbf{k}$-代数

$$\Lambda=\mathbf{k}Q\otimes_{\mathbf{k}}R_2. \tag{3.1}$$

关联于箭图 Q，双框箭图 $Q^\sharp$ 是满足以下条件的箭图

(i) $Q^\sharp$ 的顶点集由两个 Q_0, $\{i,i'\mid i\in Q_0\}$顶点集副本组成；(ii) $Q^\sharp$ 的箭集为

$$\{\alpha: i\to j,\alpha': i'\to j'\mid(\alpha: i\to j)\in Q_1\}\cup\{\varepsilon_i: i\to i',\varepsilon_i': i'\to i\mid i\in Q_0\}.$$

令 $I^\sharp$ 为由以下元素生成的$\mathbf{k}Q^\sharp$ 的可容许理想：

(1)（幂零关系）对于任意 $i\in Q_0$，$\varepsilon_i\varepsilon_i'$, $\varepsilon_i'\varepsilon_i$；(2)（交换关系）对于任意 $(\alpha: i\to j)\in Q_1$，$\varepsilon_j'\alpha'-\alpha\varepsilon_i'$, $\varepsilon_j\alpha-\alpha'\varepsilon_i$。

那么，代数 Λ 可实现为 $\Lambda\cong\mathbf{k}Q^\sharp/I^\sharp$。

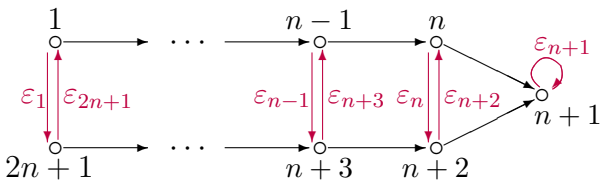
注意：$Q^\sharp$ 具有一个自然的对合，即交换。箭图 Q 的对合 $\varrho^\sharp$ 在 $Q^\sharp$ 上诱导出一个对合，它是交换与 ϱ（作用于子箭图的两个副本上）Q 和 Q' 的 $Q^\sharp$的复合。根据 [LW22a, 定义 2，5]，(Q,ϱ) 的 i箭图代数是 Λ 在 $\varrho^\sharp$作用下的不动点子代数，

$$\Lambda^\imath=\{x\in\Lambda\mid\varrho^\sharp(x)=x\}. \tag{3.2}$$

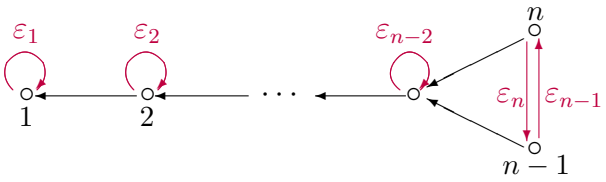
该代数 $\Lambda^\imath$ 可以用某个箭图Q 及其可容许理想 I 来描述，使得 $\Lambda^\imath\cong\mathbf{k}Q/I$；参见 [LW22a，命题 2。6] 我们回顾 Q 和 I 如下：

(i) Q 由 Q 构造而成：若 $\varrho i=i$，则在顶点 $i\in Q_0$ 处添加一个环 ε_i，并且若 $\varrho i\neq i$，则对每个 $i\in Q_0$ 添加一条箭 $\varepsilon_i: i\to\varrho i$；(ii) I 由以下关系生成：(1)（幂零关系）$\varepsilon_i\varepsilon_{\varrho i}$，对任意 $i\in\mathbb{I}$成立；(2)（交换关系）$\varepsilon_i\alpha-\varrho(\alpha)\varepsilon_j$，对 Q_1中的任意箭 $\alpha: j\to i$ 成立。

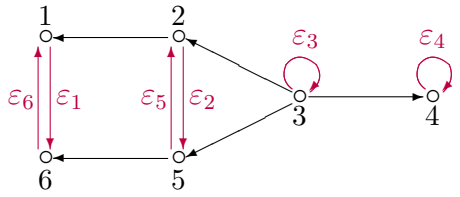
以下箭图是用于描述 Q 与 ADE 型非分裂 iquiver相关的 i箭图代数$\Lambda^\imath$ 的箭图示例；参见 [LW22a]。



(3.3)



(3.4)



(3.5)

例3.1 (对角型 i-箭图)。 设 Q 是一个任意箭图，并且 $Q^{\mathrm{dbl}} = Q \sqcup Q^{\diamond}$，其中 $Q^{\diamond}$ 是 Q 的相同副本，其顶点集为 $\{i^{\diamond} \mid i \in Q_0\}$，箭集为 $\{\alpha^{\diamond} \mid \alpha \in Q_1\}$。令 swap 为 Q^{dbl} 由下式唯一确定的对合：$\mathrm{swap}(i) = i^{\diamond}$，对任意$i \in Q_0$均成立。于是 $(Q^{\mathrm{dbl}},\mathrm{swap})$ 是一个 i箭图，其 i 箭图代数为 Λ；参见 [LW22a，例2。10]。

根据 [LW22a，推论 2。12], $\mathbf{k}Q$ 自然地是$\Lambda^{\imath}$的子代数，也是其商代数。将$\mathbf{k}Q$ 视为 $\Lambda^{\imath}$的子代数，我们得到一个限制函子

$$\mathrm{res} : \mathrm{mod}(\Lambda^{\imath}) \longrightarrow \mathrm{mod}(\mathbf{k}Q).$$

将 $\mathbf{k}Q$ 视为 $\Lambda^{\imath}$ 的商代数，可得到一个拉回函子

$$\iota : \mathrm{mod}(\mathbf{k}Q) \longrightarrow \mathrm{mod}(\Lambda^{\imath}). \tag{3.6}$$

因此，$\mathbf{k}Q$ 的简单模 $S_i(i \in Q_0)$ 自然是一个 $\Lambda^{\imath}$-模。

对每个 $i \in Q_0$，定义一个 $\mathbf{k}$-代数（可视为 $\Lambda^{\imath}$ 的子代数）

$$\mathbb{H}_i := \begin{cases} \mathbf{k}[\varepsilon_i]/(\varepsilon_i^2) & \text{if } \varrho i = i, \\ \mathbf{k}(\ i \underset{\varepsilon_{\varrho i}}{\overset{\varepsilon_i}{\rightleftarrows}} \varrho i\ )/(\varepsilon_i\varepsilon_{\varrho i}, \varepsilon_{\varrho i}\varepsilon_i) & \text{if } \varrho i \neq i. \end{cases} \tag{3.7}$$

对 $i \in \mathbb{I}$，定义 $\mathbb{H}_i$ 上的不可分解模

$$\mathbb{K}_i = \begin{cases} \mathbf{k}[\varepsilon_i]/(\varepsilon_i^2), & \text{if } \varrho i = i; \\ \mathbf{k} \underset{0}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \mathbf{k} \ \text{ on the quiver } \ i \underset{\varepsilon_{\varrho i}}{\overset{\varepsilon_i}{\rightleftarrows}} \varrho i\ , & \text{if } \varrho i \neq i. \end{cases} \tag{3.8}$$

那么，对于 $i \in Q_0$，$\mathbb{K}_i$ 可以视为一个 $\Lambda^{\imath}$-模，并称为广义简单 $\Lambda^{\imath}$-模。

引理*3.2*（[*LW22a*，命题 *3.9*]）。对于任意 $M \in$*mod*$(\Lambda^{\imath})$，以下各项等价：*(i)* $M < \infty$ 的投射维数；*(ii)* $M < \infty$ 的内射维数；*(iii)* $M \leq 1$ 的投射维数；*(iv)* $M \leq 1$ 的内射维数；*(v)* $\mathit{res}_{\mathbb{H}}(M)$ 作为 $\mathbb{H}$-模是投射的。

代数 $\Lambda^{\imath}$ 是 1-戈伦斯坦的；参见 [LW22a，命题 3。9]。我们用 $\mathcal{P}^{\leq 1}(\Lambda^{\imath})$ 表示 $\Lambda^{\imath}$-模中投射维数有限的子范畴（等价地，投射维数至多为 1）。可见 $\mathbb{K}_i \in \mathcal{P}^{\leq 1}(\Lambda^{\imath})$。

3.2. **Hall代数**。设 $\mathcal{A}$ 是一个线性于有限域$\mathbf{k}=\mathbb{F}_q$的本质小的正合范畴。假设 $\mathcal{A}$ 具有有限的态射空间和扩张空间：

$$|\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)|<\infty,\quad |\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}}(A,B)|<\infty,\ \forall A,B\in\mathcal{A}.$$

我们用 Iso($\mathcal{A}$) 表示 $\mathcal{A}$ 中对象的同构类集合。给定对象 X、Y、$Z\in\mathcal{A}$，定义 $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X,Z)_Y\subseteq\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X,Z)$ 为参数化中间项同构于 Y 的扩张的子集。我们将 Ringel-Hall 代数（也称 Hall代数） $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ 定义为 $\mathbb{Q}$-向量空间，其基由 $\mathcal{A}$ 中对象 X 的同构类 $[X]$ 构成，乘法定义如下：

$$[X]\bullet[Z]=\sum_{[Y]\in\mathrm{Iso}(\mathcal{A})}G^Y_{XZ}[Y],\ \text{where } G^Y_{XZ}:=\frac{|\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X,Z)_Y|}{|\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Z)|}. \tag{3.9}$$

众所周知，代数 $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ 是结合且含单位元的。单位元为 $[0]$,其中 0 是 $\mathcal{A}$的零对象；参见 [Rin90、Br13]。

对于任意三个对象 X、Y、Z，令

$$F^Y_{XZ}:=\big|\{L\subseteq Y\mid L\cong Z, Y/L\cong X\}\big|. \tag{3.10}$$

令 Aut(X) 为 $X\in\mathcal{A}$ 的自同构群，并设 $a_X=|\mathrm{Aut}(X)|$。Riedtmann-Peng 公式指出：

$$F^Y_{XZ}=G^Y_{XZ}\cdot\frac{a_Y}{a_Xa_Z}.$$

对于任意 M_1、……、M_n 和 $M\in\mathcal{A}$，我们递归地定义 $G^M_{M_1、\ldots\ldots、M_n}$ 和 $F^M_{M_1、\ldots\ldots、M_n}$：

$$G^M_{M_1,\ldots,M_n}:=\sum_{[L]}G^M_{M_1,L}G^L_{M_2,\ldots,M_n},\qquad F^M_{M_1,\ldots,M_n}:=\sum_{[L]}F^M_{M_1,L}F^L_{M_2,\ldots,M_n}. \tag{3.11}$$

3.3. **Hall代数与iHall代数**。对于一个（Dynkin）箭图 Q，我们用 $\langle\cdot,\cdot\rangle_Q$ 表示 mod(kQ) 的 Euler形式。定义

$$(x,y)_Q=\langle x,y\rangle_Q+\langle y,x\rangle_Q.$$

特别地，对于任意 $i,j\in\mathbb{I}$，$(S_i,S_j)_Q=c_{ij}$ 是 Cartan矩阵 C 的元素。我们将 Grothendieck群 K_0(mod(kQ)) 与根格 $\mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$ 等同，并对任意 kQ- 模 M，用 $d^M=(d^M_i)_{i\in\mathbb{I}}\in\mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$ 表示其在 K_0(mod(kQ)) 中对应的类。

令 $\mathcal{H}(\Lambda^\imath)$ 为 mod($\Lambda^\imath$) 的 Hall代数。设 v 为一个固定的平方根。我们将扭曲Hall代数 $\widetilde{\mathcal{H}}(\Lambda^\imath)$ 定义为一个 $\mathbb{Q}(\mathrm{v}^{1/2})$-代数，其向量空间与 $\mathcal{H}(\Lambda^\imath)$ 相同，乘法定义为

$$[M]*[N]=\mathrm{v}^{\langle \mathrm{res}\,M,\mathrm{res}\,N\rangle_Q}[M]\bullet[N].$$

令 $\mathcal{I}$ 为由所有差 $[L]-[K\oplus M]$ 生成的 $\widetilde{\mathcal{H}}(\Lambda^\imath)$ 的理想，其中存在一个短正合序列

$$0\longrightarrow K\longrightarrow L\longrightarrow M\longrightarrow 0 \tag{3.12}$$

其中 $K\in\mathcal{P}^{\leq 1}(\Lambda^\imath)$。设

$$\mathcal{S}:=\{a[K]\in\widetilde{\mathcal{H}}(\Lambda^\imath)/\mathcal{I}\mid a\in\mathbb{Q}(\mathrm{v}^{1/2})^\times,\mathrm{proj.dim}\,K\leq 1\}. \tag{3.13}$$

根据 [LP21、LW22a], , 相对于 $\mathcal{H}(\Lambda^\imath)/\mathcal{I}$ 的右局部化 $\mathcal{S}$ 存在，记作 $\widetilde{\mathcal{H}}(\mathbf{k}Q, \varrho)$ 或 $\mathcal{SDH}(\Lambda^\imath)$，称为 mod($\Lambda^\imath$) 的 iHall代数（也称为扭曲的半导出 Ringel-Hall代数）。

我们有 $[\mathbb{K}_i] * [\mathbb{K}_j] = [\mathbb{K}_j] * [\mathbb{K}_i] = [\mathbb{K}_i \oplus \mathbb{K}_j]$ 在 $\mathcal{H}(\mathbf{k}Q, \varrho)$ 对任意 $i, j \in \mathbb{I}$；参见 [LW22a, 引理 4。7]。对任意 $\alpha = \sum_{i\in\mathbb{I}} a_i\alpha_i \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}$，我们在 $\mathcal{H}(\mathbf{k}Q, \varrho)$ 中定义：

$$[\mathbb{K}_\alpha] = [\oplus_{i\in\mathbb{I}}\mathbb{K}_i^{\oplus a_i}] = \prod_{i\in\mathbb{I}}[\mathbb{K}_i]^{a_i}.$$

类似地，可以定义 $[\mathbb{K}_\alpha]$ 在 $\mathcal{H}(\mathbf{k}Q, \varrho)$ 中，对于 $\alpha \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$。

此外，我们有

$$[\mathbb{K}_\alpha] * [X] = \mathbf{v}^{(\varrho\alpha, \widehat{X})_Q - (\alpha, \widehat{X})_Q}[X] * [\mathbb{K}_\alpha], \quad \forall X \in \mathrm{mod}(\mathbf{k}Q), \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}. \tag{3.14}$$

引理 3.3 (参见 [LW22a, 命题 4。9])。 代数 $\mathcal{H}(\mathbf{k}Q, \varrho)$ 有如下（*Hall*）基：

$$\{[X] * [\mathbb{K}_\alpha] \mid X \in \mathrm{mod}(\mathbf{k}Q) \subseteq \mathrm{mod}(\Lambda^\imath), \alpha \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}\}. \tag{3.15}$$

令 $\mathcal{T}(\mathbf{k}Q, \varrho)$ 为由 $[\mathbb{K}_\alpha], \alpha \in K_0(\mathrm{mod}(\mathbf{k}Q))$ 生成的 $\mathcal{H}(\mathbf{k}Q, \varrho)$ 的子代数；它是关于 $[\mathbb{K}_i]$ 的劳朗多项式代数，其中 $i \in \mathbb{I}$。

命题 3.4 ([LR24，命题 3.3])。 对于任意 A， $B \in \mathrm{mod}(\mathbf{k}Q) \subseteq \mathrm{mod}(\Lambda^\imath)$，我们有属于 $\mathcal{H}(\mathbf{k}Q, \varrho)$

$$[A] * [B] = \sum_{[L],[M],[N],[X]} \mathbf{v}^{\langle X,M\rangle - \langle \varrho X, M\rangle - \langle A, B\rangle} q^{\langle N, L\rangle} F^M_{N,L} F^A_{X,N} F^B_{L,\varrho X} \frac{a_L a_N a_X}{a_M} \cdot [K_{\widehat{X}}] * [M]$$

其中求和遍历 $[L], [M], [N], [X] \in \mathrm{Iso}(\mathrm{mod}(\mathbf{k}Q))$。

引理 3.5 (参见 [LW22a，定理 7.7])。 设 (Q, ϱ) 是一个 *Dynkin i*箭图。则有如下同构 $\widetilde{\psi}$：$\mathbf{U}^\imath|_{v=\mathbf{v}} \xrightarrow{\simeq} \widetilde{\mathcal{H}}(\mathbf{k}Q, \varrho)$，它是 $\mathbb{Q}(\mathbf{v}^{1/2})$- 代数，并将

$$B_i \mapsto \mathbf{v}^{-\frac{1}{2}}[S_i], \qquad \tilde{k}_i \mapsto \begin{cases} [\mathbb{K}_i] & \text{if } \varrho i \neq i, \\ \mathbf{v}^{-1}[\mathbb{K}_i] & \text{if } \varrho i = i. \end{cases} \tag{3.16}$$

以这种方式，对于 $i \in \mathbb{I}$，我们有 $\psi(\mathbb{K}_i) = [\mathbb{K}_i]$，这也说明了该记号的合理性 .

正如例 2.4 所证，我们可以将代数 Λ （3.1）视为（Q^{dbl}，swap）的 i箭图代数。由引理 3.5，我们得到以下结果。

引理 3.6 （Bridgeland 定理的改述）。 设 Q 是一个 *Dynkin*箭图。那么我们有以下 $\mathbb{Q}$（$\mathbf{v}^{1/2}$）- 代数的同构

$$\widetilde{\psi}^{\mathrm{dbl}} : \widetilde{\mathbf{U}}|_{v=\mathbf{v}} \xrightarrow{\simeq} \widetilde{\mathcal{H}}(\mathbf{k}Q^{\mathrm{dbl}}, \mathrm{swap}),$$
$$E_i \mapsto \mathbf{v}^{-\frac{1}{2}}[S_i], \qquad F_i \mapsto \mathbf{v}^{-\frac{1}{2}}[S_{i^\diamond}], \qquad K_i \mapsto [\mathbb{K}_{i^\diamond}], \qquad K_i' \mapsto [\mathbb{K}_i].$$

3.4. 泛型 iHall 代数。对于一个 Dynkin i箭图（Q, ϱ），我们回顾在 [LW22a, §9.3] 中定义的泛型 iHall 代数。回忆一下，Φ^+ 是正根的集合。对于任意 $\beta \in \Phi^+$，记 $M_q(\beta)$ 为其对应的不可分解 $\mathbf{k}Q$-模，即 $\dim M_q(\beta) = \beta$。令 $\mathfrak{P} := \mathfrak{P}(Q)$ 为函数 $\lambda\colon \Phi^+ \to \mathbb{N}$ 的集合。那么这些模

$$M_q(\lambda) := \bigoplus_{\beta\in\Phi^+} M_q(\beta)^{\oplus\lambda(\beta)}, \quad \text{for } \lambda \in \mathfrak{P}, \tag{3.17}$$

给出一组完整的$\mathbf{k}Q$-模同构类。我们将 $d^\lambda = (d_i^\lambda)_{i\in\mathbb{I}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}$ 记作 $M_q(\lambda)$的维数向量。类似地，对于 $\beta \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$，我们也记作 $\beta = (d_i^\beta)_{i\in\mathbb{I}}$。

对于任意的 λ，μ，$\nu \in \mathfrak{P}$，由 [Rin90], 可知，存在多项式 $f^\nu_{\lambda,\mu}(v)\, g^\nu_{\lambda,\mu}(v)\ a_\lambda(v) \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$使得

$$F^{M_q(\nu)}_{M_q(\lambda),M_q(\mu)} = f^\nu_{\lambda,\mu}(\mathfrak{v}), \quad G^{M_q(\nu)}_{M_q(\lambda),M_q(\mu)} = g^\nu_{\lambda,\mu}(\mathfrak{v}), \quad a_{M_q(\lambda)} = a_\lambda(\mathfrak{v}).$$

特别地，我们有

$$f^\nu_{\lambda,\mu}(v) = g^\nu_{\lambda,\mu}(v)\frac{a_\nu(v)}{a_\lambda(v)\cdot a_\mu(v)}.$$

受（3.11）启发，我们可以定义

$$f^\lambda_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}(v), \quad g^\lambda_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}(v) \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}]. \tag{3.18}$$

对于 $(\alpha,\ \nu)$，$(\beta,\ \mu) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}} \times \mathfrak{P}$，存在一个多项式 $\varphi^{\lambda,\ \gamma}_{\mu,\alpha;\ \nu,\ \beta}(v) \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ 使得

$$\big([\mathbb{K}_\alpha] * [M_q(\mu)]\big) * \big([\mathbb{K}_\beta] * [M_q(\nu)]\big) = \sum_{\lambda\in\mathfrak{P},\gamma\in\mathbb{Z}^{\mathbb{I}}} \varphi^{\lambda,\gamma}_{\mu,\alpha;\nu,\beta}(\mathfrak{v})[\mathbb{K}_\gamma] * [M_q(\lambda)] \tag{3.19}$$

~ ~在 $\mathcal{H}$（$\mathbf{k}Q$，ϱ）；参见 [LW22a，引理 9。6]。泛型 iHall 代数 $\mathcal{H}(\mathrm{Q}\ \varrho)$ 定义为 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-线性空间，其一组基为 $\{\mathbb{K}_\alpha * \mathfrak{u}_\lambda \mid \alpha \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}, \lambda \in \mathfrak{P}\}$，乘法定义为

$$(\mathbb{K}_\alpha * \mathfrak{u}_\mu) * (\mathbb{K}_\beta * \mathfrak{u}_\nu) = \sum_{\lambda\in\mathfrak{P},\gamma\in\mathbb{Z}^{\mathbb{I}}} \varphi^{\lambda,\gamma}_{\mu,\alpha;\nu,\beta}(v)\mathbb{K}_\gamma * \mathfrak{u}_\lambda. \tag{3.20}$$

若 λ 是 $\beta \in \Phi^+$的特征函数，我们也将 $\mathfrak{u}_\lambda$ 记作 $\mathfrak{u}_\beta$。

由引理 3.5和3.6（另见 [LW22a，定理 9。8]），我们得到 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-代数之间的同构

$$\widetilde{\psi} : \widetilde{\mathbf{U}}^\imath \longrightarrow \widetilde{\mathcal{H}}(Q, \varrho), \qquad \widetilde{\psi}^{\mathrm{dbl}} : \widetilde{\mathbf{U}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{H}}(Q^{\mathrm{dbl}}, \mathrm{swap}).$$

4. Hall algebra realization of quantum symmetric pairs

~ ~本节将给出 $\mathcal{H}(Q,\ \varrho)$ 到 $\mathcal{H}(Q^{\mathrm{dbl}},\ \mathrm{swap})$ 的嵌入，从而实现~ ~自然嵌入 $\imath : \mathbf{U}^\imath \to \mathbf{U}$，随后在 Hall代数的框架下解释~ ~$\mathbf{U}^\imath$ 在 $\mathbf{U}$ 中的余理想子代数结构。我们还将给出$\widetilde{\mathcal{H}}(Q^{\mathrm{dbl}},\ \mathrm{swap})$的Hopf代数结构，它作为Hopf代数与 ~$\mathbf{U}$ 同构。

4.1. iHall代数与iHopf代数。设$\mathbf{B}$为由E_i、K_i、$i\in\mathbb{I}$生成的$\mathbf{U}$的Borel 子代数。那么$\mathbf{B}$ 是一个Hopf子代数。

Let $\widetilde{\mathbf{B}}(Q)$ be the subalgebra of $\widetilde{\mathcal{H}}(Q,\varrho)$ generated by $[S_i]$, $[\mathbb{K}_{i^\diamond}]$, $i\in\mathbb{I}$; see Lemma 3.6. We denote by $\mathbf{B}(Q)$ the algebra $\widetilde{\mathbf{B}}(Q)$ with the twisted multiplication. We denote by $\mathbf{B}(\mathbf{k}Q)$ the algebra $\mathbf{B}(Q)$ with the trivial braiding (and by $\widetilde{\mathbf{B}}(Q)$ the algebra $\widetilde{\mathbf{B}}(Q)$ with the trivial braiding). We denote the multiplication of $\mathbf{B}(Q)$ (and of $\widetilde{\mathbf{B}}(Q)$) by $\cdot$.

对于任意 $\lambda\in\mathfrak{P}$，记作

$$\mathbb{K}_\lambda:=\prod_{i\in\mathbb{I}}\mathbb{K}_i^{d_i^\lambda}\in\widetilde{\mathcal{H}}(Q,\varrho),$$

对于任意 $\alpha\in\mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$，$\mathbb{K}_{\alpha+\lambda}$ 表示 $\mathbb{K}_\alpha\mathbb{K}_\lambda$。根据 [Gr95，X97]，我们知道 $\mathbf{B}(Q)$ 是一个 Hopf 代数，其余乘法为 Δ，余单位为 ε，antipode 为 S，对任意 $\lambda\in\mathfrak{P}$，$\alpha\in\mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$:

$$\begin{aligned}
\Delta(\mathbf{u}_\lambda)=&\sum_{\mu,\nu\in\mathfrak{P}}v^{\langle\mu,\nu\rangle_Q}f^\lambda_{\mu,\nu}(v)\mathbf{u}_\mu\cdot\mathbb{K}_{\nu^\diamond}\otimes\mathbf{u}_\nu,\quad \Delta(\mathbb{K}_{\alpha^\diamond})=\mathbb{K}_{\alpha^\diamond}\otimes\mathbb{K}_{\alpha^\diamond},\quad \forall\alpha\in\mathbb{Z}^{\mathbb{I}};\\
\varepsilon(\mathbf{u}_\lambda)=&\delta_{\lambda,0},\quad \varepsilon(\mathbb{K}_{\alpha^\diamond})=1,\quad S(\mathbb{K}_{\alpha^\diamond})=\mathbb{K}_{\alpha^\diamond}^{-1};\\
S(\mathbf{u}_\lambda)=&\sum_{m\geq 0}(-1)^m\sum_{\substack{\mu\in\mathfrak{P}\\ \lambda_1,\dots,\lambda_m\in\mathfrak{P}\setminus\{0\}}}v^{2\sum_{k<l}\langle\lambda_k,\lambda_l\rangle_Q}f^\lambda_{\lambda_1,\dots,\lambda_m}(v)g^\mu_{\lambda_1,\dots,\lambda_m}(v)\mathbb{K}_{\lambda^\diamond}^{-1}\cdot\mathbf{u}_\mu.
\end{aligned}$$

此处及下文中，对于 $m=0$，我们指 $f^\lambda_{\lambda_1,\dots,\lambda_m}(v)=g^\lambda_{\lambda_1,\dots,\lambda_m}(v)=\delta_{\lambda,0}$。

由 [Gr95、Rin96], 可知，在 $\varphi(-,-)$ 上存在一个Hopf配对 $\widetilde{\mathbf{B}}(Q)$，其定义为

$$\varphi(\mathbf{u}_\lambda\cdot\mathbb{K}_{\alpha^\diamond},\mathbf{u}_\mu\cdot\mathbb{K}_{\beta^\diamond})=v^{(\alpha,\beta)_Q}\delta_{\lambda,\mu}\cdot a_\lambda(v). \tag{4.1}$$

由 [CLPRW，我们可以在$\mathbf{B}(Q)$、$*$上赋予新的结合代数结构$\mathbf{B}(Q)$，其乘法定义为

$$a*b:=\sum\varphi(\varrho b_{(2)},a_{(1)})\cdot a_{(2)}b_{(1)},\quad \forall a,b\in\widetilde{\mathbf{B}}(Q), \tag{4.2}$$

其中，$\Delta(a)=\sum a_{(1)}\otimes a_{(2)}$、$\Delta(b)=\sum b_{(1)}\otimes b_{(2)}$是Sweedler记号。我们将这个新代数$(\mathbf{B}(Q),\ *)$记作$\mathbf{B}^\imath_\varrho(Q)$。

命题4.1。 存在一个代数同构

$$\widetilde{\Phi}:\widetilde{\mathcal{H}}(Q,\varrho)\longrightarrow\widetilde{\mathbf{B}}^\imath_\varrho(Q) \tag{4.3}$$

$$\mathbf{u}_\lambda*\mathbb{K}_\alpha\mapsto v^{(\lambda,\alpha)_Q+\langle\alpha,\varrho\alpha\rangle_Q}\mathbf{u}_\lambda\cdot\mathbb{K}_{\varrho\alpha^\diamond},\quad \forall\lambda\in\mathfrak{P},\alpha\in\mathbb{Z}^{\mathbb{I}}. \tag{4.4}$$

证明。 由引理3.3，Φ 是向量空间上的同构。还需证明 Φ保持乘法。利用命题3.4，在 $\mathcal{H}(Q,\ \varrho)$ 中有

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u}_\lambda*\mathbb{K}_\alpha)*(\mathbf{u}_\mu*\mathbb{K}_\beta)=&v^{(\varrho\alpha,\mu)_Q-(\alpha,\mu)_Q}\mathbf{u}_\lambda*\mathbf{u}_\mu*\mathbb{K}_{\alpha+\beta}\\
=&\sum_{\nu,\gamma,\delta,\theta\in\mathfrak{P}}v^{\Xi}a_\delta(v)f^\lambda_{\delta,\nu}(v)f^\mu_{\gamma,\varrho\delta}(v)g^\theta_{\nu,\gamma}(v)\mathbf{u}_\theta*\mathbb{K}_{\alpha+\beta+\delta},
\end{aligned}$$

其中

$$\Xi=(\varrho\alpha,\mu)_Q-(\alpha,\mu)_Q+\langle\theta,\varrho\delta\rangle_Q-\langle\theta,\delta\rangle_Q-\langle\lambda,\mu\rangle_Q+2\langle\nu,\gamma\rangle_Q.$$

另一方面，在 $\mathbf{B}^{\imath}_{\varrho}(Q)$

$$
\begin{aligned}
&(\mathfrak{u}_\lambda \cdot \mathbb{K}_{\varrho\alpha^\diamond}) * (\mathfrak{u}_\mu \cdot \mathbb{K}_{\varrho\beta^\diamond}) \\
&= \sum_{\nu,\gamma,\delta\in\mathfrak{P}} v^{\langle\delta,\nu\rangle_Q+\langle\gamma,\varrho\delta\rangle_Q+(\beta,\nu+\varrho\alpha)_Q} a_\delta(v) f^\lambda_{\delta,\nu}(v) f^\mu_{\gamma,\varrho\delta}(v) \mathfrak{u}_\nu \cdot \mathbb{K}_{\varrho\alpha^\diamond} \cdot \mathfrak{u}_\gamma \cdot \mathbb{K}_{\varrho\beta^\diamond+\varrho\delta^\diamond} \\
&= \sum_{\nu,\gamma,\delta,\theta\in\mathfrak{P}} v^{\Xi'} a_\delta(v) f^\lambda_{\delta,\nu}(v) f^\mu_{\gamma,\varrho\delta}(v) g^\theta_{\nu,\gamma}(v) \mathfrak{u}_\theta \cdot \mathbb{K}_{\varrho\alpha^\diamond+\varrho\beta^\diamond+\varrho\delta^\diamond},
\end{aligned}
$$

其中

$$\Xi' = \langle\delta,\nu\rangle_Q + \langle\gamma,\varrho\delta\rangle_Q + \langle\nu,\gamma\rangle_Q + (\varrho\beta,\varrho\nu+\alpha)_Q + (\alpha,\varrho\gamma)_Q.$$

所需结论可由以下观察得到：

$$\Xi - \Xi' = (\lambda,\alpha)_Q + \langle\alpha,\varrho\alpha\rangle_Q + (\mu,\beta)_Q + \langle\beta,\varrho\beta\rangle_Q - (\theta,\alpha+\beta+\delta)_Q - \langle\alpha+\beta+\delta,\varrho(\alpha+\beta+\delta)\rangle_Q$$

if $\lambda = \nu+\delta,\ \mu = \gamma+\varrho\delta,\ \theta = \nu+\gamma$. The proof is completed. □

4.2. **Bridgeland 的 Hopf代数同构**。 考虑张量代数 $\mathbf{B}(Q)\otimes\widetilde{\mathbf{B}}(Q)$。根据 [CLPRW25], ，我们可以在 $\mathbf{B}(Q)\otimes\widetilde{\mathbf{B}}(Q)$ 上定义一种新的结合代数结构，其乘法定义如下：

$$(a\otimes b) * (c\otimes d) = \sum \varphi(a_{(1)},d_{(2)})\cdot\varphi(c_{(2)},b_{(1)})\cdot a_{(2)}c_{(1)}\otimes b_{(2)}d_{(1)}, \qquad \forall a,b,c,d\in\widetilde{\mathbf{B}}(Q).$$

这个新代数记作 $D(\mathbf{B}(Q))$。事实上， $D(\mathbf{B}(Q))$ 同构于相对于 $\widetilde{\mathbf{B}}$ 的 Drinfeld 双代数 $\mathbf{B}(Q)$，其中 $\varphi(-,\ -)$；参见 [CLPRW25，命题 2。8]。

引理 4.2 ([CLPRW25，命题 2。7])。 可以将 $D(\mathbf{B}(Q))$ 构造成一个 *Hopf*代数，其余乘法、余单位和 *antipode* 定义如下：

$$
\begin{aligned}
\Delta^{\imath}(a\otimes b) &= \sum \varphi(a_{(2)},b_{(2)})\cdot(a_{(1)}\otimes b_{(3)})\otimes(a_{(3)}\otimes b_{(1)}), \\
\varepsilon^{\imath}(a\otimes b) &= \varphi(a,S^{-1}(b)), \\
S^{\imath}(a\otimes b) &= \sum \varphi(a_{(1)},S^{-1}(b_{(3)}))\cdot\varphi(a_{(2)},b_{(2)})\cdot S(a_{(3)})\otimes S^{-1}(b_{(1)}).
\end{aligned}
$$

对于任意 $N\in\mathbf{mod}(\mathbf{k}Q)$，记 $N^\diamond$ 为相应的 $\mathbf{k}Q^\diamond$ 模。类似地，对于任意 $\lambda\in\mathfrak{P}$，我们可以定义 $\mathfrak{u}_{\lambda^\diamond}$。我们用 $\mathfrak{u}_\lambda\oplus\mathfrak{u}_{\mu^\diamond}\in\widetilde{\mathcal{H}}(Q^{\mathrm{dbl}},\ \mathrm{swap})$ 表示 $[M_q(\lambda)\ \oplus M_q(\mu)^\diamond]\in\widetilde{\mathcal{H}}(\mathbf{k}Q^{\mathrm{dbl}},\ \mathrm{swap})$ 中相应的元素。

命题 4.3。 存在一个代数同构

$$\widetilde{\Phi}^{\mathrm{dbl}} : \widetilde{\mathcal{H}}(Q^{\mathrm{dbl}},\mathrm{swap}) \longrightarrow D(\widetilde{\mathbf{B}}(Q)) \tag{4.5}$$

$$\mathfrak{u}_\lambda\oplus\mathfrak{u}_{\mu^\diamond} * \mathbb{K}_\alpha * \mathbb{K}_{\beta^\diamond} \mapsto v^{(\mu+\alpha,\lambda+\beta)_Q-(\lambda,\mu)_Q}\mathfrak{u}_\lambda\cdot\mathbb{K}_{\beta^\diamond}\otimes\mathfrak{u}_\mu\cdot\mathbb{K}_{\alpha^\diamond}, \tag{4.6}$$

对任意 $\lambda,\mu\in\mathfrak{P},\alpha,\beta\in\mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$ 均成立。

证明。 根据引理 3.3，我们只需证明 Φ^{dbl} 保持乘法。命题 3.4 给出了 $\mathcal{H}$（Q^{dbl}，swap）的如下乘法公式：

$$
\begin{aligned}
&(\mathfrak{u}_{\lambda_1}\oplus\mathfrak{u}_{\mu_1^\diamond} * \mathbb{K}_{\alpha_1} * \mathbb{K}_{\beta_1^\diamond}) * (\mathfrak{u}_{\lambda_2}\oplus\mathfrak{u}_{\mu_2^\diamond} * \mathbb{K}_{\alpha_2} * \mathbb{K}_{\beta_2^\diamond}) \\
&= \sum_{\lambda,\mu\in\mathfrak{P}} \sum_{\substack{\nu_1,\nu_2,\gamma_1,\gamma_2,\\ \delta_1,\delta_2\in\mathfrak{P}}} v^{\Xi} a_{\delta_1}(v) a_{\delta_2}(v) f^{\lambda_1}_{\delta_1,\nu_1}(v) f^{\mu_1}_{\delta_2,\nu_2}(v) f^{\lambda_2}_{\gamma_2,\delta_2}(v) f^{\mu_2}_{\gamma_1,\delta_1}(v) g^{\lambda}_{\nu_1,\gamma_2}(v) g^{\mu}_{\nu_2,\gamma_1}(v)
\end{aligned}
$$

$$\cdot\, \mathfrak{u}_\lambda \oplus \mathfrak{u}_{\mu^\diamond} * \mathbb{K}_{\alpha_1+\alpha_2+\delta_1} * \mathbb{K}_{\beta_1^\diamond+\beta_2^\diamond+\delta_2^\diamond},$$

其中

$$\begin{aligned}\Xi =& \langle \delta_1, \nu_1\rangle_Q + \langle \delta_2, \nu_2\rangle_Q + \langle \gamma_1, \delta_1\rangle_Q + \langle \gamma_2, \delta_2\rangle_Q + \langle \nu_1, \gamma_2\rangle_Q + \langle \nu_2, \gamma_1\rangle_Q \\ &+ (\lambda, \mu)_Q - (\lambda + \delta_2, \mu + \delta_1)_Q - (\alpha_1 - \beta_1, \lambda_2 - \mu_2)_Q.\end{aligned}$$

~直接计算可得，在 $D(\mathbf{B}(Q))$

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{u}_{\lambda_1} \cdot \mathbb{K}_{\beta_1^\diamond} \otimes \mathfrak{u}_{\mu_1} \cdot \mathbb{K}_{\alpha_1^\diamond}) * (\mathfrak{u}_{\lambda_2} \cdot \mathbb{K}_{\beta_2^\diamond} \otimes \mathfrak{u}_{\mu_2} \cdot \mathbb{K}_{\alpha_2^\diamond}) \\ =& \sum_{\substack{\nu_1,\nu_2,\gamma_1,\gamma_2,\\ \delta_1,\delta_2\in\mathfrak{P},}} v^{\langle \delta_2,\nu_2\rangle_Q+\langle \gamma_2,\delta_2\rangle_Q+\langle \delta_1,\nu_1\rangle_Q+\langle \gamma_1,\delta_1\rangle_Q+(\nu_1+\beta_1,\alpha_2)_Q+(\nu_2+\alpha_1,\beta_2)_Q} a_{\delta_1}(v)a_{\delta_2}(v)f^{\mu_1}_{\delta_2,\nu_2}(v)f^{\lambda_2}_{\gamma_2,\delta_2}(v) \\ &\cdot f^{\lambda_1}_{\delta_1,\nu_1}(v)f^{\mu_2}_{\gamma_1,\delta_1}(v)\mathfrak{u}_{\nu_1} \cdot \mathbb{K}_{\beta_1^\diamond} \cdot \mathfrak{u}_{\gamma_2} \cdot \mathbb{K}_{\beta_2^\diamond+\delta_2^\diamond} \otimes \mathfrak{u}_{\nu_2} \cdot \mathbb{K}_{\alpha_1^\diamond} \cdot \mathfrak{u}_{\gamma_1} \cdot \mathbb{K}_{\alpha_2^\diamond+\delta_1^\diamond} \\ =& \sum_{\lambda,\mu\in\mathfrak{P}} \sum_{\substack{\nu_1,\nu_2,\gamma_1,\gamma_2,\\ \delta_1,\delta_2\in\mathfrak{P}}} v^{\Xi'} a_{\delta_1}(v)a_{\delta_2}(v)f^{\mu_1}_{\delta_2,\nu_2}(v)f^{\lambda_2}_{\gamma_2,\delta_2}(v)f^{\lambda_1}_{\delta_1,\nu_1}(v)f^{\mu_2}_{\gamma_1,\delta_1}(v)g^{\lambda}_{\nu_1,\gamma_2}(v)g^{\mu}_{\nu_2,\gamma_1}(v) \\ &\cdot \mathfrak{u}_\lambda \cdot \mathbb{K}_{\beta_1^\diamond+\beta_2^\diamond+\delta_2^\diamond} \otimes \mathfrak{u}_\mu \cdot \mathbb{K}_{\alpha_1^\diamond+\alpha_2^\diamond+\delta_1^\diamond},\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\Xi' =& \langle \delta_1, \nu_1\rangle_Q + \langle \delta_2, \nu_2\rangle_Q + \langle \gamma_1, \delta_1\rangle_Q + \langle \gamma_2, \delta_2\rangle_Q + \langle \nu_1, \gamma_2\rangle_Q + \langle \nu_2, \gamma_1\rangle_Q \\ &+ (\alpha_1, \gamma_1)_Q + (\beta_1, \gamma_2)_Q + (\nu_2 + \alpha_1, \beta_2)_Q + (\nu_1 + \beta_1, \alpha_2)_Q.\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}\Xi - \Xi' =& (\mu_1 + \alpha_1, \lambda_1 + \beta_1)_Q - (\lambda_1, \mu_1)_Q + (\mu_2 + \alpha_2, \lambda_2 + \beta_2)_Q - (\lambda_2, \mu_2)_Q \\ &- (\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1, \lambda + \beta_1 + \beta_2 + \delta_2)_Q + (\lambda, \mu)_Q\end{aligned}$$

if

$$\lambda_1 = \delta_1 + \nu_1,\ \mu_1 = \delta_2 + \nu_2,\ \lambda_2 = \gamma_2 + \delta_2,\ \mu_2 = \gamma_1 + \delta_1,\ \lambda = \nu_1 + \gamma_2,\ \mu = \nu_2 + \gamma_1,$$

证明完成。 □

~现在，我们可以给出 $\mathcal{H}(Q^{\mathrm{dbl}}$,swap) 的 Hopf代数结构。

~**定理 4.4.** $\mathcal{H}(Q^{\mathrm{dbl}}$,交换) 是一个 ***Hopf***代数，其余乘法、余单位和 ***antipode*** 定义如下，对任意 $\lambda, \mu \in \mathfrak{P}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$,

$$\Delta(\mathbb{K}_\alpha) = \mathbb{K}_\alpha \otimes \mathbb{K}_\alpha, \qquad \Delta(\mathbb{K}_{\alpha^\diamond}) = \mathbb{K}_{\alpha^\diamond} \otimes \mathbb{K}_{\alpha^\diamond}, \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}\Delta(\mathfrak{u}_\lambda \oplus \mathfrak{u}_{\mu^\diamond}) =& \sum_{\substack{\lambda_1,\lambda_2,\\ \mu_1,\mu_2,\nu\in\mathfrak{P}}} v^{\langle \lambda_1,\lambda_2+\nu\rangle_Q+\langle \mu_1,\mu_2+\nu\rangle_Q-\langle \lambda_2+\mu_2,\nu\rangle_Q-(\lambda_2,\mu_2)_Q} \cdot a_\nu(v) \cdot f^{\lambda}_{\lambda_1,\nu,\lambda_2}(v) \\ &\cdot f^{\mu}_{\mu_1,\nu,\mu_2}(v)(\mathfrak{u}_{\lambda_1} \oplus \mathfrak{u}_{\mu_2^\diamond} * \mathbb{K}_{\lambda_2^\diamond+\nu^\diamond}) \otimes (\mathfrak{u}_{\lambda_2} \oplus \mathfrak{u}_{\mu_1^\diamond} * \mathbb{K}_{\mu_2+\nu}),\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\varepsilon(\mathbb{K}_\alpha) = 1 = \varepsilon(\mathbb{K}_{\alpha^\diamond}), \tag{4.9}$$

$$\varepsilon(\mathfrak{u}_\lambda \oplus \mathfrak{u}_{\mu^\diamond}) = a_\lambda(v) \cdot \sum_{m\geq 0}(-1)^m \sum_{\mu_1\ldots,\mu_m\in\mathfrak{P}\setminus\{0\}} v^{\sum_{k<l}(\mu_k,\mu_l)_Q} g^{\lambda}_{\mu_m,\ldots,\mu_1}(v) \cdot f^{\mu}_{\mu_1,\ldots,\mu_m}(v), \tag{4.10}$$

$$S(\mathbb{K}_\alpha) = \mathbb{K}_\alpha^{-1}, \qquad S(\mathbb{K}_{\alpha^\diamond}) = \mathbb{K}_{\alpha^\diamond}^{-1}, \tag{4.11}$$

$$S(\mathfrak{u}_\lambda \oplus \mathfrak{u}_{\mu^\diamond}) = \sum_{\nu,\omega,\pi\in\mathfrak{P}} \sum_{r,s,t\geq 0} \sum_{\gamma_1,\dots,\gamma_r\in\mathfrak{P}\setminus\{0\}} \sum_{\delta_1,\dots,\delta_s\in\mathfrak{P}\setminus\{0\}} \sum_{\theta_1,\dots,\theta_t\in\mathfrak{P}\setminus\{0\}} (-1)^{r+s+t} v^{\langle\lambda-\omega,\omega-\pi\rangle_Q} \tag{4.12}$$
$$\cdot\, v^{-(\omega,\omega-\pi)_Q+\sum_{k<l}(\gamma_k,\gamma_l)_Q+2\sum_{k<l}\langle\delta_k,\delta_l\rangle_Q+\sum_{k<l}(\theta_k,\theta_l)_Q} \cdot a_\nu(v)\cdot a_{\gamma_1}(v)\cdots a_{\gamma_r}(v)$$
$$\cdot\, f^\lambda_{\gamma_r,\dots,\gamma_1,\nu,\delta_1,\dots,\delta_s}(v) f^\mu_{\theta_1,\dots,\theta_t,\nu,\gamma_1,\dots,\gamma_r}(v) g^\omega_{\delta_1,\dots,\delta_s}(v) g^\pi_{\theta_t,\dots,\theta_1}(v) \mathfrak{u}_\omega \oplus \mathfrak{u}_{\pi^\diamond} * \mathbb{K}_\mu^{-1} * \mathbb{K}_{\omega^\diamond}^{-1}.$$

~证明. 只需验证此处定义的 $\mathcal{H}(Q^{\mathrm{dbl}}$,交换) 的霍普夫结构，是通过命题 $D(\widetilde{\mathbf{B}}(Q))$ 中的代数同构 $\widetilde{\Phi}^{\mathrm{dbl}}$ 推导得出的。4.3。

对于（4.8），我们计算得

$$\Delta^\imath \circ \widetilde{\Phi}^{\mathrm{dbl}}(\mathfrak{u}_\lambda \oplus \mathfrak{u}_{\mu^\diamond}) = \Delta^\imath(\mathfrak{u}_\lambda \otimes \mathfrak{u}_\mu)$$
$$= \sum_{\substack{\lambda_1,\lambda_2,\\ \mu_1,\mu_2,\nu\in\mathfrak{P}}} v^{\langle\lambda_1,\lambda_2+\nu\rangle_Q+\langle\nu,\lambda_2\rangle_Q+\langle\mu_1,\mu_2+\nu\rangle_Q+\langle\nu,\mu_2\rangle_Q+(\mu_2,\lambda_2)_Q} \cdot a_\nu(v)$$
$$\cdot\, f^\lambda_{\lambda_1,\nu,\lambda_2}(v)\cdot f^\mu_{\mu_1,\nu,\mu_2}(v)(\mathfrak{u}_{\lambda_1}\cdot\mathbb{K}_{\lambda_2^\diamond+\nu^\diamond}\otimes\mathfrak{u}_{\mu_2})\otimes(\mathfrak{u}_{\lambda_2}\otimes\mathfrak{u}_{\mu_1}\cdot\mathbb{K}_{\mu_2^\diamond+\nu^\diamond}).$$

~然后，应用（4.8），将$\Phi^{\mathrm{dbl}}\otimes\Phi^{\mathrm{dbl}})^{-1}$ 作用于上面的公式即可得到。

反粒子的逆 S 的 $\widetilde{\mathbf{B}}(Q)$ 如下（见 [X97]）：

$$S^{-1}(\mathfrak{u}_\lambda) = \sum_{m\geq 0}(-1)^m \sum_{\substack{\pi\in\mathfrak{P}\\ \lambda_1,\dots,\lambda_m\in\mathfrak{P}\setminus\{0\}}} v^{\sum_{k<l}(\lambda_k,\lambda_l)_Q} f^\lambda_{\lambda_1,\dots,\lambda_m}(v) g^\pi_{\lambda_m,\dots,\lambda_1}(v)\mathfrak{u}_\pi\cdot\mathbb{K}_{\lambda^\diamond}^{-1}.$$

对于（4.10），我们有

$$\varepsilon^\imath \circ \widetilde{\Phi}^{\mathrm{dbl}}(\mathfrak{u}_\lambda \oplus \mathfrak{u}_{\mu^\diamond}) = \varepsilon^\imath(\mathfrak{u}_\lambda \otimes \mathfrak{u}_\mu)$$
$$= \sum_{m\geq 0}(-1)^m \sum_{\substack{\pi\in\mathfrak{P}\\ \mu_1,\dots,\mu_m\in\mathfrak{P}\setminus\{0\}}} v^{\sum_{k<l}(\mu_k,\mu_l)_Q} f^\mu_{\mu_1,\dots,\mu_m}(v) g^\pi_{\mu_m,\dots,\mu_1}(v)\varphi(\mathfrak{u}_\lambda, \mathfrak{u}_\pi\cdot\mathbb{K}_{\mu^\diamond}^{-1})$$
$$= a_\lambda(v)\sum_{m\geq 0}(-1)^m \sum_{\mu_1,\dots,\mu_m\in\mathfrak{P}\setminus\{0\}} v^{\sum_{k<l}(\mu_k,\mu_l)_Q} g^\lambda_{\mu_m,\dots,\mu_1}(v) f^\mu_{\mu_1,\dots,\mu_m}(v).$$

~然后，（4.10）成立，因为 $\varepsilon(\mathfrak{u}_\lambda \oplus \mathfrak{u}_{\mu^\diamond}) = \varepsilon^\imath \circ \Phi^{\mathrm{dbl}}(\mathfrak{u}_\lambda \oplus \mathfrak{u}_{\mu^\diamond})$。

最后，对于（4.12），计算可得

$$S^\imath \circ \widetilde{\Phi}^{\mathrm{dbl}}(\mathfrak{u}_\lambda \oplus \mathfrak{u}_{\mu^\diamond}) = S^\imath(\mathfrak{u}_\lambda \otimes \mathfrak{u}_\mu)$$
$$= \sum_{\substack{\lambda_1,\lambda_2,\\ \mu_1,\mu_2,\nu\in\mathfrak{P}}} v^{\langle\lambda_1,\lambda_2+\nu\rangle_Q+\langle\nu,\lambda_2\rangle_Q+\langle\mu_1,\mu_2+\nu\rangle_Q+\langle\nu,\mu_2\rangle_Q+(\mu_2,\lambda_2)_Q}$$
$$\cdot\, a_\nu(v) f^\lambda_{\lambda_1,\nu,\lambda_2}(v) f^\mu_{\mu_1,\nu,\mu_2}(v)\varphi(\mathfrak{u}_{\lambda_1}\cdot\mathbb{K}_{\lambda_2^\diamond+\nu^\diamond}, S^{-1}(\mathfrak{u}_{\mu_2}))\cdot S(\mathfrak{u}_{\lambda_2})\otimes S^{-1}(\mathfrak{u}_{\mu_1}\cdot\mathbb{K}_{\mu_2^\diamond+\nu^\diamond})$$
$$= \sum_{\substack{\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2,\\ \nu,\omega,\pi\in\mathfrak{P}}} \sum_{r,s,t\geq 0} \sum_{\gamma_1,\dots,\gamma_r\in\mathfrak{P}\setminus\{0\}} \sum_{\delta_1,\dots,\delta_s\in\mathfrak{P}\setminus\{0\}} \sum_{\theta_1,\dots,\theta_t\in\mathfrak{P}\setminus\{0\}} (-1)^{r+s+t} v^{(\mu_2,\lambda_2)_Q}$$
$$\cdot\, v^{\langle\lambda_1,\lambda_2+\nu\rangle_Q+\langle\nu,\lambda_2\rangle_Q+\langle\mu_1,\mu_2+\nu\rangle_Q+\langle\nu,\mu_2\rangle_Q+\sum_{k<l}(\gamma_k,\gamma_l)_Q+2\sum_{k<l}\langle\delta_k,\delta_l\rangle_Q+\sum_{k<l}(\theta_k,\theta_l)_Q}$$
$$\cdot\, a_\nu(v)\cdot f^\lambda_{\lambda_1,\nu,\lambda_2}(v)\cdot f^\mu_{\mu_1,\nu,\mu_2}(v) v^{-(\lambda_2+\nu,\mu_2)_Q} a_{\lambda_1}(v)\cdot f^{\mu_2}_{\gamma_1,\dots,\gamma_r}(v)\cdot g^{\lambda_1}_{\gamma_r,\dots,\gamma_1}(v)\cdot f^{\lambda_2}_{\delta_1,\dots,\delta_s}(v)$$
$$\cdot\, g^\omega_{\delta_1,\dots,\delta_s}(v)\cdot f^{\mu_1}_{\theta_1,\dots,\theta_t}(v)\cdot g^\pi_{\theta_t,\dots,\theta_1}(v)\cdot\mathbb{K}_{\lambda_2^\diamond}^{-1}\cdot\mathfrak{u}_\omega\otimes\mathbb{K}_{\mu_2^\diamond+\nu^\diamond}^{-1}\cdot\mathfrak{u}_\pi\cdot\mathbb{K}_{\mu_1^\diamond}^{-1}$$

$$= \sum_{\nu,\omega,\pi\in\mathfrak{P}} \sum_{r,s,t\geq 0} \sum_{\gamma_1,\dots,\gamma_r\in\mathfrak{P}\setminus\{0\}} \sum_{\delta_1,\dots,\delta_s\in\mathfrak{P}\setminus\{0\}} \sum_{\theta_1,\dots,\theta_t\in\mathfrak{P}\setminus\{0\}} (-1)^{r+s+t}$$
$$\cdot v^{\langle\lambda-\omega,\omega-\pi\rangle_Q-(\omega,\omega)_Q+\sum_{k<l}(\gamma_k,\gamma_l)_Q+2\sum_{k<l}\langle\delta_k,\delta_l\rangle_Q+\sum_{k<l}(\theta_k,\theta_l)_Q} a_\nu(v)\cdot a_{\gamma_1}(v)\cdots a_{\gamma_r}(v)$$
$$\cdot f^{\lambda}_{\gamma_r,\dots,\gamma_1,\nu,\delta_1,\dots,\delta_s}(v)\cdot f^{\mu}_{\theta_1,\dots,\theta_t,\nu,\gamma_1,\dots,\gamma_r}(v)\cdot g^{\omega}_{\delta_1,\dots,\delta_s}(v)\cdot g^{\pi}_{\theta_t,\dots,\theta_1}(v)\cdot \mathfrak{u}_\omega\cdot\mathbb{K}^{-1}_{\omega^\diamond}\otimes\mathfrak{u}_\pi\cdot\mathbb{K}^{-1}_{\mu^\diamond}.$$

然后，将（4.12）应用（Φ^{dbl}）$^{-1}$ 到上述公式，即可得到。 □

注记 4.5. 定理 4.4 中的 Hopf代数结构对任意箭图 Q （不要求箭图为 Dynkin箭图）均成立。值得注意的是，式（4.8）已由 [LiP25定理 34] 通过冗长的直接计算得到。我们的方法简单得多；参见[CLPRW25命题 27]。

推论 4.6. 代数同构 $\widetilde{\psi}^{\mathrm{dbl}}:\ \widetilde{\mathbf{U}} \xrightarrow{\simeq} \widetilde{\mathcal{H}}(Q^{\mathrm{dbl}},\mathrm{swap})$ 由引理 *3.6*给出，它是一个 *Hopf*代数同构。

证明。 为避免混淆，我们将 $\mathcal{H}(Q^{\mathrm{dbl}},\mathrm{swap})$ 的余乘法和余单位分别记为 $\Delta_{\widetilde{\mathcal{H}}}$ 和 $\varepsilon_{\widetilde{\mathcal{H}}}$。由于

$$\varepsilon_{\widetilde{\mathcal{H}}}(\mathfrak{u}_\lambda)=\varepsilon_{\widetilde{\mathcal{H}}}(\mathfrak{u}_{\lambda^\diamond})=0,\quad \varepsilon_{\widetilde{\mathcal{H}}}(\mathbb{K}_\alpha)=\varepsilon_{\widetilde{\mathcal{H}}}(\mathbb{K}_{\alpha^\diamond})=1$$

对任意 $\lambda\in\mathfrak{P}\setminus\{0\}$ 和 $\alpha\in\mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$，$\widetilde{\psi}^{\mathrm{dbl}}$ 保持余单位。剩下要证明的是 $\widetilde{\psi}^{\mathrm{dbl}}$ 保持余乘法。事实上，对任意 $i\in\mathbb{I}$，我们有

$$(\widetilde{\psi}^{\mathrm{dbl}}\otimes\widetilde{\psi}^{\mathrm{dbl}})\circ\Delta_{\widetilde{\mathbf{U}}}(E_i)=v^{-\frac{1}{2}}(\mathfrak{u}_{\alpha_i}\otimes 1+\mathbb{K}_{\alpha_i^\diamond}\otimes\mathfrak{u}_{\alpha_i}),$$

$$\Delta_{\widetilde{\mathcal{H}}}\circ\widetilde{\psi}^{\mathrm{dbl}}(E_i)=v^{-\frac{1}{2}}(\mathfrak{u}_{\alpha_i}\otimes 1+\mathbb{K}_{\alpha_i^\diamond}\otimes\mathfrak{u}_{\alpha_i}).$$

这里 $\Delta_{\widetilde{\mathbf{U}}}$ 是$\mathbf{U}$的余乘法。因此，$(\psi^{\mathrm{dbl}}\otimes\psi^{\mathrm{dbl}})\circ\Delta_{\widetilde{\mathcal{H}}}(E_i)$ $=\Delta_{\widetilde{\mathcal{H}}}\circ\psi^{\mathrm{dbl}}(E_i)$。类似的论证表明，$(\psi^{\mathrm{dbl}}\otimes\psi^{\mathrm{dbl}})\circ\Delta_{\widetilde{\mathbf{U}}}$ 与 $\Delta_{\widetilde{\mathcal{H}}}\circ\psi^{\mathrm{dbl}}(E_i)$ 在 F_i, K_i 和 K_i' 上也相同。换言之，ψ^{dbl} 保持$\mathbf{U}$所有生成元的余乘法。因此，ψ^{dbl}是一个双代数同构，所需结果由如下事实得出：Hopf代数之间的任何双代数同态都是Hopf同态。□

4.3. 通过Hall代数构造量子对称对。对于正根集合 Φ^+，通过考虑 ϱ，我们记为

$$\Phi_0^+:=\{\beta\in\Phi^+\mid\varrho(\beta)=\beta\},\qquad \Phi_1^+:=\{\beta\in\Phi^+\mid\varrho(\beta)\neq\beta\}. \tag{4.13}$$

对于任意 $M_q(\lambda)\in\mathrm{mod}(\mathbf{k}Q)$，我们知道

$$M_q(\lambda)\cong\bigoplus_{\beta\in\Phi^+}M_q(\beta)^{\oplus\lambda(\beta)}.$$

我们将 $\mathfrak{P}$ 的子集 $\mathcal{F}$ 定义为

$$\mathcal{F}:=\{\lambda\in\mathfrak{P}\mid\varrho(\lambda)=\lambda,2\mid\lambda(\beta),\forall\beta\in\Phi_0^+\}. \tag{4.14}$$

对于任意 $\lambda\in\mathcal{F}$，我们定义 λ_f，$\lambda_c\in\mathfrak{P}$为

$$\lambda_f(\beta)=\begin{cases}\frac{\lambda(\beta)}{2} & \text{if } \beta\in\Phi_0^+,\\ 0 & \text{otherwise;}\end{cases}\qquad \lambda_c(\beta)=\begin{cases}\lambda(\beta) & \text{if } \beta\in\Phi_1^+,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

根据定义，对于任意 $\lambda \in \mathcal{F}$，我们有 $M_q(\lambda) \cong M_q(\lambda_f) \oplus M_q(\lambda_f) \oplus M_q(\lambda_c)$。特别地，我们有 $\varrho(M_q(\lambda_c)) = M_q(\lambda_c)$，并且 $M_q(\lambda_c)$ 的任何不可分解直和项都不被 ϱ 固定。

引理 4.7 .对于任意 $\lambda \in \mathcal{F}$，存在 $b_{\lambda_c}(v) \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$，使得 $a_{\lambda_c}(v) = b_{\lambda_c}(v)^2$.

在继续证明之前，我们先回顾一些关于 Q-可容许序列的结果；参见[DDPW08, LW21a]。回忆 §3.4 中，$M_q(\beta)$ 是不可分解的 $\mathbf{k}Q$-模，满足对每个 $\beta \in \Phi^+$，$\dim M_q(\beta) = \beta$。正根 Φ^+ 的一个排列 $\beta_1, \ldots, \beta_N$ 称为 Q-可容许的，如果 $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{k}Q}(M_q(\beta_r) M_q(\beta_t)) \neq 0$ 蕴含 $r > t$（或者 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}Q}(M_q(\beta_r) M_q(\beta_t)) \neq 0$ 仅当 $r \leq t$）。注意，这一定义不依赖于基域 $\mathbf{k} = \mathbb{F}_q$。$Q$-可容许序列存在，例如参见 [DDPW08, 推论 3.34]。

由 [LW21a，定理 8。3], 我们可以得到 Q中所有根的一个 -可容许序列 Φ^+:

$$\beta_1, \varrho(\beta_1), \beta_2, \varrho(\beta_2), \ldots, \beta_{N_i}, \varrho(\beta_{N_i}). \tag{4.15}$$

（按照约定，此处及下文中，只要 $\varrho(\beta_j) = \beta_j$，冗余的 $\varrho(\beta_j)$ 就省略。）特别地，我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}Q}(M_q(\beta), M_q(\varrho\beta)) = \begin{cases} \mathbf{k} & \text{if } \varrho(\beta) = \beta, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

对于任意 $\beta \in \Phi^+$，我们有

$$|\operatorname{Aut}(M_q(m\beta))| = (q^m - 1)(q^m - q) \cdots (q^m - q^{m-1}),$$

于是

$$a_{m\beta}(v) = v^{\frac{m(3m-1)}{2}} (v - v^{-1})^m [m]!. \tag{4.16}$$

引理 4.7 的证明。不失一般性，设 $\lambda = \lambda_c$。我们还假设β_1，$\varrho(\beta_1)$ β_2，$\varrho(\beta_2) \ldots, \beta_m$，$\varrho(\beta_m)$ 是 Q 中正根的一个 -可容许序列Φ_1^+；参见（4.15）。记

$$M_q(\lambda) = \bigoplus_{k=1}^{m} (M_q(\beta_k) \oplus M_q(\varrho\beta_k))^{\oplus r_k}.$$

由于

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}Q}(M_q(\beta_k), M_q(\beta_l)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}Q}(M_q(\varrho\beta_k), M_q(\beta_l)) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}Q}(M_q(\beta_k), M_q(\varrho\beta_l)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}Q}(M_q(\varrho\beta_k), M_q(\varrho\beta_l)) = 0 \end{aligned}$$

对于任意 $k > l$，$M_q(\lambda)$ 的任意自同态都可以表示为块下三角矩阵，其 (l, k)-块是从 $(M_q(\beta_k) \oplus M_q(\varrho\beta_k))^{\oplus r_k}$ 到 $(M_q(\beta_l) \oplus M_q(\varrho\beta_l))^{\oplus r_l}$ 的同态。因此，$M_q(\lambda)$ 的自同态 ϕ 是自同构，当且仅当 ϕ 的每个 (k, k)-块都是 $(M_q(\beta_k) \oplus M_q(\varrho\beta_k))^{\oplus r_k}$ 的自同构。

回顾一下，当 $\beta \in \Phi_1^+$ 时，$\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}Q}(M_q(\beta) M_q(\varrho\beta)) = 0$。因此

$$a_{M_q(\lambda)} = \prod_{k<l} q^{\dim \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}Q}((M_q(\beta_k) \oplus M_q(\varrho\beta_k))^{\oplus r_k}, (M_q(\beta_l) \oplus M_q(\varrho\beta_l))^{\oplus r_l})} \prod_{k=1}^{m} a_{M_q(r_k\beta_k)} a_{M_q(r_k\varrho\beta_k)}.$$

注意，对于 $a_{M_q(r_k\beta_k)} = a_{M_q(r_k\varrho\beta_k)}$，我们设

$$b_\lambda(v) = \prod_{k<l} v^{2r_k r_l \dim_{\mathbf{k}} \mathrm{Hom}(M_q(\beta_k), M_q(\beta_l)\oplus M_q(\varrho\beta_l))} \prod_{k=1}^{m} a_{r_k\beta_k}(v).$$

那么 $b_{\lambda_c}(v)^2 = a_{\lambda_c}(v) = a_\lambda(v)$，因为 $\mathbb{F}_q$ 是任意的。利用（4.16），我们得到 $b_{\lambda_c}(v) \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$（即使在 $\mathbb{Z}[v]$中）。□

定义 4.8（[CLPRW25]）。称线性映射 $\chi: \widetilde{\mathbf{B}}(Q) \longrightarrow \mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$ 为 ϱ-扭相容的，如果对所有 $a, b \in \mathbf{B}(Q)$，均有 $\chi(a\cdot b) = \sum \chi(a_{(1)})\chi(b_{(2)})\varphi(\varrho(a_{(2)})\, b_{(1)})$ 成立。

下面给出一些 ϱ-扭相容线性映射 $\chi: \widetilde{\mathbf{B}}(Q) \longrightarrow \mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$ 的性质。

引理 4.9。设 $\chi: \widetilde{\mathbf{B}}(Q) \longrightarrow \mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$ 是一个 ϱ-扭相容线性映射。则有以下结论。

(1) 对于任意 λ、$\mu \in \mathfrak{P}$，若 $\mathrm{Hom}(M_q(\mu), \varrho M_q(\lambda)) = 0$，则

$$\chi(\mathfrak{u}_\lambda \cdot \mathfrak{u}_\mu) = \chi(\mathfrak{u}_\lambda)\cdot\chi(\mathfrak{u}_\mu).$$

(2) 对于任意 $\beta \in \Phi_0^+$，对于 $m \geq 2$，有

$$\chi(\mathfrak{u}_{m\beta}) = v^{3m-4}(v-v^{-1})[m-1]\cdot\chi(1)\cdot\chi(\mathfrak{u}_{(m-2)\beta}\cdot\mathbb{K}_{\beta^\diamond}) + v^{m-1}\chi(\mathfrak{u}_{(m-1)\beta})\cdot\chi(\mathfrak{u}_\beta)$$

(3) 对于任意 $\beta \in \Phi_1^+$，有

$$\begin{aligned}\chi(\mathfrak{u}_{m_1\beta+m_2\varrho\beta}) =& v^{2m_1+m_2-2}(v-v^{-1})[m_1]\cdot\chi(1)\cdot\chi(\mathfrak{u}_{(m_1-1)\beta+(m_2-1)\varrho\beta}\cdot\mathbb{K}_{\beta^\diamond})\\ &+ v^{m_2-1}\chi(\mathfrak{u}_{m_1\beta+(m_2-1)\varrho\beta})\cdot\chi(\mathfrak{u}_{\varrho\beta}),\quad \forall m_1, m_2 \geq 1.\end{aligned}$$

(4) 假设对于所有单根 α_i，$\chi(\mathfrak{u}_{\alpha_i}) = 0$。对于任意 $h = \mathfrak{u}_{\alpha_{i_1}}\cdots\mathfrak{u}_{\alpha_{i_m}}$，若 $\mathrm{wt}(h) = \alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_m} \notin \sum_{i\in\mathbb{I}}\mathbb{Z}(\alpha_i+\alpha_{\varrho i})$，则 $\chi(h) = 0$。特别地，在此情形下，对于任意 $\beta \in \Phi^+$，有 $\chi(\mathfrak{u}_\beta) = 0$。

证明。(1) 在$\mathbf{B}(Q)$中，我们有：

$$\Delta(\mathfrak{u}_\lambda) = \sum_{\lambda',\lambda''\in\mathfrak{P}} v^{\langle\lambda',\lambda''\rangle_Q} f^\lambda_{\lambda',\lambda''}(v)\mathfrak{u}_{\lambda'}\cdot\mathbb{K}_{\lambda''^\diamond}\otimes\mathfrak{u}_{\lambda''},$$

$$\Delta(\mathfrak{u}_\mu) = \sum_{\mu',\mu''\in\mathfrak{P}} v^{\langle\mu',\mu''\rangle_Q} f^\mu_{\mu',\mu''}(v)\mathfrak{u}_{\mu'}\cdot\mathbb{K}_{\mu''^\diamond}\otimes\mathfrak{u}_{\mu''}.$$

注意，$f^\lambda_{\lambda',\lambda''}(v)$ 仅当 $M_q(\lambda'') \subseteq M_q(\lambda)$ 时才成立，而 $f^\mu_{\mu',\mu''}(v)$ 仅当 $M_q(\mu')$ 是 $M_q(\mu)$ 的商时才成立。若 $\varphi(\varrho\mathfrak{u}_{\lambda''}, \mathfrak{u}_{\mu'}\cdot\mathbb{K}_{\mu''^\diamond}) \neq 0$，则由 (4.1) 得 $\varrho M_q(\lambda'') \cong M_q(\mu')$。于是我们有一个态射 $M_q(\mu) \twoheadrightarrow M_q(\mu') \xrightarrow{=} \varrho M_q(\lambda'') \hookrightarrow \varrho M_q(\lambda)$。根据假设，我们有$M_q(\lambda'') = 0 = M_q(\mu')$。因此我们有

$$\chi(\mathfrak{u}_\lambda\cdot\mathfrak{u}_\mu) = \chi(\mathfrak{u}_\lambda)\cdot\chi(\mathfrak{u}_\mu).$$

(2) 由于 $\mathrm{Ext}^1(M_q(\beta), M_q(\beta)) = 0$ 我们有 $\mathfrak{u}_{m\beta} = v^{\frac{m(m-1)}{2}}\mathfrak{u}_\beta^m$。于是

$$\chi(\mathfrak{u}_{m\beta}) = v^{m-1}\chi(\mathfrak{u}_{(m-1)\beta}\cdot\mathfrak{u}_\beta).$$

~根据定义，在 $\mathbf{B}(Q)$ 中，

$$\Delta(\mathfrak{u}_{(m-1)\beta}) = \sum_{\lambda',\lambda''\in\mathfrak{P}} v^{\langle\lambda',\lambda''\rangle_Q} f^{(m-1)\beta}_{\lambda',\lambda''}(v)\mathfrak{u}_{\lambda'}\cdot\mathbb{K}_{\lambda''^{\diamond}}\otimes\mathfrak{u}_{\lambda''},$$
$$\Delta(\mathfrak{u}_{\beta}) = \sum_{\mu',\mu''\in\mathfrak{P}} v^{\langle\mu',\mu''\rangle_Q} f^{\beta}_{\mu',\mu''}(v)\mathfrak{u}_{\mu'}\cdot\mathbb{K}_{\mu''^{\diamond}}\otimes\mathfrak{u}_{\mu''}.$$

若 $f^{(m-1)\beta}_{\lambda'\,\lambda''},(v)\,f^{\beta}_{\mu',\mu''}(v)\ \varphi(\varrho\mathfrak{u}_{\lambda''},\mathfrak{u}_{\mu'}\cdot\mathbb{K}_{\mu''^{\diamond}})$ 均非零，且 $\mu'\neq 0$，则存在非零同态 $M_q(\beta)\twoheadrightarrow M_q(\mu')$ 和 $M_q(\mu')\to M_q(\beta)$。因此，在此情形下 $\lambda''=\mu'=\beta$，并且 $\lambda'=(m-2)\beta,\mu''=0$。所以，

$$\begin{aligned}\chi(\mathfrak{u}_{m\beta}) =& v^{m-1+(m-2)\langle\beta,\beta\rangle_Q+m-2}[m-1]\chi(\mathfrak{u}_{(m-2)\beta}\cdot\mathbb{K}_{\beta^{\diamond}})\chi(1)\varphi(\mathfrak{u}_{\beta},\mathfrak{u}_{\beta})+v^{m-1}\chi(\mathfrak{u}_{(m-1)\beta})\chi(\mathfrak{u}_{\beta})\\ =& v^{3m-4}(v-v^{-1})[m-1]\chi(1)\chi(\mathfrak{u}_{(m-2)\beta}\cdot\mathbb{K}_{\beta^{\diamond}})+v^{m-1}\chi(\mathfrak{u}_{(m-1)\beta})\chi(\mathfrak{u}_{\beta}).\end{aligned}$$

(3) 类似于 (2) 的论证可得所需结果。

(4) 我们对此关于 m 使用归纳法证明。若 $m=1$，则无需证明。对于 $m>1$，回忆一下，对于任意简单根 α_i，都有 $\Delta(\mathfrak{u}_{\alpha_i})=\mathfrak{u}_{\alpha_i}\otimes 1+\mathbb{K}_{\alpha_i^{\diamond}}\otimes\mathfrak{u}_{\alpha_i}$。由于 χ 是 ϱ-扭曲相容的，我们有

$$\begin{aligned}\chi(h) =& \chi(\mathfrak{u}_{\alpha_{i_1}}\cdots\mathfrak{u}_{\alpha_{i_{m-1}}})\cdot\chi(\mathfrak{u}_{\alpha_{i_m}})\cdot\varphi(1,\mathbb{K}_{\alpha^{\diamond}_{i_m}})\\ &+\sum_{k=1}^{m-1} v^{(\alpha_{i_k},\alpha_{i_{k+1}}+\cdots+\alpha_{i_{m-1}})_Q}\chi(\mathfrak{u}_{\alpha_{i_1}}\cdots\mathfrak{u}_{\alpha_{i_{k-1}}}\mathfrak{u}_{\alpha_{i_{k+1}}}\cdots\mathfrak{u}_{\alpha_{i_{m-1}}}\cdot\mathbb{K}_{\alpha^{\diamond}_{i_k}})\chi(1)\cdot\varphi(\mathfrak{u}_{\varrho\alpha_{i_k}},\mathfrak{u}_{\alpha_{i_m}})\\ =&\chi(1)(v^2-1)\sum_{k=1}^{m-1}\delta_{\varrho\alpha_{i_k},\alpha_{i_m}}v^{(\alpha_{i_k},\alpha_{i_{k+1}}+\cdots+\alpha_{i_{m-1}})_Q}\chi(h'_k)\cdot\chi(\mathbb{K}_{\alpha^{\diamond}_{i_k}}),\end{aligned}$$

其中 $h'_k=\mathfrak{u}_{\alpha_{i_1}}\cdots\mathfrak{u}_{\alpha_{i_{k-1}}}\mathfrak{u}_{\alpha_{i_{k+1}}}\cdots\mathfrak{u}_{\alpha_{i_{m-1}}}$。显然，如果 $\varrho\alpha_{i_k}=\alpha_{i_m}$，那么 $\mathsf{wt}(h'_k)=\mathsf{wt}(h)-(\alpha_{i_k}+\varrho\alpha_{i_k})\notin\sum_{i\in\mathbb{I}}\mathbb{Z}(\alpha_i+\alpha_{\varrho i})$。利用归纳假设即可完成证明。

对于最后一个结论，任取 $\beta\in\Phi^+$，若 $\varrho=\mathrm{Id}$，则可得 $\beta\notin\sum_{i\in\mathbb{I}}2\mathbb{N}\alpha_i$。对于 $\varrho\neq\mathrm{Id}$，$\beta\in\sum_{i\in\mathbb{I}}\mathbb{Z}(\alpha_i+\alpha_{\varrho i})$ 唯一可能出现于类型 A_{2r}，而这不属于我们所考虑的 i箭图情形；参见 (3.3)–(3.5)。□

令 $\mathbb{I}_0$ 为由满足 $\varrho(i)=i$ 的 $i\in\mathbb{I}$ 构成的 $\mathbb{I}$ 子集。定义

$$\{\lambda,\mu\}:=\dim_{\mathbf{k}}\mathrm{Hom}(M_q(\lambda),M_q(\mu))+\dim_{\mathbf{k}}\mathrm{Hom}(M_q(\mu),M_q(\lambda)),\quad\forall\lambda,\mu\in\mathfrak{P}.\tag{4.17}$$

定义一个线性映射

$$\chi:\widetilde{\mathbf{B}}(Q)\longrightarrow\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$$

使得

$$\chi(\mathbb{K}_{\beta^{\diamond}}) = v^{\langle\beta,\varrho(\beta)\rangle_Q+\sum_{i\in\mathbb{I}_0}d_i^{\beta}},\tag{4.18}$$

$$\chi(\mathfrak{u}_{\lambda}) = \begin{cases} v^{\frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{I}_0}d_i^{\lambda}+2\{\lambda_f,\lambda_c\}}\frac{a_{2\lambda_f}(v)}{a_{\lambda_f}(v^2)}b_{\lambda_c}(v) & \text{if } \lambda\in\mathcal{F},\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}\tag{4.19}$$

and

$$\chi(\mathfrak{u}_{\lambda}\cdot\mathbb{K}_{\beta^{\diamond}})=\chi(\mathfrak{u}_{\lambda})\cdot\chi(\mathbb{K}_{\beta^{\diamond}}).\tag{4.20}$$

我们用 $[0]_v^{!!}=[1]_v^{!!}=1$ 表示，对于任意 $k\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$,

$$[2k]_v^{!!}=[2k]_v[2k-2]_v\cdots[4]_v[2]_v,\qquad [2k-1]_v^{!!}=[2k-1]_v[2k-3]_v\cdots[3]_v[1]_v.$$

为方便起见，我们记作 $[-1]_v^{!!}=1$。

命题 4.10。 线性映射 $\chi\colon \widetilde{\mathbf{B}}(Q)\longrightarrow\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$ 由 (4.18)-(4.20) 给出，且是 ϱ-扭相容的。

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$证明。回忆一下，B 是 $\mathbf{U}^\imath$ 的 Borel 子代数，由 E_i 和 K_i, $i\in\mathbb{I}$ 生成。于是，将 $\widetilde{\psi}$ 限制到 $\widetilde{\mathbf{B}}$ 上，得到同构 $\widetilde{\mathbf{B}}\to\widetilde{\mathbf{B}}(Q)$，其映射为 $E_i\mapsto v^{-\frac{1}{2}}\mathbb{u}_{\alpha_i}$, $K_i\mapsto\mathbb{K}_{\alpha_i^\diamond}$。利用该同构以及 [CLPRW25, 引理 4.2], ，存在唯一的 ϱ-扭相容映射 $\chi'\colon \widetilde{\mathbf{B}}(Q)\to\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$，使得 $\chi'(1)=1$, $\chi'(\mathbb{u}_{\alpha_i})=0$, $\chi'(\mathbb{K}_{i^\diamond})=\varphi(\mathbb{K}_{i^\diamond},\mathbb{K}_{\varrho i^\diamond})=v^{(i,\varrho i)_Q}$ 对于 $i\in\mathbb{I}$。特别地，对于任意 $\sim a,b\in\mathbf{B}(Q)$，我们有 $\chi'(a\cdot b)=\sum\chi'(a_{(1)})\chi'(b_{(2)})\varphi(\varrho(a_{(2)})\ b_{(1)})$。

接下来只需证明 $\chi=\chi'$。根据定义，我们有

$$\chi'(\mathbb{u}_\lambda\cdot\mathbb{K}_{\beta^\diamond})=\chi'(\mathbb{u}_\lambda)\cdot\chi'(\mathbb{K}_{\beta^\diamond}).$$

所以只需证 明 $\chi(\mathbb{K}_{\beta^\diamond})=\chi'(\mathbb{K}_{\beta^\diamond})$，以及 $\chi(\mathbb{u}_\lambda)=\chi'(\mathbb{u}_\lambda)$，其中 $\beta\in\mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$, $\lambda\in\mathfrak{P}$ 任意。.

回忆一下， β_1， $\varrho(\beta_1)$ β_2， $\varrho(\beta_2)\ldots,\beta_{N_\imath}$， $\varrho(\beta_{N_\imath})$ 是一个 Q-可容许的 Φ^+序列。对于任意$\lambda\in\mathfrak{P}$ 满足 $\lambda(\beta)=0$ 若 $\beta\in\Phi_1^+$，类似于引理 4.7 证明的论证可得

$$a_\lambda(v)=\prod_{\beta_k\prec\beta_l\in\Phi_0^+}v^{2\lambda(\beta_k)\lambda(\beta_l)\dim_{\mathbf{k}}\mathrm{Hom}(M_q(\beta_k),M_q(\beta_l))}\prod_{\beta\in\Phi_0^+}a_{\lambda(\beta)\beta}(v).$$

由 (4.16) 可得

$$\frac{a_{2\lambda}(v)}{a_\lambda(v^2)}=\prod_{\beta_k\prec\beta_l\in\Phi_0^+}v^{4\lambda(\beta_k)\lambda(\beta_l)\dim_{\mathbf{k}}\mathrm{Hom}(M_q(\beta_k),M_q(\beta_l))}\prod_{\beta\in\Phi_0^+}v^{3\lambda(\beta)^2}(v-v^{-1})^{\lambda(\beta)}[2\lambda(\beta)-1]!!.\tag{4.21}$$

现在我们可以证明 $\chi=\chi'$。由于 χ' 是 ϱ-扭相容的，我们得到

$$\chi'(\mathbb{K}_{\beta^\diamond+\alpha_i^\diamond})=\chi'(\mathbb{K}_{\beta^\diamond})\chi'(\mathbb{K}_{\alpha_i^\diamond})\varphi(\mathbb{K}_{\varrho\beta^\diamond},\mathbb{K}_{\alpha_i^\diamond})=v^{(\alpha_i,\varrho(\beta+\alpha_i))_Q}\chi'(\mathbb{K}_{\beta^\diamond}).$$

对 $h(\beta)$ 进行简单的归纳法：$=\sum_{i\in\mathbb{I}}d_i^\beta$，可得对于任意 $\beta\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}$， $\chi=\chi'$ 在 $\mathbb{K}_{\beta^\diamond}$ 上成立。由于

$$1=\chi'(1)=\chi'(\mathbb{K}_{\beta^\diamond}\cdot\mathbb{K}_{-\beta^\diamond})=\chi(\mathbb{K}_{\beta^\diamond})\chi'(\mathbb{K}_{-\beta^\diamond})v^{-(\varrho\beta,\beta)_Q},$$

$\chi=\chi'$ 对任意 $\beta\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}$ 也在 $\mathbb{K}_{-\beta^\diamond}$ 上成立。对于任意 $\beta\in\mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$，存在 β_+， $\beta_-\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}$，使得 $\beta=\beta_+-\beta_-$。于是

$$\chi'(\mathbb{K}_{\beta^\diamond})=\chi(\mathbb{K}_{\beta_+^\diamond})\chi(\mathbb{K}_{-\beta_-^\diamond})v^{-(\varrho\beta_+,\beta_-)_Q}=v^{\langle\beta,\varrho\beta\rangle+\sum_{i\in\mathbb{I}_0}d_i^\beta}.$$

对于 $\lambda\in\mathfrak{P}$，记 $r=\max\{k\mid\lambda(\beta_k)\neq 0\text{ 或 }\lambda(\varrho\beta_k)\neq 0\}$。令 λ' 为函数:

$$\lambda'(\beta)=\begin{cases}\lambda(\beta) & \text{if }\beta\neq\beta_r,\varrho\beta_r,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

令 $\mu \in \mathfrak{P}$ 满足 $M_q(\lambda) = M_q(\lambda') \oplus M_q(\mu)$。显然，$M_q(\mu)$ 的每个不可分解直和项要么是 $M_q(\beta_r)$，要么是 $M_q(\varrho\beta_r)$。根据我们的假设，可知 $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{k}Q}(M_q(\lambda')\ M_q(\mu)) = 0$。这样

$$\mathfrak{u}_\lambda = v^{\dim_{\mathbf{k}} \mathrm{Hom}(M_q(\lambda'),M_q(\mu))}\mathfrak{u}_{\lambda'} \cdot \mathfrak{u}_\mu.$$

由引理 4.9(1)，我们有

$$\chi'(\mathfrak{u}_\lambda) = v^{\dim_{\mathbf{k}} \mathrm{Hom}(M_q(\lambda'),M_q(\mu))}\chi'(\mathfrak{u}_{\lambda'}) \cdot \chi'(\mathfrak{u}_\mu).$$

证明分为以下两种情形。

(i) $\beta_r \in \Phi_0^+$。若 $\lambda(\beta_r) = 1$，则 $\chi'(\mathfrak{u}_\mu) = 0$。因此 $\chi'(\mathfrak{u}_\lambda) = 0$。当然 $\lambda \notin \mathcal{F}$ 在此情形下。现在假设 $\lambda(\beta_r) \geq 2$。根据引理 4.9

$$\begin{aligned}
\chi'(\mathfrak{u}_\lambda) =& v^{\dim_{\mathbf{k}} \mathrm{Hom}(M_q(\lambda'),M_q(\mu))+3\lambda(\beta_r)-4}(v-v^{-1})[\lambda(\beta_r)-1]\chi'(\mathfrak{u}_{\lambda'})\chi'(\mathfrak{u}_{(\lambda(\beta_r)-2)\beta_r} \cdot \mathbb{K}_{\beta_r^\diamond}) \\
=& v^{\dim_{\mathbf{k}} \mathrm{Hom}(M_q(\lambda'),M_q(\mu))+3\lambda(\beta_r)-4}(v-v^{-1})[\lambda(\beta_r)-1]\chi'(\mathfrak{u}_{\lambda'}) \cdot \chi'(\mathfrak{u}_{(\lambda(\beta_r)-2)\beta_r}) \cdot \chi'(\mathbb{K}_{\beta_r^\diamond}) \\
=& v^{2\dim_{\mathbf{k}} \mathrm{Hom}(M_q(\lambda'),M_q(\beta_r))+3\lambda(\beta_r)-3+\sum_{i\in\mathbb{I}_0} d_i^{\beta_r}}(v-v^{-1})[\lambda(\beta_r)-1] \cdot \chi'(\mathfrak{u}_{\widetilde{\lambda}}),
\end{aligned}$$

其中 $\lambda \in \mathfrak{P}$ 定义为

$$\widetilde{\lambda}(\beta) = \begin{cases} \lambda(\beta) & \text{if } \beta \neq \beta_r, \\ \lambda(\beta_r) - 2 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

另一方面，若 $\lambda \in \mathcal{F}$，则 $2 \mid \lambda(\beta_r)$ 且 $\lambda \in \mathcal{F}$。利用 (4.21)可得

$$\begin{aligned}
\frac{\chi(\mathfrak{u}_\lambda)}{\chi(\mathfrak{u}_{\widetilde{\lambda}})} =& v^{\sum_{i\in\mathbb{I}_0} d_i^{\beta_r}+2\dim_{\mathbf{k}} \mathrm{Hom}(M_q(\lambda_c),M_q(\beta_r))}\frac{a_{2\lambda_f}(v)}{a_{\lambda_f}(v^2)}\frac{a_{\widetilde{\lambda}}(v^2)}{a_{2\widetilde{\lambda}_f}(v)} \\
=& v^{\sum_{i\in\mathbb{I}_0} d_i^{\beta_r}+2\dim_{\mathbf{k}} \mathrm{Hom}(M_q(\lambda'),M_q(\beta_r))+3\lambda(\beta_r)-3}(v-v^{-1})[\lambda(\beta_r)-1].
\end{aligned}$$

(ii) $\beta_r \in \Phi_1^+$。不失一般性，设 $\lambda(\varrho\beta_r) > 0$。由引理 4.9 (4)，$\chi'(\mathfrak{u}_\lambda) = \chi'(\mathfrak{u}_\mu) = 0$ 若 $\lambda(\beta_r) = 0$ (当然 $\lambda \notin \mathcal{F}$ 在此情形下)，且若 $\lambda(\beta_r) > 0$ 由引理可得：4.9 (1)，

$$\begin{aligned}
\chi'(\mathfrak{u}_\lambda) =& v^{\dim_{\mathbf{k}} \mathrm{Hom}(M_q(\lambda'),M_q(\mu))+2\lambda(\beta_r)+\lambda(\varrho\beta_r)-2}(v-v^{-1})[\lambda(\beta_r)] \\
& \cdot \chi'(\mathfrak{u}_{\lambda'}) \cdot \chi'(\mathfrak{u}_{(\lambda(\beta_r)-1)\beta_r+(\lambda(\varrho\beta_r)-1)\varrho\beta_r} \cdot \mathbb{K}_{\beta_r^\diamond}) \\
=& v^{\dim_{\mathbf{k}} \mathrm{Hom}(M_q(\lambda'),M_q(\mu))+2\lambda(\beta_r)+\lambda(\varrho\beta_r)-2}(v-v^{-1})[\lambda(\beta_r)] \\
& \cdot \chi'(\mathfrak{u}_{\lambda'}) \cdot \chi'(\mathfrak{u}_{(\lambda(\beta_r)-1)\beta_r+(\lambda(\varrho\beta_r)-1)\varrho\beta_r}) \cdot \chi'(\mathbb{K}_{\beta_r^\diamond}) \\
=& v^{\dim_{\mathbf{k}} \mathrm{Hom}(M_q(\lambda'),M_q(\beta_r)\oplus M_q(\varrho\beta_r))+2\lambda(\beta_r)+\lambda(\varrho\beta_r)-2+\sum_{i\in\mathbb{I}_0} d_i^{\beta_r}}(v-v^{-1})[\lambda(\beta_r)] \cdot \chi'(\mathfrak{u}_{\widetilde{\lambda}}),
\end{aligned}$$

其中，$\lambda \in \mathfrak{P}$ 定义为

$$\widetilde{\lambda}(\beta) = \begin{cases} \lambda(\beta_r) - 1 & \text{if } \beta = \beta_r, \\ \lambda(\varrho\beta_r) - 1 & \text{if } \beta = \varrho\beta_r, \\ \lambda(\beta) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

另一方面 ~手，若 $\lambda\in\mathcal{F}$，则 $\lambda(\beta_r)=\lambda(\varrho\beta_r)$ 且 $\lambda\in\mathcal{F}$。根据引理 4.7可得

$$\begin{aligned}\frac{\chi(\mathfrak{u}_\lambda)}{\chi(\mathfrak{u}_{\widetilde{\lambda}})}=&v^{\sum_{i\in\mathbb{I}_0}d_i^{\beta_r}+2\dim_{\mathbf{k}}\mathrm{Hom}(M_q(\lambda_f),M_q(\beta_r)\oplus M_q(\varrho\beta_r))}\frac{b_{\lambda_c}(v)}{b_{\widetilde{\lambda}_c}(v)}\\=&v^{\sum_{i\in\mathbb{I}_0}d_i^{\beta_r}+2\dim_{\mathbf{k}}\mathrm{Hom}(M_q(\lambda_f),M_q(\beta_r)\oplus M_q(\varrho\beta_r))+\dim_{\mathbf{k}}\mathrm{Hom}(M_q(\lambda'_c),M_q(\beta_r)\oplus M_q(\varrho\beta_r))}\\&\cdot v^{3\lambda(\beta_r)-2}(v-v^{-1})[\lambda(\beta_r)]\\=&v^{\sum_{i\in\mathbb{I}_0}d_i^{\beta_r}+\dim_{\mathbf{k}}\mathrm{Hom}(M_q(\lambda'),M_q(\beta_r)\oplus M_q(\varrho\beta_r))+3\lambda(\beta_r)-2}(v-v^{-1})[\lambda(\beta_r)].\end{aligned}$$

~我们对 wt(λ) 进行归纳：$=\sum_{\beta\in\Phi^+}\lambda(\beta)$。在这两种情况下，$\mathrm{wt}(\lambda)<\mathrm{wt}(\lambda)$，且 $\lambda\in\mathcal{F}$ 当且仅当~ $\lambda\in\mathcal{F}$。因此，当 $\lambda\notin\mathcal{F}$ 时，$\chi'(\mathfrak{u}_\lambda)=0=\chi(\mathfrak{u}_\lambda)$。现在假设 $\lambda\in\mathcal{F}$，则上述论证表明

$$\chi'(\mathfrak{u}_\lambda)=\frac{\chi(\mathfrak{u}_\lambda)}{\chi(\mathfrak{u}_{\widetilde{\lambda}})}\chi'(\mathfrak{u}_{\widetilde{\lambda}}).$$

对 wt(λ) 的归纳完成了证明。 □

借助 ϱ-扭曲相容线性映射 χ （定义于4.18）–（4.20中），我们可以得到~ ~以下定理，它解释了 $\imath$ ： $\mathbf{U}^\imath\to\mathbf{U}$ 在 Hall代数框架中的自然嵌入。

定理 4.11。 存在一个单射 $\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$-代数同态

$$\widetilde{\Omega}:\widetilde{\mathcal{H}}(Q,\ \varrho)\longrightarrow\widetilde{\mathcal{H}}(Q^{\mathrm{dbl}},\ \text{交换}) \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{u}_\lambda\mapsto&\sum_{\lambda_1,\lambda_2\in\mathfrak{P},\nu\in\mathcal{F}}v^{\Xi}f^{\lambda}_{\lambda_1,\nu,\lambda_2}(v)\cdot\frac{a_{2\nu_f}(v)}{a_{\nu_f}(v^2)}b_{\nu_c}(v)\cdot\mathfrak{u}_{\varrho\lambda_2}\oplus\mathfrak{u}_{\lambda_1^\diamond}*\mathbb{K}_{\nu+\lambda_2},\\\mathbb{K}_\alpha\mapsto&\ v^{\sum_{i\in\mathbb{I}_0}d_i^\alpha}\mathbb{K}_{\varrho\alpha}*\mathbb{K}_{\alpha^\diamond},\end{aligned}$$

其中

$$\Xi=\langle\lambda_1-\varrho\lambda_2,\nu+\lambda_2\rangle_Q+\sum_{i\in\mathbb{I}_0}d_i^{\lambda_2}+\frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{I}_0}d_i^{\nu}+2\{\nu_f,\nu_c\}.$$

此外，我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccc}\widetilde{\mathbf{U}}^\imath & \xrightarrow{\ \imath\ } & \widetilde{\mathbf{U}}\\ \downarrow{\scriptstyle\tilde{\psi}} & & \downarrow{\scriptstyle\tilde{\psi}^{\mathrm{dbl}}}\\ \widetilde{\mathcal{H}}(Q,\varrho) & \xrightarrow{\ \widetilde{\Omega}\ } & \widetilde{\mathcal{H}}(Q^{\mathrm{dbl}},\mathrm{swap})\end{array}$$

~ ~证明。 根据 [CLPRW25, 命题 212] ，存在一个代数同态 $\xi_\varrho:\mathbf{B}^\imath_\varrho\to\sim D(\mathbf{B}(Q))$，定义为

$$a\mapsto\sum\chi(a_{(2)})\cdot\varrho(a_{(3)})\otimes a_{(1)},\quad\forall a\in\widetilde{\mathbf{B}}^\imath_\varrho.$$

~ ~ ~ ~我们断言 $\Omega=(\Phi^{\mathrm{dbl}})^{-1}\circ\xi_\varrho\circ\Phi$。事实上，对于任意 $\lambda\in\mathfrak{P}$ 和 $\alpha\in\mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$，我们有e

$$(\widetilde{\Phi}^{\mathrm{dbl}})^{-1}\circ\widetilde{\xi}_\varrho\circ\widetilde{\Phi}(\mathfrak{u}_\lambda*\mathbb{K}_\alpha)=v^{(\lambda,\alpha)_Q+\langle\alpha,\varrho\alpha\rangle_Q}(\widetilde{\Phi}^{\mathrm{dbl}})^{-1}\widetilde{\xi}_\varrho(\mathfrak{u}_\lambda\cdot\mathbb{K}_{\varrho\alpha^\diamond})$$

$$=v^{(\lambda,\alpha)_Q+\langle\alpha,\varrho\alpha\rangle_Q}\big(\widetilde{\Phi}^{\mathrm{dbl}}\big)^{-1}\Bigg(\sum_{\lambda_1,\nu,\lambda_2\in\mathfrak{P}} v^{\langle\lambda_1,\nu+\lambda_2\rangle_Q+\langle\nu,\lambda_2\rangle_Q} f^{\lambda}_{\lambda_1,\nu,\lambda_2}(v)\cdot\chi(\mathfrak{u}_\nu\cdot\mathbb{K}_{\varrho\alpha^\diamond+\lambda_2^\diamond})$$

$$\cdot\,\varrho(\mathfrak{u}_{\lambda_2}\cdot\mathbb{K}_{\varrho\alpha^\diamond})\otimes\mathfrak{u}_{\lambda_1}\cdot\mathbb{K}_{\varrho\alpha^\diamond+\nu^\diamond+\lambda_2^\diamond}\Bigg)$$

$$=\sum_{\lambda_1,\lambda_2\in\mathfrak{P},\nu\in\mathcal{F}} v^{\langle\lambda_1-\varrho\lambda_2,\nu+\lambda_2\rangle_Q+\sum_{i\in I_0}d_i^{\lambda_2}+\frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{I}_0}d_i^{\nu}+2\{\nu_f,\nu_c\}+\sum_{i\in\mathbb{I}_0}d_i^{\alpha}} f^{\lambda}_{\lambda_1,\nu,\lambda_2}(v)\cdot\frac{a_{2\nu_f}(v)}{a_{\lambda_f}(v^2)}b_{\nu_c}(v)$$

$$\cdot\,\mathfrak{u}_{\varrho\lambda_2}\oplus\mathfrak{u}_{\lambda_1^\diamond}*\mathbb{K}_{\varrho\alpha+\nu+\lambda_2}*\mathbb{K}_{\alpha^\diamond}.$$

特别地，对于任意简单根 α_i，我们得到

$$\widetilde{\Omega}(\mathfrak{u}_{\alpha_i})=\mathfrak{u}_{\alpha_i^\diamond}+\mathfrak{u}_{\varrho\alpha_i}*\mathbb{K}_{\alpha_i},\quad \widetilde{\Omega}(\mathbb{K}_{\alpha_i})=v^{\langle\alpha_i,\varrho\alpha_i\rangle_Q}\mathbb{K}_{\varrho\alpha_i}*\mathbb{K}_{\alpha_i^\diamond}.$$

因此，对于任意 $i\in\mathbb{I}$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\psi}^{\mathrm{dbl}}\circ\imath(B_i)&=\widetilde{\psi}^{\mathrm{dbl}}(F_i+E_{\varrho i}K_i')=v^{-\frac{1}{2}}(\mathfrak{u}_{\alpha_i^\diamond}+\mathfrak{u}_{\varrho\alpha_i}*\mathbb{K}_{\alpha_i}),\\
\widetilde{\psi}^{\mathrm{dbl}}\circ\imath(\widetilde{k}_i)&=\widetilde{\psi}^{\mathrm{dbl}}(K_iK_{\varrho i}')=\mathbb{K}_{\alpha_i^\diamond}*\mathbb{K}_{\varrho\alpha_i},\\
\widetilde{\Omega}\circ\widetilde{\psi}(B_i)&=v^{-\frac{1}{2}}\widetilde{\Omega}(\mathfrak{u}_{\alpha_i})=v^{-\frac{1}{2}}(\mathfrak{u}_{\alpha_i^\diamond}+\mathfrak{u}_{\varrho\alpha_i}*\mathbb{K}_{\alpha_i}),\\
\widetilde{\Omega}\circ\widetilde{\psi}(\widetilde{k}_i)&=v^{-\langle\alpha_i,\varrho\alpha_i\rangle}\widetilde{\Omega}(\mathbb{K}_{\alpha_i})=\mathbb{K}_{\varrho\alpha_i}*\mathbb{K}_{\alpha_i^\diamond}.
\end{aligned}$$

因此，$\widetilde{\psi}^{\mathrm{dbl}}\circ\imath=\widetilde{\Omega}\circ\widetilde{\psi}$ 在 $\mathbf{U}'$的生成元上成立。由于 $\widetilde{\psi},\widetilde{\psi}^{\mathrm{dbl}}$ 是同构，我们可以看出 $\widetilde{\Omega}$ 是单射，从而完成证明。□

对于 $\varrho=\mathrm{Id}$，即分裂情形，我们有$\Phi_0^+=\Phi^+$。于是 $\mathcal{F}=\{\lambda\in\mathfrak{P}\mid\lambda(\beta)\in2\mathbb{N},\ \forall\beta\in\Phi^+\}$。对于任意 $\lambda\in\mathcal{F}$，我们可得$\lambda_f=\frac{\lambda}{2}$。作为定理4.11的推论，我们有如下结论。

推论 4.12。如果 $\varrho=\mathrm{Id}$，那么存在一个单射 $\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$代数同态：

$$\widetilde{\Omega}:\widetilde{\mathcal{H}}(Q,\varrho)\longrightarrow\widetilde{\mathcal{H}}(Q^{\mathrm{dbl}},\mathrm{swap}) \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{u}_\lambda&\mapsto\sum_{\lambda_1,\lambda_2\in\mathfrak{P},\nu\in\mathcal{F}} v^{\Xi}f^{\lambda}_{\lambda_1,\nu,\lambda_2}(v)\cdot\frac{a_{2\nu_f}(v)}{a_{\nu_f}(v^2)}\cdot\mathfrak{u}_{\lambda_2}\oplus\mathfrak{u}_{\lambda_1^\diamond}*\mathbb{K}_{\nu+\lambda_2},\\
\mathbb{K}_\alpha&\mapsto v^{\sum_{i\in\mathbb{I}}d_i^{\alpha}}\mathbb{K}_\alpha*\mathbb{K}_{\alpha^\diamond},
\end{aligned}$$

其中

$$\Xi=\langle\lambda_1-\lambda_2,\nu+\lambda_2\rangle_Q+\sum_{i\in\mathbb{I}}d_i^{\lambda_2}+\frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{I}}d_i^{\nu}.$$

注 4.13. 我们预期，定理4.11中的结果也适用于任意箭图Q（不一定是 Dynkin 型）。然而，在这一一般情形下，ϱ-扭曲相容线性映射 $\chi:\widetilde{\mathbf{B}}(Q)\to\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$ 比式（4.18）–（4.20）中所表述的映射复杂得多。

在本节末尾，我们考虑张量代数 $\mathcal{H}(Q,\varrho)\otimes\mathcal{H}(Q^{\mathrm{dbl}},\text{交换})$。我们有如下结果，它说明了$\mathbf{U}^\imath$ 在$\mathbf{U}$中的余理想代数结构。

定理 4.14。 存在一个 $\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$-代数同态

$$\widetilde{\Delta}:\widetilde{\mathcal{H}}(Q,\varrho)\longrightarrow\widetilde{\mathcal{H}}(Q,\varrho)\otimes\widetilde{\mathcal{H}}(Q^{\mathrm{dbl}},\mathrm{swap}) \tag{4.24}$$

$$\mathfrak{u}_\lambda\mapsto\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\nu\in\mathfrak{P}} v^{\Xi'}f^{\lambda}_{\lambda_1,\nu,\lambda_2,\varrho\nu,\lambda_3}(v)\cdot a_\nu(v)\cdot(\mathfrak{u}_{\lambda_2}*\mathbb{K}_{\varrho\lambda_3+\nu})\otimes(\mathfrak{u}_{\varrho\lambda_3}\oplus\mathfrak{u}_{\lambda_1^\diamond}*\mathbb{K}_{\lambda_2+\lambda_3+\nu+\varrho\nu}),$$

$$\mathbb{K}_\alpha\mapsto\mathbb{K}_\alpha\otimes(\mathbb{K}_{\varrho\alpha}*\mathbb{K}_{\alpha^\diamond}),$$

其中

$$\Xi'=\langle\lambda_1,\lambda_2+\lambda_3\rangle_Q+\langle\lambda_2,\lambda_3\rangle_Q+\langle\lambda_3,\varrho\lambda_3\rangle_Q-(\lambda_2+\lambda_3,\varrho\lambda_3)_Q+\langle\lambda_1-\lambda_3,\nu+\varrho\nu\rangle_Q-\langle\lambda_2,\nu-\varrho\nu\rangle_Q.$$

此外，我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccc}\widetilde{\mathbf{U}}^\imath & \xrightarrow{\Delta\circ\imath} & \widetilde{\mathbf{U}}^\imath\otimes\widetilde{\mathbf{U}}\\ \downarrow{\scriptstyle\widetilde{\psi}} & & \downarrow{\scriptstyle\widetilde{\psi}\otimes\widetilde{\psi}^{\mathrm{dbl}}}\\ \widetilde{\mathcal{H}}(Q,\varrho) & \xrightarrow{\widetilde{\Delta}} & \widetilde{\mathcal{H}}(Q,\varrho)\otimes\widetilde{\mathcal{H}}(Q^{\mathrm{dbl}},\mathrm{swap})\end{array}$$

证明。根据 [CLPRW25，命题 2，13] 存在一个代数同态 $\Psi_\varrho:\widetilde{\mathbf{B}}^\imath_\varrho\to\widetilde{\mathbf{B}}^\imath_\varrho\otimes D(\mathbf{B}(Q))$，其定义为

$$a\mapsto\sum\varphi(\varrho(a_{(4)}),a_{(2)})\cdot a_{(3)}\otimes(\varrho(a_{(5)})\otimes a_{(1)}).$$

我们断言 $\Delta=(\Phi\otimes\Phi^{\mathrm{dbl}})^{-1}\circ\Psi_\varrho\circ\Phi$。事实上，对于任意 $\lambda\in\mathfrak{P}$，计算可得

$$\begin{aligned}&\widetilde{\Psi}_\varrho\circ\widetilde{\Phi}(\mathfrak{u}_\lambda)=\widetilde{\Psi}_\varrho(\mathfrak{u}_\lambda)\\ =&\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\nu\in\mathfrak{P}} v^{\langle\lambda_1,\lambda_2+\lambda_3+\nu+\varrho\nu\rangle_Q+\langle\nu,\lambda_2+\lambda_3+\varrho\nu\rangle_Q+\langle\lambda_2,\lambda_3+\varrho\nu\rangle_Q+\langle\varrho\nu,\lambda_3\rangle_Q+(\varrho\lambda_3,\lambda_2+\lambda_3+\varrho\nu)_Q}\\ &\cdot f^{\lambda}_{\lambda_1,\nu,\lambda_2,\varrho\nu,\lambda_3}(v)\cdot a_\nu(v)\cdot(\mathfrak{u}_{\lambda_2}\cdot\mathbb{K}_{\lambda_3^\diamond+\varrho\nu^\diamond})\otimes(\mathfrak{u}_{\varrho\lambda_3}\otimes\mathfrak{u}_{\lambda_1}\cdot\mathbb{K}_{\lambda_2^\diamond+\lambda_3^\diamond+\nu^\diamond+\varrho\nu^\diamond}).\end{aligned}$$

将 $(\Phi\otimes\Phi^{\mathrm{dbl}})^{-1}$ 应用于上式可得

$$\begin{aligned}&(\widetilde{\Phi}\otimes\widetilde{\Phi}^{\mathrm{dbl}})^{-1}\circ\widetilde{\Psi}_\varrho\circ\widetilde{\Phi}(\mathfrak{u}_\lambda)\\ =&\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\nu\in\mathfrak{P}} v^{\langle\lambda_1,\lambda_2+\lambda_3+\nu+\varrho\nu\rangle_Q+\langle\nu,\lambda_2+\lambda_3+\varrho\nu\rangle_Q+\langle\lambda_2,\lambda_3+\varrho\nu\rangle_Q+\langle\varrho\nu,\lambda_3\rangle_Q+(\varrho\lambda_3,\lambda_2+\lambda_3+\varrho\nu)_Q}\\ &\cdot v^{-(\lambda_2,\varrho\lambda_3+\nu)_Q-\langle\lambda_3+\varrho\nu,\varrho\lambda_3+\nu\rangle_Q-(\varrho\lambda_3,\lambda_2+\lambda_3+\nu+\varrho\nu)_Q}\\ &\cdot f^{\lambda}_{\lambda_1,\nu,\lambda_2,\varrho\nu,\lambda_3}(v)\cdot a_\nu(v)\cdot(\mathfrak{u}_{\lambda_2}*\mathbb{K}_{\varrho\lambda_3+\nu})\otimes(\mathfrak{u}_{\varrho\lambda_3}\oplus\mathfrak{u}_{\lambda_1^\diamond}*\mathbb{K}_{\lambda_2+\lambda_3+\nu+\varrho\nu})\\ =&\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\nu\in\mathfrak{P}} v^{\langle\lambda_1,\lambda_2+\lambda_3\rangle_Q+\langle\lambda_2,\lambda_3\rangle_Q+\langle\lambda_3,\varrho\lambda_3\rangle_Q-(\lambda_2+\lambda_3,\varrho\lambda_3)_Q+\langle\lambda_1-\lambda_3,\nu+\varrho\nu\rangle_Q-\langle\lambda_2,\nu-\varrho\nu\rangle_Q}\\ &\cdot f^{\lambda}_{\lambda_1,\nu,\lambda_2,\varrho\nu,\lambda_3}(v)\cdot a_\nu(v)\cdot(\mathfrak{u}_{\lambda_2}*\mathbb{K}_{\varrho\lambda_3+\nu})\otimes(\mathfrak{u}_{\varrho\lambda_3}\oplus\mathfrak{u}_{\lambda_1^\diamond}*\mathbb{K}_{\lambda_2+\lambda_3+\nu+\varrho\nu}).\end{aligned}$$

对于任意 $\alpha\in\mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$，我们有

$$\begin{aligned}(\widetilde{\Phi}\otimes\widetilde{\Phi}^{\mathrm{dbl}})^{-1}\circ\widetilde{\Psi}_\varrho\circ\widetilde{\Phi}(\mathbb{K}_\alpha)=&v^{\langle\alpha,\varrho\alpha\rangle_Q}(\widetilde{\Phi}\otimes\widetilde{\Phi}^{\mathrm{dbl}})^{-1}\circ\widetilde{\Psi}_\varrho(\mathbb{K}_{\varrho\alpha^\diamond})\\ =&v^{\langle\alpha,\varrho\alpha\rangle_Q+(\alpha,\varrho\alpha)_Q}(\widetilde{\Phi}\otimes\widetilde{\Phi}^{\mathrm{dbl}})^{-1}(\mathbb{K}_{\varrho\alpha^\diamond}\otimes(\mathbb{K}_{\alpha^\diamond}\otimes\mathbb{K}_{\varrho\alpha^\diamond}))\\ =&\mathbb{K}_\alpha\otimes(\mathbb{K}_{\varrho\alpha}*\mathbb{K}_{\alpha^\diamond}).\end{aligned}$$

特别地，对于任意简单根 α_i,

$$\widetilde{\Delta}(\mathfrak{u}_{\alpha_i}) = 1 \otimes \mathfrak{u}_{\alpha_i^\diamond} + \mathfrak{u}_{\alpha_i} \otimes \mathbb{K}_{\alpha_i} + v^{-\langle \alpha_i, \varrho\alpha_i\rangle_Q} \mathbb{K}_{\varrho\alpha_i} \otimes (\mathfrak{u}_{\varrho\alpha_i} * \mathbb{K}_{\alpha_i}).$$

因此，对于任意 $i \in \mathbb{I}$,

$$\begin{aligned}
(\widetilde{\psi} \otimes \widetilde{\psi}^{\mathrm{dbl}}) \circ \Delta \circ \imath(B_i) =& (\widetilde{\psi} \otimes \widetilde{\psi}^{\mathrm{dbl}})(1 \otimes F_i + B_i \otimes K_i' + \widetilde{k}_{\varrho i} \otimes E_{\varrho i} K_i') \\
=& v^{-\frac{1}{2}} (1 \otimes \mathfrak{u}_{\alpha_i^\diamond} + \mathfrak{u}_{\alpha_i} \otimes \mathbb{K}_{\alpha_i} + v^{-\langle \alpha_i, \varrho\alpha_i\rangle_Q} \mathbb{K}_{\varrho\alpha_i} \otimes \mathfrak{u}_{\varrho\alpha_i} * \mathbb{K}_{\alpha_i}), \\
\widetilde{\Delta} \circ \widetilde{\psi}(B_i) =& v^{-\frac{1}{2}} \widetilde{\Delta}(\mathfrak{u}_{\alpha_i}) = v^{-\frac{1}{2}} (1 \otimes \mathfrak{u}_{\alpha_i^\diamond} + \mathfrak{u}_{\alpha_i} \otimes \mathbb{K}_{\alpha_i} + v^{-\langle \alpha_i, \varrho\alpha_i\rangle_Q} \mathbb{K}_{\varrho\alpha_i} \otimes \mathfrak{u}_{\varrho\alpha_i} * \mathbb{K}_{\alpha_i}), \\
(\widetilde{\psi} \otimes \widetilde{\psi}^{\mathrm{dbl}}) \circ \Delta \circ \imath(\widetilde{k}_i) =& (\widetilde{\psi} \otimes \widetilde{\psi}^{\mathrm{dbl}})(\widetilde{k}_i \otimes K_i K_{\varrho i}') = v^{-\langle \alpha_i, \varrho\alpha_i\rangle_Q} \mathbb{K}_{\alpha_i} \otimes (\mathbb{K}_{\varrho\alpha_i} * \mathbb{K}_{\alpha_i^\diamond}), \\
\widetilde{\Delta} \circ \widetilde{\psi}(\widetilde{k}_i) =& v^{-\langle \alpha_i, \varrho\alpha_i\rangle_Q} \widetilde{\Delta}(\mathbb{K}_{\alpha_i}) = v^{-\langle \alpha_i, \varrho\alpha_i\rangle_Q} \mathbb{K}_{\alpha_i} \otimes (\mathbb{K}_{\varrho\alpha_i} * \mathbb{K}_{\alpha_i^\diamond}).
\end{aligned}$$

因此，$(\widetilde{\psi} \otimes \widetilde{\psi}^{\mathrm{dbl}}) \circ \Delta \circ \imath = \Delta \circ \widetilde{\psi}$ 在 $\widetilde{\mathbf{U}}^\imath$ 的生成元上成立。 □

5. Integral forms and dual canonical bases

在 [LP25a], Pan 和第一作者在 $\mathbf{U}$、$\widetilde{\mathbf{U}}^\imath$ 上引入整形式，并构造它们的对偶典范基。本节将证明，$\mathbf{U}$ 和 $\widetilde{\mathbf{U}}^\imath$ 的整形式在嵌入和余乘法下相容。

5.1. 整形式。令 $\mathcal{Z} = \mathbb{Z}[v^{\frac{1}{2}}, v^{-\frac{1}{2}}]$ 和 $\mathcal{Z}_{\mathrm{v}} = \mathbb{Z}[\mathrm{v}^{\frac{1}{2}}, \mathrm{v}^{-\frac{1}{2}}]$。我们将 $\mathcal{H}(\mathbf{k}Q, \varrho)$ 的整形式 $\mathcal{H}(\mathbf{k}Q, \varrho)_{\mathcal{Z}_{\mathrm{v}}}$ 定义为由 $\{[\mathbb{K}_\alpha] * [M_q(\mu)] \mid \alpha \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}, \mu \in \mathfrak{P}\}$ 张成的 $\mathcal{Z}$-模。注意，$\mathcal{H}(\mathbf{k}Q, \varrho)_{\mathcal{Z}_{\mathrm{v}}}$ 是一个自由的 $\mathcal{Z}_{\mathrm{v}}$-模。利用 (3.19)，我们知道 $\mathcal{H}(\mathbf{k}Q, \varrho)_{\mathcal{Z}_{\mathrm{v}}}$ 是一个 $\mathcal{Z}_{\mathrm{v}}$-代数，并且 $\widetilde{\mathcal{H}}(\mathbf{k}Q, \varrho)_{\mathcal{Z}_{\mathrm{v}}} \otimes \mathbb{Q}(\mathrm{v}^{\frac{1}{2}}) \cong \widetilde{\mathcal{H}}(\mathbf{k}Q, \varrho)$。类似地，我们可以定义（泛型）整形式 $\mathcal{H}(Q, \varrho)_{\mathcal{Z}}$。

利用 $\widetilde{\psi}: \widetilde{\mathbf{U}}^\imath \to \widetilde{\mathcal{H}}(Q, \varrho)$ 这一 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-代数同构，我们可以将 $\mathbf{U}^\imath$ 的整形式定义为 $\mathcal{H}(Q, \varrho)_{\mathcal{Z}}$ 的原像，记作 $\mathbf{U}^\imath_{\mathcal{Z}}$。它也是一个自由的 $\mathcal{Z}$-模。根据 [LP25a，推论 7.10]，我们知道 $\mathbf{U}^\imath_{\mathcal{Z}}$ 与 Q 的定向无关。

考虑箭图 $(\mathbb{I}, \Omega^{\mathrm{dbl}}, s, t)$ 和 $\widetilde{\mathbf{U}}(Q, \mathrm{swap})$，我们可以得到整形式 $\mathbf{B}(\mathbf{k}Q)_{\mathcal{Z}_v}$ 为 $\widetilde{\mathcal{H}}(\mathbf{k}Q^{\mathrm{dbl}}, \mathrm{swap})_{\mathcal{Z}_{\mathrm{v}}}$ 中由 $\{[\mathbb{K}_{\alpha^\diamond}] * [M_q(\mu)] \mid \alpha \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}} \mu \in \mathfrak{P}\}$ 张成的自由 $\mathcal{Z}_{\mathrm{v}}$-子模。那么，$\mathbf{B}(\mathbf{k}Q)_{\mathcal{Z}_{\mathrm{v}}}$ 是 $\mathcal{H}(\mathbf{k}Q^{\mathrm{dbl}}, \mathrm{swap})_{\mathcal{Z}_{\mathrm{v}}}$ 的一个 $\mathcal{Z}$-子代数。类似地，我们可以定义 $\mathbf{B}(Q)_{\mathcal{Z}}$。

引理 5.1. 对于任意 $\lambda \in \mathfrak{P}$，我们有 $a_\lambda(v^2) \mid a_{2\lambda}(v)$。此外，我们有 $\chi: \mathbf{B}(Q)_{\mathcal{Z}} \to \mathcal{Z}$，它由线性映射 $\chi: \widetilde{\mathbf{B}}(Q) \to \mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$ 诱导。

证明。我们来证明第一个结论。固定一个 Q-容许序列 $\beta_1, \ldots, \beta_N$，它属于 Φ^+。那么，$\mathrm{Hom}(M_q(\beta_i), M_q(\beta_j)) \neq 0$ 当且仅当 $i \leq j$。记 $r_i = \lambda(\beta_i)$ 为 $1 \leq i \leq N$。注意，$M_q(\lambda) = \oplus_{i=1}^N M_q(r_i\beta_i)$。于是

$$a_{M_q(\lambda)} = q^{\sum_{i<j} r_i r_j \dim_{\mathbf{k}} \mathrm{Hom}(M_q(\beta_i), M_q(\beta_j))} \prod_{\beta \in \Phi^+} a_{M_q(r_i\beta_i)}.$$

$a_{M_{q^2}(\lambda)}$ 和 $a_{M_q(2\lambda)}$ 的公式相似。只需证明对于任意 $\beta \in \Phi^+$, $m \in \mathbb{N}$，$a_{m\beta}(v^2) \mid a_{2m\beta}(v)$。注意到

$$|\mathrm{Aut}(M_q(2m\beta))| = (q^{2m} - 1)(q^{2m} - q) \cdots (q^{2m} - q^{2m-1}),$$

$$|\operatorname{Aut}(M_{q^2}(m\beta))| = (q^{2m}-1)(q^{2m}-q^2)\cdots(q^{2m}-q^{2(m-1)}).$$

可以看出

$$\frac{|\operatorname{Aut}(M_q(2m\beta))|}{|\operatorname{Aut}(M_{q^2}(m\beta))|} = (q^{2m}-q)(q^{2m}-q^3)\cdots(q^{2m}-q^{2m-1}).$$

由于有限域 $\mathbb{F}_q$ 是任意的，我们已经证明了 $a_{m\beta}(v^2) \mid a_{2m\beta}(v)$，于是所需结果随即得到。

第二个陈述由第一个陈述及其定义推出；见（4.18）–（4.20）。 □

借助引理 5.1 和定理4.11–4.14，我们可以得到以下命题。

命题 *5.2. (1)* $\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$-代数同态 $\widetilde{\Omega}: \widetilde{\mathcal{H}}(Q,\varrho) \to \widetilde{\mathcal{H}}(Q^{\mathrm{dbl}}, \mathit{swap})$ 诱导出一个 $\mathcal{Z}$-代数同态 $\widetilde{\Omega}: \widetilde{\mathcal{H}}(Q,\varrho)_{\mathcal{Z}} \to \widetilde{\mathcal{H}}(Q^{\mathrm{dbl}}, \mathit{swap})_{\mathcal{Z}}$。*(2)* $\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$-代数同态 $\widetilde{\Delta}: \widetilde{\mathcal{H}}(Q,\varrho) \to \widetilde{\mathcal{H}}(Q,\varrho) \otimes \widetilde{\mathcal{H}}(Q^{\mathrm{dbl}}, \mathit{swap})$ 诱导出一个 $\mathcal{Z}$- 代数同态 $\widetilde{\Delta}: \widetilde{\mathcal{H}}(Q,\varrho)_{\mathcal{Z}} \to \widetilde{\mathcal{H}}(Q,\varrho)_{\mathcal{Z}} \otimes \widetilde{\mathcal{H}}(Q^{\mathrm{dbl}}, \mathit{swap})_{\mathcal{Z}}$。

证明。只需证明出现在（4.22）、（4.24）中的所有系数都属于 $\mathcal{Z}$，这由（3.18）、引理 4.7、引理 5.1即可得出。□

$\widetilde{\mathbf{U}}^\imath$ 作为命题 5.2的推论，利用 $\mathbf{U}^\imath_{\mathcal{Z}}$ 和 $\mathbf{U}_{\mathcal{Z}}$的定义，可得如下结果。

推论 5.3。(1) 自然嵌入满足 $\imath(\mathbf{U}^\imath_{\mathcal{Z}}) \subseteq \mathbf{U}_{\mathcal{Z}}$。

(2) 余乘法满足 $\Delta(\widetilde{\mathbf{U}}^\imath_{\mathcal{Z}}) \subseteq \widetilde{\mathbf{U}}^\imath_{\mathcal{Z}} \otimes \widetilde{\mathbf{U}}_{\mathcal{Z}}$.

5.2. **对偶典范基**。借助同构 $\psi: \mathbf{U}^\imath \to \mathcal{H}(Q,\varrho)$，我们可以将 $\widetilde{\mathbf{U}}^\imath$ 的横线对合变换为 $\mathcal{H}(Q,\varrho)$。更明确地说，

$$\overline{\mathbf{u}_{\alpha_i}} = v^{-1}\mathbf{u}_{\alpha_i}, \quad \overline{\mathbb{K}_{\alpha_i}} = \mathbb{K}_{\alpha_i}.$$

引理 5.4 ([LP25a，引理 5.16])。*$(Q,\ \varrho)$ 的横线对合保持 $\mathcal{H}(Q,\varrho)_{\mathcal{Z}}$。此外，$\mathbf{U}^\imath$ 的横线对合保持 $\mathbf{U}^\imath_{\mathcal{Z}}$。*

对于 $\lambda \in \mathfrak{P}$，我们定义

$$\mathfrak{U}_\lambda = v^{-\dim \operatorname{End}_{\mathbf{k}Q}(M_q(\lambda)) + \frac{1}{2}\langle M_q(\lambda), M_q(\lambda)\rangle_Q}\mathbf{u}_\lambda. \tag{5.1}$$

沿用 [BG17a、LP25a],中的定义

$$\mathbb{K}_\alpha \diamond \mathbf{u}_\lambda = v^{\frac{1}{2}(\alpha - \varrho\alpha,\, \underline{\dim} M_q(\lambda))_Q}\mathbb{K}_\alpha * \mathbf{u}_\lambda.$$

对于任意的 $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}$ 和 $\lambda \in \mathfrak{P}$,

$$\overline{\mathbb{K}_\alpha \diamond \mathbf{u}_\lambda} = \mathbb{K}_\alpha \diamond \overline{\mathbf{u}_\lambda}. \tag{5.2}$$

令 $\prec$ 为 $\mathfrak{P}$ 上由轨道闭包定义的偏序：如果轨道$\mathfrak{O}_{M_q}(\lambda)$包含于 $\mathfrak{O}_{M_q}(\mu)$ 的闭包中，我们就说 $\lambda \prec \mu$；参见 [Lus90] 或 [DDPW08, §1.6]。我们在 $\mathbb{Z}^{\mathbb{I}} \times \mathfrak{P}$ 上定义一个偏序：若 $\alpha + \varrho(\alpha) + \dim M_q(\lambda) = \beta + \varrho(\beta) + \dim M_q(\mu)$，并且满足以下条件之一：$\alpha \prec \beta$（即 $\alpha \neq \beta$ 且 $\beta - \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}$），或 $\alpha = \beta$ 且 $\lambda \prec \mu$，则称 $(\alpha,\lambda) \prec (\beta,\mu)$。

定理 5.5 ([LP25a, 定理 5.18])。 对于每个 $\alpha \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$ 和 $\lambda \in \mathfrak{P}$，都存在唯一的元素 $\mathfrak{L}_{\alpha,\lambda} \in \mathcal{H}(Q,\varrho)$ 使得 $\mathfrak{L}_{\alpha,\lambda} = \mathfrak{L}_{\alpha,\lambda}$ 并且

$$\mathfrak{L}_{\alpha,\lambda} - \mathbb{K}_\alpha \diamond \mathfrak{U}_\lambda \in \sum_{(\beta,\mu)} v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}] \cdot \mathbb{K}_\beta \diamond \mathfrak{U}_\mu.$$

此外，$\mathfrak{L}_{\alpha,\lambda}$ 满足

$$\mathfrak{L}_{\alpha,\lambda} - \mathbb{K}_\alpha \diamond \mathfrak{U}_\lambda \in \sum_{(\alpha,\lambda)\prec(\beta,\mu)} v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}] \cdot \mathbb{K}_\beta \diamond \mathfrak{U}_\mu,$$

以及 $\mathfrak{L}_{\alpha,\lambda} = \mathbb{K}_\alpha \diamond \mathfrak{L}_{0,\lambda}$。

于是，$\mathbf{C}^\imath = \{\mathbb{K}_\alpha \diamond \mathfrak{L}_\lambda \mid \alpha \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}, \lambda \in \mathfrak{P}\}$ 是 $\mathcal{H}(Q,\varrho)_{\mathcal{Z}}$的一组 $\mathcal{Z}$-基，称为对偶典范基。 [LP25a] 中证明了，$\mathbf{C}^\imath$ 与 Q的定向无关。通过经由 ψ变换到 $\mathbf{U}^\imath$，我们可以得到 $\mathbf{U}^\imath_{\mathcal{Z}}$的一组 $\mathcal{Z}$-基，也记为 $\mathbf{C}^\imath = \{\mathbb{K}_\alpha \diamond \mathfrak{L}_\lambda \mid \alpha \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}, \lambda \in \mathfrak{P}\}$。考虑 $\widetilde{\mathcal{H}}(Q^{\mathrm{dbl}}, \mathrm{swap})$，我们可以得到 $\widetilde{\mathcal{H}}(Q^{\mathrm{dbl}}, \mathrm{swap})_{\mathcal{Z}}$和 $\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathcal{Z}}$的对偶典范基。二者均记为 $\mathbf{C} = \{\mathbb{K}_\alpha \diamond \mathbb{K}_{\beta^\diamond} \diamond \mathfrak{L}_{\lambda,\mu^\diamond} \mid \alpha,\beta \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}, \lambda,\mu \in \mathfrak{P}\}$。值得注意的是，乘法的结构常数属于 $\mathbb{N}[v^{\frac{1}{2}}, v^{-\frac{1}{2}}]$；参见 [LP25a]。

那么命题 5.2给出以下结果。

命题 5.6. 对于任意 $b \in \mathbf{C}^\imath$，有

$$\imath(b) = \sum_{c \in \mathbf{C}} f_c(v)c, \qquad \widetilde{\Delta}(b) = \sum_{b' \in \mathbf{C}^\imath, c \in \mathbf{C}} g_{b',c''}(v) b' \otimes c, \tag{5.3}$$

$$(\imath \otimes 1) \circ \widetilde{\Delta}(b) = \sum_{c \in \mathbf{C}, c' \in \mathbf{C}} h_{c,c'}(v) c \otimes c', \tag{5.4}$$

其中所有常数 $f_c(v) g_{b',\ c}(v)\, h_{c,\ c'}(v) \in \mathcal{Z}$。

猜想 5.7 ([LP25b，猜想 1.7.2、1.7。3])。 对于任意 $b \in \mathbf{C}^\imath$，所有常数$f_c(v)\, g_{b',\ c}(v)\, h_{c,\ c'}(v) \in \mathbb{N}[v^{\frac{1}{2}}, v^{-\frac{1}{2}}]$。特别地，对于 $\bar{\ }$ $\widetilde{\mathbf{U}}$，余乘法的结构常数属于 $\mathbb{N}[v^{\frac{1}{2}}, v^{-\frac{1}{2}}]$。

通过直接计算，已证明该猜想对于 $\mathfrak{sl}_2$ 在 [CZ26] 中的情形成立。我们知道$\mathfrak{U}_\beta \in \mathbf{C}^\imath$ 对于任意 $\beta \in \Phi^+$；参见 [LP25a，推论 5。22]。本节最后，我们计算 $\widetilde{\Omega}(\mathfrak{U}_\beta)$ 对类型 A的情形。我们先给出一般 $\mathfrak{U}_\lambda$情形下 $\Omega(\mathcal{H}(Q,\varrho)$ 的公式，以及 $\lambda \in \mathfrak{P}$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Omega}(\mathfrak{U}_\lambda) =& v^{-\dim_{\mathbf{k}} \mathrm{End}(M_q(\lambda)) + \frac{1}{2}\langle\lambda,\lambda\rangle_Q} \widetilde{\Omega}(\mathfrak{u}_\lambda) \\
=& v^{-\dim_{\mathbf{k}} \mathrm{End}(M_q(\lambda)) + \frac{1}{2}\langle\lambda,\lambda\rangle_Q} \sum_{\lambda_1,\lambda_2 \in \mathfrak{P}, \nu \in \mathcal{F}} v^{\langle \lambda_1 - \varrho\lambda_2, \nu + \lambda_2\rangle_Q + \sum_{i\in\mathbb{I}_0} d_i^{\lambda_2} + \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{I}_0} d_i^{\nu} + 2\{\nu_f,\nu_c\}} \\
& \cdot f^{\lambda}_{\lambda_1,\nu,\lambda_2}(v) \cdot \frac{a_{2\nu_f}(v)}{a_{\nu_f}(v^2)} b_{\nu_c}(v) \cdot \mathfrak{u}_{\varrho\lambda_2} \oplus \mathfrak{u}_{\lambda_1^\diamond} * \mathbb{K}_{\lambda_2+\nu} \\
=& \sum_{\lambda_1,\lambda_2 \in \mathfrak{P}, \nu \in \mathcal{F}} v^{\Xi} f^{\lambda}_{\lambda_1,\nu,\lambda_2}(v) \cdot \frac{a_{2\nu_f}(v)}{a_{\nu_f}(v^2)} b_{\nu_c}(v) \cdot \mathbb{K}_{\lambda_2+\nu} \diamond \mathfrak{U}_{\varrho\lambda_2} \oplus \mathfrak{U}_{\lambda_1^\diamond}.
\end{aligned}$$

其中

$$\Xi = \dim_{\mathbf{k}} \mathrm{End}(M_q(\lambda_1)) + \dim_{\mathbf{k}} \mathrm{End}(M_q(\lambda_2)) - \dim_{\mathbf{k}} \mathrm{End}(M_q(\lambda))$$

$$+\langle\lambda_1,\nu+\lambda_2\rangle_Q+\langle\nu,\lambda_2\rangle_Q+\frac{1}{2}\langle\nu,\nu\rangle_Q+\sum_{i\in\mathbb{I}_0}d_i^{\lambda_2}+\frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{I}_0}d_i^{\nu}+2\{\nu_f,\nu_c\}.$$

对于 A 型，任意 $\beta\in\Phi^+$ 都可以表示为 $[1,n]$ 的一个子区间 $[s,t]$，即 $\beta=\alpha_s+\alpha_{s+1}+\cdots+\alpha_t$。我们用 $\mathfrak{u}_{[s,t]}$（分别用 $\mathfrak{U}_{[s,t]}$）表示 $\mathfrak{u}_\beta$（分别表示 $\mathfrak{U}_\beta$）。为方便起见，若 $s>t$，则 $\mathfrak{u}_{[s,t]}$（以及 $\mathfrak{U}_{[s,t]}$）表示 $\mathcal{H}(Q,\varrho)$ 的单位元。$\mathbb{K}_{[s,t]}$ 也类似。

例5.8。令 Q 为类型 A_n 的箭图：

$$1\longrightarrow 2\longrightarrow\cdots\longrightarrow n-1\longrightarrow n$$

和 $\varrho=\mathrm{Id}$。对于 $\mathfrak{U}_{[s,t]}\in\mathcal{H}(Q,\varrho)$，我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{\Omega}(\mathfrak{U}_{[s,t]})&=\sum_{k=-1}^{t-s}v^{\dim_{\mathbf{k}}\mathrm{End}(M_q([s,s+k]))+\dim_{\mathbf{k}}\mathrm{End}(M_q([s+k+1,t]))-1+\langle[s,s+k],[s+k+1,t]\rangle_Q+t-s-k}\\&\qquad\cdot f^{[s,t]}_{[s,s+k],[s+k+1,t]}(v)\cdot\mathbb{K}_{[s+k+1,t]}\diamond\mathfrak{U}_{[s+k+1,t]}\oplus\mathfrak{U}_{[s,s+k]^\diamond}\\&=\sum_{k=-1}^{t-s}v^{t-s-k}\cdot\mathbb{K}_{[s+k+1,t]}\diamond\mathfrak{U}_{[s+k+1,t]}\oplus\mathfrak{U}_{[s,s+k]^\diamond},\end{aligned}$$

对任意 $1\le s\le t\le n$ 均成立。注意，对于任意 $-1\le k\le t-s$，$\mathfrak{U}_{[s+k+1,t]}$ 和 $\mathfrak{U}_{[s,s+k]^\diamond}$ 可交换，并且

$$\mathfrak{U}_{[s+k+1,t]}*\mathfrak{U}_{[s,s+k]^\diamond}=\mathfrak{U}_{[s+k+1,t]}\oplus\mathfrak{U}_{[s,s+k]^\diamond}.$$

因此，$\mathfrak{U}_{[s+k+1,t]}\oplus\mathfrak{U}_{[s,s+k]^\diamond}$ 是横杠不变的，进而 $\mathfrak{L}_{[s+k+1,t],\,[s,s+k]^\diamond}=\mathfrak{U}_{[s+k+1,t]}\oplus\mathfrak{U}_{[s,s+k]^\diamond}$ 由定理 5.5可得。因此，上述公式已经是 $\widetilde{\mathcal{H}}(Q^{\mathrm{dbl}},\bar{\ },\bar{\ })$ 交换的对偶典范基的线性组合，且所有系数都属于 $\mathbb{N}[v^{\frac{1}{2}},v^{-\frac{1}{2}}]$。

例5.9。我们考虑类型 (A_{2n+1},ϱ) 的拟分裂*i*量子群，其中 $n\ge 1$，$\varrho\ne\mathrm{Id}$。固定由 (3.3)给出的*i*箭图。我们来计算 $\Omega(\mathfrak{U}_\beta)$ 在 $\mathcal{H}(Q,\varrho)$ 中的表达式，其中 $\beta\in\Phi^+$。

对 $\Omega(\mathfrak{U}_{[1,m]})$ 作归纳，只需考虑 $m\le 2n+1$ 利用对称性。计算分为以下两种情形。

(1) $1\le m\le n+1$。在这种情形下，我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{\Omega}(\mathfrak{U}_{[1,m]})&=\sum_{k=0}^{m}v^{\dim_{\mathbf{k}}\mathrm{End}(M_q([1,k]))+\dim_{\mathbf{k}}\mathrm{End}(M_q([k+1,m]))-1+\langle[1,k],[k+1,m]\rangle_Q+(1-\delta_{k,m})\delta_{m,n+1}}\\&\qquad\cdot\mathbb{K}_{[k+1,m]}\diamond\mathfrak{U}_{[2n+2-m,2n+1-k]}\oplus\mathfrak{U}_{[1,k]^\diamond}\\&=\sum_{k=0}^{m}v^{\delta_{m,n+1}(1-\delta_{k,m})}\cdot\mathbb{K}_{[k+1,m]}\diamond\mathfrak{U}_{[2n+2-m,2n+1-k]}\oplus\mathfrak{U}_{[1,k]^\diamond}.\end{aligned}$$

由于 $\mathfrak{U}_{[2n+2-m,2n+1-k]}$ 与 $\mathfrak{U}_{[1,k]^\diamond}$ 可交换，并且

$$\mathfrak{U}_{[2n+2-m,2n+1-k]}*\mathfrak{U}_{[1,k]^\diamond}=\mathfrak{U}_{[2n+2-m,2n+1-k]}\oplus\mathfrak{U}_{[1,k]^\diamond},$$

得到 $\mathfrak{L}_{[2n+2-m,2n+1-k],1,k]^\diamond}=\mathfrak{U}_{[2n+2-m,2n+1-k]}\oplus\mathfrak{U}_{[1,k]^\diamond}$。因此，$\Omega(\mathfrak{U}_{[1,m]})$ 是 $\widetilde{\mathcal{H}}(Q^{\mathrm{dbl}},\bar{\ },\bar{\ },\mathrm{swap})$ 的对偶典范基的线性组合，且所有系数都属于 $\mathbb{N}[v^{\frac{1}{2}},v^{-\frac{1}{2}}]$。

(2) $n+2 \le m \le 2n+1$。在这种情况下，我们有

$$\widetilde{\Omega}(\mathfrak{U}_{[1,m]}) = \mathfrak{U}_{[1,m]^\diamond} + \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m-n-1} v\cdot \mathbb{K}_{[n+1-k,n+1+l]} \diamond \mathfrak{U}_{[n+1-l,n+1+k]} \oplus \mathfrak{U}_{[1,n-k]^\diamond \oplus [n+2+l,m]^\diamond}$$
$$+ \sum_{k=0}^{m-n-2}\sum_{l=1}^{m-n-1-k} (v^2-1)\cdot \mathbb{K}_{[n+1-k-l,n+1+k+l]} \diamond \mathfrak{U}_{[n+1-k,n+1+k]} \oplus \mathfrak{U}_{[1,n-k-l]^\diamond \oplus [n+2+k+l,m]^\diamond}.$$

~在此处及下文， $\mathfrak{U}_{[1,n-k-l]^\diamond\oplus[n+2+k+l,m]^\diamond} \in \mathcal{H}(Q^{\mathrm{dbl}},\mathrm{swap})$ 对应于模

$$[M_q(\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-k-l})^\diamond \oplus M_q(\alpha_{n+2+k+l}+\cdots+\alpha_m)^\diamond] \in \widetilde{\mathcal{H}}(\mathbf{k}Q^{\mathrm{dbl}},\mathrm{swap}).$$

对于 $0 \le k \le m-n-2$ 和 $1 \le l \le m-n-1-k$，与情形（*1*）类似，我们可以看到

$$\mathfrak{L}_{[n+1-k,n+1+k],[1,n-k-l]^\diamond\oplus[n+2+k+l,m]^\diamond} = \mathfrak{U}_{[n+1-k,n+1+k]} \oplus \mathfrak{U}_{[1,n-k-l]^\diamond\oplus[n+2+k+l,m]^\diamond}. \tag{5.5}$$

现在我们关注项 $\mathfrak{U}_{[n+1-l,n+1+k]} \oplus \mathfrak{U}_{[1,n-k]^\diamond\oplus[n+2+l,m]^\diamond}$，其中 $0 \le k \le n$ 和 $0 \le l \le m-n-1$。注意到

$$\mathfrak{U}_{[1,n-k]^\diamond\oplus[n+2+l,m]^\diamond} * \mathfrak{U}_{[n+1-l,n+1+k]} = \mathfrak{U}_{[n+1-l,n+1+k]} \oplus \mathfrak{U}_{[1,n-k]^\diamond\oplus[n+2+l,m]^\diamond},$$

因为 $n+1-l \le n+1 \le n+1+k$。我们在以下三个子情形中进行计算。

(*2a*) $k = l$。由于 $\mathfrak{U}_{[n+1-l,n+1+k]}$ 和 $\mathfrak{U}_{[1,n-k]^\diamond\oplus[n+2+l,m]^\diamond}$ 可交换，我们看到

$$\mathfrak{L}_{[n+1-l,n+1+k],[1,n-k]^\diamond\oplus[n+2+l,m]^\diamond} = \mathfrak{U}_{[1,n-k]^\diamond\oplus[n+2+l,m]^\diamond}.$$

(*2b*) $k < l$。那么 $n+1-l \le n-k$ 和 $n+1+k < n+2+l$。一个简单的计算表明

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{U}_{[n+1-l,n+1+k]} * \mathfrak{U}_{[1,n-k]^\diamond\oplus[n+2+l,m]^\diamond} \\
&= v^{-\frac{1}{2}(3-\delta_{k,n}-\delta_{l,m-n-1})}\mathfrak{u}_{[n+1-l,n+1+k]} * \mathfrak{u}_{[1,n-k]^\diamond\oplus[n+2+l,m]^\diamond} \\
&= v^{-\frac{1}{2}(3-\delta_{k,n}-\delta_{l,m-n-1})}\big(\mathfrak{u}_{[n+1-l,n+1+k]} \oplus \mathfrak{u}_{[1,n-k]^\diamond\oplus[n+2+l,m]^\diamond} \\
&\quad + v^{\delta_{l,n}}(v-v^{-1})\mathfrak{u}_{[n+1-k,n+1+k]} \oplus \mathfrak{u}_{[1,n-l]^\diamond\oplus[n+2+l,m]^\diamond} * \mathbb{K}_{[n+1-l,n-k]}\big) \\
&= \mathfrak{U}_{[n+1-l,n+1+k]} \oplus \mathfrak{U}_{[1,n-k]^\diamond\oplus[n+2+l,m]^\diamond} \\
&\quad + (v-v^{-1})\mathbb{K}_{[n+1-l,n-k]} \diamond \mathfrak{U}_{[n+1-k,n+1+k]} \oplus \mathfrak{U}_{[1,n-l]^\diamond\oplus[n+2+l,m]^\diamond}.
\end{aligned}$$

由于 $\mathfrak{L}_{[n+1-k,n+1+k],\ [1,n-l]^\diamond\oplus[n+2+l,m]^\diamond} = \mathfrak{U}_{[n+1-k,n+1+k]} \oplus \mathfrak{U}_{[1,n-l]^\diamond\oplus[n+2+l,m]^\diamond}$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_{[n+1-l,n+1+k],[1,n-k]^\diamond\oplus[n+2+l,m]^\diamond} =& \mathfrak{U}_{[n+1-l,n+1+k]} \oplus \mathfrak{U}_{[1,n-k]^\diamond\oplus[n+2+l,m]^\diamond} \\
&- v^{-1}\cdot \mathbb{K}_{[n+1-l,n-k]} \diamond \mathfrak{L}_{[n+1-k,n+1+k],[1,n-l]^\diamond\oplus[n+2+l,m]^\diamond}.
\end{aligned}$$

(*2c*) $k > l$。类似的论证表明

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_{[n+1-l,n+1+k],[1,n-k]^\diamond\oplus[n+2+l,m]^\diamond} =& \mathfrak{U}_{[n+1-l,n+1+k]} \oplus \mathfrak{U}_{[1,n-k]^\diamond\oplus[n+2+l,m]^\diamond} \\
&- v^{-1}\cdot \mathbb{K}_{[n+2+l,n+1+k]} \diamond \mathfrak{L}_{[n+1-l,n+1+l],[1,n-k]^\diamond\oplus[n+2+k,m]^\diamond}.
\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\Omega}(\mathfrak{U}_{[1,m]}) \\
=&\mathfrak{U}_{[1,m]^\diamond} + \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m-n-1} v\cdot \mathbb{K}_{[n+1-k,n+1+l]} \diamond \mathfrak{U}_{[n+1-l,n+1+k]} \oplus \mathfrak{U}_{[1,n-k]^\diamond\oplus[n+2+l,m]^\diamond}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{k=0}^{m-n-2}\sum_{l=1}^{m-n-1-k}(v^2-1)\cdot\mathbb{K}_{[n+1-k-l,n+1+k+l]}\diamond\mathfrak{U}_{[n+1-k,n+1+k]}\oplus\mathfrak{U}_{[1,n-k-l]^\diamond\oplus[n+2+k+l,m]^\diamond}\\
=&\mathfrak{U}_{[1,m]^\diamond}+\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m-n-1}v\cdot\mathbb{K}_{[n+1-k,n+1+l]}\diamond\mathfrak{L}_{[n+1-l,n+1+k],[1,n-k]^\diamond\oplus[n+2+l,m]^\diamond}\\
&+\sum_{0\le k<l\le m-n-1}\mathbb{K}_{[n+1-l,n+1+l]}\diamond\mathfrak{L}_{[n+1-k,n+1+k],[1,n-l]^\diamond\oplus[n+2+l,m]^\diamond}\\
&+\sum_{\substack{0\le l<k\le n\\ l\le m-n-1}}\mathbb{K}_{[n+1-k,n+1+k]}\diamond\mathfrak{L}_{[n+1-l,n+1+l],[1,n-k]^\diamond\oplus[n+2+k,m]^\diamond}\\
&+\sum_{0\le k<l\le m-n-1}(v^2-1)\cdot\mathbb{K}_{[n+1-l,n+1+l]}\diamond\mathfrak{L}_{[n+1-k,n+1+k],[1,n-l]^\diamond\oplus[n+2+l,m]^\diamond}\\
=&\mathfrak{U}_{[1,m]^\diamond}+\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m-n-1}v\cdot\mathbb{K}_{[n+1-k,n+1+l]}\diamond\mathfrak{L}_{[n+1-l,n+1+k],[1,n-k]^\diamond\oplus[n+2+l,m]^\diamond}\\
&+\sum_{0\le k<l\le m-n-1}v^2\cdot\mathbb{K}_{[n+1-l,n+1+l]}\diamond\mathfrak{L}_{[n+1-k,n+1+k],[1,n-l]^\diamond\oplus[n+2+l,m]^\diamond}\\
&+\sum_{\substack{0\le l<k\le n\\ l\le m-n-1}}\mathbb{K}_{[n+1-k,n+1+k]}\diamond\mathfrak{L}_{[n+1-l,n+1+l],[1,n-k]^\diamond\oplus[n+2+k,m]^\diamond}.
\end{aligned}
$$

显然，所有系数都属于 $\mathbb{N}[v^{\frac{1}{2}},v^{-\frac{1}{2}}]$。

最后，我们提出两点评论。

注 5.10。 根据 [CZ26] 以及这两个例子，我们发现，即使对于某些特殊的对偶典范基元素，也很难通过直接计算证明猜想 5.7。一种可行的策略是进一步发展 [Q16、LW21b] 中量子群和 i量子群的几何实现，特别是尝试在几何情形下诠释余乘法和$\tilde{}$嵌入 $\imath$: $\mathbf{U}^\imath\to\mathbf{U}$ 。这一策略在几何表示论中自然且常见；参见 [Lus90、Lus93、Na01、Q16、FL21、LW21b]。

$\tilde{}$注 5.11。 对于 AIII 型的 i量子群 $\mathbf{U}^\imath$ ，其 Hall代数实现$\tilde{}$尚未给出；参见表 1。然而，$\mathbf{U}^\imath$ 和$\mathbf{U}$任意有限型的对偶典范基已在 [CLPRW25]中定义。我们进一步猜想，$\tilde{}$AIII 型的 $\mathbf{U}^\imath$ 的对偶典范基$_{2n}$ 具有猜想5.7中概述的性质；此外，其乘法的结构常数也属于 $\mathbb{N}[v^{\frac{1}{2}},v^{-\frac{1}{2}}]$。

References

[BW18a] H.Bao 和 W. Wang，通过量子对称对研究 B 型 *Kazhdan-Lusztig* 理论的新方法，《天 ′数学评论 **402**，2018，vii+134页，arxiv:1310.0103[BW18b] H. Bao 和 W. Wang，源自量子对称对的典范基，《数学发明》**213**（2018），1099–1177。[BG17a] A. Berenstein 和 J. Greenstein，双典范基，《数学进展》**316** （2017），381–468。[Br13] T. Bridgeland，通过复形的*Hall*代数构造量子群，《数学年刊》**177** （2013），739–759。

[CLPRW25] J. Chen、M. Lu、X. Pan、S. Ruan 和 W. Wang，i量子群与 iHopf代数 I：基础，arXiv:2511.11291[CLPRW] J. Chen、M. Lu、X. Pan、S. Ruan 和 W. Wang，i量子群与 iHopf代数 II：对偶典范基，已投稿。[CZ26] X Chen、X. Zhou，量子群和 i量子群的基 $\mathfrak{sl}_2$，《代数杂志》690（2026），425–474。[DDPW08] B. Deng、J. Du、B. Parshall 和 J. Wang，《有限维代数与量子群》，《数学调查与专著》150。美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，2008。[Dr87] V.G. Drinfeld，量子群，载于：《国际数学家大会论文集》，第1、2卷，加利福尼亚州伯克利，1986，美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，1987年，第798–820页。[FL21] Z. Fan、Y. Li，余乘法下典范基的正性，《国际数学研究通报》2021年第9期，6871–6931。[Go18] M. Gorsky，稳定范畴的半导出与导出Hall代数，《国际数学研究通报》2018（2018），138–159。[Gr95] J.A. Green，Hall代数、遗传代数与量子群，《数学发明》120（1995），361–377。[HL15] D. Hernandez、B. Leclerc，量子Grothendieck环与导出Hall代数，《纯粹与应用数学杂志》701（2015），77–126。[J85] M. Jimbo，U(g) 的一个 q-差分类比及 Yang-Baxter方程，《数学物理通讯》10（1985），63–69。[Ka98] M. Kapranov，Heisenberg双代数与导出范畴，《代数杂志》202（1998），712–744。[Ko14] S. Kolb，量子对称Kac-Moody对，《数学进展》267（2014），395–469。[Let99] G. Letzter，量化包络代数的对称对，《代数杂志》220（1999），729–767。[LiP25] Y. Li、L. Peng，半导出Ringel-Hall双代数，《中国科学：数学》68（2025），1955–1968。[LP25a] M. Lu 和 X. Pan，量子群与 i量子群的对偶典范基，arXiv:2504.19073[LP25b] M. Lu 和 X. Pan，箭图簇与对偶典范基，已投稿。[LP21] M. Lu 和 L. Peng，半导出Ringel-Hall代数与 Drinfeld双，《数学进展》383（2021），107668。[LR24] M. Lu 和 S. Ruan，加权射影直线的 iHall代数与量子对称对 III：拟分裂型，arXiv:2411.13078[LW21a] M. Lu 和 W. Wang，Hall代数与量子对称对 II：反射函子，《数学物理通讯》381（2021），799–855。[LW21b] M. Lu 和 W. Wang，Hall代数与量子对称对 III：箭图簇，《数学进展》393（2021），108071。[LW22a] M. Lu 和 W. Wang，Hall代数与量子对称对 I：基础，《伦敦数学会会刊》（第3辑）124（2022），1–82。[LW24] M. Lu 和 W. Wang，$\imath$Hall代数与 $\imath$量子群，《纯粹数学研讨会论文集》108，美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，2024，371–433。[Lus90] G. Lusztig，源自量化包络代数的典范基，《美国数学学会杂志》3（1990），447–498。[Lus93] G. Lusztig，《量子群导论》，Modern Birkhäuser Classics，1993年版重印，Birkhäuser，波士顿，2010。[Na01] H. Nakajima，量子仿射代数的箭图簇与有限维表示，《美国数学学会杂志》14（2001），145–238（电子版）。[PX00] L. Peng 和 J. Xiao，三角范畴与 Kac–Moody代数，《数学发明》140（2000），563–603。[Q16] F. Qin，通过循环箭图簇构造量子群 I，《组合数学》152（2016），299–326。[Rin90] C. Ringel，Hall代数与量子群，《数学发明》101（1990），583–591。[Rin96] C.M. Ringel，量子群的 PBW基，《纯粹与应用数学杂志》470（1996），51–88。[S19] S. Scherotzke，广义箭图簇与三角范畴，《数学杂志》292（2019），1453–1478。[T06] B. T¨oen，导出Hall代数，《杜克数学杂志》135（2006），587–615。

[X97] J. Xiao，*Hall*代数的*Drinfeld*双与*Ringel–Green* 理论，《代数杂志》**190** (1997), 100–144.[XX08] J. Xiao 和 F. Xu，与三角范畴相关的*Hall*代数，DukeMath. J.**143** (2008),357–373.

Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, P.R.China电子邮箱: luming@scu.edu.cn

Department of Mathematics, Nanjing University, Nanjing 210093, P.R.China电子邮箱: 502023210029@smail.nju.edu.cn