arXiv:2512.15364v1 [math.GR] 17 Dec 2025

一致谱隙、非阿贝尔 Littlewood–Offord 与随机游走的反集中

OREN BECKER 和 EMMANUEL BREUILLARD

摘要。我们证明，半单代数群上的随机游走不会集中于真代数子簇上，并且具有一致的指数反集中速率。为此，我们证明了可数线性群的拟正则表示具有一致谱隙。该方法关键地运用了丢番图高度和高度间隙定理。我们还推导出 Littlewood–Offord 不等式的非阿贝尔版本，并证明了逃逸子簇的对数界。在本文的后续工作中，我们将说明如何将这一一致谱隙转化为有界秩有限单群的凯莱图上的一致扩张，其中 $G(p)$ 适用于几乎所有素数 p。

目录

1. 引言 1 2. 带重叠的乒乓引理 11 3. 逃逸子簇 13 4. 局部考量 16 5. 高度 23 6. 一致谱隙的证明 28 7. 非阿贝尔 Littlewood–Offord 与反集中 35 参考文献 41

1. 引言

给定一个离散群 Γ，如果存在 $\varepsilon > 0$ 和一个有限集 $S \subset \Gamma$，使得对于每个单位向量 v，酉表示 π 都具有谱隙性质

$$\max_{s\in S} \|\pi(s)v - v\| \geq \varepsilon. \tag{1.1}$$

这一概念在无限群论、群作用的遍历理论以及群 C^*-代数理论中发挥着关键作用。例如，正则表示λ_Γ 具有谱隙性质，等价于 Γ的非 *amenability* 。同样，每个不含不变单位向量的酉表示都具有谱隙性质，等价于 Γ具有*Kazhdan* 性质 *(T)* 。在动力系统中，人们自然会关注保测系统上的群作用（X， m），并由此研究所谓的*Koopman* 表示 λ_X，它作用在 $L^2(X,\ m)$上，由 $\lambda_X(\gamma)f(x) = f(\gamma^{-1}x)$给出。如果 m是概率测度，人们还会考虑其在零均值函数超平面上的限制 λ_X^0 。谱

OB 获得了欧洲研究理事会（ERC）通过欧盟 Horizon 2020 研究与创新计划（资助协议编号：803711）提供的资助。

对 λ_X 或 λ_X^0 而言，谱隙性质意味着相关性的指数衰减、混合速率，以及相应随机乘积的 Kakutani 中心极限定理的收敛速率。它还与强遍历性这一概念密切相关。关于背景知识及参考文献，请读者参阅著作[7],综述 [6,39,62] 以及论文 [9,40]。我们将称满足（$(\varepsilon,\ S)$）中的条件（1.1）的一对参数为 ***Kazhdan*参数**，对应于 π。参数 $\varepsilon>0$ 称为***Kazhdan* 常数**，而 S 称为***Kazhdan* 集合**，对应于 π。

确定哪些酉表示具有谱隙性质是一个值得研究的问题。当这一性质成立时，推导出明确的 Kazhdan 参数（$\varepsilon,\ S$）也很有意义。本文为线性群的某些酉表示建立了一致谱隙性质。我们将证明，这些表示具有一致谱隙性质，即 Kazhdan 参数 ε 可以在所有 Kazhdan 集 S 中统一选取。

我们将推导出这一一致谱隙的若干推论。最值得注意的是，我们将得到逃逸子簇的对数界（见推论 1.5），以及线性群上随机游走的一致反集中估计。后者（见定理 1.3和1.4）确立了经典 Littlewood-Offord 估计的一个强有力的非交换版本[65]。在本文的续篇中，我们将由此推出有界秩有限单群的一致扩张结果 [4]。

1.1. 拟正则表示的一致谱隙。 对于子群 $H\leq\Gamma$，我们令 $\lambda_{\Gamma/H}$表示具有稳定子群 H的 Γ 的拟正则表示 。其表示空间为$\ell^2(\Gamma/H)$，且 Γ 通过左平移作用。Eymard [36]研究了拟正则表示的谱隙性质，并创造了余 ***amenable*** 一词，用来描述不具有谱隙性质的子群 $H\leq\Gamma$ $\lambda_{\Gamma/H}$。参见 [8,36,42,44,54,63]。试图对任意线性群（例如自由群）的所有余 amenable 子群进行分类是徒劳的，但我们可以寻找关于 H 的几何条件，以确保 $\lambda_{\Gamma/H}$ 具有谱隙性质，甚至一致谱隙性质。

先作一个初步说明：谱隙性质可由商群作用继承，Kazhdan参数亦然。换言之，若 X 和 Y 是 Γ-集，且$\phi:\ X\to Y$是一个 Γ-等变映射，那么 λ_Y 具有 Kazhdan参数$(\varepsilon,\ S)$ 的谱隙性质 λ_X 意味着 6.5也具有相同参数的谱隙性质（见引理）。因此，在确立一致谱隙性质时，我们总可以转而考虑一个适当的商群。

设 K 为一个域，且 $\Gamma\leq\mathrm{GL}_d(K)$ 是一个可数群。若 Γ 几乎可解，也就是说包含一个有限指数的可解子群，则它是可容许的，并且 Γ 的任何酉表示都不具有谱隙性质。否则，Γ 存在一个商群，它在某个半单代数群中 Zariski 稠密。鉴于上文的初步说明，假设 Γ 在定义于 $\mathbb{G}\leq\mathrm{GL}_d$ 上的某个半单代数群中 Zariski 稠密 K，因此是自然的。取一个有界指数子群后，还可以进一步假设 $\mathbb{G}$ 是连通的，见 1.5.4。因此，我们可以在这一设定下陈述主要结果。

定理 1.1 (拟正则表示的一致谱隙)。 存在一个仅依赖于 d 的 $\varepsilon_d>0$，使得下述结论成立。设 K 是一个域，且 $\mathbb{G}\leq\mathrm{GL}_d$ 是一个连通半单代数 K-群。设 $H\leq\Gamma$ 是 $\mathbb{G}(K)$ 的可数子群，其中 H 在 $\mathbb{G}$ 中不 ***Zariski*** 稠密。给定 $S\subset\Gamma$，对于每个单位向量 $v\in\ell^2(\Gamma/H)$，存在 $s\in S$，使得

$$\|\lambda_{\Gamma/H}(s)v-v\|\geq\varepsilon_d$$

假设 S 有限，并生成 $\mathbb{G}$ 的一个 ***Zariski*** 稠密子群。

我们强调， ε_d 不依赖于域 K 及其特征。尽管我们没有尝试对其进行优化，但我们将给出 ε_d 的一个显式下界，并用 [15] 中的高度间隙常数表示（见第 §6节中的（6.1）、（6.8）和（6.10））。这些高度间隙常数是可有效计算的；尽管 [15], 中并未给出关于 d 的显式界，但可以从其中的论证中推导出来。

定理 1.1 中的一致性使我们能够对群上任意概率测度的算子范数给出一致上界。记 $\|.\|_{\mathrm{op}}$ 为$\ell^2(\Gamma/H)$上的算子范数。对于 μ 上的概率测度 Γ，我们定义：

$$\beta(\mu) := 1 - \sup_{g\in\Gamma, L\lneq\mathbb{G}} \mu(gL\cap\Gamma)$$

其中 L 遍历 $\mathbb{G}$的所有真代数子群。

推论 1.2。设 $\varepsilon'_d = \varepsilon_d^2/2$。令 $H \le \Gamma$ 为 $\mathbb{G}(K)$ 中不在 $\mathbb{G}$内 *Zariski* 稠密的可数子群。如果 μ 是 Γ上的任意概率测度，那么

$$\|\lambda_{\Gamma/H}(\mu)\|_{\mathrm{op}} \le 1 - \beta(\mu)\varepsilon'_d\ .$$

再次强调，这个上界对所有 Γ 和 H都是一致的：对于某些 Γ 和 H，只有当 μ 几乎完全支撑在 $\mathbb{G}$的某个真代数子群的陪集上时， $\|\lambda_{\Gamma/H}(\mu)\|_{\mathrm{op}}$才可能接近 1。

1.2. 随机游走的反集中估计。现在我们陈述上述一致谱隙的一些推论，这些推论涉及一个经典问题：给出独立随机变量乘积落在 $\mathbb{G}$的某个代数子簇中的概率上界。令 k 为一个局部域（即 $\mathbb{R}$、 $\mathbb{C}$、一个 p-进域，或有限域上的洛朗级数域）。

定理 1.3（代数子簇上的反集中）。设 $G = \mathbb{G}(k) \le \mathrm{GL}_d(k)$ 是一个连通半单代数 k-群。对于一个取值于 G 的随机变量 X，令

$$\beta(X) := 1 - \sup\{\mathbb{P}(X \in gL) \mid L \text{ proper algebraic subgroup of } G, g \in G\}.$$

设 $X_1, \dots, X_n$ 是相互独立的 G 值随机变量。那么，对于 G 的任意真闭代数子簇 V，有

$$\mathbb{P}(X_1 \cdots X_n \in V) \le C_V \cdot e^{-c\sum_{i=1}^n \beta(X_i)}, \tag{1.2}$$

其中可以取 $C_V = (1 + \text{维数 } V)^{\frac{1}{2}} \cdot \deg(V)$ （$C_V = 1$ 若 V 是 $\mathbb{G}$ 中某个代数子群的陪集），且 $c = \varepsilon'_d 4^{-d^2}$。

这里 $\deg(V)$表示 V在 $\mathbb{G}$的某个固定射影嵌入中的次数，参见第 3 节。在定理 1.3 中，概率分布是任意的，并不要求对称，也不要求支撑于可数集合。虽然该结果将由有限支撑测度的特殊情形推导得出，但这一约化并非例行可行，因为陪集有不可数多个 gL。

定理 1.3 的一个直接推论是以下新颖的一致反集中估计：固定一个 $k \ge 3$，若每个 X_i 都在基数为 k 的集合 S_i 上均匀分布，且对每个 i， $S_i^{-1}S_i$都生成 G 的一个 Zariski 稠密子群（这意味着 $\beta(X_i) \ge 1/k$），那么对于上述任意 V，指数反集中的速率仅取决于 d 和 k:

$$\mathbb{P}(X_1 \cdots X_n \in V) \le C_V e^{-cn/k}. \tag{1.3}$$

我们将直接推出定理1.3，所依据的是定理 1.1。上述定理的一个重要特例是 V 为真代数子群的情形。在这种情况下，该定理可直接由定理 1.1推出。在大有限群的凯莱图中，子群上的反集中是通过所谓的 Bourgain-Gamburd 机器建立谱隙估计的关键要素；参见 [23]。在 [4]中，我们将利用定理 1.3 寻找新的一致扩张子族。这将进一步成为 [5] 中研究随机群特征簇的一项关键要素。

关于独立同分布随机游走在簇上的反集中估计，已有研究分别见 [1] 以及 [10,13,17],；后者运用随机矩阵乘积理论，针对某一特殊类别的簇推导出指数估计。然而，这些方法存在局限，因为它们往往需要近端性等特殊假设，而且对随机变量的概率律并非一致。在 [53] 和 [47] 中，则通过结合筛法与超强逼近所导出的有限商群谱隙估计，证明了任意子簇上随机游走的指数级非集中性 [24,26,43,58]。关于此方法的说明，见 [18]。上文的定理1.3 涵盖了所有这些结果，但证明了更强得多的结论。事实上，定理 1.3的一个关键特点是指数衰减速率的一致性，这是以往所有工作都不具备的。例如，在例（1.3）中，该速率仅取决于维数 d 以及 k 概率测度支撑的基数。

注意，我们的界是统一的，不受 X_i 的大小影响；它对簇的依赖仅体现在乘法常数中，而且只通过簇的次数体现。因此，这属于通常与 Littlewood 和 Offord 的名字联系在一起的一类结果。他们在研究随机多项式的实根时，研究了独立随机变量之和的此类反集中界 [52]。在这一交换背景下，近期有研究考察了簇上的反集中性质 [38,64], ，并得到了逆平方根界。若不对随机变量的分布作进一步假设，逆平方根界是最优的；但正如定理1.3所示，在半单性以及对代数子群不集中的温和假设下，可以得到强得多的指数界。

1.3. 非交换 Littlewood-Offord 估计。 在簇V为一点这一特殊情形下，上述估计可视为 Littlewood– Offord 不等式的真正非阿贝尔版本 [52,56,65]。回顾一下，该不等式（由 Erdős 在 [34] 中改进如下）指出：若 $a_1,\dots,a_n$ 是实数，且 X_i、 $i=1,\dots,n$是取值为 a_i 或 $-a_i$ 的独立随机变量，各以概率$_1$ $_2$取值，那么

$$\sup_{b\in\mathbb{R}} \mathbb{P}(X_1+\ldots+X_n=b) \le 2^{-n}\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor} = O(\frac{1}{\sqrt{n}}). \tag{1.4}$$

Littlewood–Offord 界的主要特点（相较于 Berry-Esseen 界等需要满足矩条件的经典正态近似极限定理）在于，它适用于相互独立但不一定同分布的随机变量，而且无论 a_i的大小如何，该界都一致成立。

Tiep 和 Vu 在[67] 中（另见 [55,64]）针对 $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ 中独立随机变量的乘积，得到了 Littlewood–Offord 不等式的一个非阿贝尔版本；在对 X_i 的要求非常宽松的假设下（即其中小阶元素的数量不能

过多）。最近，Juskevicius 和 Semetulskis [49]给出了（1.4）的一个非常简短的证明，该证明统一适用于所有无挠群（不一定是阿贝尔群）。

自由群的例子告诉我们，在进一步的非交换性假设下，应当期待一个强得多的界。下面的版本给出了这样的更强界：只要 X_i 在 $\mathrm{GL}_d(k)$ 的几乎可解子群上的支撑不过于集中，该界通常会随变量个数呈指数级增长。这里， k 是任意局部域。

定理 1.4 (非阿贝尔 Littlewood–Offord 不等式)。 存在常数 $c_d > 0$ ，使得下述结论成立。设 k 是一个局部域， $X_1, \ldots, X_n$ 是取值于 $\mathrm{GL}_d(k)$ 的 n 独立随机变量。设 $\beta_i := 1 - \sup\{\mathbb{P}(X_i \in gL) \mid g \in \mathrm{GL}_d(k)\ L \leq \mathrm{GL}_d(k)$ 几乎可解$\}$。那么

$$\sup_{g \in \mathrm{GL}_d(k)} \mathbb{P}(X_1 \cdots X_n = g) \leq e^{-c_d \sum_{i=1}^n \beta_i}.$$

例如，若 X_i 以概率 1 4 取值为 a_i、a_i^{-1}、b_i、b_i^{-1}，且每一对 a_i、b_i都生成 $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ 的一个非几乎可解子群，则 $\beta_i \geq \frac{1}{4}$ （事实上，若对称集 S 包含于陪集 gL 中，则 S^2 包含于 L 中，且其在 S 中的指数至多为 2）。虽然定理 1.4 将由定理 1.1 推出，但这并不需要考察拟正则表示，只需考察正则表示。因此，它也可以由一致 Tits 替代定理 [14]推出。

1.4. **逃逸子簇**。 最后，我们陈述定理1.3关于 逃逸子簇的另一条推论。这一现象源于 Eskin-Mozes-Oh 提出的一条引理 [35] ，该引理在关于线性群的增长和近似子群的研究中发挥了重要作用，例如 [21, 24]。它断言（见引理 3.1），若代数群的一个有限生成子群是 Zariski 稠密的，那么存在一个上界，限定某个元素的最小词长，使得该元素位于给定的真代数子簇之外；该上界仅取决于该子簇的次数和维数。文献中已有多种证明这一引理的方法。例如， [35] 使用贝祖定理，而 [24] 则使用超极限论证。我们另给出一种基于非常简单的线性化过程的证明，见引理 3.1。这一证明给出了关于子簇次数的显式多项式上界。尽管证明我们的主要结果定理 1.1 和 1.3需要用到这一引理，但事实证明，这些结果事后可以用来 *a posteriori* 大幅改进逃逸引理中的上界，在次数方面给出对数级上界：

推论 1.5 (对数逃逸)。 给定 $d \geq 2$，存在 $C_d > 1$ ，使得若 K 是一个域，$\mathbb{G}$ 是一个维数至多为 d的连通半单代数 K-群， $S \subset \mathbb{G}(K)$ 是生成一个 *Zariski* 稠密子群的有限子集， V 是 $\mathbb{G}$ 的一个次数至多为 N的真闭子簇，且 $n \geq 1$ 是满足 $S^n \subset V$的整数，则 $n \leq C_d \log(1+N)$。

1.5. **一些进一步的评述**。

1.5.1. 弱包含。 人们或许会想知道，拟正则表示$\lambda_{\Gamma/H}$ 在多大程度上已经可以由正则表示 λ_Γ 控制。若 $\lambda_{\Gamma/H}$ 弱包含于 λ_Γ （按 Fell 的意义），则 $\|\lambda_{\Gamma/H}(\mu)\|_{\mathrm{op}} = \|\lambda_\Gamma(\mu)\|_{\mathrm{op}}$ 对每个定义在 μ 上的对称概率测度 Γ均成立。等式的一边由弱包含得出，另一边则由 Kesten 判据得出；或者，在定理 1.1关于无中心 $\mathbb{G}$ 的情形中，C^*的 -单性 Γ [25] 表明弱包含蕴含弱等价。因此，若 $\lambda_{\Gamma/H}$ 是

弱包含于 λ_Γ，则拟正则表示的谱隙受正则表示的谱隙控制。当 H 是 Γ的可容许子群时，情况正是如此，例如[70, 7.3。7]然而，这也是唯一的情形，因为若 H 是 Γ的任意非 amenable 子群，则 $\|\lambda_{\Gamma/H}(\mu)\|_{\mathrm{op}} = 1 > \|\lambda_\Gamma(\mu)\|_{\mathrm{op}}$ 对任意支撑在 μ 的某个生成集上的对称测度 H均成立。这表明，对于非 amenable 的 H，定理 $\lambda_{\Gamma/H}$ 1.1 中证明的 λ_Γ 谱隙不能仅由

1.5.2. 谱隙性质与不变均值。 对于 Koopman 表示 λ_X，其中 $(X,\ m)$ 是离散的，且 m 取计数测度，Tarski 的著名定理 [27,32,66]断言， λ_X 不具有谱隙性质，当且仅当 X 存在一个 Γ-不变均值；而这又当且仅当 X 不存在悖论分解。如 [27]所示，在某种意义上，这些等价关系可以定量化。定理 1.1的证明依赖于通过一个结果对谱隙性质作出的新刻画，我们称之为带重叠的乒乓引理（引理 2.1）。它给出了显式谱隙估计。尽管这里我们只使用其正向结论，但在后续论文中 [3] 我们将通过引入少重叠作用 这一概念，证明反向结论也成立，并证明 X 具有少重叠性质，当且仅当 λ_X 具有谱隙性质。

1.5.3. 不要求一致性地证明谱隙性质。众所周知，对于定理 1.1 中给定的一对 $H \leq \Gamma$，$\lambda_{\Gamma/H}$ 具有谱隙性质。沿着 Furstenberg 证明 Borel 稠密性定理 [41] 的思路，也可以给出一个简短证明。Shalom 在 [61] 中采用了这一策略，直接证明（不依赖 Tits 二择一定理）非几乎可解线性群的非 amenability。证明如下。根据 Chevalley 定理，可以找到 Γ 的一个射影表示 V，其中 H 固定一条直线。如果不存在谱隙，则 Γ/H上存在一个不变均值，因而对 K的每个局部域扩张 k，它都诱导出 $\mathbb{P}(V \otimes k)$上的一个 Γ-不变概率测度。选取一个 k，使得Γ 无界，即可应用 Furstenberg 引理 [70, 引理 3.2.1]，从而与 Γ 在 V上的不可约性矛盾。这个方法还可以进一步推广，在稳定子群 H 变化时，仍能保证 Kazhdan 常数的一致性。我们听 Hadari 和 Shalom [46] 说，他们已用这一方法证明了 Γ/H 对于多种 $H \leq \Gamma$ 都具有谱隙性质，并且在 H方面具有一致性。 H 方面的一致性也可由超强逼近 [43], 推出，但更应将其视为超强逼近证明中的一个组成部分，见 [18]。第二作者曾通过随机矩阵乘积，在一篇未发表的笔记 [17]中给出了关于 H 的一致性证明。然而，所有这些方法都无法在 Γ 或 S方面得到一致性。尽管不妨考虑用非标准分析的方法来研究定理 1.1，但迄今为止，这方面的尝试都未能成功。即使取得成功，也无法给出像我们在定理 1.1 中那样的谱隙显式下界。

1.5.4. 定理 1.1 的一种改写。若 GL_d 的子群不置换任何由真向量子空间组成的有限族，则称其为强不可约。给定两个可数线性群 $H \leq \Gamma \leq \mathrm{GL}_d$，若 H 的每个有限指数子群 Γ_0 的强不可约表示在限制到 $H \cap \Gamma_0$ 后仍然强不可约，则称 H 在 Γ 中不可约稠密。这等价于要求 $\mathbb{H}^0 Rad(\mathbb{G})$ 是 $\mathbb{G}^0$ 的真子群，其中 $\mathbb{H}$（分别为 $\mathbb{G}$）表示 H （分别为 Γ）的扎里斯基闭包， $Rad(\mathbb{G})$ 是可解根， $\mathbb{G}^0$ 是单位元的连通分支。

根据这个定义，我们得到定理 1.1 的如下改写。 设 K 是一个域，且 $H \leq \Gamma$ 是 $\mathrm{GL}_d(K)$ 的可数子群，满足 H 在 Γ 中并非不可约稠密。若 $S \subset \Gamma$ 是一个有限集，且 $\langle S \rangle$ 在 Γ 中不可约稠密，则 S 是 ε_d-*Kazhdan* 集。这里 $\lambda_{\Gamma/H}$仅取决于 $\varepsilon_d > 0$。 d。

要从定理 1.1 得出这一点，首先注意，考察 Γ 在 $\mathbb{G}^0/Rad(\mathbb{G})$ 上的共轭作用，并结合引理 6.5，可不失一般性地假设 $\mathbb{G}^0$ 是半单的，且 $\mathbb{G} \leq Aut(\mathbb{G}^0)$。接下来回忆一下， $Aut(\mathbb{G}^0)$ 包含 $Inn(\mathbb{G}^0)$ 作为一个有界指数子群。事实上，至多有 $\mathrm{rk}\,\mathbb{G} \leq d$ 个 $\mathbb{G}^0$ 的单因子可能被置换；对于每个这样的因子，其外自同构群同构于 Dynkin 图的对称群，因此其阶至多为 6（ D_4 时取到）。特别地，$[Aut(\mathbb{G}^0) : Inn(\mathbb{G}^0)] \leq d_0 := 6^d d!$ 因此，我们可以假设 $\mathbb{G}^0$ 在 $\mathbb{G}$ 中的指数至多为 d_0。众所周知（例如， [24, 引理 C.1]） ， $\Sigma := (S \cup S^{-1})^{2d_0} \cap \mathbb{G}^0$ 生成 $S \cap \mathbb{G}^0$。因此，如果 Σ 对 $\lambda_{\Gamma/H}$ 是 ε-Kazhdan 的，那么 S 就是 $\frac{\varepsilon}{2d_0}$-Kazhdan 的。而且， $\lambda_{\Gamma/H}$ 的限制是至多 d_0 个 $\Gamma \cap \mathbb{G}^0$ 的拟正则表示的直和，其稳定子群均非 Zariski 稠密。根据定理 1.1 Σ ，它对每个这样的表示都是 ε_d-Kazhdan 的。因此，如所需，它对 $\lambda_{\Gamma/H}$ 是 $\frac{\varepsilon_d}{\sqrt{d_0}}$-Kazhdan 的。 —=

1.5.5. 关于稳定子群的其他充分几何条件。对于可数线性群$\Gamma \leq \mathrm{GL}_d$，我们可以探讨稳定子群 H 满足哪些其他几何条件，才能使 $\lambda_{\Gamma/H}$ 具有谱隙性质或其一致版本。事实证明，当 H 在如下意义下是代数的： $H = \Gamma \cap \mathbb{H}$，其中 $\mathbb{H}$ （分别为 $\mathbb{G}$）是 H （分别为 Γ）的扎里斯基闭包时，我们可以给出 $\lambda_{\Gamma/H}$ 具有谱隙性质的充要条件。当且仅当 C($\mathbb{H}$) 是 C($\mathbb{G}$) 的真子群时，该性质成立。这里 C() 表示完美核，即单位元的连通分支的导出列的最后一项，参见 [62, 3. 23]。在本文的后续工作中，我们将说明如何把定理 1.1 推广到这一更一般的情形，并证明此类作用具有一致的谱隙性质。这需要将定理 1.1 推广到完美代数群，并处理仿射表示；而本文仅处理射影表示（例如见 [43]）。虽然我们的方法确实可以推广到这种情形，但代价是论证要复杂得多（因为在非半单情形下 (5.9) 不再成立），因此我们将其留待即将发表的后续论文处理。在 L. Pham 关于仿射群 SL(2, $\mathbb{Z}$) 的博士论文 [57] 中，也遇到了类似的困难 $\ltimes \mathbb{Z}^2$。

1.5.6. 其他集合及其邻域上的反集中。 定理1.3和 1.4讨论了点和簇上的反集中。秉持 [38, 64] 的精神，将这些结果推广到半代数集，或更一般地，推广到 o-极小结构中可定义的集合，将是有趣的。最初的 Littlewood-Offord 定理研究的是区间而非点上的反集中。若满足以下假设：定理 μ_i 中的 7.6 的支撑包含一个 离散的 非 amenable 子群的生成元，那么很容易便可推出一个类似的反集中估计，其中紧集取代了点。更具挑战性的是，在类似的离散性假设下，推导多项式映射下区间（在 $\mathbb{R}$ 上）或圆盘（在 $\mathbb{C}$ 上）的原像的反集中估计（定理 1.3 对应于区间缩减为一个点的情形）。参见 [29] ，其中给出了经典 Littlewood-Offord 框架下这类结果。定理 1.3 所提供的极强一致性，使得我们可以利用有效零点定理，在区间极小（相对于 n而言呈超指数级小）的情况下证明这类估计，而无需对支撑集施加任何离散性假设。关于这一论证，参见 [16] 。

1.5.7. 百分之一与百分之九十九。推论 1.2 在 $H = 1$ （或定理 7.6）的情形下表明，对于域 Γ 上的概率测度 μ，小谱隙 $1 - \|\lambda_\Gamma(\mu)\|_{\mathrm{op}}$ 意味着μ 大量支撑在某个真代数子群（甚至是可容许子群）的陪集上。我们可以称之为 99% 陈述。相应的 1% 版本则是下面的问题，我们将其留作开放问题。1% 问题：是否存在一个函数 $\delta_d(\varepsilon) > 0$，使得对于每个 $\varepsilon > 0$、每个域 K，以及 $\mathrm{GL}_d(K)$ 上的每个概率测度 μ （$\Gamma \leq$），只要满足$\|\lambda_\Gamma(\mu)\|_{\mathrm{op}} \geq \varepsilon$，就有 $\mu(gA) \geq \delta_d(\varepsilon)$ 成立，其中某个陪集 gA 属于 Γ 的一个可容许子群。即使在 Γ 是一个固定自由群、而 μ 是有限子集上的均匀概率测度这种情形下，这个问题似乎也颇具挑战性。

1.6. **定理 1.1 的证明概述**。 建立群作用的显式谱隙的一种方法，是展示一个显式的悖论分解，例如构造一个自由作用的自由子群。虽然我们不会采用这种做法，但将使用一种与之密切相关且更灵活的论证，建立一个版本的乒乓引理。它不产生自由子群，却能提供足够的分离，从而保证定量谱隙。这将是第 2 节的主题，我们将在该节证明带重叠的乒乓引理（引理 2.1）。

不同于用于产生自由子群的经典乒乓引理（其中乒乓伙伴 γ_i 被选为在集合 X 上具有压缩作用，且吸引邻域与排斥邻域彼此不相交 A_i，R_i），这一结果在假设这些群元素的作用满足与乒乓引理类似条件的情况下，直接给出群元素之和 $\gamma_1 + \cdots + \gamma_r$ 的谱范数上界。关键区别在于，吸引邻域与排斥邻域 A_i，R_i 现在允许存在一定重叠，但重叠的重数远小于 r。

回到 Γ 的群作用。根据 Chevalley 定理，对于 $\mathbb{G}$ 的非扎里斯基稠密子群 H，存在一个 $\mathbb{G}$ 的线性表示 V，它没有 $\mathbb{G}$-不变直线，且 H 在 V 中固定一条直线。当 K 的特征为零时，V 可以选为绝对不可约。在正特征下只需作一些小幅修改（例如参见引理 6.6）；为简便起见，在本概述中我们假设 $\mathrm{char} K = 0$。只需考虑有限个可能的 V，因此只需处理其中一个。从有限集 S 出发，我们将构造一个元素 γ 及其适当的共轭元 $\gamma_i := g_i \gamma g_i^{-1}$ 均可表示为 S 中长度有界的短字；并找到 K 的一个适当的局部域扩张 k，使得 γ_1、……、γ_r 在射影空间 $X = \mathbb{P}(V \otimes_K k)$ 上“进行带重叠的乒乓”。

元素 γ 不一定是半单的，也不一定是 k-近端的（即具有唯一的最高特征值）；它只需在 k中具有一个模不是 1 的特征值即可。这种灵活性是该方法取得成功的关键，而这得益于带重叠的乒乓引理的高度一般性。选取 g_i，使其以尽可能横截的方式作用于 γ的广义特征子空间。当然，余维较小的子空间通常会相交，因此吸引邻域和排斥邻域（即这些广义特征子空间的加厚）也会相交。但作用的不可约性足以保证重叠的重数有界。

确实可以找到某个局部域扩张 k，使得其中的 γ_i 以带重叠的乒乓引理方式作用，这是主要论证的核心。某些局部完备化 k 可能会为某些 γ_i 提供所需的分离和重叠控制，但事先并不清楚能否选取同一个完备化，同时实现所需的分离和重叠控制

对所有 γ_i同时成立。事实上，对于某些实单李群（例如 $\mathrm{SO}(2n,\ 1)$ ），存在一些有限子集族 $\{S_i\}_{i\geq 1}$ ，尽管 $\langle S_i\rangle$ 在豪斯多夫意义下稠密，但 S_i 中所有长度不超过 i 的字仍然是椭圆元素（其所有特征值的模均为 1），见 [20, 例 10。3]。因此，要找到合适的 k，我们需要进行整体论证，并利用综合考察所有完备化时出现的各种消去与补偿。因此，一项重要的前置化简是：在证明定理 1.1时，可以不失一般性地先假设域 K 是整体域（例如特征零下的数域）。

第二个化简是，可以假设 S 具有有界基数，因为每个生成 $\mathbb{G}$ 中扎里斯基稠密子群的有限集，都有一个基数至多为 $2\dim \mathbb{G}-1$ 的子集，且该子集具有相同性质。参见引理3.4，其证明用到了非欧几里得赫尔利型定理。

然后，通过考虑 γ 的所有可能广义特征子空间，并估计它们之间的射影距离，来推进论证；这里要考虑 K 的所有（有限多个）可能完备化，其中 γ 不是椭圆的。这必须在局部层面完成；也就是说，对于每个完备化，都需要求出各个局部域中距离的具体估计。

例如，我们需要得到点到子空间交的距离估计，并用到点到各个子空间的距离，参见引理 4.3。为此，我们在 §4.1 讨论一种自然的正交概念，它在所有局部域上都有一致的意义。在非阿基米德情形下，获得这些估计中的精确常数至关重要。

随后将这些局部量相加，得到如下形式的类高度量：

$$t := \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{v\in V_K} n_v t_v$$

其中 $t_v\geq 0$ 是所讨论的局部量，例如相关子空间之间射影距离的对数之和。这里 V_K 是 K 的所有赋值（即绝对值的等价类）组成的集合，而 n_v 是局部次数 $[K_v:\ \mathbb{Q}_v]$，其中 $\mathbb{Q}_v$ 和 K_v 分别是 $\mathbb{Q}$ 和 K 关于 v的完备化。在第 5节中，我们将证明，这个局部贡献的加权和完全由 S的高度控制，即：

$$t\leq C_1 h(S)+C_2, \tag{1.5}$$

对于参数 C_1，C_2 它们仅取决于 d，其中

$$h(S) := \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{v\in V_K} n_v \log\|S\|_v$$

是 S的高度，而 $\|S\|_v :=\max_{s\in S}\|s\|_v$ 表示 $\|s\|_v$ 在 $\mathrm{GL}_d(K_v)$中的算子范数，该范数对应于标准欧几里得范数或 v-进范数。要使（1.5）成立，必须恰当地定义子空间之间的射影距离，第 4 节的大部分内容都用于介绍这一概念及其基本性质。

此处用到了三个主要要素。首先是有效博奇不等式[11, 19], ，这是一个局部结果，它断言联合谱半径

$$R_v(S) := \lim_{n\to+\infty}\|S^n\|_v^{\frac{1}{n}}$$

几乎（在一个接近 1 的乘法常数范围内）可由 S 中长度有界的字的谱半径（特征值的最大模）达到。参见（5.6）。

第二个要素是关于半单代数群上高度的一项全局结果，即所谓的 高度间隙定理，由第二作者在 [15] 中证明（另见 [28]，其中给出了近期的一种新证明）。该定理断言，归一化高度

$$\widehat{h}(S) := \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} h(S^n) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v\in V_K} n_v \log R_v(S)$$

在满足 S 生成 $\mathbb{G}$ 的一个 Zariski 稠密子群的条件下，它与 0 之间存在一个正数 $gap_d > 0$ 作为下界；该数仅依赖于 d （而与 K 和 S 无关）。这一结果可以解释为一种阿代尔马古利斯引理。

最后一个关键要素是来自 [15] 的准对称化定理 。该定理断言，归一化高度总是不超过高度 $h(S)$，且在 $\mathbb{G}(\mathbb{Q}^{al})$ 中元素的共轭作用下保持不变；并且可以通过 $\mathbb{G}(\mathbb{Q}^{al})$ 中 S 的某个适当共轭元的高度（相差一个乘法常数）来达到。具体而言：

$$\widehat{h}(S) \le \inf_{g\in\mathbb{G}(\mathbb{Q}^{\mathrm{al}})} h(gSg^{-1}) \le \kappa_d \widehat{h}(S) \tag{1.6}$$

其中某个常数 κ_d 与 S 无关。

结合最后两个要素与（1.5），经过适当共轭 S 在$\mathbb{G}$（$\mathbb{Q}^{al}$）后，可以假设

$$t + h(S) \ll_d \widehat{h}(S).$$

现在，这必然意味着至少存在一个赋值 v，使得 $t_v + \log\|S\|_v$ 受 $\log R_v$（S）控制。应用有效博奇不等式（5.6），便可得到一个适当的 γ，它属于 S的有界次幂，并且在赋值 v处，其最大与最小特征值之间有较大的特征值间隙，且所有与 γ_i 相关的子空间彼此充分分离。这保证了满足关于 $\mathbb{P}$（$V\otimes_K K_v$）的带重叠的乒乓引理的条件，从而完成定理的证明。

1.7. **论文组织结构**。 本文组织如下。在第2 节中，我们证明一个非常一般的引理，即带重叠的乒乓引理，该引理为有限个群元素作用于一个集合所对应的马尔可夫算子的算子范数提供上界。第3 节专门介绍逃离子簇引理（引理3.1）的一种新的（定量）证明，并继续证明可以转而考虑一个大小有界的子集（引理3.4）。在第4 节中，我们为实现应用带重叠的乒乓引理所需的几何条件做好准备。这包括在射影空间和格拉斯曼流形上引入合适的距离函数，并证明在局部域上统一成立的估计。在第5节中，我们回顾丢番图高度的基本事实，并回顾 [15]的主要结果，包括高度间隙定理。在第6 节中，我们给出定理1.1的证明。第7 节专门证明定理1.3 和1.4以及推论1.5。

约定。 我们使用维诺格拉多夫记号： $f \ll g$ 表示 $f \le Cg$，其中 C 是一个绝对常数。更一般地，当 C 仅允许依赖于 X时，我们记作 $f \ll_X g$ 。此外，对于正整数 r，我们用 $[r]$ 表示集合$\{1,\dots,r\}$。 K^{al} 表示域 K的代数闭包。

2. 带重叠的乒乓引理

设 $M \geq 0$。我们称群 Γ在集合 X 上作用时，其有限子集 F 处于M-乒乓引理 位置，如果对于每个 $\gamma \in F$，都存在 X的子集$\mathbf{R}\gamma, \mathbf{A}\gamma$，使得

(i) $\gamma(X \setminus \mathbf{R}\gamma) \subset \mathbf{A}\gamma$ 对所有 $\gamma \in F$均成立，且 (ii) $\sum_{\gamma\in F} 1_{\mathbf{R}_\gamma}(x) \leq M$ 并且 $\sum_{\gamma\in F} 1_{\mathbf{A}_\gamma}(x) \leq M$ 对所有 $x \in X$ 均成立。

下面这个简单引理给出了与处于乒乓位置的有限集相关联的马尔可夫算子范数的一般上界。

引理 2.1 (带重叠的乒乓)。设 Γ 是作用在离散集合 X 上的群。设 $F \subset \Gamma$ 是处于 M-乒乓位置的有限子集。设 λ 是 Γ 在作用于 $\ell^2(X)$ 时的酉表示，即 $(\lambda(\gamma)f)(x) = f(\gamma^{-1}x)$。那么

$$\| \sum_{\gamma\in F} \lambda(\gamma)\|^2 \leq 4M|F|.$$

我们称这个引理为带重叠的乒乓引理，因为它与经典乒乓引理（如 [68] 或 [31] 中所述）不同：它并不能推出 F 中的元素生成一个自由子群，但它给出了算子 $\sum_{\gamma\in F} \lambda(\gamma)$ 的算子范数上界；除一个乘法因子外，该上界与自由群的 Kesten 界一样好。回顾一下，Kesten 界 [50] 给出：若 $F = =\{\gamma_1^{\pm 1}, \ldots, \gamma_k^{\pm 1}\}$，且 γ_i 生成一个秩为 k 的自由群，则 $\| \sum_{\gamma\in F} \lambda(\gamma)\|^2 = 4(|F| - 1)$。由此可知，随着 $|F|$ 增大，我们的上界渐近地达到最优，误差至多为因子 M。它的主要优点是，条件 (i) 和 (ii) 的适用范围更广，也比经典乒乓引理的条件更容易验证。

引理 *2.1* 的证明。设 P_γ 和 Q_γ 分别是到 $\ell^2(A_\gamma)$和 $\ell^2(R_\gamma)$上的正交投影，即 $P_\gamma f = 1_{A_\gamma} f$和 $Q_\gamma f = 1_{R_\gamma} f$。

对于每个族 $\{f_\gamma \in \ell^2(X)\}_{\gamma\in F}$，根据柯西–施瓦茨不等式和假设 (ii)，$\left|\sum_{\gamma\in F} \mathbf{1}_{\mathbf{A}_\gamma}(x) f_\gamma(x)\right|^2$ 以及 $\left|\sum_{\gamma\in F} \mathbf{1}_{\mathbf{R}_\gamma}(x) f_\gamma(x)\right|^2$ 对于所有 $x \in X$均有上界 $M \sum_{\gamma\in F} |f_\gamma(x)|^2$。因此

$$\| \sum_{\gamma\in F} P_\gamma f_\gamma\|^2 \leq M \sum_{\gamma\in F} \|f_\gamma\|^2 \qquad \text{and} \qquad \| \sum_{\gamma\in F} Q_\gamma f_\gamma\|^2 \leq M \sum_{\gamma\in F} \|f_\gamma\|^2 \ .$$

Thus

$$\| \sum_{\gamma\in F} P_\gamma \lambda(\gamma)\|^2 \leq M|F| \qquad \text{and} \qquad \| \sum_{\gamma\in F} Q_\gamma \lambda(\gamma)^*\|^2 \leq M|F| \ .$$

由三角不等式,

$$\| \sum_{\gamma\in F} \lambda(\gamma)\| \leq \| \sum_{\gamma\in F} P_\gamma \lambda(\gamma)\| + \| \sum_{\gamma\in F} (1 - P_\gamma)\lambda(\gamma)\| \ ,$$

因此只需证明

$$\| \sum_{\gamma\in F} (1 - P_\gamma)\lambda(\gamma)\| \leq \| \sum_{\gamma\in F} \lambda(\gamma) Q_\gamma\| = \| \sum_{\gamma\in F} Q_\gamma \lambda(\gamma)^*\|$$

（等号成立是因为 $Q_\gamma^* = Q_\gamma$。）

固定 $f \in \ell^2(X)$, $\|f\| = 1$。假设 (i) 蕴含

$$(1 - P_\gamma)\lambda(\gamma) f = (1 - P_\gamma)\lambda(\gamma) Q_\gamma f \ .$$

此外，

$$|(1-P_\gamma)\lambda(\gamma)Q_\gamma f|(x) \le \lambda(\gamma)Q_\gamma|f|(x) \qquad \forall x \in X\ .$$

Thus

$$\|\sum_{\gamma\in F}(1-P_\gamma)\lambda(\gamma)f\| \le \|\sum_{\gamma\in F}\lambda(\gamma)Q_\gamma|f|\| \le \|\sum_{\gamma}\lambda(\gamma)Q_\gamma\|$$

□

允许 $M>1$ 对于我们在本文中使用上述引理至关重要。控制重叠的参数 M 将由环境空间的维数来界定，而集合 F 则允许尽可能大。

在下一小节中，我们证明一个关于线性作用的一般横截性结果。当我们在定理 2.1 的证明中应用引理 1.1 时，将使用下文构造的族 $\mathcal{F}^{\pm}$ 中的射影子空间的邻域。

2.1. 弱一般位置。 设 V 是域 k 上的有限维向量空间。在本小节中，k 是任意域。若 V 的子空间既不等于 V，也不等于 $\{0\}$，则称其为非平凡子空间。若对每个子族 I，V 的非平凡子空间族 $\mathcal{F}$ 都满足弱一般位置，则称其处于弱一般位置。

$$\operatorname{codim}\bigcap_{W\in I} W \ge \min\{\dim V, |I|\}.$$

引理 2.2。 给定整数 $d>1$、$r>0$，存在整数 $M=M(d,r)$，使得对于任意域 k，任意满足 $1\in S$ 的子集 $S\subset \mathrm{GL}_d(k)$，以下结论成立。若 Γ 表示由 S 生成的子群的扎里斯基闭包的连通分支，且 $H^+, H^- \le k^d$ 是一对非平凡子空间，二者均不包含非零的 Γ-不变子空间，则存在 $g_1,\dots,g_r \in S^M$，使得每个族 $F^+:=\{g_1H^+,\dots,g_rH^+\}$ 和 $F^-:=\{g_1H^-,\dots,g_rH^-\}$ 都由 r 个处于弱一般位置的互异子空间组成。

证明。我们对 r 作归纳。当 $r=1$ 时，可令 $g_1=1$。假设引理对 r 成立，并且我们已找到 $g_1,\dots,g_r$。对于每个 $I\subset[r]$，令 H_I^+ 为 $i\in I$ 对应的 g_iH^+ 的交集，并类似地定义 H_I^-。若 $H_I^+\neq 0$，则 $|I|<d$，因此可以选取一个非零的 $v_I^+\in H_I^+$。对于 H_I^-，同理。现在，$\cup_I$，$_{H_I^+\neq 0}\{g\in \mathrm{GL}_d \mid g^{-1}v_I^+\in H^+\}$ 是 GL_d 的一个代数子簇 V^+，其次数仅由 r 和 d 控制。类似地定义 V^-。但是，S 并未完全包含于 $\mathrm{V}^+\cup\mathrm{V}^-$ 中；否则，对于至少一个 I 以及符号 $\varepsilon\in\{+,-\}$，会有 $H_I^\varepsilon\neq 0, \Gamma$ 包含于 $\{g\in \mathrm{GL}_d \mid g^{-1}v_I^\varepsilon\in H^\varepsilon\}$，这与我们的假设矛盾。因此，由引理 3.1，存在 $M=M(d,r)$ 和 $g_{r+1}\in S^M$，使得对于每个 I 及满足 $H_I^\varepsilon\neq 0$ 的符号 ε，都有 $v_I^\varepsilon\notin g_{r+1}H^\varepsilon$。这意味着 $g_{r+1}H^\varepsilon$ 与每个 $g_iH^\varepsilon, i\le r$ 都不同，并且 $\operatorname{codim} H_I^\varepsilon\cap g_{r+1}H^\varepsilon \ge \min\{\dim V, |I|+1\}$。归纳步骤至此完成。□

注。如果 $\mathrm{GL}_d(k)$ 的一个子群不保持 k^d 的非平凡子空间的（非空）有限并，则称该子群强不可约。容易看出，这等价于该子群的扎里斯基闭包的连通分支不可约地作用。显然，如果 $\langle S\rangle$ 强不可约地作用，则引理中关于 H^+ 和 H^- 的条件成立。

备注。第 3 节中的引理 3.2 给出了字的最小长度的上界 m^d，其中该字位于子簇 $\{g\in \mathrm{GL}_d(K)\ \phi(gu)=0\}$之外；这里 $u\in K^d$，且 ϕ 是次数至多为 $m\ge 3$ 的多项式映射。我们可以利用这个上界来估计 $M(d,r)$。事实上，考察上述证明中从 $r-1$ 到 r 的归纳步骤，$\mathrm{V}^+\cup\mathrm{V}^-$ 包含于

$\{g \in \mathrm{GL}_d(K)\ \phi((g,\ g)(f_0^+,\ f_0^-)) = 0\}$，其中 $\phi(f^+,\ f^-)$ 是 $f^\varepsilon(v_I^\varepsilon)$ 与 f_0^ε 的乘积，且 f_0^ε 是一个核为 H^ε 的线性形式。注意，ϕ 是定义在 K^{2d} 上、次数至多为 $2\binom{r-1}{d-1} \le 2^r$ 的多项式映射。由此可得 $M(d,\ r) \le 4^{rd}$。

3. 逃逸子簇

本节将介绍一个新的逃离子簇引理的证明，该引理由 Eskin-Mozes- Oh 提出。[35, 命题 3。2]这一新证明大幅改进了界，尤其是在次数方面给出了多项式界。我们还将讨论半单代数群中扎里斯基稠密子群的生成，以及如何控制生成集的大小（引理3.4和命题3.3）。

为陈述逃逸引理，我们先回顾子簇次数的概念。

代数子簇的次数。设 K 是一个代数闭域。

给定一个线性代数 K群 $\mathbb{G}$，我们将其视为某个 GL_N 的闭子簇，其中 N。将 GL_N 视为某个仿射空间的闭子簇较为方便，因此我们以标准的分块对角方式将 GL_N 嵌入 SL_{N+1}。这样，$\mathbb{G}$ 嵌入为 $\mathbb{A}^{(N+1)^2}$。将这个仿射空间视为 $\mathbb{P}^{(N+1)^2}$ 中的一个开集，便可考察 $\mathbb{G}$中子簇的射影闭包，并由此得到它们的射影次数这一概念。我们按标准方式定义射影空间中不可约子簇 V 的次数：它等于 V与一个一般位置的、维数互补的线性子空间的交集的基数。一般而言，子簇的次数定义为其不可约分支次数之和。如果 V 是由齐次多项式 f定义的射影空间中的超曲面，那么 $\deg(V) \le \deg(f)$，且当且仅当 f 不可约时取等号。

引理 3.1 (逃逸引理)。对于所有整数 d 和 $N \ge 3$，存在 $C_{d,\ N} \le N^{d^2}$，使得若V 是 GL_d 中的一个闭子簇，其次数至多为 N，且 $S \subset \mathrm{GL}_d(K)$ 是生成某个并非完全包含于 V中的子群的有限集，则存在 $k \in [0, C_{d,N}]$，使得 S^k 并非完全包含于 V中。

证明基于以下引理。令 $M(d,m)$ 表示$K_{\le m}[V]$ 上次数至多为 $m \ge 3$的多项式函数空间的维数，其中 $K_{\le m}[V]$ 是定义在 V上的多项式函数空间，即 $M(d,m) = \binom{m+d}{d} \le m^d + 1.$

引理 3.2。设 $\Sigma \subset \mathrm{GL}(U)$ 是一个有限集，且 $1 \in \Sigma$，其中 U 是一个维数为 d的 K-向量空间。设 $u \in U$，且 f 是定义在 U上的次数至多为 m 的多项式函数。假设 f 在群 $\langle\Sigma\rangle$ 对 u 的作用所产生的轨道 $\langle\Sigma\rangle u$ 上不恒为零，其中群 $\langle\Sigma\rangle$由 Σ生成。那么对于每个 $n \ge M(d,m) - 1$，存在 $w \in \Sigma^n u$，使得 $f(w) \ne 0$。

证明。首先考虑 f 是线性形式的情形。于是 $u \ne 0$，只需证明存在某个 $n \le d-1$，使得 f 在 $\mathrm{span}\,\Sigma^n u$ 上不恒为零。关于 ℓ，函数 $\dim \mathrm{span}\ \Sigma^\ell u$ 单调不减，且 $\dim \mathrm{span}\ \Sigma^0 u = 1$。对某个 $n \le d-1$，有 $\dim \mathrm{span}\ \Sigma^n u = \dim \mathrm{span}\ \Sigma^{n+1} u$，因此 $\mathrm{span}\ \Sigma^n u = \mathrm{span}\ \Sigma^{n+1} u$。所以 $\mathrm{span}\,\Sigma^n u$ 是 $\Sigma \cup \Sigma^{-1}$-不变的，从而 $\mathrm{span}\,\Sigma^n u = \mathrm{span}\langle\Sigma\rangle u$。由假设 f 在 $\langle\Sigma\rangle u$ 上不恒为零，结论成立。

现在考虑一般的 f。我们有一个线性作用 $\mathrm{GL}(U) \curvearrowright K_{\le m}[U]$，由$g\cdot h = h \circ g^{-1}$给出，其中 $g \in \mathrm{GL}(U)$ 且 $h \in K_{\le m}[U]$，并有一个线性形式 $\phi\colon K_{\le m}[U] \to K$,$\phi(h) = h(u)$。根据假设，$f(\sigma u) \ne 0$，其中某个 $\sigma \in \langle\Sigma\rangle$。因此 $\phi(\sigma^{-1} f) = f(\sigma u) \ne 0$。

也就是说， ϕ 在 $\langle\Sigma\rangle f$ 上并非恒等于零。因此，根据上一段（应用于 Σ^{-1}），对于每个 $n \geq M(d,m) - 1$，都存在 $\tau \in \Sigma^{-n}$，使得 $\phi(\tau f) \neq 0$，即 $f(\tau^{-1}u) \neq 0$。□

引理的证明 *3.1*。 次数至多为 N 的闭子簇包含于一个次数至多为 N (例如参见 [24, 定理 A.3]的证明)。引理 3.1 取 $U = M_d(K)$、 $u = I_d$ 以及 $\Sigma = \{1\} \cup S$ 在引理3.2中对 V作左乘作用，即可立即得到。□

现在我们记录一个逃逸的推论，当不假设 S 是对称的时，这一推论很有用。

命题 3.3 (陪集逃逸)。 设 $\mathbb{G}$ 是定义在 K 上的连通半单代数组，且 S 是生成 $\mathbb{G}$ 的一个 *Zariski* 稠密子群的有限子集。那么存在 $k \leq C$，使得由 $S^k S^{-k}$ 生成的子群是 *Zariski* 稠密的。常数 C 仅依赖于维数 $\mathbb{G}$。

注意到，这改进了 [47,引理 3.5]。

命题 3.3 的证明。在深入证明之前，我们注意到，存在具有有限生成集 S 的无限群，使得对于所有 k， $S^k S^{-k}$ 都包含在一个有限子群中。例如，考虑灯泡群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\wr\mathbb{Z} = \{((u_n)_{n\in\mathbb{Z}},\sigma^i) \mid i \in \mathbb{Z}, u_n \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}$，其中 σ 是移位，且 $S = \{(\delta_0,\sigma)\}$。因此，引理的证明必须利用半单代数群的扎里斯基稠密子群的一些特殊性质。我们将看到，群 $S^k S^{-k}$ 的有限性正是引理结论成立的障碍；而当 S 如引理假设所述时，这一障碍并不会出现。

令 H_k 为由 $S^k S^{-k}$ 生成的子群的扎里斯基闭包。首先注意到 $1 \in SS^{-1}$，因而 $S^k S^{-k} \subset S^{k+1} S^{-(k+1)}$。所以 $H_k \leq H_{k+1}$。此外，给定 $s \in S$ 和 $i \leq k$，$S^i \subset H_k s^i \subset H_k\langle s\rangle$。

我们将对 $d =$ 维数 $\mathbb{G}$ 使用归纳法证明：当 k 大于某个整数 $C = C(d) \geq C(\{v8)$ 时，$H_k = \mathbb{G}$。

我们很快会看到，存在一个仅依赖于 d 的 $B = B(d)$，使得对所有 $k \geq B$， H_k 都是无限的。令 $C(d) = \max\{B(d)\ C(d-1)\} + d$，则必存在 $k \in [C(d) - d,\ C(d)]$，使得 $\dim H_k = \dim H_{k+1}$，且 H_k^0 的维数为正。于是 $sH_k^0 s^{-1} \subset H_{k+1}^0 = H_k^0$，因此对所有 $s \in S$，都有 $sH_k^0 s^{-1} = H_k^0$，从而 H_k^0 是 $\mathbb{G}$ 的正规子群。根据归纳假设， H_k 映满到 $\mathbb{G}/H_k^0$，因此 $H_k = \mathbb{G}$。

现在，反设 H_k 是有限的。若取 $k \geq B, B = B(d)$ 为稍后选定的值，我们将推出矛盾。将其投影到 $\mathbb{G}$ 的一个单因子上，不妨假设 $\mathbb{G}$ 是单群且中心平凡。代数群 $\mathbb{G}$ 嵌入 GL_{n_d}，其中 n_d 仅依赖于 d；我们还可以假设它在 K^{n_d} 上不可约地作用。

现在，论证因域的特征而异。先假设我们处于特征零的情形。Jordan 定理指出，存在 H_k 的一个阿贝尔子群 A_k，使得 $[H_k\colon A_k] \leq J$，其中 $J = J(n_d)$ 是 Jordan 常数。但 A_k 由半单元素构成，因此它包含于 $\mathbb{G}$ 的一个极大环面 T_k 中。固定 $s \in S$，将 $s = s_s s_u$ 记作 Jordan 分解，并找出一个包含 s_s 的极大环面 T，以及一个包含 s_u 的一维幺幂子群 U。

因此我们得到，对于所有 $i \leq k$， $S^i \subset H_k\langle s\rangle \subset X_k T_k T U$，其中 $|X_k| \leq J$。所有极大环面都共轭。因此， $T_k TU$ 和 $X_k T_k TU$ 的扎里斯基闭包是次数

独立于 k，例如可由 N界定。出于维数方面的原因，它们也是适当的子簇（因为 维数 $\mathbb{G} > 2$维数 $T+1$除非 $\mathbb{G}$的秩为 1，但在这种情况下，或者 s_s是中心的，或者s_u 是平凡的）。然而，当 足够大时，例如 ，N，这与引理 3.1 矛盾。

现在假设域具有正特征。令 Z_k 为$\mathbb{G}$中 H_k 的中心化子。若 $z \in Z_k$，则 $S^k S^{-k} \subset C_{\mathbb{G}}(z)$ 是 $\mathbb{G}$ 中 z 的中心化子。等价地，$(S \times S)^k$ 属于闭子簇 $V_z := \{(a,b) \in \mathbb{G} \times \mathbb{G}, ab^{-1} \in C_{\mathbb{G}}(z)\}$。该子簇的次数仅由 $\mathbb{G}$ 控制，并且当且仅当 $z \neq 1$ 时是适当的（因为 $\mathbb{G}$ 没有中心）。应用引理 3.1，可得 $C_2 = C_2(d)$，使得对于某个$k \leq C_2$，$(S \times S)^k$ 并非完全包含于 V_z 中。这意味着 Z_k 是平凡的。特别地，对于所有 $k \geq C_2$， Z_k 都是平凡的。现在，若 H_k 是有限的，且存在 K^{n_d} 的一组基，使得 H_k 的元素的矩阵系数属于 K的素域的代数闭包 $\mathbb{F}_p$，那么弗罗贝尼乌斯自同构 $x \mapsto x^p$ 的某个幂 F 会逐点固定 H_k。特别地，由于对每个$s \in S$都有 $sH_{k-1}s^{-1} \leq H_k$，可得对所有 $x \in H_{k-1}$，$(sxs^{-1})^F = sxs^{-1}$。这意味着 $s^{-1}s^F \in Z_{k-1}$，因此只要 $k > C_2$，就有 $s^F = s$。特别地， $S \leq \mathrm{GL}_{n_d}(K^F)$，其中 K^F 是由 F固定的 K的子域，它是一个有限域。但这样一来，S就是有限的，矛盾。

剩下的问题是说明为什么我们可以找到这样的基。若 H_k 在 GL_{n_d}上不可约地作用，那么由 Burnside 定理可知，取由H_k中的元素构成的 $M_{n_d}(K)$的线性基即可。例见 [68, §2.8]，其中指出，由于 H_k 是有限的，其元素的特征值和迹都属于 $\mathbb{F}_p$。出于同样的理由，若 H_k 完全可约，这一结论也成立。下面说明，对某个满足 $C_2 < k < C_2 + n_d^2$的 k， H_k 是完全可约的。非零 H_k-不变子空间的最小维数是 k的非减函数。假设它在长度至少为 n_d的某个区间上保持不变，记为 $[k, k+n_d]$。必然存在满足 $C_2 < k \leq C_2 + n_d^2$的某个 k 使这种情况发生。于是，若 V是维数最小的非零 H_{k+n_d}-不变子空间，它必定是 H_{k+i}-不变的，因而对 $i \in [0, n_d]$也 $s^i H_k s^{-i}$-不变。特别地，$s^{-i}V$是具有最小维数的 H_k-不变子空间。因此，子空间 V、 $s^{-1}V$、……、 $s^{-i}V$两两直和，直到某个 i 使得 $s^{-i-1}V$ 完全包含于前面 $j \leq i$个$s^{-j}V$ 的直和 W 中。但此时 W 在 s^{-1} 和 H_k下均不变，因而在 $\mathbb{G}$下不变，因为根据我们的假设， s 与H_k 共同生成了 $\mathbb{G}$ 的一个 Zariski 稠密子群。由于 $\mathbb{G}$ 不可约，$W = K^{n_d}$，且 H_k 完全可约。□

在证明主要定理时，首先控制 S 的规模会有所帮助。下面的引理3.6 （规模约简）允许我们从一开始就假设 $|S| \leq 2d^2 - 3$。

引理 3.4（规模约简）。设 $\mathbb{G}$ 是定义在域 K上的扎里斯基连通半单代数组。设 $S \subset \mathbb{G}(K)$ 是一个生成扎里斯基稠密子群的有限子集。那么存在 $S' \subset S$，使得 $|S'| \leq$2维数 $\mathbb{G} - 1$，且其已能生成扎里斯基稠密子群。

证明。不失一般性，我们可以假设 $\mathbb{G}$ 是单群；因为如果 $\mathbb{G}$ 的单因子为 $\mathbb{G} = G_1 \dots G_k$，且能找到大小至多为 $\dim G_i$ 的 $S_i \subset S$，其在 G_i 上的投影生成一个 Zariski 稠密子群，那么这些 S_i 的并集大小合适，并且生成 $\mathbb{G}$ 的一个 Zariski 稠密子群。注意到，对于某个满足 $\dim \mathbb{G}$ 的 $d \leq$， $\mathbb{G}$ 可嵌入 SL_d，例如通过伴随表示。由下文的引理 3.5，我们因此可以找到一个子集 $S' \subset S$，其维数为 $|S'| \leq \dim \mathbb{G}$，并生成一个无限子群。其扎里斯基闭包的连通分支 H 维数大于零；除非它就是 $H = \mathbb{G}$，否则 H 的正规化子是 $\mathbb{G}$ 的真闭子群，因为 $\mathbb{G}$ 是单群。因此，某个 $s \in S$ 位于该正规化子之外。这意味着 H, s 的扎里斯基闭包维数严格大于

H 的维数。我们可以如此继续，最多进行 $\dim \mathbb{G} - \dim\ H$ 次，直至得到整个 $\mathbb{G}$。这至多向 S' 中添加 $\dim \mathbb{G} - 1$ 个元素。结论得证。□

引理 3.5。设 K 是一个域。假设 $S \subset \mathrm{GL}_d(K)$ 是一个生成无限子群的有限集。那么存在 $S' \subset S$，使得 $|S'| \leq d$，且生成一个无限子群。

证明。我们可以假设 K 在其素域上有限生成，并将 K 嵌入局部域 k，使得 S 在 $\mathrm{GL}_d(k)$ 中无界。不失一般性，我们可以假设 S 的每个元素都是挠元，因此对每个 $s \in S$，$\det(s)$ 都是单位根。于是，S 在 $\mathrm{PGL}_d(k)$ 中的像 G 也必定无界。必要时从 S 中删去若干元素后，我们还可以假设对每个 $s \in S$，$S \setminus \{s\}$ 都是有限的。在这种情况下，我们现在需要证明 $|S| \leq d$。反设 $|S| > d$。那么， S 中任意含有 d 个元素的子集都会生成有限子群，因此在 $\mathrm{PGL}_d(k)$ 的 Bruhat-Tits 建筑 X_d 中有一个公共不动点。这意味着，由每个 s 在 X_d 中的不动点集 $Fix(s)$、$s \in S$ 构成的凸集族具有这样的性质：其中任意 d 个集合的交集都非空。但 X_d 是一个 $d-1$ 维可缩单纯复形，因此具有 d-Helly 性质，所以这将迫使 $Fix(s)$、$s \in S$ 有非空交集，与 G 的无界性矛盾。□

事实上，对引理3.4 中所用论证稍作变形，即可得到以下结论：

引理 3.6. 设 K 是代数闭域，且 $d \geq 2$。假设 S 是$\mathrm{SL}_d(K)$ 的一个有限子集，生成的子群在 K^d 上强不可约地作用。那么存在一个大小至多为 $2d^2 - 3$ 的 $S' \subset S$，其生成的子群已经强不可约地作用。

证明. 设 $\mathbb{G}$ 是 $G := S$ 的扎里斯基闭包。说 $G \leq \mathrm{SL}_d$ 是强不可约的，等价于说 $\mathbb{G}^0$ 是半单的，且在 $V = K^d$上不可约地作用。众所周知（例如参见 [69]），存在一个有限子群 $F \leq \mathbb{G}$，使得 $\mathbb{G} = F\mathbb{G}^0$。由引理 3.5，我们可以找到一个大小至多为 d 的 $S' \subset S$，它生成一个无限子群。像之前那样继续进行，我们可以将 s_1、……、s_n 中的元素逐一加入 S'，直到 H（即 S', $s_1, \ldots, s_n$ 的扎里斯基闭包的连通分支）是 $\mathbb{G}$的正规子群。首次出现这种情况时，某个 $n \leq$ 满足 $\dim\ H$。这意味着 H 是 $\mathbb{G}^0$ 的若干单因子的乘积，并且 $\mathbb{G}$ 置换这些单因子。因此它也必定置换其余因子。于是这些因子构成一个正规子群 $H_2 \leq \mathbb{G}$。注意，此时 $\mathbb{G} = FH_2H$，且 $\mathbb{G}/H$ 是 FH_2的一个中心商群。特别地， $\mathbb{G}/H$ 嵌入射影广义线性群 $_d(V)$ 中。注意，用同样的论证，引理 3.5 对射影广义线性群 $_d(K)$ 的子集也成立。这意味着除非 $H = \mathbb{G}$，否则我们可以在 S 中找到 d 个元素，使它们模 H生成一个无限群。随后我们可以根据需要重复此过程，直到得到 $H = \mathbb{G}^0$。所需元素总数至多为 $dk + \dim \mathbb{G}$，其中 k 是重复该过程的次数；它至多等于 $\mathbb{G}$的单因子个数，也就是 $k < d$ （比较秩即可）。所需的界由此得出。还要注意，S' 的扎里斯基闭包以 $\mathbb{G}^0$ 为单位元的连通分支，与原来的 S 相同。□

4. 局部考量

本节汇集关于射影变换及其在局部域上的射影空间中的动力系统的一些预备讨论。

4.1. 局部域上的正交性。设 k 是一个局部域。赋予 k^d 其标准范数；当 $k=\mathbb{R}$ 或 $k=\mathbb{C}$ 时，分别取欧几里得范数或厄米范数；当 k 是非阿基米德时，则取上确界范数 $\|x\| = \max_i |x_i|$ 。在后一种情形下，令 $\mathcal{O}$ 表示整数环， $\mathfrak{m}$ 表示其极大理想，并对一个向量子空间 $V \le k^d$，定义 $V_{\mathcal{O}} = V \cap \mathcal{O}^d$ 。

对于非阿基米德局部域 k，我们有一个双射

$$\left\{ \text{linear subspaces of } k^d \right\} \leftrightarrow \left\{ \text{direct summands of } \mathcal{O}^d \right\}$$

由 $W \mapsto W_{\mathcal{O}}$ 和 $M \otimes_{\mathcal{O}} k \leftarrow\!\shortmid M$ 给出（这可由主理想整环上有限生成模的结构定理推出）。我们称 k^d 的子空间 U， W 正交，如果 $U \cap W = \{0\}$（等价地， $U_{\mathcal{O}} \cap W_{\mathcal{O}} = \{0\}$），并且以下条件之一（因而全部）成立：

(1) $U_{\mathcal{O}} \oplus W_{\mathcal{O}} = (U+W)_{\mathcal{O}}$。 (2) 对所有 $u \in U$ 和 $w \in W$，若 $u+w \in \mathcal{O}^d$，则 u， $w \in \mathcal{O}^d$。 (3) $U_{\mathcal{O}} \oplus W_{\mathcal{O}}$ 是 $\mathcal{O}^d$ 的直和项。

注意，若 U 和 W 正交，则对于所有子空间 $U' \subset U$ 和 $W' \subset W$， U' 和 W' 也正交。对于 k^d 的子空间 U，自然映射 $U_{\mathcal{O}}/\mathfrak{m} \to (U+W)_{\mathcal{O}}/\mathfrak{m}$ 是单射；由中山引理可知，秩$_{\mathcal{O}} U_{\mathcal{O}} =$ 秩$_{\mathcal{O}/\mathfrak{m}} U_{\mathcal{O}}/\mathfrak{m}$，并且 k^d 的子空间 U 和 W 正交，当且仅当 $(U+W)_{\mathcal{O}}/\mathfrak{m} = U_{\mathcal{O}}/\mathfrak{m} \oplus W_{\mathcal{O}}/\mathfrak{m}$。

更抽象地说，一对 (V, L)，其中 V 是有限维的 k-向量空间， $L \subset V$ 是一个与 $\mathcal{O}^{\dim_k V}$ 同构的 $\mathcal{O}$-子模，由此可定义 V 的子空间之间的正交概念（如上所述）。若 U 是 V 的线性子空间，则 $U \cap L \cong \mathcal{O}^{\dim_k U}$ 作为 $\mathcal{O}$-模同构，而 U 的子空间 A, B 在 $(U, U \cap L)$ 中正交，当且仅当它们在 (V, L) 中正交。

注 4.1. 注意， k^d 的每个子空间 U 在 k^d 中都有一个正交补 W （因为 $U_{\mathcal{O}}$ 在 $\mathcal{O}^d$ 中有一个直补 M，且 $W = M \otimes_{\mathcal{O}} k$ 满足 $W_{\mathcal{O}} = M$）。因此，给定 k^d 的子空间 $U \subset V$，在 V 中存在 U 的正交补 W，并且分解 $V = U \oplus W$ 在 $\left(V, V \cap \mathcal{O}^d\right)$ 和 $\left(k^d, \mathcal{O}^d\right)$ 中都是正交的。

我们称向量 $u, w \in k^d$ 正交，如果它们包含在 k^d 的正交子空间中。等价地，如果 $\mathrm{span}_k u$ 与 $\mathrm{span}_k w$ 正交，则称 u, w 正交。

对于局部域 k 和正交的 u,$w \in k^d$，若 k 是阿基米德的，则有

$$\|u+v\| = \left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)^{1/2}$$

而若 k 是非阿基米德的，则有

$$\|u+v\| = \max\{\|u\|, \|v\|\}$$

事实上，$\mathrm{GL}_d \mathcal{O}$ 保持 k^d 上的上确界范数，并且存在非零标量 $\alpha, \beta \in k$，满足$|\alpha| = \|u\|$ 和 $|\beta| = \|v\|$，使得 $\mathcal{O}^d$ 有一个包含 $\{\alpha^{-1}u, \beta^{-1}v\}$ 的基。

k^d 上的范数可利用标准基自然地扩展到外幂 $\Lambda^n k^d$ 。若 $(e_1, \ldots, e_d)$ 是 k^d的标准基，则 $\Lambda^n k^d$的标准基由以下所有元素组成

$$e_I := e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n},$$

其中 $I=\{i_1<\ldots<i_n\}\subset[1,d]$，而 $\Lambda^n k^d$ 上的范数与之前一样，利用此基定义。众所周知，对于任意两个纯向量$\mathbf{v}=v_1\wedge\ldots\wedge v_n$和$\mathbf{w}=w_1\wedge\ldots\wedge w_m$，我们有

$$\|\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}\|\leq\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| \tag{4.1}$$

当且仅当子空间 V（由 v_i 张成）与 W（由 w_i 张成）正交时，等号成立。

（4.1）的证明。阿基米德情形是经典结果，因此我们只给出超度量情形的证明。若 V 是对应于 $\mathbf{v}$ 的子空间，W 是对应于 $\mathbf{w}$ 的子空间，我们可以假设 $V\cap W$ 为 0。对 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$ 进行缩放后，可以假设它们是单位范数的张量；我们还可以用 $e_1\wedge\ldots\wedge e_k$ 替换 $\mathbf{v}$，其中 e_i 构成 O-模 $V_{\mathcal{O}}$ 的一组基；对 W 也作同样处理，使得 $\mathbf{w}=f_1\wedge\ldots\wedge f_l$，其中 f_i 是 O-模 $W_{\mathcal{O}}$ 的一组 O-基。于是只需证明 e_i 与 f_j 的外积范数至多为 1。为此，可以分阶段进行，考虑由 V 和 f_1 张成的子空间 V_{k+1}、由 V 和 f_1 张成的空间 V_{k+2} 和 f_2，等等。在 V_{k+1} 中，用向量 e_{k+1} 补全 e_i 基，从而得到 $(V_{k+1})_{\mathcal{O}}$ 的一组 O-基。于是 $f_1=\alpha_1 e_{k+1}+u_{k+1}$，其中 $u_{k+1}\in V$。对 V_{k+2} 也可以作同样处理，得到 e_{k+2}，使得对于 $i\leq k+2$，e_i 构成 $(V_{k+2})_{\mathcal{O}}$ 的一组 O-基，并且 $f_2=\alpha_2 e_{k+2}+u_{k+2}$ 满足 $u_{k+2}\in V_{k+1}$，等等。注意，e_{k+1} 与 V 正交，且 e_{k+2} 与 V_{k+1} 正交，因此 f_1 的范数（根据假设为 1）等于 $\max\{|\alpha_1|,\|u_{k+1}\|\}$。特别地，$|\alpha_1|\leq 1$，当且仅当 f_1 与 V 正交时等号成立。类似地，$|\alpha_2|\leq 1$，当且仅当 f_2 与 V_{k+1} 正交时等号成立，等等。最后得到 $\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}=(\prod_{i=1}^{l}\alpha_i)e_1\wedge\ldots\wedge e_{k+l}$，且每个 $|\alpha_i|\leq 1$，因此所需不等式得证。对于等号情形，注意这意味着所有 α_i 的绝对值都为 1。但根据我们对 e_j 的构造，这等价于 $(V+W)_{\mathcal{O}}\leq V_{\mathcal{O}}+W_{\mathcal{O}}$，也就是 V 与 W 正交。□

4.2. 射影距离。我们将在射影空间 $\mathbb{P}(k^d)$ 上使用以下经典距离概念。对于 $x,\ y\in k^d\setminus\{0\}$，我们定义：

$$d(x,y):=\frac{\|x\wedge y\|}{\|x\|\|y\|}.$$

我们注意到，$d(x,\ y)$ 仅取决于直线 $kx,\ ky$。众所周知（例如参见 [12, 2.8.18]），它满足三角不等式，因此是 $\mathbb{P}(k^d)$ 上的距离。我们将此定义扩展到非零子空间对 $V,\ W\leq k^d$，定义为：

$$d(V,W):=\|\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}\|.$$

其中，$\mathbf{v}$（分别地，$\mathbf{w}$）是单位向量，表示 V（分别地，W）的一组基的外积。当 V 和 W 中至少有一个为零时，我们令 $d(V,W)=1$。注意，$d(V,W)\in[0,1]$。进一步注意，$d(V,W)=0$ 当且仅当 $V\cap W\neq 0$，并且 $d(V,W)=1$ 当且仅当 V 和 W 正交。对于 $x\in k^d\setminus\{0\}$，我们将 $d(x,V)$ 记作 $d(kx,V)$。当 V 与 W 平凡相交时，函数 d 是衡量二者之间距离的合理概念。为涵盖二者不平凡相交的情形，我们定义

$$\delta(V,W)=\sup_{V'\oplus(V\cap W)=V}d(V',W). \tag{4.2}$$

我们看到，对于所有子空间 V,W，$\delta(V,W)>0$。另请注意，如果 $V\leq W$，则 $\delta(V,W)=1$。

引理 4.2。设 V 和 W 是 k^d 的线性子空间，且 U 是 k^d 中 $V \cap W$ 的一个正交补。则

$$\delta(V,W) = d(V \cap U, W) = d(V \cap U, W \cap U) \ .$$

证明。令$\mathbf{vu}$、$\mathbf{vw}$、$\mathbf{uw}$和$\mathbf{w}$分别为表示 $V \cap U$、 $V \cap W$、 $U \cap W$和W的纯单位楔积。我们先证明右边的等式：由于 $W = (V \cap W) \oplus (U \cap W)$，且$V \cap W$与 U正交，因此

$$d(V \cap U, W) = \|\mathbf{vu} \wedge \mathbf{vw} \wedge \mathbf{uw}\| = \|\mathbf{vu} \wedge \mathbf{uw}\| = d(V \cap U, W \cap U) \ .$$

现在证明左边的等式。我们有 $V = (V \cap U) \oplus (V \cap W)$。取 V'使得 $V = V' \oplus (V \cap W)$，并令$\mathbf{v}'$为表示 V'的纯单位楔积。我们需要证明 $d(V' W) \leq d(V \cap U, W)$。令 $n = d -$维数为$V \cap W$。正交分解$k^d = U \oplus (V \cap W)$导出一个正交分解

$$\Lambda^n k^d = \Lambda^n U \oplus \underbrace{\bigoplus_{i=1}^{n} \Lambda^{n-i} U \wedge \Lambda^i (V \cap W)}_{=:A} \ .$$

并且我们有

$$\mathbf{v}' = \alpha \mathbf{vu} + \mathbf{r}$$

其中 $\alpha \in k$ 和$\mathbf{r} \in A$ （而$\mathbf{vu} \in \Lambda^n U$）。特别地，$\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{vu}$ 相互正交，且$\mathbf{r} \wedge \mathbf{w} = 0$。因此 $|\alpha| \leq 1$，因为若 k是阿基米德的，则 $\|\mathbf{v}'\|^2 = |\alpha|^2 \|\mathbf{vu}\|^2 + \|\mathbf{r}\|^2$，；否则 $\|\mathbf{v}'\| = \max\{|\alpha|, \|\mathbf{r}\|\}$。因此

$$d(V', W) = \|\mathbf{v}' \wedge \mathbf{w}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{vu} \wedge \mathbf{w}\| \leq d(V \cap U, W) \ .$$

□

根据 δ 和引理 4.2，我们有以下事实，证明见下文：

$$\text{If } \ V \cap W = \{0\} : \ \delta(V,W) = d(V,W) \tag{4.3}$$

$$\delta(V,W) = \delta(W,V) \tag{4.4}$$

$$\text{If } V' \leq V \text{ is orthogonal to } V \cap W \ : \ \delta(V',W) \geq \delta(V,W) \tag{4.5}$$

$$\text{If } \ x \in k^d \setminus \{0\} : \ d(kx, W) = \inf_{y \in W \setminus \{0\}} d(x,y) \tag{4.6}$$

事实 (4.3) 和 (4.4) 分别由定义和引理 4.2 直接得出。由引理 4.2 可知，要证明 (4.5)，只需证明 $d(V' W) \geq d(V,W)$：令 U为 V中 V' 的一个正交补，并令 $\mathbf{v}'$、$\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{w}$ 分别为对应于 V'、 U和 W的单位范数纯外积。则 $\mathbf{v} := \mathbf{v}' \wedge \mathbf{u}$ 是对应于 V的单位范数纯外积，并且 $d(V,W) = \|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}' \wedge \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}' \wedge \mathbf{w}\| = d(V' W)$。最后，为了证明 (4.6)，首先注意到，对所有 $y \in W$，都有 $d(kx, W) \leq d(x,y)$，正如我们刚才所证。为说明某个 $y \in W \setminus \{0\}$ 能使等号成立，取 W'作为 k^d中 W的一个正交补，并写作 $x = w' + w$, $w' \in W'$, $w \in W$。若 $w = 0$，则证毕。否则，由于 $\|x \wedge \mathbf{w}\| = \|w' \wedge \mathbf{w}\| = \|w'\| = \|x \wedge w\| / \|w\|$，有 $d(x,w) = d(kx, W)$。

如果 k 是超度量的，我们令 $C_k = 1$；如果 k 是阿基米德的，我们令 $C_k = d$。下面的引理至关重要。它以定量方式表述了这样一种直觉：如果一个点与给定子空间族中的每个子空间都很接近，那么它必定也接近这些子空间的交集。在非阿基米德情形下，乘法常数 C_k 等于 1；当我们在下一节将此不等式推广到阿代尔框架时，这一点同样至关重要。此外，下界中的乘法常数明确写成 δ 的幂这一形式也同样重要。

引理 4.3. 设 $V_1, \dots, V_n$ 是 k^d 和 $x \in k^d$ 中的子空间。则

$$d(x, V_1 \cap \ldots \cap V_n) \cdot \delta^{\lceil \log_2 n \rceil} \leq C_k \max_{1 \leq i \leq n} \{d(x, V_i)\}$$

其中 $\delta = \inf_{I,J} \delta(V_I, V_J)$，其中 I、$J \subset [r]$ 和 $V_I := \cap_{i \in I} V_i$。

证明。不妨设 $\|x\| = 1$。我们将对 n 使用归纳法证明同一结论，其中当 k 是阿基米德赋值时，将 C_k 替换为 $C'_k(n) = n$；否则替换为 $C'_k(n) = 1$。显然，这就能推出所需结果，因为 n 个真子空间的交集与其中至多 d 个真子空间的交集相同。因此，我们现在着手证明对所有 n，结论对 $C'_k(n)$ 成立。不妨设 n 是 2 的幂；只需按需添加若干个相同子空间的副本，例如 V_n。现在假设我们已证明结论对 $n = 2$ 和 $n = 2^m$ 成立，并来证明它对 $2n = 2^{m+1}$ 成立。令 W_1 为当 $i \leq n$ 时各 V_i 的交集，并令 W_2 为其余 V_i 的交集。根据 $n = 2$ 情形，我们有：

$$d(x, V_1 \cap \ldots \cap V_{2n}) \cdot \delta(W_1, W_2) \leq C'_k(2) \max\{d(x, W_1), d(x, W_2)\}.$$

现在根据归纳假设，我们有

$$d(x, W_1)\delta_1^m \leq C'_k(n) \max_{i \leq n} \{d(x, V_i)\}$$

and

$$d(x, W_2)\delta_2^m \leq C'_k(n) \max_{n < i \leq 2n} \{d(x, V_i)\}$$

其中 $\delta_1 = \inf_{I,\, J \subset [n]} \delta_{I,\, J}$，$\delta_2 = \inf_{I,\, J \subset [2n] \setminus [n]} \delta_{I,\, J}$，且 $\delta_{I,\, J} := \delta(V_I,\ V_J)$。注意，$\delta_1$，$\delta_2$ 和 $\delta(W_1,\ W_2)$ 是 $\geq \delta$。由于 $C'_k(2n) = C'_k(2)C'_k(n)$，结合上述不等式即可得到结论。

剩下要证明的是 $n = 2$ 的情形。我们证明 V_1 和 V_2 不平凡相交时的情形；完全类似地，当它们平凡相交时，证明留给读者。取 k^d 的子空间 $V_{\prime 1}$ 和 $V_{\prime 2}$，使其给出正交分解 $V_1 = (V_1 \cap V_2) \oplus V_{\prime 1}$ 和 $V_2 = (V_1 \cap V_2) \oplus V_{\prime 2}$。首先假设 $x \in V_1 + V_2$，并写作 $x = x_1 + x_{12} + x_2$，其中 $x_i \in V_{\prime i}$ 和 $x_{12} \in V_{12}$。于是

$$d(x, V_{12}) = \|x_1 \wedge \mathbf{v}_{12} + x_2 \wedge \mathbf{v}_{12}\| \leq \begin{cases} \|x_1\| + \|x_2\| & k \text{ archimedean} \\ \max\{\|x_1\|, \|x_2\|\} & k \text{ non-archimedean} \end{cases}$$

But

$$d(x, V_1) = \|x \wedge \mathbf{v}_1\| = \|x_2 \wedge \mathbf{v}_1\| = \|x_2\| d(x_2, V_1) \geq \|x_2\| \delta$$

由（4.5），类似地，

$$d(x, V_2) = \|x \wedge v_2\| \geq \|x_1\| \delta$$

结论由此得出。最后，假设 $x \notin V_1 + V_2$，选取 k^d 中 $V_1 + V_2$ 的一个正交补 Y，并写作 $x = x_v + x_y$，其中 $x_v \in V_1 + V_2$ 和 $x_y \in Y$。我们刚刚证明了

$$\delta\|x_v \wedge \mathbf{v}_{12}\| \leq \begin{cases} \|x_v \wedge \mathbf{v}_1\| + \|x_v \wedge \mathbf{v}_2\| & k \text{ archimedean} \\ \max\{\|x_v \wedge \mathbf{v}_1\|, \|x_v \wedge \mathbf{v}_2\|\} & k \text{ non-archimedean} \end{cases}. \tag{4.7}$$

另一方面，$t := \|x_y\| = \|x_y \wedge \mathbf{v}_{12}\| = \|x_y \wedge \mathbf{v}_1\| = \|x_y \wedge \mathbf{v}_2\|$。若 k 是阿基米德的，则

$$d(x, V_{12})^2 = \|x_v \wedge \mathbf{v}_{12}\|^2 + \|x_y \wedge \mathbf{v}_{12}\|^2 = \|x_v \wedge \mathbf{v}_{12}\|^2 + t^2$$

由于 $x_v \wedge \mathbf{v}_{12}$ 和 $x_y \wedge \mathbf{v}_{12}$ 正交，这一点从正交分解 $\Lambda^\ell k^d = \bigoplus_i \Lambda^i(V_1 + V_2) \wedge \Lambda^{\ell - i} Y$（对于 $\ell = 1 +$ 维数$_k\, V_1 \cap V_2$）显而易见。同理，$d(x, V_1)^2 = \|x_v \wedge \mathbf{v}_1\|^2 + t^2$ 且 $d(x, V_2)^2 = \|x_v \wedge \mathbf{v}_2\|^2 + t^2$。因此，注意到 $\delta \leq 1$ 并将 (4.7) 与闵可夫斯基不等式结合，可得：

$$\begin{aligned} \delta d(x, V_{12}) &= \delta\Big(\|x_v \wedge \mathbf{v}_{12}\|^2 + t^2\Big)^{1/2} \leq \Big(\delta^2\|x_v \wedge \mathbf{v}_{12}\|^2 + t^2\Big)^{1/2} \\ &\leq \Big((\|x_v \wedge \mathbf{v}_1\| + \|x_v \wedge \mathbf{v}_2\|)^2 + (t + t)^2\Big)^{1/2} \\ &\leq \Big(\|x_v \wedge \mathbf{v}_1\|^2 + t^2\Big)^{1/2} + \Big(\|x_v \wedge \mathbf{v}_2\|^2 + t^2\Big)^{1/2} \\ &= d(x, V_1) + d(x, V_2) \end{aligned}$$

如所需。若 k 是非阿基米德的，则 $d(x, V_\alpha) = \max\{\|x_v \wedge \mathbf{v}_\alpha\|, \|x_y\|\}$ 对于 $\alpha \in \{1, 2, 12\}$，而 $\delta\|x_v \wedge \mathbf{v}_{12}\| \leq \max\{\|x_v \wedge \mathbf{v}_1\|, \|x_v \wedge \mathbf{v}_2\|\}$，结论即得（再次注意到$\delta \leq 1$）。

□

4.3. **射影变换的动力学**。为了构造“带重叠的乒乓引理”中出现的有限个乒乓参与者，见引理 2.1，我们需要非常精确地掌握射影变换的幂在射影空间上的动力学。关键在于，这种掌握必须对局部域保持一致。此外，在处理超度量局部域时，计算中出现的常数也必须消失。我们在此要证明以下结果。

设 k 是一个局部域，且 $\gamma \in \mathrm{GL}_d(k)$。对于 $\omega \in \mathbb{R}$，令 $A_\gamma \leq k^d$（分别为 $R_\gamma \leq k^d$）表示 γ 的特征值模为 $\geq \omega$（分别为 $< \omega$）的广义特征子空间之和。注意，尽管广义特征子空间仅在 k 的某个有限扩张上定义，但子空间 A_γ, R_γ 确实定义在 k 上，因为它们在伽罗瓦作用下保持不变。用 $\Lambda_\omega(\gamma)$ 和 $\lambda_\omega(\gamma)$ 分别表示 γ 的最小特征值 $\geq \omega$ 和 γ 的最大特征值 $< \omega$ 的模（因此 $\lambda_\omega(\gamma) < \omega \leq \Lambda_\omega(\gamma)$）。算子范数记作 $\|\gamma\|$，而 γ 的特征值的最大模记作 $\Lambda(\gamma)$。和之前一样，若 k 是超度量的，则令 $C_k = 1$；若 k 是阿基米德的，则令 $C_k = d$。

引理 4.4. 对于每个 $n \geq 1$ 和 $x \in \mathbb{P}(k^d)$，我们有

$$d(\gamma^n x, A_\gamma) \cdot d(x, R_\gamma) \cdot d(A_\gamma, R_\gamma)^2 \leq (\|\gamma\| \cdot \|\gamma^{-1}\|)^{d-2} \left[C_k^2 \frac{\lambda_\omega(\gamma)}{\Lambda_\omega(\gamma)}\right]^n.$$

该引理的一个版本见 [14, 引理 4.6]。为方便起见，我们现在给出完整证明。

引理 4.5. 设 $\gamma \in \mathrm{GL}_d(k)$。存在 $h \in \mathrm{SL}_d(k^{al})$ 使得 $\|h\gamma h^{-1}\| \le C_k\Lambda(\gamma)$ 且$\max\{\|h\|, \|h^{-1}\|\} \le (\|\gamma\|/\Lambda(\gamma))^{\frac{d-1}{2}}$。

证明。这就是 [14, 引理 4.9]。为完整起见，我们在此给出证明。首先，我们断言，若 $\lambda \in k^{al}$ 是 γ的一个特征值，则存在某个 $h_0 \in \mathrm{SL}_d(k^{al})$，使得 $\|h_0\| = \|h_0^{-1}\| = 1$，且 $h_0\gamma h_0^{-1}$为下三角矩阵，其左上角元素等于 λ。为此，考虑 $(k^{al})^d$ 中的一个完全旗 F，它在 γ^T（即 γ的转置）作用下保持不变。我们可以选取 F，使其始于直线 $k^{al}v$，其中 v 是 γ^T 的一个特征向量，对应特征值 λ.。在 $\mathrm{GL}_d(k^{al})$ 的作用下，完全旗彼此共轭，因此对某个满足 $ge_1 = v$ 的 $g \in \mathrm{GL}(k^{al})$，有 $\mathrm{F} = g\mathrm{F}_0$，其中 F_0 是由 $(k^{al})^d$的标准基生成的旗。伊wasawa分解为 $\mathrm{GL}_d(k^{al}) = \mathbb{K}_{k^{al}}B_0$，其中 B_0是稳定 F_0 的波雷尔子群，且 $\mathbb{K}_{k^{al}} := \{g \in \mathrm{GL}_d(k^{al}) \ \|g\| = \|g^{-1}\| = 1\}$。因此，我们可以假设 $g \in \mathbb{K}_{k^{al}}$，并对某个适当的单位 $\alpha \in k^{al}$ 取 $h_0 = \alpha g^T$，其中选择 $|\alpha| = 1$ 使得行列式 $h_0 = 1$。现在注意，对每个 $a \in \mathrm{GL}_d(k^{al})$，都有 $\max_{i,j}|a_{ij}| \le \|a\| \le C_k \max_{i,j}|a_{ij}|$。令$h_1 := t^{\frac{d+1}{2}}diag(t^{-1}, ..., t^{-d}) \in SL_d(k^{al})$，其中 $t \in k^{al}$ 满足 $|t|_k\Lambda(\gamma) = \|h_0\gamma h_0^{-1}\| = \|\gamma\|$，则 $\max\{\|h_1\|, \|h_1^{-1}\|\} = |t|_k^{\frac{d-1}{2}} = (\|\gamma\|/\Lambda(\gamma))^{\frac{d-1}{2}}$，且 $h_1h_0\gamma h_0^{-1}h_1^{-1}$的系数模长为 $\le\Lambda(\gamma)$。因此，令 $h = h_1h_0$，便得证。□

引理的证明 *4.4*。令 $d_a =$维数 A_γ且 $d_r =$维数 R_γ。我们可以按照直和 $x \in k^d\backslash\{0\}$ 将其分解为$x = x_A + x_R$。结论由以下不等式相乘得到，下面将证明这些不等式： $k^d = A_\gamma \oplus R_\gamma$

$$d(\gamma^n x, A_\gamma) \le \frac{\|x_R\|}{\|\gamma^n x\|}(\|\gamma\| \cdot \|\gamma^{-1}\|)^{d_r-1}(C_k\lambda_\omega(\gamma))^n \tag{4.8}$$

$$d(A_\gamma, R_\gamma) \le \frac{\|\gamma^n x\|}{\|\gamma^n x_A\|} \tag{4.9}$$

$$d(A_\gamma, R_\gamma) \le \frac{\|x\|}{\|x_R\|} \tag{4.10}$$

$$d(x, R_\gamma) \le \frac{\|\gamma^n x_A\|}{\|x\|}(\|\gamma\| \cdot \|\gamma^{-1}\|)^{d_a-1}\left(C_k\Lambda_\omega(\gamma)^{-1}\right)^n \tag{4.11}$$

设**a**（分别为**r**）是表示 A_γ（分别为 R_γ）的单位纯楔向量。则

$$d(\gamma^n x, A_\gamma) = \frac{\|\gamma^n x \wedge \mathbf{a}\|}{\|\gamma^n x\|} = \frac{\|\gamma^n x_R \wedge \mathbf{a}\|}{\|\gamma^n x\|} \le \frac{\|\gamma^n x_R\|}{\|\gamma^n x\|}$$

并在最后一个不等式中使用（4.5），得到

$$d(\gamma^n x, R_\gamma) = \frac{\|\gamma^n x \wedge \mathbf{r}\|}{\|\gamma^n x\|} = \frac{\|\gamma^n x_A \wedge \mathbf{r}\|}{\|\gamma^n x\|} \ge d(A_\gamma, R_\gamma)\frac{\|\gamma^n x_A\|}{\|\gamma^n x\|}$$

因此（4.9）由此得证。将引理 4.5 应用于 γ 在 R_γ 上，并注意到 $\Lambda\left(\gamma_{|R_\gamma}\right) = \lambda_\omega(\gamma)$，

$$\|\gamma^n x_R\| \le \|h^{-1}\|\|\left(h\gamma h^{-1}\right)^n\|\|hx_R\| \le \left(\frac{\|\gamma_{|R_\gamma}\|}{\Lambda(\gamma_{|R_\gamma})}\right)^{d_r-1}(C_k\lambda_\omega(\gamma))^n\|x_R\|$$

并且（4.8）得证。将同一引理应用于 γ^{-1} 在 A_γ 并注意到 $\Lambda\left(\gamma_{|A_\gamma}^{-1}\right) = \Lambda_\omega(\gamma)^{-1}$，

$$\|x_A\| \le \left(\frac{\|\gamma_{|A_\gamma}^{-1}\|}{\Lambda\left(\gamma_{|A_\gamma}^{-1}\right)}\right)^{d_a-1}\left(C_k\Lambda_\omega(\gamma)^{-1}\right)^n\|\gamma^n x_A\| \ ,$$

并且（4.11）成立，因为 $d(x,\ R_\gamma) \le \frac{\|x_A\|}{\|x\|}$。最后，由（4.5），$d(A_\gamma,\ R_\gamma) \le d(A_\gamma,\ x_R) = \frac{\|一个\wedge x_R\|}{\|x_R\|} \le 一个\frac{\wedge x\|}{\|x_R\|} \le \frac{\|x\|}{\|x_R\|}$，而（4.10）得证。□

4.4. 乒乓作用的局部条件。 沿用上一段的记号，特别是，如果 k 是阿基米德的，则 $C_k = d$；否则为 1。对于 $\gamma \in \mathrm{GL}_d(k)$，记

$$\alpha_\omega(\gamma) := \frac{\lambda_\omega(\gamma)}{\Lambda_\omega(\gamma)} \in (0,1),$$

其中，与前文一样，$\lambda_\omega(\gamma)$ 和 $\Lambda_\omega(\gamma)$ 分别是 γ 在 $\omega > 0$ 两侧的特征值的模。本小节的目标是证明：

命题 4.6。 设 $\gamma, g_1, \dots, g_r \in GL_d(k)$ 和 $\gamma_i := g_i \gamma g_i^{-1}$。假设族 $\{g_1 A_\gamma, \dots, g_r A_\gamma\}$ 和 $\{g_1 R_\gamma, \dots, g_r R_\gamma\}$ 中的每个族都由 r 个处于弱一般位置的互异子空间组成。令

$$\delta := \min_{I,J\subset[r]} \{\delta(A_\gamma, R_\gamma), \delta(A_\gamma^I, A_\gamma^J), \delta(R_\gamma^I, R_\gamma^J)\},$$

$$\Delta := \max_{i\le r} \{\|\gamma\|, \|\gamma^{-1}\|, \|g_i\|, \|g_i^{-1}\|\}^2,$$

其中 $A_\gamma^I = \cap_{i\in I} g_i A_\gamma$ 且 $R_\gamma^I = \cap_{i\in I} g_i R_\gamma$。那么，对于每个 $n \ge 1$，$F:=$，$\{\gamma_1^n, \dots, \gamma_r^n\}$ 在 $X = \mathbb{P}(k^d)$ 上处于 d-乒乓引理位置，条件是

$$(C_k^2 \alpha_\omega(\gamma))^n < \frac{\delta^{2+2\lceil \log_2 d\rceil}}{C_k^2 \Delta^{3(d-2)}}. \tag{4.12}$$

证明。令 $\varepsilon > 0$，并令 $\mathbf{A}_{\gamma_i} := \{x \in \mathbb{P}(k^d) \mid d(x, A_{\gamma_i}) \le \varepsilon\}$，类似地，令 $\mathbf{R}_{\gamma_i} := \{x \in \mathbb{P}(k^d) \mid d(x, R_{\gamma_i}) \le \varepsilon\}$，其中 $A_{\gamma_i} := g_i A_\gamma$ 且 $R_{\gamma_i} := g_i R_\gamma$。我们声称，若 $\varepsilon < \delta^{\lceil \log_2 d\rceil}/C_k$，则第 2 节中的条件（$ii$）在 $M = d$（甚至 $d-1$）时成立。事实上，设想 $x \in \mathbb{P}(k^d)$ 至少对 d 个指标 i（比如 $i = 1$、……、d）属于 $\mathbf{R}_{\gamma_i}$。根据弱一般位置假设，R_{γ_i} 的交集是平凡的，因此由引理 4.3 可得 $\delta^{\lceil \log_2 d\rceil} \le C_k \varepsilon$，矛盾。将 A_{γ_i} 替换为 R_{γ_i}，结论同样成立。现在我们验证条件（i）。假设 $x \notin \mathbf{R}_{\gamma_i}$，于是 $d(x, R_{\gamma_i}) \ge \varepsilon$，并应用引理 4.4

$$d(\gamma_i^n x, A_{\gamma_i}) \cdot \varepsilon\delta^2 \le (\|\gamma_i\| \cdot \|\gamma_i^{-1}\|)^{d-2} (C_k^2 \alpha_\omega)^n \le \Delta^{3(d-2)} (C_k^2 \alpha_\omega)^n.$$

因此 $\gamma_i^n x \in \mathbf{A}_{\gamma_i}$ 满足条件 $(C_k^2\alpha_\omega)^n \le \frac{\varepsilon^2\delta^2}{\Delta^{3(d-2)}}$。现在根据命题的假设，显然存在一个合适的 $\varepsilon > 0$，它也满足 $\varepsilon < \delta^{\lceil \log_2 d\rceil}/C_k$。证毕。□

5. 高度

设 K 是一个数域。K 的赋值集合记作 V_K，对于 $v \in V_K$，我们用 K_v 表示 K 相应的完备化。如果 K_v 是 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$，我们称 v 为无限处，并令 $\mathbb{Q}_v = \mathbb{R}$；而如果 K_v 是非阿基米德的（即一个 p-进域），我们称 v 为有限处，并令 $\mathbb{Q}_v = \mathbb{Q}_p$，其中 p 是 K_v 的剩余域的特征。我们令 $n_v = [K_v :\ \mathbb{Q}_v]$，并令 $|\cdot|_v$ 为 K_v 上唯一一个延拓 $\mathbb{Q}_v$ 上标准绝对值的绝对值。$x \in K$ 的（绝对）韦伊高度定义如下：

$$h(x) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v\in V_K} n_v \log^+ |x|_v,$$

其中 $\log^+ = \max\{\log,0\}$。乘积公式 断言，对于 $x \neq 0$

$$\prod_{v\in V_K} |x|_v^{n_v} = 1. \tag{5.1}$$

韦伊高度定义在 $x \in K$上，但它有一个颇具吸引力的特点：其定义独立于包含 x的数域的选取。关于这一点以及我们所需的所有高度背景知识，请参阅 Bombieri 和 Gubler 的著作 [12] 。特别地，我们注意到，对于所有 x, $y \in K$,

$$h(xy) \leq h(x) + h(y)$$

and

$$h(x+y) \leq h(x) + h(y) + \log 2. \tag{5.2}$$

5.1. 矩阵高度。 在每个 K_v^d上，我们使用标准范数，即若 v 有限，则取 $\|x\|_v = \max_{1\leq i\leq d} |x_i|_v$；若 v 无限，则取$\|x\|_v^2 = \sum_{1\leq i\leq d} |x_i|_v^2$。由此可在 K^d 上定义高度：

$$h(x) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v\in V_K} n_v \log^+ \|x\|_v.$$

在 d乘d矩阵 $M_d(K)$组成的空间上，我们类似地定义：

$$h(A) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v\in V_K} n_v \log^+ \|A\|_v$$

其中 $\|A\|_v$ 是相应的算子范数。

容易验证，对于每个赋值 $v \in V_K$，都有 $\|A\|_v = \|A^T\|_v$, $|a_{ij}|_v \leq \|A\|_v$（对 A的每个元素 a_{ij} 均成立），且 $|\lambda|_v \leq \|A\|_v$（对 A的每个特征值 λ 均成立）。因此 $h(A) = h(A^T)$,$h(a_{ij}) \leq h(A)$，并且 $h(\lambda) \leq h(A)$。由此容易推出， $h(A) = 0$ 当且仅当 A 的每一行和每一列至多有一个非零元素，且该元素必须是单位根。事实上，$h(A) = 0$ 推出对每个赋值 v都有 $\|A\|_v \leq 1$ 。

对于任意 A, $B \in M_d(K)$，由算子范数的次乘性可得：

$$h(AB) \leq h(A) + h(B)$$

并且在每个赋值处，三角不等式（有限 v时为超度量不等式）给出

$$h(A+B) \leq h(A) + h(B) + \log 2. \tag{5.3}$$

5.2. 子空间的高度。 在讨论射影子空间时，引入以下韦伊高度的变体，即所谓的阿拉克洛夫高度，将会很方便。对于点$x = (x_1 : \cdots : x_d) \in \mathbb{P}(K^d)$，其定义为

$$h_{\mathrm{Ar}}(x) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v\in V_K} n_v \log \|(x_1,\ldots,x_d)\|_v,$$

显然，由(5.1) 可知 $h_{\mathrm{Ar}}(x)$ 不依赖于射影坐标的选取，因此它在 $\mathbb{P}(K^d)$上定义良好，也不依赖于 K 的选取，并且是非负的（因为可以假设某个 x_i 等于1）。现在，若 $W \leq K^d$ 是一个向量子空间，我们定义

$$h_{\mathrm{Ar}}(W) = h_{\mathrm{Ar}}(\Lambda^{\dim W} W)$$

其中， $\Lambda^{\dim W} W$是向量空间 $\Lambda^{\dim W} K^d$中的一条直线，该空间赋有由 K^d的标准基中的向量之外积构成的标准基。以下结论众所周知（[12, 2.8.13]）：

引理 5.1（阿拉克洛夫高度的次模性）。 若 W， $V \le K^d$ 是两个子空间，则

$$h_{\mathrm{Ar}}(V \cap W) + h_{\mathrm{Ar}}(V + W) \le h_{\mathrm{Ar}}(V) + h_{\mathrm{Ar}}(W).$$

证明。 这由每个赋值处的局部不等式推出

$$\|u\|_v \|u \wedge v' \wedge w'\|_v \le \|v\|_v \|w\|_v$$

其中， V'（分别地， W'）是 $U := V \cap W$ 在 V（分别地， W）中的正交补， u、 v'、 w' 是 $\Lambda^* K_v^d$ 中分别表示 U、 V' 和 W' 的纯楔向量，并且 $v := u \wedge v'$、$w := u \wedge w'$。注意到 $\|u\|_v \|w'\|_v = \|w\|_v$，此不等式是 (4.1) 的直接推论。□

若 $A \in M_d(K)$ 的秩为 r，则

$$h_{\mathrm{Ar}}(\mathrm{Im}\, A) \le r \cdot h(A) \tag{5.4}$$

确实，存在 r 个 K^d 的标准基元素，记作 $e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}$，使得 Im A 由以下 $w_j := Ae_{i_j}$ 张成。但 $\|w_j\|_v \le \|A\|_v$，因此 $\|w_1 \wedge \ldots \wedge w_r\|_v \le \|A\|_v^r$ 对所有赋值均成立，且(5.4) 得证。

以下内容也会有所帮助：

引理 5.2. 如果 $V \le K^d$ 是一个维数为 r 的 K-子空间，那么存在 r 条线性无关直线 $\ell_1, \ldots, \ell_r$，它们位于 V 中，使得对于每个 $i = 1, \ldots, r$，都有 $h_{\mathrm{Ar}}(\ell_i) \le h_{\mathrm{Ar}}(V)$。

证明。我们对 r 使用归纳法。令 E_k 为 K^d 的典范基中的元素 $e_{k+1}, \ldots, e_d$ 所张成的空间。注意， $h_{\mathrm{Ar}}(E_k) = 0$。此外， $V \cap E_0 = V$, $V \cap E_d = 0$，且 $\dim V \cap E_{k+1} \ge \dim V \cap E_k - 1$，因此存在 $k < d$，使得 $\dim V \cap E_k = 1$。令 $\ell_1 = V \cap E_k$。根据引理 5.1 $h_{\mathrm{Ar}}(\ell_1) \le h_{\mathrm{Ar}}(E_k) + h_{\mathrm{Ar}}(V) = h_{\mathrm{Ar}}(V)$。现在，对于 $i \in [1, d]$，令 H_i 为由所有 e_j, $j \ne i$ 张成的超平面。存在 i，使得 $\ell_1 \notin H_i$。显然 $\dim H_i \cap V = r - 1$。此外，由于 $h_{\mathrm{Ar}}(H_i) = 0$，我们有 $h_{\mathrm{Ar}}(V \cap H_i) \le h_{\mathrm{Ar}}(V)$。现在可以使用归纳假设，在 $V \cap H_i$ 中找到其余的线性无关直线。□

现在我们介绍两个 K-子空间 V, W 在 K^d 中的阿拉克洛夫距离如下：

$$\delta_{\mathrm{Ar}}(V, W) = \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \sum_{v \in V_K} n_v \cdot \log \frac{1}{\delta_v(V, W)}$$

其中， δ_v 是 K_v 上的射影距离，定义见第 §4.2 节中的 (4.2)，而 $\delta_v(V, W)$ 是 $\delta_v(V \otimes_K K_v, W \otimes_K K_v)$ 的简写。类似地，我们将 $d_v(V \otimes_K K_v, W \otimes_K K_v)$ 写作 $d_v(V, W)$。

回顾一下， $\delta_v(V, W) \in (0, 1]$,, 因此 $\delta_{\mathrm{Ar}}(V, W) \ge 0$。阿拉克洛夫距离并非通常意义上的距离（它不满足三角不等式；例如，当 $V \le W$ 或 $W \le V$，或者当 W 和 V 在所有赋值处都正交时，它可能为零），但它是非负的，并且衡量了两个子空间 V 和 W 在算术意义上的横截程度。注意，求和中的每一项都是非负的，且其中只有有限多项非零。事实上，若 V'是 K^d的一个子空间，并且 $V' \oplus (V \cap W) = V$，那么对于每个赋值 v，根据 δ_v. 的定义，有 $\delta_v(V, W) \ge d_v(V' W)$。但是，表示 V' 和 W 的楔积向量 $\mathbf{v}'$ 和 $\mathbf{w}$ 的坐标属于 K，因此对于除有限多个 v之外的所有赋值，都有 $\|\mathbf{v}' \wedge \mathbf{w}\|_v = \|\mathbf{v}'\|_v = \|\mathbf{w}\|_v = 1$。所以 $d_v(V' W) = 1$，从而对于除有限多个赋值之外的所有赋值，都有 $\delta_v(V, W) = 1$。

W那么 $V \cap W = 0$则 $d_v(V, W) = \delta_v(V, W)$，因此重新排列各项可知 t

$$\delta_{\mathrm{Ar}}(V, W) = h_{\mathrm{Ar}}(V) + h_{\mathrm{Ar}}(W) - h_{\mathrm{Ar}}(V + W). \tag{5.5}$$

考虑一般情形对我们而言十分重要，此时 V 和 W 可能相交。那么我们有：

引理 5.3. 对于任意两个子空间 $V, W \leq K^d$，我们有：

$$\delta_{\mathrm{Ar}}(V, W) \leq h_{\mathrm{Ar}}(V) + h_{\mathrm{Ar}}(W') - h_{\mathrm{Ar}}(V + W),$$

对于任意与 $V \cap W$ 互补的线性子空间 W'，其中 W。此外，

$$\delta_{\mathrm{Ar}}(V, W) \leq d \max\{h_{\mathrm{Ar}}(V), h_{\mathrm{Ar}}(W)\}.$$

证明。根据 δ_v的定义，在每个赋值 $v \in V_K$处，我们有 $\delta_v(V, W) \geq d_v(V, W')$。对所有赋值求和并利用 (5.5)，即可得出第一个不等式。为证明第二个不等式，我们可以假设 $V \cap W \neq \{0\}$。我们需要选取一个高度较小的补空间 W'。由引理 5.2， W中存在 $\dim W$条线性无关直线，每条直线的阿拉克洛夫高度至多为 $h_{\mathrm{Ar}}(W)$。我们从中选取 $\dim W - \dim V \cap W$条，它们张成一个线性子空间 W'，该子空间与 $V \cap W$在 W中互补。由 h_{Ar}的次可加性（由引理 5.1 可知），我们得到$h_{\mathrm{Ar}}(W') \leq (\dim W - \dim V \cap W) h_{\mathrm{Ar}}(W)$。再由第一个不等式即可得出结论。□

若 $W^\perp$ 表示在通过典范配对 $x, y = \sum x_i y_i$将 K^d 的对偶空间与 K^d 等同后， W 的正交补，则容易验证 $h_{\mathrm{Ar}}(W^\perp) = h_{\mathrm{Ar}}(W)$ [12, 2.8.10]。因此，若 $A \in M_d(K)$是秩为 r的矩阵，由（5.4）可得

$$h_{\mathrm{Ar}}(\ker A) = h_{\mathrm{Ar}}((\ker A)^\perp) = h_{\mathrm{Ar}}(\operatorname{Im} A^T) \leq r \cdot h(A^T) = r \cdot h(A)$$

更一般地，我们可以如下给出广义特征子空间高度的上界：

引理 5.4. 若 $A \in M_d(K)$ 和 $W \leq (\mathbb{Q}^{\mathrm{al}})^d$ 是一个 A-不变子空间，则

$$h_{\mathrm{Ar}}(W) \leq d^2(2h(A) + \log 2).$$

证明. 注意， W 是广义特征子空间 $E_\lambda := \ker(A - \lambda)^{n_\lambda}$之和，其中 n_λ 是 A 对应特征值 λ 的若尔当块的最大尺寸。因此，由 (5.4)

$$h_{\mathrm{Ar}}(E_\lambda) \leq dh((A - \lambda)^{n_\lambda}) \leq dn_\lambda(h(A) + h(\lambda) + \log 2)$$

并对 λ 求和即可得到结果。 □

5.3. 高度间隙。 在 [15] 中，第二位署名作者引入了有限矩阵集的归一化高度这一概念，并证明了一个适用于非虚拟可解子群生成集的统一下界（高度间隙定理）。现在我们简要回顾这些结果。给定有限子集 $S \subset \mathrm{GL}_d(\mathbb{Q}^{\mathrm{al}})$，定义其高度如下：

$$h(S) := \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \sum_{v \in V_K} n_v \log^+ \max_{A \in S} \|A\|_v \ .$$

特别地，若 S 由单个矩阵 A组成，则 $h(S)$ 与 §中引入的矩阵 A 的高度5.1相同。我们将 S 的归一化高度定义为：

$$\widehat{h}(S) := \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} h(S^n).$$

极限存在，且如 [15], 所示

$$\widehat{h}(S^n) = n\widehat{h}(S)$$

对每个整数 $n \geq 1$ 都成立。归一化高度在共轭下不变。为便于后文参考，请注意，如果 $g \in \mathrm{SL}_d(\mathbb{Q}^{\mathrm{al}})$ 且 $\widehat{h}(g) > 0$，那么 g 至少有两个不同的特征值（例如，这是因为 $h(g)$ 等于射影点 $[1 : \lambda_1 : \cdots : \lambda_d]$ 的韦伊高度）。

也可以将归一化高度看作在每个赋值处局部贡献的总和。事实上：

$$\widehat{h}(S) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in V_K} n_v \log^+ R_v(S)$$

其中，$R_v(S)$ 是 S 在赋值 v处的联合谱半径，即：

$$R_v(S) = \lim_{n \to +\infty} \|S^n\|_v^{1/n}$$

其中，我们用 $\|Q\|_v = \max_{A \in Q} \|A\|_v$ 表示子集 $Q \subset M_d(K_v)$。

联合谱半径 $R_v(S)$ 的一个关键特征是*Bochi* 不等式。该不等式指出，当 v 是阿基米德时，

$$\frac{1}{2} R_v(S) \leq \max_{k \leq 16d^4} \Lambda_v(S^k)^{1/k} \leq R_v(S) \tag{5.6}$$

其中，对于 $Q \subset M_d(K_v)$，我们用 $\Lambda_v(Q)$ 表示 Q中某个元素的特征值的模的最大值。另一方面，当 v 是非阿基米德时，有：

$$R_v(S) = \max_{k \leq d^2} \Lambda_v(S^k)^{1/k}. \tag{5.7}$$

请参阅 [19,定理 5 和 7] 以了解这些事实。

在证明我们的主要结果时，我们将重点使用 [15]的高度间隙定理 。该定理断言（见 [15, 定理 3.1]），存在一个常数 $gap_d > 0$ （即高度间隙），使得

$$\widehat{h}(S) \geq gap_d \tag{5.8}$$

一旦 S 生成一个非虚拟可解子群，于是只要 S 生成一个在 $(\mathbb{Q}^{\mathrm{al}})^d$上强不可约作用的子群，就有上述结论。另一个关键结果是 [15, 命题 1.1]的拟对称化界： 存在一个常数 $\kappa_d > 0$，使得

$$\widehat{h}(S) \leq \inf_{g \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Q}^{\mathrm{al}})} h(gSg^{-1}) \leq \kappa_d \widehat{h}(S) \tag{5.9}$$

前提是子群$\langle S \rangle$ 的扎里斯基闭包是半单的。事实上， [15,命题 1.1] 的证明给出了 $\kappa'_d > 0$，使得 $\inf_{g \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Q}^{\mathrm{al}})} h(gSg^{-1}) \leq \kappa'_d(1 + \widehat{h}(S))$，因此我们可以取

$$\kappa_d = \kappa'_d(1 + \mathrm{gap}_d^{-1}). \tag{5.10}$$

备注。在 [15] 中，我们没有给出 gap_d 和 κ'_d的明确界，但借助 [19]，现在可以通过仔细检查 [15]的证明中的所有估计来做到这一点。我们计划在不久的将来处理这一问题。另请参见 [28], 其中给出了（5.8）的另一种证明，并讨论了 gap_d的显式界。

5.4. **正特征**。若 K 现在是一个正特征整体域（即有限域上系数的洛朗级数域的有限扩张），则高度函数 $h(S)$ 在矩阵上的定义及其归一化版本 $h(S)$ 均可按上述相同方式定义。主要区别在于，现在所有赋值都是非阿基米德的，这使得某些估计得以简化。例如，此时高度确实是次可加的：（5.2）和（5.3）成立，且无需log2 项。乘积公式5.1 仍然成立，上述所有引理也都成立。引理5.4 成立，且无需log2 项，而（5.7）也成立。然而，关键区别在于正特征下不存在高度间隙，见下例。但重要的是，准对称化界仍原样成立，即：

$$\widehat{h}(S) \le \inf_{g\in \mathrm{GL}_d(K^{\mathrm{al}})} h(gSg^{-1}) \le \kappa'_d\, \widehat{h}(S) \tag{5.11}$$

只要子群 $\langle S\rangle$ 的扎里斯基闭包是半单的。常数 κ'_d 与（5.10）中的相同，且 [15] 给出的证明可原样适用。

例。（正特征下高度间隙的失效）设 $K=\mathbb{F}_q(t)$，并设 $S=\{u,u^T\}$，其中 u 是 $\mathrm{SL}_2(K^{al})$ 中由 $u(e_1)=e_1$, $u(e_2)=t^{\frac{1}{n}}e_1+e_2$给出的幺幂元。则 S生成 $\mathrm{SL}_2(K^{al})$的一个 Zariski 稠密子群。然而 $\widehat{h}(S)\le h(S)=h(t)^{\frac{1}{n}}$。最后一个不等式源于这样一个事实：由于只有非阿基米德赋值，对于任意矩阵 A，$\max_{i,j} h(A_{ij}) \le h(A) \le \sum_{i,j} h(A_{ij})$，并且 $h(t^{\frac{1}{n}})=\frac{1}{n}h(t)$。

6. 一致谱隙的证明

我们将证明的主要技术性结论如下：

定理 6.1. 设 $r,d\ge 2$。存在 $N=N(d,r)\in\mathbb{N}$，使得下述结论成立。设 K 是一个数域，$S\subset \mathrm{GL}_d(K)$ 是一个包含单位元的有限对称集，并且它所生成的子群 $\langle S\rangle$ 在$(K^{\mathrm{al}})^d$ 上强不可约地作用。那么存在 K 的一个完备化 $k=K_v$，以及一个子集 $F\subset S^N$，使得 $|F|=r$ 在 $X=\mathbb{P}(k^d)$ 上处于 d- 乒乓引理位置。

回忆一下，强不可约是指$\langle S\rangle$不保留真子空间的有限并；等价地说，$\langle S\rangle$的扎里斯基闭包的连通分支 $\mathbb{G}$ 不可约地作用。由此可知，$\mathbb{G}$ 必须是约化的，因为它必须保留其幺幂根的不动点集，而该不动点集因此只能是平凡的。此外，它在射影广义线性群 PGL_d 中的像是半单的。

目前我们先讨论数域，并将在本节末尾说明如何处理正特征整体域。

我们将根据高度间隙 $N(d,r)$ 以及准对称化常数 gap_d(假设其属于$(0,1)$)，给出 κ'_d 的显式上界，其中 5.8、5.9和 5.10)：

$$N(d,r)\le \kappa'_d(1+2gap_d^{-1})4^{4rd}e^{(4d)^5(\log d)^2 gap_d^{-1}} \le \kappa'_d(1+2gap_d^{-1})\exp(O(rd+d^6 gap_d^{-1})). \tag{6.1}$$

注意到，我们总可以无损失地转而考虑 K 的有限扩张，这是因为如果 k' 是某个扩域，并且 d-乒乓位置中的 $F\subset \mathrm{GL}_d(k)$ 作用于 $\mathbb{P}(k'^d)$ 上，那么显然，利用将 $\mathbf{A}^\gamma,\mathbf{R}^\gamma$ 与 $\mathbb{P}(k^d)$ 求交所得到的区域，它在 d-乒乓位置中作用于 $\mathbb{P}(k^d)$ 上。同样地，考虑由满足 $s=(\det s)^{-1/d}s$ 的 $s,\ s\in S$ 所生成的子群，我们得到 $\mathrm{SL}_d(K')$ 的一个子群，其中 K' 是 K 的某个有限扩张；它在 $\mathrm{PGL}_d(K)$ 中与 $\langle S\rangle$ 具有相同的像，并且仍然是强不可约的。因此，不妨设 $S\subset \mathrm{SL}_d(K)$。

我们进入定理 6.1 的证明，先概述其思路。策略是逐步将问题置于这样一种情形中：在适当选取的赋值 $v \in V_K$ 以及适当选取的元素 γ 和 g_i 下，可以应用命题 4.6。γ 的候选元素将从生成集 S 的某个有界幂 S^L 中的所有可能元素里选取，其中 L 仅依赖于 d，并且关于 d 有界。令 $\gamma_i = g_i \gamma g_i^{-1}$，命题 4.6 保证，族 $\{\gamma_1^n, \dots, \gamma_r^n\}$ 将处于 d-乒乓位置，只要 n 大于某个界；该界取决于 γ 的最大平方范数 Δ 及 g_i、最大特征值间隙 $\alpha_\omega(\gamma)^{-1} > 1$ 和分离度 δ，也就是子空间 $g_i A_\gamma$ 与 $g_i R_\gamma$ 及其交集之间的射影距离：

$$n > \frac{(2 + 2\lceil \log_2 d \rceil) \log \delta^{-1} + \log C_k^2 \Delta^{3(d-2)}}{|\log(C_k^{-2} \alpha_\omega(\gamma)^{-1})|}. \tag{6.2}$$

我们希望找到一个 γ 和一个 g_i，使得（6.2）的右端仅由 d和 r 控制。为了实现尽可能大的特征值间隙，我们可以选取 γ，使其最大特征值尽可能大；根据 Bochi 不等式（5.6），该特征值可以取为与 S 的联合谱半径相当的量，其中 γ 的词长至多为（$2d$）^{4}。问题在于，对于这样的 γ 选择，无法保证该赋值处的分离 δ 在局部受到任何控制。只有将所有赋值的整体情况纳入考量，我们才有希望用生成集 S的高度来界定分离。主要思路是对所有赋值求和，并用 S的归一化高度 h （或下面引理中的 e ）给出涉及的所有量（ S 中$\widehat{}$元素的范数以及分离）之和 s 的上界；在这一步中，高度间隙定理（5.8）和准对称化不等式（5.9）发挥了关键作用。所选赋值 v 随后将是阿基米德赋值或非阿基米德赋值。借助以下简单的组合观察，我们将证明该赋值的存在：

引理 6.2. 设 K 是一个数域，其赋值集合为 V_K，并且对每个 $v \in V_K$，给定非负量 e_v 和 s_v。令

$$e = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in V_K} n_v e_v$$

并令 e_∞ （分别为 ^{e_f}）表示此和中无限处（分别为有限处）的贡献，因此 $e = e_\infty + e_f$。类似地定义 s、s_∞和 ^{s_f}。现在假设

$$s \le Ce$$

对于某个 $C > 0$，那么以下两个选项之一成立：

（1）存在 $v \in V_f$，使得 $e_v > \frac{1}{2C} s_v$；或

（2）存在 $v \in V_\infty$，使得 $e_v \ge \frac{s_v}{2C} + \frac{e}{2}$。

证明. 假设选项（1）不成立。那么，对所有 $v \in V_f$，都有 $s_v \ge 2Ce_v$，因此$s_f \ge 2Ce_f$。根据假设 $s \le Ce$，故 $s_\infty + s_f \le Ce_\infty + Ce_f$。于是 $s_\infty + 2Ce_f \le Ce_\infty + Ce_f$，这意味着 $s_\infty + Ce_f \le Ce_\infty$。换言之， $s_\infty \le Ce_\infty$且 $s_\infty + C\,(e - e_\infty) \le Ce_\infty$。因此

$$e_\infty \ge s_\infty/2C + e/2 = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in V_\infty} n_v \left(\frac{s_v}{2C} + \frac{e}{2}\right),$$

因为 $\sum_{v \in V_\infty} n_v = [K:\ \mathbb{Q}]$。左右两边都是对所有无限处取平均，因此必定存在至少一个 $v \in V_\infty$ 使得 $e_v \ge \frac{s_v}{2C} + \frac{e}{2}$。□

现在我们开始详细证明定理 6.1，并可假设 $|S| \le 2d^2-3$。作为第一步，我们注意到，根据 (5.9)，通过用适当元素共轭 S，我们可以假设$\mathrm{GL}_d(\mathbb{Q}^{\mathrm{al}})$，使得

$$h(S) \le \kappa_d \widehat{h}(S). \tag{6.3}$$

给定 $\gamma \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Q}^{\mathrm{al}})$，若一个非零真子空间 $W \le (\mathbb{Q}^{\mathrm{al}})^d$ 是由 γ 的广义特征子空间之和构成，且这些子空间对应的特征值并非全为单位根，则称其为 γ-可容许。注意，由于 γ 至多有 d 个不同特征值，因此它至多有 2^d 个不同的γ-可容许子空间。若 W是 γ-可容许的，我们令 W' 为 W的补空间，它由 γ其余特征值对应的广义特征子空间之和构成。我们令$\mathcal{A}_\gamma$ 表示 γ-可容许子空间的族。

若 W 和 W' 均为可容许的，我们可以对它们应用引理 2.2，令 $H^+ = W$和 $H^- = W'$。由此得到$g_{1,W}, \dots, g_{r,W} \in S^M$，$M = M(d,r)$，使得族 $\mathrm{F}_W = \{g_{1,W}W, \dots, g_{r,W}W\}$ 和 $\mathrm{F}_{W'} = \{g_{1,W}W' \dots, g_{r,W}W'\}$ 各自都由 r 个处于弱一般位置的不同子空间构成。如前所述，我们将证明：只要 m 大于一个仅依赖于 d的某个量，就存在一个赋值 $v \in V_K$、一个元素 $\gamma \in S^m$和一个可容许子空间 $W \in \mathrm{A}_\gamma$，使得对于每个充分大的 n（仅依赖于 d,r），$\{\gamma_{1,W}^n, \dots, \gamma_{r,W}^n\}$ 均处于 d- 乒乓型位置，其中 $\gamma_{i,W} = g_{i,W}\gamma g_{i,W}^{-1}$。

不失一般性，我们可以扩张数域 K，从而保证每个 $\gamma \in S^m$ 的特征多项式都在 K上分裂。这不会影响定理 6.1 的陈述，并使我们可以假设 γ-可容许子空间定义在 K上。对于赋值 $v \in V_K$，我们用 $\delta_{W,v}(\gamma)$ 表示命题 δ 4.6 中记为 的量，即：

$$\delta_{W,v}(\gamma) = \min_{I,J\subset[r]} \{\delta_v(W,W'), \delta_v(W_I,W_J), \delta_v(W_I',W_J')\}, \tag{6.4}$$

其中 $W_I = \cap_{i\in I} g_{i,W}W$和 $W_{'I} = \cap_{i\in I} g_{i,W}W_{'}$。于是我们定义：

$$t_v(\gamma) := \sum_{W\in\mathcal{A}_\gamma} \log \delta_{W,v}^{-1}(\gamma)$$

约定当 $\mathcal{A}_\gamma$ 为空时，$t_v(\gamma) = 0$。我们还定义

$$s_v := 2(M+m)\log\|S\|_v + \sum_{\gamma\in S^m} t_v(\gamma) \quad \text{and} \quad e_v := \log R_v(S) \tag{6.5}$$

并令 t， s， e 表示对所有赋值求和得到的相应加权和；注意到 $e = h$.

引理 6.3。 我们有 $s \le C(m)h(S)$，其中

$$C(m) := (2M + 2m + |S|^m C_2)\kappa_d + |S|^m C_1/gap_d. \tag{6.6}$$

并且 $C_1 = d^4 2^d 4^{r+1}\log 2$ 以及 $C_2 = d^4 2^d 4^{r+2}(M+m)$。

证明。 对（6.4）取对数并对所有赋值求和，得到：

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v\in V_K} n_v \log \delta_{W,v}^{-1}(\gamma) \le \delta_{Ar}(W,W') + \sum_{I,J\subset[r]} \delta_{Ar}(W_I,W_J) + \delta_{Ar}(W_I',W_J').$$

应用引理 5.3和 5.1 可知

$$\delta_{Ar}(W_I,W_J) \le d \max_{I\subset[r]} h_{Ar}(W_I) \le d^2 \max_{1\le i\le r} h_{Ar}(g_{i,W}W).$$

由此得到:

$$t(\gamma) \le 2^d d^2 (1+2^{2r+1}) \max_{W\in\mathcal{A}_\gamma} \max_{g\in S^{M(d,r)}} h_{Ar}(gW).$$

注意到 gW 在 $g\gamma g^{-1}\in S^{2M+m}$作用下是不变的，引理 5.4 给出:

$$t(\gamma) \le d^4 2^d 4^{r+1}(2h(S^{2M+m})+\log 2) \le C_1 + C_2 h(S).$$

回顾（5.8）和（6.3），可知 $h(S) \ge gap_d$ 以及 $h(S) \le \kappa_d h(S)$。结合上述不等式，得到 $s \le C(m)e$，正如所需。□

现在可以应用引理 6.2，得出以下两种选项之一成立:

选项 1: 存在 K 的一个有限处 v，使得 $s_v < C(m)e_v$。那么，特别地，$R_v(S) > 1$，由此根据（5.7）可知，存在 $\gamma\in S^m$，使得 $\Lambda(\gamma)_v \ge R_v(S) > 1$，条件是$m \ge d^2$。$\gamma$ 的两个特征值模之间最大的特征值间隙至少为 $(\Lambda(\gamma)_v\Lambda(\gamma^{-1})_v)^{1/d-1}$，而这至少为 $\Lambda(\gamma)_v^{1/d-1}$，因为 $\det(\gamma)=1$。因此，存在一个游标 $\omega>0$，使得按照局部域 $k=K_v$ 上命题 4.6 的记号，$\alpha_\omega(\gamma) \le \Lambda(\gamma)_v^{d-1}$。由于 v 是有限的，k 是非阿基米德的，因此 $C_k=1$。特别地:

$$C_k^2 \alpha_\omega(\gamma) \le \Lambda(\gamma)_v^{-\frac{1}{d-1}} < 1.$$

另一方面，A_γ 和 R_γ 由一个 γ-可容许子空间 W 及其补空间W'给出，后者也是 γ-可容许的，即 $A_\gamma = W_v$和 $R_\gamma = W_v'$，因此

$$\|S\|_v^{2(M+m)} \delta_{W,v}(\gamma)^{-1} \le \|S\|_v^{2(M+m)} e^{t_v(\gamma)} \le e^{s_v} < e^{C(m)e_v} \le \Lambda(\gamma)_v^{C(m)}.$$

特别地，由于 $2+2\lceil \log_2 d\rceil \le 2+2d \le 3d$，且 $\Delta \le \|S\|_v^{2(M+m)}$

$$C_k^2 \Delta^{3(d-2)} \delta_{v,W}^{-1}(\gamma)^{2+2\lceil\log_2 d\rceil} < \Lambda(\gamma)_v^{3dC(m)} \le (C_k^2\alpha_\omega(\gamma))^{-3d(d-1)C(m)}.$$

这意味着，只要满足(4.12)，命题4.6 中的乒乓引理条件$n \ge 3d(d-1)C(m)$。

选项 2: 存在 K 的一个无限赋值 v，使得 $e_v \ge s_v/2C(m) + h(S)/2$。特别地，$e_v \ge h(S)/2 \ge gap_d/2$。令 n_d 为大于或等于

$$1 + 2gap_d^{-1}(4(d-1)\log d + \log 2). \tag{6.7}$$

我们有

$$R_v(S^{n_d}) = R_v(S)^{n_d} \ge e^{(n_d-1)gap_d/2} R_v(S) \ge 2d^{4(d-1)} R_v(S).$$

与上文类似，但这次使用 (5.6)，存在 $\gamma\in S^{(2d)^4 n_d}$ 使得 $\Lambda(\gamma)_v \ge \frac{1}{2}R_v(S^{n_d}) \ge d^{4(d-1)} R_v(S) > R_v(S) = e^{e_v}$。最大的特征值间隙至少为 $\Lambda(\gamma)_v^{1/(d-1)} \ge d^4$，并且存在一个游标 $\omega>0$，使得 $\alpha_\omega(\gamma) \le \Lambda(\gamma)_v^{-1/(d-1)}$。于是

$$C_k^2\alpha_\omega(\gamma) \le d^2 \Lambda(\gamma)_v^{-1/(d-1)} \le \Lambda(\gamma)_v^{-1/2(d-1)}.$$

另一方面，$e_v \ge s_v/2C(m)$，并且与前面一样，A_γ 和 R_γ 由一个 γ-可容许子空间 W 及其补空间给出，因此 $m \ge (2d)^4 n_d$

$$\|S\|_v^{2(M+m)} \delta_{W,v}^{-1}(\gamma) \le e^{s_v} \le e^{2C(m)e_v} \le \Lambda(\gamma)_v^{2C(m)}$$

So

$$C_k^2\Delta^{3(d-2)}\delta_{v,W}^{-1}(\gamma)^{2+2\lceil\log_2 d\rceil} \le d^2 e^{3ds_v} \le d^2\Lambda(\gamma)_v^{6C(m)d} < \Lambda(\gamma)_v^{(6C(m)d+1/2(d-1))} \le (C_k^2\alpha_\omega(\gamma))^{-n}$$

若 $n/2(d-1) \ge 6C(m)d + 1/2(d-1)$。因此，命题 (4.12) 中的条件 4.6对所有 $n \ge 12C(m)$ $d(d-1) + 1$均成立。

结论： 对于合适的 $N = N(d, r)$，我们找到了 K的一个赋值 v以及其中的 r个元素，它们在 $\mathbb{P}(K_v^d)$ 上处于 d-乒乓型位置。由此可得

$$N \le 2M + 12mC(m)d^2,$$

其中， $M = M(d,r)$由引理 2.2 给出， $m = (2d)^4 n_d$，其中 n_d由（6.7）给出，而 $C(m)$（它还依赖于 d 和 r）则根据（5.8）中的高度间隙 gap_d 以及（5.9）中的常数 κ_d，在（6.6）中定义。综合这些结果即可得到界（6.1）。这就完成了定理 6.1 的证明。

6.1. **正特征。** 当 K 是一个正特征整体域时，定理6.1 仍原样成立。证明也仍然原样成立，甚至还有一些简化：由于不存在阿基米德赋值，因此不再需要高度间隙；并且只需要准对称化界（5.11）。特别地，在上一小节给出的证明末尾，只会出现选项 1。

不过，在正特征下可能出现一个小小的复杂情况，而在零特征下则不存在这种情况。下面给出的定理1.1在正特征下的证明需要用到定理 6.1 的一个版本，该版本适用于半单代数群的某些非不可约作用 $\mathbb{G}$。我们称 $\mathbb{G}$ 在 $(K^{\mathrm{al}})^d$ 上的作用是 1-不可分解的，如果它是不可分解的，且其不可约 socle 的余维为一（即存在一个 $\mathbb{G}$-不变的不可约超平面）。我们现在作如下断言：

定理 6.4. 设 $r, d \ge 2$。存在 $N = N_0(d,r) \in \mathbb{N}$，使得下述结论成立。设$K$ 是一个正特征整体域，且 $\mathbb{G} \le \mathrm{GL}_d$ 是一个连通半单代数K-群，在 $(K^{\mathrm{al}})^d$上不可约作用或 1-不可分解作用。若 S 是一个包含单位元的有限对称集，且 $\langle S\rangle$ 在 $\mathbb{G}$ 中 *Zarsiki*-稠密，则存在 K 的一个完备化 $k = K_v$以及一个子集 $F \subset S^N$，使得 $|F| = r$ 在 d-乒乓引理位置上作用于 $X = \mathbb{P}(k^d)$。

以引理 3.4 替代引理3.6后，证明与定理 6.1 的证明完全相同，只是由于不存在阿基米德赋值，过程更加简化。事实上，只会出现选项 1，且有 $C_1 = 0$ 于（6.6）以及 $m = d^2$。由此得到最终界

$$N_0(d,r) \le \kappa_d' 2^7 d^{4d^2} 2^{(d+1)(d+2r)} \le \kappa_d' d^{O(d^2+dr)}. \tag{6.8}$$

在非不可约情形中，还有一点需要论证。实际上，当我们将引理 2.2 应用于互补可容许子空间 W 和 W' 时，需要确保它们不包含 $\mathbb{G}$不变子空间。对此，我们可以如下论证。由于在一个 $\mathbb{G}$-不可分解表示中，只有一个非平凡的 1-不变子空间，记作 W_0，因此只有当 W 或 W' 与 W_0重合时才会出现这种情况，而这又会导致 W 或 W'（不妨设为 W'）成为一条直线。但 $\mathbb{G}$ 没有一维特征标，因此它必定

逐点固定（K^{al}）$^d/W_0$，因此，如果 W' 是某个元素 $\gamma \in \mathbb{G}$ 的特征空间，那么它必定是特征值为 1 的特征空间。然而，我们在可容许子空间的定义中已排除了这种情况。

6.2. **定理 1.1 的证明。** 本段将从定理1.1 推出定理6.1。我们先给出两个初步观察。

引理 6.5. 设 Γ 是一个可数群，且 $\pi : X \to Y$ 是可数 Γ-集合之间的一个 Γ-映射。设$\varepsilon > 0$。若 $S \subset \Gamma$ 是 $\lambda_Y = \ell^2(Y)$的一个 ε-*Kazhdan* 集，那么它也是$\lambda_X = \ell^2(X)$的一个 ε-*Kazhdan* 集。

证明。 这是因为诱导映射 $\ell^2(X) \to \ell^2(Y)$ $f \mapsto \bar{f}$，其中 $\bar{f}(y) = \|f_{|\pi^{-1}(y)}\|$是一个$\Gamma$-映射，满足 $\|f\| = \|\bar{f}\|$且对所有 $f, g \in \ell^2$均有 $\|\bar{f} - \bar{g}\| \leq \|f - g\|$，这可由三角不等式推出。 □

As 在证明定理1.1 时，我们总可以转而考虑一个合适的商群。

第二个观察是，不失一般性，我们可以假设要么$H = \{1\}$，要么 H 是无限的；因为若 H 是有限的，那么 $\ell^2(\Gamma/H)$自然地等距且等变嵌入到 $\ell^2(\Gamma)$ 中由右 H-不变函数构成的子表示 $\ell^2(\Gamma)^H$ 。因此， λ_Γ 的 ε-Kazhdan 集也将是 $\lambda_{\Gamma/H}$的 ε-Kazhdan 集。

为了利用定理 6.1，我们需要以下基本引理。

引理 6.6. 设 $\mathbb{G}$ 是定义在代数闭域 $\mathbb{K}$ 上的维数为 D 的半单代数群，且 $\mathbb{H}$ 是一个代数子群。假设 $\mathbb{H}^0$ 在 $\mathbb{G}$ 中不是正规子群。那么存在 $\mathbb{G}$ 的一个维数至多为 2^D 且至少为 2 的线性表示 V，使得 $\mathbb{H}$ 在 V 中固定一条直线 ℓ。若 $char\mathbb{K} = 0$，则可以确保 V 不可约。否则，它可以取为不可分解的，并且含有一个余维为一的不可约 $\mathbb{G}$-不变子空间，该子空间与 ℓ 直和。*</output>*

证明。设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathbb{G}$ 的李代数， $\mathfrak{h}$ 是 $\mathbb{H}$ 的李代数。每个外幂表示 $\Lambda^k\mathfrak{g}$ 的维数至多为 2^D。直线 $\Lambda^k\mathfrak{h}$（其中 $k = \dim \mathbb{H} > 0$）在 $\mathbb{H}$ 的作用下保持不变，但在 $\mathbb{G}$ 下不保持不变，因为 $\mathbb{H}^0$ 在 $\mathbb{G}$ 中不是正规子群。考虑 $\mathbb{G}$ 对 $\Lambda^k\mathfrak{h}$ 的轨道所张成的空间 U，并对其取商，商去一个维数最大的真 $\mathbb{G}$- 不变子空间。由此得到一个 $\mathbb{G}$- 表示 V，它是不可约的，且包含一条直线 ℓ，即 $\Lambda^k\mathfrak{h}$ 的像；该直线在 $\mathbb{H}$ 下保持不变。如果 $\dim V \geq 2$，则结论成立。否则，这意味着 U 有一个 $\mathbb{G}$-不变的余维一子空间 U'；再对 U' 中维数最大的真 $\mathbb{G}$-不变子空间取商后，可设 U' 是一个 $\mathbb{G}$-不可约的余维一子空间，且 $U'\ell = U$。如果 U 不可分解，我们可取 $V = U$。否则， U' 有一个 $\mathbb{G}$-不变补空间。将 ℓ 投影到模去该补空间后的 U' 上所得的投影非零，否则 ℓ 将是 $\mathbb{G}$-不变的。于是我们可以取 $V = U'$，并将 ℓ 重新命名为这个投影。当 $char\mathbb{K} = 0$ 时，由完全可约性可知每个不可分解模都是不可约的（例如，参见 [60, 定理 VI.5.1]），因此 V 可取为不可约的。□

注记。 回想一下，Chevalley 定理 [48, 11.2] 断言，对于任意一对代数群 $\mathbb{H} \leq \mathbb{G}$，也有一个非常相似的结论。区别在于，这里我们得到一个不可约表示（或者至少在正特征下得到一个不可分解表示），并且对其维数有上界。在正特征下，该表示未必总能取为不可约表示。例如，若 $\mathbb{G} = \mathrm{SL}_2$，且 $\mathbb{H}$ 是一个极大环面的正规化子，那么当 $char\mathbb{K} = 2$ 时，无法选取不可约的 V，因为由 Steinberg 张量积定理可知，每个单 $\mathbb{G}$-模都有平凡的

权零权空间。我们感谢 Bob Guralnick 指出了这一点。

我们首先证明定理 1.1 ，假设 $\mathbb{G}$ 是一个 K-分裂半单代数 K-群，定义在整体域 K 上，且 $\Gamma \leq \mathbb{H}(K)$。注意， Γ 中任意子集的扎里斯基闭包都定义在 K上；在证明定理1.1时，我们可以假设 $\mathbb{H}$ 的 H 扎里斯基闭包定义在 K上。引理 V 中构造的表示6.6 于是也定义在 K上。

若 $\mathbb{H}^0$ 是 $\mathbb{G}$中的正规群，则将其投影到模 $\mathbb{H}^0$的商群上，并利用上面的第一个初始观察，可将问题归约到 $\mathbb{H}$ 有限的情形。利用第二个初始观察，这种情形可归结为 H 平凡的情形。若 $\mathbb{H}^0$ 不是 $\mathbb{G}$中的正规群，引理 6.6 保证 H 包含在某个 K-表示 V 中一个 K-直线 x 的稳定子内，其中 $\mathbb{G}$满足引理 6.6 的结论。当然，若 H 平凡，这一结论同样成立。因此，不失一般性，我们总可以假设 H 包含在某个此类 $\mathbb{G}$-表示 V中 x 所对应的K-直线的稳定子内。事实上，再次利用第一个初始观察，我们还可以进一步假设 H 就是 K-直线 x的稳定子。

因此，我们可以应用定理 6.1，找到集合 $F \in \Gamma$ ，其大小为 $r = |F|$ ，以及 K 的一个完备化 $k = K_v$，使得 F 在 $X = \mathbb{P}(V(k))$ 上处于 D-乒乓引理位置，其中 $D =$维V。将集合 A_γ 和 R_γ 限制到 x 的 Γ-轨道上，我们看到 F 在作用于 Γ/H 时处于 D-乒乓引理位置，因为 H 是 x 的稳定子。于是根据引理 2.1

$$\|\pi(u_F)\| \leq 2\sqrt{\frac{D}{|F|}} \tag{6.9}$$

其中 u_F 是 F 上的均匀测度，并且 $\pi := \ell^2(\Gamma/H)$。现在假设存在一个单位向量 v，使得对于所有 $s \in S$， $\|\pi(s)v - v\| \leq \varepsilon$。那么对于所有 $f \in F$， $\|\pi(f)v - v\| \leq N\varepsilon$，从而 $\|\pi(u_F)v - v\| \leq N\varepsilon$，这反过来意味着：

$$1 - N\varepsilon \leq \|\pi(u_F)v\| \leq \|\pi(u_F)\| \leq 2\sqrt{\frac{D}{|F|}}.$$

我们得出 $\varepsilon > (1 - \sqrt{4D/|F|})\frac{1}{N}$。然后我们选择 $r = |F| = 16D$，取 $N = N(D, r)$并得出 $\varepsilon > \frac{1}{2N}$。这就得到定理1.1 ，其中

$$\varepsilon_d = 1/2N_d, \tag{6.10}$$

其中， N_d是当 $D \leq 2^{d^2}$ 时 $N(D, 16D)$ 的最大值。

最后，我们说明为何不失一般性，可以假设 $\mathbb{G}$ 定义在整体域 K 上且在其上分裂，并且 Γ 属于 $\mathbb{G}(K)$。为此，我们可以使用标准的特化论证。半单代数群可在 k_0^{al} 上取模型，其中 k_0 是 $\mathbb{K}$ 的素域（根据特征，分别为 $k_0 = \mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{F}_p$ ）。因此，假设 $\mathbb{G}$ 定义在 k_0^{al} 上并不失一般性。子群 $\Gamma := S$ 是有限生成的，故包含于某个代数闭子域 $\mathbb{G}(L)$ 中，该子域的超越次数有限，为 $L := k_0(t_1, \ldots, t_k)^{al}$，其中 $t_1, \ldots, t_k$是 $\mathbb{K}$中的代数无关元素。在正特征下，若要使 Γ 为无限群，必须有 $k \geq 1$ 。于是我们可以对 $i \geq 2$取特化 $t_i \mapsto f_i$ ，其中涉及元素 $f_2, \ldots, f_k \in k_0(t_1)^{al}$ ，使所得同态 $\phi\colon \Gamma \to \mathbb{G}(k_0(t_1)^{al})$ 仍然是 Zariski 稠密的（例如参见 [51, 定理 4.1]）。在零特征下，我们也可以对t_1 取特化，从而得到映射 $\phi\colon \Gamma \to \mathbb{G}(\mathbb{Q}^{al})$。定义在 L 上的真代数子群将特化为定义在 $k_0(t_1)^{al}$ （分别为 $\mathbb{Q}^{al}$）上的真代数子群。因此，上界

在特化之后，$(u_F * u_F^{-1})^{*2n}(H)^{1/2n}$ 的上界将推出特化之前的同一上界。由于 $(u_F * u_F^{-1})^{*2n}(H)^{1/2n}$ 从下方趋近于 $\|\pi(u_F * u_F^{-1})\| = \|\pi(u_F)\|^2$，当 n趋近于 $+\infty$时，我们看到，不失一般性，可以假设 $L = k_0(t_1)^{al}$（分别为 $L = \mathbb{Q}^{al}$），且对于某个 L 的有限生成子域 K，有 $\Gamma \le \mathbb{G}(K)$；这里的 L 是所需的整体域，我们可以将其选得足够大，使得 $\mathbb{G}$ 在其上分裂。定理 1.1 的证明至此完成。

6.3. 推论 1.2 的证明。对于每个单位向量 v，令 $B_v = \{s \in \Gamma \mid \|\lambda_{\Gamma/H}(s)v - v\| < \varepsilon_d\}$。于是 $\mathbb{E}_{\mu^{-1}*\mu}\|\lambda_{\Gamma/H}(s)v - v\|^2 \ge \varepsilon_d^2(1 - \mu^{-1}*\mu(B_v))$。根据定理 1.1，每个有限子集 $B'_v \subset B_v$ 都包含于 G 的一个真代数子群中，记为 L。因此 $\mu^{-1} * \mu(B'_v) \le \mu^{-1} * \mu(L) \le \sup_{g\in G} \mu(gL) \le 1 - \beta(\mu)$。故同一界也适用于 B_v。由下文的引理 6.7 和 (6.11)，我们得到 $\|\lambda_{\Gamma/H}(\mu)\|_{\mathrm{op}}^2 \le 1 - \varepsilon_d^2\beta(\mu)/2$。推论 1.2 证毕。

引理 6.7。 设 π 是离散群 Γ 的酉表示，且 μ 是定义在 Γ 上的对称概率测度。那么

$$\inf_{\|v\|=1} \mathbb{E}_{\mu^{-1}*\mu}\|\pi(s)v - v\|^2 = 2(1 - \|\pi(\mu)\|^2). \tag{6.11}$$

设 $c_\mu =$ 下确界$\{\mu(x) \mid \mu(x) \neq 0\}$，并令 ε 为满足以下条件的所有 $\eta > 0$ 的上确界：对每个单位向量 v，都存在 g，使得 $\|\pi(g)v - v\| \ge \eta$ 且 $\mu(g) > 0$。那么

$$1 - \varepsilon^2/2 \le \|\pi(\mu)\| \le 1 - (c_\mu\varepsilon)^2/2.$$

证明。令 $\nu = \mu^{-1} * \mu$。注意到 $\|\pi(s)v - v\|^2 = 2(1 - \mathrm{R}\pi(s)v, v)$，因此 $\mathbb{E}_\nu\|\pi(s)v - v\|^2 = 2(1 - \pi(\nu)v, v)$，且 $\|\pi(\nu)\| = \sup_{\|v\|=1}\pi(\nu)v, v$。由此得到 (6.11)。另外两个不等式可立即推出。□

7. 非阿贝尔 Littlewood–Offord 与反集中

本节证明定理 1.3和 1.4，并推导出推论 1.5。

回顾经典的 贝祖不等式，结合本文所用的次数定义，其形式如下（参见第 3 节）：

$$\deg(V \cap W) \le \deg(V)\deg(W) \tag{7.1}$$

对所有闭代数子簇 V, W（位于 GL_d 中；例如参见 [30, 59]）。

7.1. **定理 1.3 的证明。** 为简洁起见，记 $\beta_i = \beta(X_i)$。我们先额外假设所有 X_i 的分布支撑集均为有限集，并令 Γ 为它们生成的（可数）子群。最后我们将说明如何去掉这一假设。设 L 是 $\mathbb{G}$ 的一个真代数子群，且 $H = L \cap \Gamma$。先考虑 V 是形如 γL 的陪集，其中 $\gamma \in \Gamma$。若 μ_i 是 X_i 的分布，则

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 \cdots X_n \in \gamma L) &= \langle \lambda_{\Gamma/H}(\mu_1 * \cdots * \mu_n)\delta_H, \delta_{\gamma H}\rangle \\ &\le \prod_{i=1}^{n} \|\lambda_{\Gamma/H}(\mu_i)\|_{\mathrm{op}} \le e^{-\varepsilon'_d \sum_{i=1}^n \beta_i}.\end{aligned} \tag{7.2}$$

其中，最后一个不等式由推论 1.2得出。

现在考虑任意一个代数子簇 V（位于 $\mathbb{G}$ 中），并结合经典解耦论证与贝祖不等式，通过对 $D :=$ 维数 V 进行归纳，证明对于 $\delta :=$ 次数 V

$$\mathbb{P}(X_1 \cdots X_n \in V) \le \delta(1+D)^{1/2} \exp(-\frac{\varepsilon'_d}{4^D} \sum_{i=1}^{n} \beta_i). \tag{7.3}$$

由并集界可知，不妨假设 V 不可约。当$D = 0$时，这就是（7.2）。因此我们假设 $D \ge 1$。若 $\sum_{i=1}^{n} \beta_i \le 4$，则（7.3）右边至少为1，因此（7.3）显然成立。因此我们假设 $\sum_{i=1}^{n} \beta_i \ge 4$。设 $X = X_1 \cdots X_r$，其中 r 是满足$\sum_{i=1}^{r} \beta_i \ge \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \beta_i$的第一个整数。令 $Y = X_{r+1} \cdots X_n$。于是

$$\sum_{i=r+1}^{n} \beta_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i - \sum_{i=1}^{r-1} \beta_i - \beta_r \ge \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \beta_i - 1 \ge \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \beta_i. \tag{7.4}$$

If 我们再取一个与 Y 独立的副本 Y'，利用柯西–施瓦茨不等式可以写成 z:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(XY \in V)^2 &\le \mathbb{E}\Big[\mathbb{P}\Big(X \in VY^{-1} \mid X\Big)^2\Big] = \mathbb{P}\Big(X \in VY^{-1} \cap VY'^{-1}\Big) \\ &\le \mathbb{P}\Big(V = VY^{-1}Y'\Big) + \mathbb{P}\Big(X \in VY^{-1} \cap VY'^{-1}, VY^{-1} \ne VY'^{-1}\Big) \\ &\le \mathbb{P}\Big(Y^{-1}Y' \in H_V\Big) + \max_W \mathbb{P}(X \in W) \end{aligned} \tag{7.5}$$

其中 $H_V = \{g \in \mathbb{G} \mid V = Vg\}$ 且 W 遍历所有维数为 $< D$、次数至多为 δ^2的闭子簇。事实上，对于 $y,\ y' \in \mathbb{G}$，若 $Vy^{-1} \ne Vy'^{-1}$ 则 $Vy^{-1} \cap Vy'^{-1}$ 是一个维数为 $< D$、次数至多为 δ^2 的闭子簇，由贝祖不等式（7.1）可得。

注意，$\beta_i = \beta(X_i) = \beta(X_i^{-1})$。事实上，$X \in gH$ 当且仅当对每个 $g \in G$ 以及 G的子群 H，都有 $X^{-1} \in g^{-1}(gHg^{-1})$。于是，根据（7.2），项 $\mathbb{P}(Y^{-1}Y' \in H_V)$不超过 $\exp(-\varepsilon'_d \sum_{i=r+1}^{n} 2\beta_i)$；由（7.4）可知，该值至多为 $\exp(-\frac{\varepsilon'_d}{2} \sum_{i=1}^{n} \beta_i)$。根据归纳假设，另一项满足

$$\mathbb{P}(X \in W) \le D^{1/2}\delta^2 \exp(-\frac{\varepsilon'_d}{4^{D-1}} \sum_{i=1}^{r} \beta_i) \le D^{1/2}\delta^2 \exp(-\frac{\varepsilon'_d}{2 \cdot 4^{D-1}} \sum_{i=1}^{n} \beta_i).$$

但是 $D \ge 1$ 且 $1 + D^{1/2}\delta^2 \le (1+D)\delta^2$.。因此:

$$\mathbb{P}(XY \in V)^2 \le (1+D)\delta^2 \exp(-\frac{\varepsilon'_d}{2 \cdot 4^{D-1}} \sum_{i=1}^{n} \beta_i).$$

这就完成了归纳步骤，并证明了定理1.3 当 X_i 是有限支撑且满足 $c = 2\varepsilon'_d 4^{-d^2}$。

命题7.1应用于 $f(x_1, \ldots, x_n) = 1_{x_1 \cdots x_n \in V}$、$p = c/2$ 和 $C = C_V^{1/p}$，说明若

$$\mathbb{P}(X_1 \cdots X_n \in V) \le C_V \prod_{i=1}^{n} (1-\beta_i)^{c/2}$$

只要测度 $\mu_1, \ldots, \mu_n$ 是有限支撑的，不等式就成立；那么即使没有有限支撑这一假设，同一不等式仍然成立。但是

$$e^{-c\sum_{i=1}^{n} \beta_i} \le \prod_{i=1}^{n} (1-\beta_i)^{c/2} \le e^{-\frac{c}{2}\sum_{i=1}^{n} \beta_i}$$

因为 $1-x \le e^{-x} \le 1-x/2$ 对于 $x \in [0,1]$。因此，虽然最终会使 c减半，但假设 μ_i 具有有限支撑是合理的。

7.2. **化归到有限支撑测度**。 在定理 1.3 的证明中，我们利用了将问题化归到有限支撑随机变量情形的方法。要实现这一点，还需要做一些工作。以下命题阐述了这一点。

设 k 为一个局部域。对于一族由 $\mathrm{GL}_d(k)$ 的博雷尔子集构成的 $\mathcal{L}$ ，以及一个取值于 $\mathrm{GL}_d(k)$、分布为 μ 的随机变量 X ，我们定义

$$\gamma_{\mathcal{L}}(X) = \gamma_{\mathcal{L}}(\mu) := \sup_{L \in \mathcal{L}} \mathbb{P}(X \in L)$$

以及 $\beta_{\mathcal{L}}(\mu) = 1 - \gamma_{\mathcal{L}}(\mu)$。

在下述命题中， $G = \mathbb{G}(k)$ 表示 $\mathbb{G} \le \mathrm{GL}_d$ 中一个任意连通线性代数 k群的 k-点群，其中 $\mathbb{G} \le \mathrm{GL}_d$ 是定义在局部域 k 上的； $\mathcal{L}$ 表示 $\mathbb{G}$ 的真代数子群的所有陪集构成的族。

命题 7.1。 设 $f \ge 0$ 是定义在 G^n 上的有界非负博雷尔可测函数，且 $n \ge 1$、 C、 $p > 0$。假设

$$\mathbb{E}[f(X_1, \dots, X_n)^p]^{1/p} \le \prod_{i=1}^{n} \gamma_{\mathcal{L}}(X_i) \tag{7.6}$$

对于所有独立随机变量 $X_1, \dots, X_n$ 的取值，只要它们的分布 $\mu_1, \dots, \mu_n$ 在 G 中具有有限支撑，上述结论均成立。那么，即使 $\mu_1, \dots, \mu_n$ 是任意的博雷尔概率测度，同一不等式也成立。

证明。我们对 n 使用归纳法。 $n = 1$ 的情形即下文的引理 7.2。设 $\mu_1, \dots, \mu_n$ 是取值于 G 的博雷尔概率测度， $X_i \sim \mu_i$，且 $X_1, \dots, X_n$ 相互独立。令 $g(x_1, \dots, x_{n-1}) = \mathbb{E}[f(x_1, \dots, x_{n-1}, X_n)^p]^{1/p}$。根据假设，若 $\mu_1, \dots, \mu_n$ 具有有限支撑，则 $\mathbb{E}[g(X_1, \dots, X_{n-1})^p]^{1/p} = \mathbb{E}[f(X_1, \dots, X_n)^p]^{1/p} \le C' \prod_{i=1}^{n-1} \gamma_{\mathcal{L}}(\mu_i)$，其中 $C' = C\gamma_{\mathcal{L}}(\mu_n)$。因此，由归纳假设可知，即使只假设 μ_n 具有有限支撑，仍有 $\mathbb{E}[f(X_1, \dots, X_n)^p]^{1/p} \le C \prod_{i=1}^{n} \gamma_{\mathcal{L}}(\mu_i)$。现在令 $h(x) = \mathbb{E}[f(X_1, \dots, X_{n-1}, x)^p]^{1/p}$。那么，只要假设 μ_n 具有有限支撑，就有 $\mathbb{E}[h(X_n)^p]^{1/p} = \mathbb{E}[f(X_1, \dots, X_n)^p]^{1/p} \le C'' \mu_{\mathcal{L}}(\mu_n)$，其中 $C'' = C \prod_{i=1}^{n-1} \gamma_{\mathcal{L}}(\mu_i)$。因此，再由引理 7.2 可知，即使不作此假设，该结论仍然成立。□

引理 7.2。 命题 $n = 1$ 的情形*7.1* 成立。

证明。 为了对要证明的内容有个直观认识，我们建议读者先尝试证明平面情形下的引理， $k = \mathbb{R}$ 和 $G = (\mathbb{R}^2, +)$ 。这已经涵盖了许多困难。我们将直接处理一般情形，并将 $\nu(g)$ 记作 $\mathbb{E}_{X \sim \nu}[g]$ ，其中 $\mathbb{E}_{X \sim \nu}[g]$ 是定义在 G 上的有限博雷尔测度，而 g是有界随机变量。我们假设，当 G值博雷尔概率测度 μ 为有限支撑时， $\mu(f^p)^{1/p} \le C\gamma_{\mathcal{L}}(\mu)$， $X \sim \mu$，并将证明不作此假设时结论仍然成立。证明的核心思路是通过依照 μ进行抽样，用有限支撑测度逼近任意博雷尔测度 μ 。然而，要使这一思路奏效需要格外谨慎，因为{style id='24'>L</style}中有不可数多个陪集，而且 μ可能会对其中某些陪集赋予正测度。

每个在 G 上的博雷尔概率测度 ν都可以写成一个和 $\nu = \nu^{(0)} + \cdots + \nu^{(d)}$,$d = \dim G$，其中 $\nu^{(i)}$ 支撑在 G 中维数为

i，而 $\nu - \left[\nu^{(0)} + \cdots + \nu^{(i)}\right]$ 对 G 中维数至多为 i的每个闭子簇赋予的测度均为 0。在整个证明过程中，我们称测度 ν 代数的，如果 ν 存在如上所述的分解，且所有上述可数并实际上都是有限并，也就是说，每个 $\nu^{(i)}$ 的支撑都包含在一个纯维数为 i的闭子簇中。

给定 $\varepsilon > 0$，我们可以写成 $\mu = (1-\delta_\varepsilon)\nu_\varepsilon + \delta_\varepsilon \mu_\varepsilon$，其中 ν_ε 和 μ_ε 是 G、$\delta_\varepsilon \in [0, \varepsilon]$上的博雷尔概率测度，而 ν_ε 是代数的。事实上，如上所述的分解 $\mu = \mu^{(0)} + \cdots + \mu^{(d)}$表明，$\mu$ 包含于 G的一个可数闭子簇族的并集中；将 μ 条件化于其中一个有限子族的并集上，该有限子族对 $\delta_\varepsilon \le \varepsilon$的测度为 $1-\delta_\varepsilon$，即可得到 ν_ε。因此，只需证明 $\nu_\varepsilon(f^p)^{1/p} \le C\gamma_{\mathcal{L}}(\nu_\varepsilon)$，因为这样一来，$\mu(f^p) = (1-\delta_\varepsilon)C\gamma_{\mathcal{L}}(\nu_\varepsilon) + \varepsilon \|f^p\|_\infty$，而 $|\gamma_{\mathcal{L}}(\nu_\varepsilon) - \gamma_{\mathcal{L}}(\mu)| \le 2\varepsilon$；因此取 $\varepsilon \to 0$ 即可得到所需的不等式。

换言之，只需证明：若 μ 是代数的（在假设 μ 有限支撑时该结论成立的前提下），则 $\mu(f^p)^{1/p} \le C\gamma_{\mathcal{L}}(\mu)$。证明对 μ 的维数进行归纳，即对满足 $\mu^{(r)} \neq 0$ 的最大 r 进行归纳。根据假设，基例 $r = 0$ 成立。我们假设该结论对维数至多为 $r-1$ 的代数概率测度成立，并证明它对给定的维数为 r 的代数概率测度 μ 也成立。

令 $m_r = \mu^{(0)} + \cdots + \mu^{(r-1)}$。对于 $\ell \ge 1$，考虑随机测度 $\mu_\ell = m_r + \mu^{(r)}(G)\nu_\ell$，其中 $\nu_\ell = (\delta_{X_1} + \cdots + \delta_{X_\ell})/\ell$，而 X_i 是按照 $\mu^{(r)}/\mu^{(r)}(G)$ 选取的独立同分布随机变量。根据归纳假设，$\mu_\ell(f^p)^{1/p} \le C\gamma_{\mathcal{L}}(\mu_\ell)$。由强大数定律，$\mu_\ell(f^p) \to \mu(f^p)$ 几乎处处成立，并且对每个固定的 $L \in \mathbf{L}$，$\mu_\ell(L) \to \mu(L)$ 几乎处处成立。根据前一个极限，只需证明 $\gamma_{\mathcal{L}}(\mu_\ell) \to \gamma_{\mathcal{L}}(\mu)$ 几乎处处成立。若 $\mathbf{L}$ 是有限集，由后一个极限即可立即推出这一结论；但由于 $\mathbf{L}$ 不可数，因此需要谨慎处理。我们将证明 $\limsup_\ell \gamma_{\mathcal{L}}(\mu_\ell) \le \gamma_{\mathcal{L}}(\mu)$，这足以满足我们的目的（但请注意，$\liminf_\ell \gamma_{\mathcal{L}}(\mu_\ell) \ge \gamma_{\mathcal{L}}(\mu)$ 也成立，而且可通过初等方法推出）。证明将用到下面的引理 7.3 和 7.4。

设 $V^{(i)}$ 是 G 的一个纯维数为 i、包含 $\mu^{(i)}$的支撑的闭子簇，并记为 $V = \bigcup_{i=0}^{r-1} V^{(i)}$。对于 $L \in \mathcal{L}$，令 V_L 为 V中包含于 L的不可约分支之并，并令 $L^* \subset L$ 为 $\mathcal{L}$ 中所有包含 V_L 的元素的交集。注意，L^* 属于 $\mathcal{L} \cup \{\emptyset\}$，且 $\mathcal{L}_V := \{L^* \mid L \in \mathcal{L}\}$ 是一个有限集。

引理 7.3。以下结论几乎处处成立：对于所有 $\ell \ge 1$ 以及所有 $L \in \mathbf{L}$，

$$\mu_\ell(L) \le \mu_\ell(L^*) + \frac{C_L}{\ell}, \tag{7.7}$$

其中 $C_L \ge 1$ 仅取决于 L的次数、$\dim G$ 以及 μ。此外，给定 G的一个真代数子群 H，以下结论几乎处处成立：对于所有 $\ell \ge 1$ 以及所有 $g \in G$，(7.7)对 $L = gH$ 和 $C_L = \mu^{(r)}(G)$成立。

注意这两个断言之间的细微差别：在第一个断言中，7.7）对所有 L几乎处处同时成立；而在第二个断言中，它仅对固定子群的陪集几乎处处同时成立。

引理 7.3 的证明。首先注意，对所有 $L \in \mathbf{L}$，$m_r(L^*) = m_r(L)$。事实上，若 $i \le r$，则$\mu^{(i)}(L \setminus L^*) = \mu^{(i)}\big((L \setminus L^*) \cap V(i)\big) = 0$，因为 $(L \setminus L^*) \cap V(i)$ 包含于一个维数为 $< i$ 的闭子簇中。因此，要证明 (7.7)，只需证明几乎处处对所有 $L \in \mathbf{L}$

我们有 $\nu_\ell(L\setminus L^*)\overset{C_L}{\leq}\ell_{\mu^{(r)}}(G)$。但是 $\nu_\ell(L\setminus L^*)=\nu_\ell\Big(\big(L\cap V(r)\big)\setminus L^*\Big)$，因为 ν_ℓ 支撑于 $V(r)$。由于 $\big(L\cap V(r)\big)\setminus L^*$ 包含于一个闭子簇 W_L 中，其维数为 $<r$，且次数仅由 $\deg L$ 和 $\deg V(r)$ 控制，因此只需证明以下断言：存在整数 $(N_D)_{D\geq 1}$，使得几乎处处以下结论成立：对于 G 中任意维数为 $<r$ 的闭子簇W，$\ell\nu_\ell(W)\leq N_{\deg W}$，即 W 至多包含点 X_1、……、X_ℓ 中的 $N_{\deg W}$ 个。

不妨设 W 是不可约的。证明对 $\dim W+\deg W$ 进行归纳。在基例中，$\dim W=0$，W 是一个点，结论成立，因为对于 $i\neq j$，$\mathbb{P}(X_i=X_j)=\mathbb{E}(\mathbb{P}(X_i=X_j\mid X_j))=0$，这是因为 $r\geq 1$，因此 $\mu^{(r)}$ 没有原子。对于归纳步骤，假设对于某些 $N_D=N_{p-1、D}$，所有维数至多为 $p-1$ 的 W 都成立，现在考虑维数 p 的情形。如果存在两个不同的不可约闭子簇 W_1 和 W_2，它们的维数至多为 p、次数至多为 D，且包含 X_1、……、$X_{N_{p-1}、D^2+1}$，那么 X_1、……、$X_{N_{p-1}、D^2+1}$ 都属于 $W_1\cap W_2$。根据贝祖定理（7.1），$W_1\cap W_2$ 是一个维数为 $<p$、次数至多为 D^2 的闭子簇。因此，对于每个 $D\geq 1$，几乎处处至多存在一个维数至多为 p、次数至多为 D 且包含 X_1、……、$X_{N_{p-1}、D^2+1}$ 的闭子簇。但随后，几乎处处有 $X_{N_{p-1}、D^2+2}\notin W$，因为 $\mu^{(r)}$ 赋予维数为 $<r$ 的子簇以测度 0。

验证引理的第二个断言更容易：事实上，对于给定的 H 和 $i\neq j$，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\exists g\in G,X_i,X_j\in gH\setminus(gH)^*)&\leq\mathbb{E}(\mathbb{P}(X_j\in X_iH\setminus(X_iH)^*|X_i))\\&=\mathbb{E}(\mu^{(r)}(X_iH\setminus(X_iH)^*)/\mu^{(r)}(G))=0\end{aligned}$$

因此，几乎处处有：$\nu_k(L\setminus L^*)\leq 1/k$，对所有形如 $L=gH$ 的 L 均成立。 □

引理 7.4. 若 $\mathbb{G}$ 是特征 0 的连通线性代数群，则存在一个真闭子群的可数族 $\mathbb{H}_n$、$n\geq 1$，以及一个数 $N_{\mathbb{G}}$，使得 $\mathbb{G}$ 的每个真代数子群要么包含于 $\mathbb{H}_n$，要么包含于一个次数至多为 $N_{\mathbb{G}}$ 的真代数子群。当 $\mathbb{G}$ 为半单群时，只会出现第二种选项；对于不是子域子群的子群 $\mathbb{G}$，这一结论在正特征下也成立。

证明。先考虑半单情形。根据 [45, 定理 11.6]（另见 [22, 引理 4.2]），存在有限多个有限维不可约 $\mathbb{G}$-模 V_{ρ_i}，具有如下性质：真代数子群 L 若不能在它们中任何一个上不可约作用，则必定是正特征情形，且 L 是有限子域子群。后者意味着，对于某个有限子域 F，L 与 $\mathbb{G}(F)$ 的某个子群共轭。在前一种情况下，对于表示空间 V_{ρ_i}的某个真子空间 V，L必定包含于 $\mathrm{GL}(V_{\rho_i})$ 中的抛物子群 $\mathrm{Stab}(V)$。无论如何选择 V，这些子群在 $\mathbb{G}$ 中的次数都有界。这就证明了半单情形下的引理。现在考虑特征零的一般情形。将$\mathbb{G}=TSU$ 写成列维分解，其中 S 是半单的，T 是与 S交换的环面，而 U是幺幂根。T只有可数多个真代数子群，记为族 $\{T_n\}_n$（见 [12, 3.2.19]），于是可令 $\mathbb{H}_n=T_nSU$。假设 $L\leq\mathbb{G}$ 不包含于任何一个 $\mathbb{H}_n$中，因此 $T\leq L$。若 LU 是真子群，则对于 S的某个真代数子群 S'，有 $L\subset TS'U$，由半单情形可知结论成立。若 $LU=\mathbb{G}$，则 L 的每个列维子群 R 都是 $\mathbb{G}$的列维子群。事实上，$L\cap U$ 是 L 的幺幂根，因为它是正规、连通、幺幂的，且 $L/L\cap U=\mathbb{G}/U$ 是约化的。因此 $L=R(H\cap U)$，从而 $\mathbb{G}=LU=RU$（以及 $R\cap U=\{1\}$）。因此，L 与一个包含 TS 的子群共轭，因为所有列维子群

的 $\mathbb{G}$ 彼此共轭，因此我们可以假设 $TS \leq L$。于是，对于某个真闭子群 $U' \leq U$，有 $L = TSU'$。U的真闭子群都是连通的，并且在特征零时次数有界（它们是有界多个次数有界的加法群（$\mathbb{G}_a$，$+$）的同态像的乘积）。证明至此结束。□

现在我们可以完成引理 7.2 的证明。令$\mathcal{L}_n$ 为 $\mathbb{H}_n$ 的所有陪集构成的族，令 $\mathcal{L}_{\mathbb{G}}$为次数至多为 $N_{\mathbb{G}}$的真代数子群的所有陪集构成的族。在特征零的情形下，我们可以应用引理 7.4，并对所有 $\ell \geq 1$ 得到

$$\sup_{L\in\mathcal{L}} \mu_\ell(L) \leq \max\{ \sup_{L\in\mathcal{L}_{\mathbb{G}}} \mu_\ell(L), \quad \sup_{L\in\mathcal{L}_n, n\geq 1} \mu_\ell(L)\}.$$

在正特征下，当 $\mathbb{G}$ 为半单时，同一个引理仍然适用，但有限子域子群的陪集除外。不过，由于 k 是一个局部域，因此存在最大的有限子域 F，它是 k的子域，因此 $\mathbb{G}(k)$中的有限子域子群有一个一致上界。于是，只需相应调整 $N_{\mathbb{G}}$ 的取值，就能得到相同的上界。因此，根据引理7.3，几乎处处

$$\sup_{L\in\mathcal{L}} \mu_\ell(L) \leq \max\{\mu_\ell(L^*) \mid L^* \in \mathcal{L}_V\} + O_{\mu,\mathbb{G}}(1)/\ell$$

并令 ℓ 趋于无穷，我们得到 $\limsup_\ell \gamma_{\mathcal{L}}(\mu_\ell) \leq \max\{\mu(L^*) \mid L^* \in \mathrm{L}_V\} \leq \gamma_{\mathcal{L}}(\mu)$，因为 L_V 是有限的，并且对每个 $L \in \mathrm{L}$，$\mu_\ell(L) \to \mu(L)$ 几乎处处成立。这就完成了引理 7.2 的证明。

□

注记 7.5. 正如其证明所示，命题 7.1 在 $\mathcal{L}$ 取为某个代数子群族的陪集时也成立；该族对交集封闭，且其极大子群的次数有界。例如，$\mathrm{GL}_d(k)$ 中几乎可解代数子群的陪集族就是这样一个族。事实上，经过有界指数的子群后，这些群可以三角化。在特征零的情形下，这由 [69, 3.6, 10.10] 给出，其界仅取决于 d。在正特征的情形下，该界取决于 k，并且也可由 [69, 3.6, 10.10]以及以下观察得到：在 k中存在一个极大有限子域。

7.3. **定理 1.4 的证明。** 定理 1.4的证明与定理 1.3的证明类似。主要的谱论关键要素如下：

定理 7.6 (一致 ℓ^2 间隙)。 给定 $d \in \mathbb{N}$，存在 $\varepsilon_d > 0$，使得以下结论成立。设K 是一个域，且 $\Gamma \leq \mathrm{GL}_d(K)$ 是一个可数子群。假设有限集 $S \subset \Gamma$ 生成一个非 *amenable* 子群。那么，对每个单位向量 $v \in \ell^2(\Gamma)$，存在 $s \in S$，使得$\|s \cdot v - v\|_{\ell^2(\Gamma)} \geq \varepsilon_d$。特别地，若 μ 是 Γ上的任意概率测度，那么

$$\|\mu\|_{\ell^2(\Gamma)} \leq \exp(-\beta_{\mathcal{L}}(\mu)\varepsilon_d^2/4)$$

其中，$\mathcal{L}$ 是 Γ 的可 *amenable* 子群的所有陪集所构成的族。

定理 7.6 的证明。正如我们已经注意到的（参见 §6.2 的第一段），如果 $\pi : \Gamma \to \Gamma$ 是一个满射群同态，且 $\pi(S)$ 是 ε-Kazhdan 集（针对 λ_Γ），那么 S 就是 ε-Kazhdan 集（针对 λ_Γ）。此外，如果 $S \subset \Gamma$ 是 ε-Kazhdan 集（针对 $\lambda_{\Gamma'}$），其中 $\Gamma' \leq \Gamma$ 是一个子群，那么它也是 ε-Kazhdan 集（针对 λ_Γ）。因此，不妨设 S 生成 Γ，并且若 $\mathbb{G}$ 是 Γ 的扎里斯基闭包，R 是其可解根，则商群 $\mathbb{G}/R$ 是半单的。它通过共轭作用于其连通分支 $\mathbb{S}$。众所周知，$\mathbb{S}$ 的内自同构在所有自同构中的指数仅由 d 决定，且有界。因此，我们得到一个有界指数的子群 $\Gamma' \leq \Gamma$

以及一个从 Γ' 到 $\mathbb{S}$ 的同态，其像在扎里斯基意义下稠密。存在某个有界的 $n_0 = n_0(d)$，使得 $(S \cup S^{-1})^{n_0} \cap \Gamma'$ 生成 Γ'（参见引理 C.1）。这些观察使我们能够将定理的第一个断言归约到 Γ 在一个连通半单代数群中扎里斯基稠密的情形。此时结论是定理 1.1 的一个特例。为证明关于 μ 的第二个断言，注意到与推论 1.2 的证明中一样，若 $v \in \ell^2(\Gamma)$ 是一个单位向量，且 $B_v = \{s \in \Gamma \mid \|\pi(s)v - v\| < \varepsilon_d\}$，则由上段可知，$B_v$ 生成一个可容许群。因此，$\sup_v \nu(B_v) \le \sup\{\nu(A) \mid A \le \Gamma \text{ 可容许}\}$，其中 $\nu := \mu^{-1} * \mu$。于是

$$\|\pi(\mu)\|^2 = \sup_v \langle \pi(\nu)v, v\rangle = \sup_v 1 - \frac{1}{2}\mathbb{E}_\nu(\|\pi(s)v - v\|^2) \le 1 - \frac{\varepsilon_d^2}{2}(1 - \sup_v \nu(B_v)).$$

最后注意，$\nu(A) = \mu^{-1} * \mu(A) \le \sup_{g\in\Gamma} \mu(gA)$。 □

备注。对于定理 7.6中第一个断言的证明，我们本可以用一致 Tits 替代定理 [14]来代替定理 1.1。我们注意到，这一方法曾用于 [2, 推论 1。6]以获得半单李群中随机矩阵乘积漂移的有效次高斯估计。

定理 *1.4*的证明。如果 X_i 是有限支撑的，则有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 \cdots X_n = g) &= \langle \lambda_\Gamma(\mu_1 * \cdots * \mu_n)\delta_e, \delta_g\rangle \\ &\le \prod_{i=1}^n \|\lambda_\Gamma(\mu_i)\|_{\mathrm{op}} \le e^{-2c_d\sum_{i=1}^n \beta_{\mathcal{L}}(\mu_i)} \le \prod_{i=1}^n (1 - \beta_{\mathcal{L}}(\mu_i))^{c_d}.\end{aligned}$$

其中 $c_d = \varepsilon_d^2/8$ 由定理 7.6可知。族 $\mathcal{L}$ 可以取为所有几乎可解代数子群构成的族GL_d，因为根据 Tits 二择一定理 [68] 有限生成可容许子群几乎可解。要将此界推广到任意随机变量，我们应用命题 7.1 并取 $f = 1_{\{g\}}$，$p = c_d$，$C = 1$（见备注 7.5）。□

7.4. 推论 1.5 的证明。我们通过从定理 1.3 推导出推论 1.5 来结束。鉴于引理 3.4，不失一般性，我们可以假设 $|S| \le 2\dim \mathbb{G} - 1$。考虑 S 上的均匀概率测度 μ。根据命题 3.3，存在 $k \le C(d)$，使得 μ^k 不支撑在 $\mathbb{G}$ 的真代数子群的陪集上。特别地，$\beta := \beta(\mu^k) \ge |S|^{-k} \ge (2\dim \mathbb{G} - 1)^{-k}$，因此定理 1.3 适用于服从 μ^k 的 n 个独立同分布变量。所以，对于每个 $g \in \mathbb{G}(K)$，由 (1.2) 得：

$$\mu^{kn}(g^{-1}V) \le d^{1/2}N\exp(-c\beta n).$$

若 $n \gg_d \log(1 + N)$，则得到 $\mu^{kn}(w^{-1}V) < 1$，从而对每个 $w \in \cup_{i=0}^{k-1} S^i$ 都有 $wS^{kn} \not\subseteq V$。特别地，对于所有满足 $n \gg_d \log(1 + N)$ 的情形，均有 $S^n \not\subseteq V$，正如所需。

致谢。为实现开放获取，作者已将知识共享署名许可适用于本次投稿产生的任何作者接受稿版本。

参考文献

[1] Richard Aoun，线性群中代数簇的暂态性——关于一般 *Zariski* 稠密性的应用，格勒诺布尔傅里叶研究所年刊 **63**(2013)，第 5 期，2049–2080 页。MR3203113↑4

[2] Richard Aoun 和 Cagri Sert，双曲空间上的随机游走：集中不等式与概率版蒂茨替代定理，《概率论及相关领域》184 (2022)，第 1–2 期，323–365 页。MR4498512 ↑41[3] Oren Becker 和 Emmanuel Breuillard，具有重叠的悖论分解与谱隙，准备中。 ↑6[4] , 有限单群中的一致扩张，准备中。 ↑2，4[5] Oren Becker、Emmanuel Breuillard 和 Péter Varjú，随机特征簇，准备中（2025）。 ↑4[6] Bachir Bekka，齐性空间上群作用的谱刚性，《群作用手册》第四卷，2018 年，第 563–622 页。MR3888695 ↑2[7] Bachir Bekka、Pierre de la Harpe 和 Alain Valette，Kazhdan 性质 (T)，《新数学专著》第 11 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2008 年。MR2415834↑2[8] Bachir Bekka 和 Yves Guivarc'h，酉表示下随机游走的谱隙性质，《几何奉献》118 (2006)，141–155 页。MR 2239453 ↑2[9] ,紧致幂零流形上的仿射变换群的谱理论，《高等师范学校科学年刊》（第四辑）48 (2015)，第 3 期，607–645 页。MR3377054 ↑2[10] Yves Benoist 和 Nicolas de Saxcé，单李群中的谱隙定理，《数学发明》205 (2016)，第 2 期，337–361 页。MR 3529116 ↑4[11] Jairo Bochi，矩阵集数值不变量的不等式，《线性代数及其应用》368 (2003)，71–81 页。MR1983195 ↑9[12] Enrico Bombieri 和 Walter Gubler，《丢番图几何中的高度》，《新数学专著》第 4 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2006 年。 ↑18，24，26，39[13] Jean Bourgain 和 Alex Gamburd，$\mathrm{SL}_d(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ 中的扩张与随机游走，I 和 II，《欧洲数学会杂志》11 (2009)，第 5 期，1057–1103 页。附有 Bourgain 撰写的附录。MR 2538500 ↑4[14] Emmanuel Breuillard，强蒂茨替代定理，arXiv:0804.1395 (2008)。 ↑5，21，22，41[15] ,$\mathrm{GL}_d(\mathbb{Q})$ 有限子集与非 amenable 子群的高度间隙定理，《数学年刊》（第二辑）174 (2011)，第 2 期，1057–1110 页。 ↑3，10，26，27，28[16] , SL_2 上的高度与自由子群，《几何、刚性与群作用》，2011 年，第 455–493 页。MR2807840 ↑7[17] ,随机矩阵乘积的反集中估计，未发表笔记，见（2012）。 ↑4，6[18] , 近似子群与超强逼近，《圣安德鲁斯群论会议 2013》，2015 年，第 1–50 页。 ↑4，6[19] , 关于联合谱半径，载于《Analysis at Large：纪念 Jean Bourgain 的生平与学术贡献》，编者 A. Avila、M. Th. Rassias、Y. Sinai，施普林格出版社，2022 年，第 1–16 页。MR4944467 ↑9，27[20] Emmanuel Breuillard 和 Koji Fujiwara，非正曲率空间等距变换的联合谱半径与一致增长，《格勒诺布尔傅里叶研究所年刊》71 (2021)，第 1 期，317–391 页。MR4275871 ↑9[21] Emmanuel Breuillard 和 Tsachik Gelander，线性群中的一致独立性，《数学发明》173 (2008)，第 2 期，225–263 页。MR2415307 ↑5

[22] Emmanuel Breuillard、Ben Green、Robert Guralnick 和 Terence Tao，半单代数群中的强稠密自由子群，《以色列数学杂志》192（2012），第 1 期，347–379 页。MR 3004087 ↑39[23] ，李型有限单群中的扩张，《欧洲数学会杂志》（JEMS）17（2015），第 6 期，1367–1434 页。↑4[24] Emmanuel Breuillard、Ben Green 和 Terence Tao，线性群的近似子群，《几何与泛函分析》21（2011），第 4 期，774–819 页。↑4，5，7，14，41[25] Emmanuel Breuillard、Mehrdad Kalantar、Matthew Kennedy 和 Narutaka Ozawa，离散群的C^*-单性与唯一迹性质，《高等科学研究所数学出版物》126（2017），35–71 页。MR3735864 ↑5[26] Emmanuel Breuillard 和 Hee Oh（编），《薄群与超强逼近》，数学科学研究所出版物，第 61 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2014。选自 2012 年 2 月 6–10 日在加利福尼亚州伯克利举行的研讨会论文集。MR3235652 ↑4[27] Tullio Ceccherini-Silberstein、Rostislav Grigorchuk 和 Pierre de la Harpe，伪群与离散度量空间的可 amen 性和悖论分解，《斯捷克洛夫数学研究所论文集》224（1999），代数、拓扑、微分方程及其应用专辑，第 1 期，68–111 页。MR1721355↑6[28] Lvzhou Chen、Sebastian Hurtado 和 Homin Lee，$\mathrm{GL}_d(\mathbb{Q})$ 中的高度间隙与近似律，《群、几何与动力学》19（2025），第 3 期，899–912 页。MR4945534 ↑10，27[29] Kevin P. Costello、Terence Tao 和 Van Vu，随机对称矩阵几乎处处非奇异，《杜克数学杂志》135（2006），第 2 期，395–413 页。MR2267289 ↑7[30] V. I. Danilov，代数簇与概形，《代数几何》第一卷，1994，167–297 页。↑35[31] Pierre de la Harpe，线性群中的自由群，《数学教学》（第二辑）29（1983），第 1–2 期，129–144 页。MR702736 ↑11[32] ，有限可加测度与悖论，《勒贝格百年纪念文集》，2004，39–61 页。MR2143416 ↑6[33] H. E. Debrunner，由基本奇异同调导出的 Helly 型定理，《美国数学月刊》77（1970），375–380 页。MR261443 ↑16[34] P. Erdős，关于 Littlewood 和 Offord 的一个引理，《美国数学会通报》51（1945），898–902 页。MR14608 ↑4[35] Alex Eskin、Shahar Mozes 和 Hee Oh，线性群的一致指数增长，《数学发明》160（2005），第 1 期，1–30 页。MR 2129706 ↑5，13[36] Pierre Eymard，不变平均与酉表示，《数学讲义》300 卷，施普林格出版社，柏林—纽约，1972。MR447969 ↑2[37] Benson Farb，群作用与 Helly 定理，《数学进展》222（2009），第 5 期，1574–1588 页。MR2555905 ↑16[38] Jacob Fox、Matthew Kwan 和 Hunter Spink，几何与 o-极小 Littlewood-Offord 问题，《概率年刊》51（2023），第 1 期，101–126 页。MR4515691 ↑4，7[39] Alex Furman，群上的随机游走与随机变换，《动力系统手册》第一卷 A，2002，931–1014 页。MR1928529 ↑2[40] Alex Furman 和 Yehuda Shalom，群作用的尖锐遍历定理与强遍历性，《遍历理论与动力系统》19（1999），第 4 期，1037–1061 页。MR1709429 ↑2

[41] Harry Furstenberg，关于 Borel 稠密性定理的一则注记，《美国数学会会刊》55（1976），第 1 期，209–212 页。MR422497 ↑6[42] Yair Glasner 和 Nicolas Monod，可和作用、自由积与不动点性质，《伦敦数学会通报》39（2007），第 1 期，138–150 页。MR2303529 ↑2[43] A. Salehi Golsefidy 和 Péter P. Varjú，完美群中的扩张，《几何与泛函分析》22（2012），第 6 期，1832–1891 页。MR3000503 ↑4，6，7[44] Rostislav Grigorchuk 和 Volodymyr Nekrashevych，非可和群的可和作用，《圣彼得堡数学研究所科学札记》（POMI）326（2005），表示论、动力系统、组合学与算法方法专辑第 13 期，85–96、281 页。MR2183217 ↑2[45] Robert M. Guralnick 和 Pham Huu Tiep，小张量幂的分解与 Larsen 猜想，《表示论》9（2005），138–208 页。MR2123127 ↑39[46] Asaf Hadari 和 Yehuda Shalom，线性群中复现率的一致界，编写中。 ↑6[47] Weikun He 和 Nicolas de Saxcé，环面上的线性随机游走，《杜克数学杂志》171（2022），第 5 期，1061–1133 页。MR4402559 ↑4，14[48] James E. Humphreys，《线性代数群》，研究生数学文本第 21 卷，施普林格出版社，纽约—海德堡，1975。MR396773 ↑33[49] Tomas Juškevičius 和 Grazvydas Šemetulskis，群中的最优 Littlewood-Offord 不等式，《组合数学》39（2019），第 4 期，911–921 页。MR4015356 ↑5[50] Harry Kesten，群上的对称随机游走，《美国数学会汇刊》92（1959），336–354 页。 ↑11[51] Michael Larsen 和 Alexander Lubotzky，线性群的正规子群增长：（G_2，F_4，E_8）定理，《代数群与算术》，2004，441–468 页。MR2094120↑34[52] J. E. Littlewood 和 A. C. Offord，关于随机代数方程实根个数。III，《数学文集》 [《数学文集》]新系列 12（54）（1943），277–286 页。MR9656 ↑4[53] Alexander Lubotzky 和 Chen Meiri，群论中的筛法 I：线性群中的幂，《美国数学会杂志》25（2012），第 4 期，1119–1148 页。MR2947947 ↑4[54] Nicolas Monod 和 Sorin Popa，关于群与冯·诺依曼代数的余可和性，《加拿大皇家学会数学报告》25（2003），第 3 期，82–87 页。MR1999183 ↑2[55]Hoi H. Nguyen，非齐次随机游走的反集中（2017）。arxiv:1508.01393（2012）。 ↑4[56] Hoi H. Nguyen 和 Van H. Vu，小球概率、逆定理及其应用，《Erdős 百年纪念文集》，2013，409–463 页。MR3203607 ↑4[57] Lam L. Pham，一致 Kazhdan 常数与仿射平面中的悖论，《变换群》27（2022），第 1 期，239–269 页。MR4400723 ↑7[58] László Pyber 和 Endre Szabó，李型有限单群中的增长，《美国数学会杂志》29（2016），第 1 期，95–146 页。 ↑4[59] C.-P. Schnorr，Strassen 次数界的推广，《SIAM 计算杂志》10（1981），第 2 期，371–382 页。MR615225 ↑35[60]Jean-Pierre Serre，《李代数与李群》，W. A. Benjamin, Inc.，纽约—阿姆斯特丹，1965。1964 年在哈佛大学的讲座。MR218496 ↑33[61] Yehuda Shalom，线性群的增长，《代数学杂志》199（1998），第 1 期，169–174 页。MR1489360 ↑6

[62] ———, 随机遍历定理、不变均值与酉表示，李群与遍历理论（孟买，1996），1998年，第273–314页。MR1699368 ↑2, 7[63] ,代数作用的不变测度、扎里斯基稠密子群与Kazhdan性质 (T)，《美国数学会汇刊》351（1999），第8期，3387–3412页。MR1615966 ↑2[64] Hunter Spink，o-极小群中的乘法结构与随机游走，《Selecta Mathematica》（新系列）30（2024），第3期，论文编号34，共27页。MR4715443 ↑4, 7[65] Terence Tao 和 Van H. Vu，《加法组合学》，剑桥高等数学研究丛书，第105卷，剑桥大学出版社，剑桥，2010年。MR2573797 ↑2, 4[66] Alfred Tarski，《抽象类中的加性函数及其在测度问题上的应用》，《华沙科学与文学学会会议纪要》，第三类22（1929），第3期，114–117页。↑6[67] Pham H. Tiep 和 Van H. Vu，《非阿贝尔 Littlewood–Offord 不等式》，《Advances in Mathematics》302（2016），1233–1250页。MR3545950 ↑4[68] Jacques Tits，《线性群中的自由子群》，《代数学杂志》20（1972），250–270页。MR286898↑11, 15, 41[69] B. A. F. Wehrfritz，《无限线性群》，玛丽女王学院数学讲义，玛丽女王学院纯数学系，伦敦，1969年。MR837425 ↑16, 40[70] Robert J. Zimmer，《遍历理论与半单群》，数学专著，第81卷，比克豪泽出版社，巴塞尔，1984年。MR776417 ↑6

Oren Becker 纯数学与数理统计系 数学科学中心 威尔伯福斯路，剑桥 CB3 0WA，英国电子邮件地址： oren.becker@gmail.com

Emmanuel Breuillard 数学研究所 牛津 OX1 3LB，英国电子邮件地址：
breuillard@maths.ox.ac.uk