arXiv:2512.15367v1 [math.AG] 17 Dec 2025

复拟射影簇的双曲性与基本群（II）：通过非阿贝尔霍奇理论

by

Benoît Cadorel、Ya Deng 和 Katsutoshi Yamanoi

摘要. — 本文是由三篇论文组成的系列之第二部分。我们研究在存在大且约化的表示 $\varrho\colon \pi_1(X) \to \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ 的情况下，复拟射影簇 X 的双曲性。对于任意具有 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ 的伽罗瓦共轭簇 X^σ，我们证明广义 Green–Griffiths–Lang 猜想。当 ϱ 进一步是大的时候，我们证明描述非双曲性轨迹的特殊子集 X^σ 彼此相同，并且该轨迹恰在 X 为对数一般型时才是一个真子集。此外，若 $\varrho(\pi_1(X))$ 的扎里斯基闭包是半单的，我们证明存在一个真扎里斯基闭子集 $Z \subsetneq X^\sigma$，使得每个不包含于 Z 中的子簇都是对数一般型，并且 X^σ 中的所有整曲线都包含在 Z 中。此结果将第三作者（2010）以及 Campana–Claudon–Eyssidieux（2015）的定理从射影簇推广到了拟射影簇，并且即使在射影情形下也得出更强的结论。

目录

0. 引言.1 1. 预备知识与记号.6 2. 一些分解结果.9 3. 非阿基米德情形下的非阿贝尔霍奇理论.12 4. 双曲性与非阿基米德局部系统.26 5. 刚性表示与 $\mathbb{C}$-VHS.30 6. 定理 A 的证明.34 7. 关于广义 Green-Griffiths-Lang 猜想.41 参考文献.43

0. 引言

0.1. 双曲性与基本群。 — 著名的 Bombieri–Lang 猜想指出：如果 X 是定义在数域 k 上的一般型簇，那么 X 的 k-有理点集合包含于 X 的一个真扎里斯基闭子集内。其复数类比是 Green–Griffiths–Lang 猜想，该猜想断言：对于一个一般型复射影簇 X，存在一个真扎里斯基闭子集 $Z \subset X$，包含所有非常值整曲线 $f\colon \mathbb{C} \to X$。这一性质通常被称为代数簇的双曲性，是复几何中的核心课题。关于近期进展，读者可参阅 Demailly 的综述 [Dem20], ，其中尤其讨论了射影空间中高次数一般超曲面的双曲性；也可参阅第三位作者 [Yam15] 从 Nevanlinna 理论角度撰写的综述。

在本系列的第一篇论文 [CDY25] 中，我们证明了广义 Green–Griffiths–Lang 猜想（参见猜想 1.14）适用于 X 存在态射$a\colon X \to A$ 到一个满足 $\dim X = \dim a(X)$ 的半阿贝尔簇的复拟射影簇。从基本

2000 数学主题分类. — 32Q45, 32H25, 14D07, 14K20, 53C43.关键词和短语. — 伪 Picard 双曲性，广义 Green-Griffiths-Lang 猜想，映射到 Bruhat-Tits 建筑的调和映射，Hodge结构变分，伽罗瓦共轭。

群的角度来看，这对应于存在一个从 $\pi_1(X)$ 到阿贝尔群 $\mathbb{Z}^m$ 的大表示。在本文中，我们研究 $\pi_1(X)$ 存在一个映入线性代数群 G的扎里斯基稠密大表示的情形，其中该线性代数群是半单的，或更一般地说，是约化的。

回顾一下，域 K 上的线性代数群 G 称为半单的，如果它在 K 的代数闭包上定义的非平凡连通正规可解代数子群为空。下文中，我们遵循半单代数群均为非平凡群的约定。表示ϱ： $\pi_1(X) \to G(K)$ 称为 大，或按 [Kol95], 的术语称为 一般大 ，如果对于任意包含X的一个 非常一般 点的正维闭不可约子簇 $Z \subset X$，其像 $\varrho(\mathrm{Im}[\pi_1(Z^{\mathrm{norm}}) \to \pi_1(X)])$ 均为无限集，其中 Z^{norm} 表示 Z 的正规化（见定义 1.8）。此外还有一种更强的大性概念：若对每个正维闭子簇 $Z \subset X$ 都满足这一条件，则称 ϱ 为 大。

关于具有大且约化的基本群表示的复射影簇的双曲性性质，研究始于 Mok 和 Zuo 的工作 [Mok92,Zuo96]。此后， [Yam10, CCE15]对这一问题进行了研究。更确切地说，设 X 是一个光滑复射影簇，并带有一个大且扎里斯基稠密的表示 ϱ: $\pi_1(X) \to G(\mathbb{C})$，其中 G 是定义在 $\mathbb{C}$上的半单线性代数群。第三位作者在 [Yam10, Propo- sition 2.1] 中证明， X 不含扎里斯基稠密整曲线 f: $\mathbb{C} \to X$ ； 而 Campana– Claudon–Eyssidieux [在 1] CCE15, Theorem 中证明了 X 是一般型。

然而，鉴于广义 Green-Griffiths-Lang 猜想（参见猜想 1.14），人们期待准射影簇也具有更强形式的双曲性。此外，人们还希望复双曲性在伽罗瓦共轭簇 X^σ下保持不变，其中 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$是一个自同构（例如， [Lan91, VIII, Conjecture 1.3]）。然而，由于诱导映射 $X^\sigma \to X$ 在经典拓扑下未必连续，表示 $\pi_1(X^\sigma) \to G(\mathbb{C})$ 所具有性质的稳定性尚不明确。

本文通过将 Campana–Claudon–Eyssidieux 和第三位作者的定理推广并加强至复拟射影簇的情形，证实了这些预期。

定理 ***A*** **(=定理 6.6)**。—— 设 X 为复拟射影正规簇，G为定义在 $\mathbb{C}$上的半单代数群。若 ϱ: $\pi_1(X) \to G(\mathbb{C})$是一个大且扎里斯基稠密的表示，那么对于任意自同构 $\sigma \in$ 自同构群$(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$，存在一个真扎里斯基闭子集$Z \subsetneq X^\sigma$，其中 X^σ是 X在 σ下的伽罗瓦共轭簇，使得

(i) X^σ的任何不包含在 Z中的闭子簇均为对数一般型。特别地， X^σ为对数一般型。(ii) 任意全纯映射 f: $\mathbb{D}^* \to X^\sigma$，从穿孔圆盘 $\mathbb{D}^*$映到 X^σ，且满足 $f(\mathbb{D}^*) \not\subseteq Z$，都可延拓为从圆盘 $\mathbb{D}$到 X^σ的射影紧化 X^σ的全纯映射（即，X^σ是伪 Picard 双曲）。特别地，X^σ中的所有整曲线都落在 Z上（即， X^σ是伪布罗迪双曲）。

值得注意的是，每个伪 Picard 双曲簇都是伪布罗迪双曲。我们还指出，定理 A 中关于表示 ϱ的两个条件，对于得出定理 A 中的两个结论至关重要，正如注 6.7 中所讨论的那样。

在定理 A 的证明中，我们大量运用了以下两项技术性结果 s:

– 对于任意扎里斯基稠密表示 τ: $\pi_1(X) \to G(K)$，其中 G是非阿基米德局部域 K上的约化群，存在从~万有覆盖 X到 X的 Bruhat–Tits 建筑 $\Delta(G)$ 的 τ-等变多调和映射；该映射由 [BDDM22, DM26]构造； – [CDY25] 发展了 Nevanlinna 理论，研究从 $\mathbb{D}^*$ 的分歧较小的分歧覆盖到对数一般型且准Albanese维数最大的准射影簇的全纯映射。

值得注意的是，定理 A 中表示 ϱ 的大性条件并不特别苛刻，不像对大表示的要求。事实上，在命题 2.5 中，我们证明，取有限 étale 覆盖后， $\pi_1(X)$的任意线性表示都可以通过一个大表示分解。此结果结合定理 A，便得到 $\pi_1(X)$的线性表示的一个分解定理。

推论 ***B***。— 设 X 是一个复拟射影正规簇， G 是定义在 $\mathbb{C}$上的半单代数群。若 ϱ： $\pi_1(X) \to G(\mathbb{C})$ 是一个扎里斯基稠密表示，则存在 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$一个有限 *étale* 覆盖 ν： $X \to X$、一个双有理适当态射 μ： $X' \to X$、一个具有连通的一般纤维的支配 $\widehat{\ }$ 态射 f： $X' \to Y$，以及一个大且扎里斯基稠密的表示τ： $\pi_1(Y) \to G(\mathbb{C})$，使得

– $f^*\tau = (\nu \circ \mu)^*\varrho$。– 存在一个真扎里斯基闭子集 $Z \subsetneq Y$，使得任何不包含于 Z 中的 Y 闭子簇都是对数一般型。– Y 是伪 *Picard* 双曲的，因而特别是伪布罗迪双曲的。

特别地， X 不是弱特殊的，也不含有扎里斯基稠密整曲线。

注意，根据 Campana [Cam11], ，准射影簇 X 是弱特殊的，当且仅当对于任意有限 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$étale 覆盖 $X \to X$ 以及任意真双有理修改 $X' \to X$，都不存在一个支配 $\widehat{\ }$ 态射 $X' \to Y$，其目标为 Y 一个对数一般型的正维拟射影正规簇。

推论 B 推广了 Mok [Mok92], 、Corlette-Simpson [CS08], 以及 Campana-Claudon-Eyssidieux [CCE15],先前的工作，他们在其中证明了类似的分解结果。

0.2. 关于广义 Green-Griffiths-Lang 猜想。— 在定理 A 的基础上，我们进一步研究广义 Green-Griffiths-Lang 猜想（参见猜想 1.14）及其与光滑拟射影簇 X的非双曲性轨迹之间的关系，并采用较弱的假设： $\pi_1(X)$ 存在一个大且约化的表示。具体而言，我们按照定义 0.1 引入四种特殊子集，从不同角度刻画 X的非双曲性轨迹。我们的主要结果定理 C 在假设 ϱ： $\pi_1(X) \to \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ 是一个大且约化的表示，且对任意自同构 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ 的条件下，证明了共轭簇 X^σ的若干性质等价。此外，我们还给出了关于这些特殊子集的进一步结果，见定理 D。

定义 ***0.1* (特殊子集)**。— 设 X 是一个光滑拟射影簇。
(i) $\mathrm{Sp}_{\mathrm{sab}}(X)$： $= \overline{\bigcup_f f(A_0)}^{\mathrm{Zar}}$，其中 f遍历所有非常值有理映射 f：从所有非平凡半阿贝尔簇 A 到 X，使得 f在一个 Zariski 开子集 $A_0 \subset A$ 上是正则的，该开子集的补集 $A \backslash A_0$ 的余维至少为二；(ii) $\mathrm{Sp}_{\mathrm{h}}(X)$： $= \bigcup_f f(\mathbb{C})^{\mathrm{Zar}}$，其中 f遍历所有从 $\mathbb{C}$到X的非常值全纯映射；(iii) $\mathrm{Sp}_{\mathrm{alg}}(X)$： $= \bigcup_V V^{\mathrm{Zar}}$，其中 V遍历 X的所有非对数一般型的正维闭子簇；(iv) $\mathrm{Sp}_{\mathrm{p}}(X)$： $= \underline{\bigcup_f f(\mathbb{D}^*)}^{\mathrm{Zar}}$，其中 f遍历所有从穿孔圆盘 $\mathbb{D}^*$ 到 X 的全纯映射，且在原点处具有本性奇点，即 f 没有全纯延拓_f：到一个射影紧化 X。

前两组 $\mathrm{Sp}_{\mathrm{sab}}(X)$ 和 $\mathrm{Sp}_{\mathrm{h}}(X)$ 是 Lang 针对紧致情形引入的。他提出了以下两个猜想（参见 [Lan91, I, 3.5]以及 [Lan91, VIII, 猜想 1.3]）：

–$\mathrm{Sp}_{\mathrm{sab}}(X) \subsetneq X$当且仅当 X是一般型。–$\mathrm{Sp}_{\mathrm{sab}}(X)$ $=\mathrm{Sp}_{\mathrm{h}}(X)$。

第一个断言隐含了以下第三个猜想：

– $\mathrm{Sp}_{\mathrm{sab}}(X) = \mathrm{Sp}_{\mathrm{alg}}(X)$.

最初的两个猜想蕴含了著名的强 Green-Griffiths 猜想，即（对数）一般型代数簇是伪 Brody 双曲的。这里注意到，根据定义， X 是伪 Brody 双曲的当且仅当 $\mathrm{Sp}_{\mathrm{h}}(X) \subsetneq X$。类似地， X是伪 Picard 双曲的当且仅当 $\mathrm{Sp}_{\mathrm{p}}(X) \subsetneq X$。

定理 ***C* (=定理 7.4)**。— 设 X 是一个复光滑拟射影簇，且存在一个大且约化的表示 ϱ： $\pi_1(X) \to \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$。那么对于任意自同构 $\sigma \in$自同构群$(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$，以下性质等价：

(a) X^σ 是对数一般型。

(b) $\mathrm{Sp}_{\mathrm{p}}(X^\sigma) \subsetneq X^\sigma$。

(c) $\mathrm{Sp}_{\mathrm{h}}(X^{\sigma}) \subsetneq X^{\sigma}$.(d)
$\mathrm{Sp}^{\mathrm{alg}}(X^{\sigma}) \subsetneq X^{\sigma}$.(e)
$\mathrm{Sp}_{\mathrm{sab}}(X^{\sigma}) \subsetneq X^{\sigma}$.

我们注意到，定理 C 中的蕴含关系 $(a) \implies (c)$ 建立了强 Green-Griffiths 猜想：对于所有自同构 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$，只要存在一个大且约化的表示$\varrho\colon \pi_1(X) \to \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$，则该猜想对 X^{σ} 成立。

对于 Lang 的第二个和第三个猜想，在更强的假设下，即 $\pi_1(X)$ 具有一个大 且约化的表示，我们得到以下定理。

定理 ***D*** **(=定理 7.5)**。——设 X 是一个具有大且约化的表示 $\varrho\colon \pi_1(X) \to \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$的光滑准射影簇。那么对于任意自同构 $\sigma \in$自同构群$(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$,

(i) 定义 *0.1* 中定义的四个特殊子集彼此相同，即，

$$\mathrm{Sp}_{\mathrm{alg}}(X^{\sigma}) = \mathrm{Sp}_{\mathrm{sab}}(X^{\sigma}) = \mathrm{Sp}_{\mathrm{h}}(X^{\sigma}) = \mathrm{Sp}_{\mathrm{p}}(X^{\sigma}).$$

(ii) 这些特殊子集在自同构 σ 下共轭，即，

$$\mathrm{Sp}_{\bullet}(X^{\sigma}) = \mathrm{Sp}_{\bullet}(X)^{\sigma},$$

其中$\mathrm{Sp}_{\bullet}$ 表示$\mathrm{Sp}^{\mathrm{alg}}$、$\mathrm{Sp}_{\mathrm{sab}}$、$\mathrm{Sp}_{\mathrm{h}}$ 或Sp_{p}中的任意一个。

值得一提的是，基于本文的方法和结果，第一作者和第三作者在 [DY25] 中将定理 A、C 和 D推广到了特征为 $K > 0$的 $\pi_1(X) \to \mathrm{GL}_N(K)$大表示的情形。

还值得一提的是，在 [Bru22], 中，Brunebarbe独立讨论了紧致情形下的相关结果。然而，他采用的方法与本文的方法有很大不同。例如，即使在紧致情形下，我们的方法也关键地运用了Campana–Păun [CP19] 的一项有力结果来证明定理 A.(i)（另见命题 4.7 的证明），而 [Bru22]中的论证则主要依赖于早期工作 [CCE15,Yam10]。

0.3. 非阿贝尔霍奇理论中的结果。— 我们相信，证明定理 A时发展出的一些新技术本身就具有重要意义。其中一项技术是针对扎里斯基稠密表示 $\varrho\colon \pi_1(X) \to G(K)$的一条约化定理，其中 G是定义在非阿基米德局部域 K上的约化代数群。

定理 ***E*** **(=定理 3.18)**。— 设 X 是一个复拟射影正规簇，且$\varrho\colon \pi_1(X) \to \mathrm{GL}_N(K)$是一个约化表示，其中 K是非阿基米德局部域。则存在一个拟射影正规簇 S_{ϱ}和一个支配态射 ${}^{s}\varrho\colon X \to S_{\varrho}$，其一般纤维连通，并且对于 X 的任意连通扎里斯基闭子集 T，以下性质等价：

(a) 像 $\rho(Im[\pi_1(T) \to \pi_1(X)])$ 是 $G(K)$ 的有界子群。*(b)* 对于 T的每个不可约分支 T_o，像 $\rho(Im[\pi_1(T$范数$_o) \to \pi_1(X)])$ 是 $G(K)$ 的有界子群。*(c)* 像 ${}^{s}\varrho(T)$ 是一个点。

值得注意的是，如果 X 是射影的，那么 (a) 与 (c) 两项之间的等价性已由 Katzarkov [Kat97], Eyssidieux [Eys04 的命题 1.4.7], 以及 Zuo [Zuo96]证明。然而，(a) 与 (b) 两项之间的等价性并不涉及 ${}^{s}\varrho$，即使在射影情形下，似乎也是文献中的新结果。定理 3.18 的一个证明基石建立在 Brotbek、Daskalopoulos、Mese 和第二作者的先前结果之上 [BDDM22,DM26]：这些结果证明了存在到 Bruhat-Tits 建筑的 ϱ-等变多重调和映射（将 Gromov-Schoen 定理推广到拟射影情形），且其在无穷远处具有适当的能量增长；并通过这些调和映射构造对数对称微分形式。

以下定理是定理 A 证明中的关键组成部分。

定理 ***F*** **(=定理 4.10)**。— 设 X 是一个光滑拟射影簇。设 G 是定义在非阿基米德局部域 K 上的几乎单代数群。假设 $\varrho\colon \pi_1(X) \to G(K)$是一个大且无界的扎里斯基稠密表示。那么：

(i)$\mathrm{Sp}^{\mathrm{alg}}(X) \subsetneq X$.(ii) X 是伪
Picard 双曲。

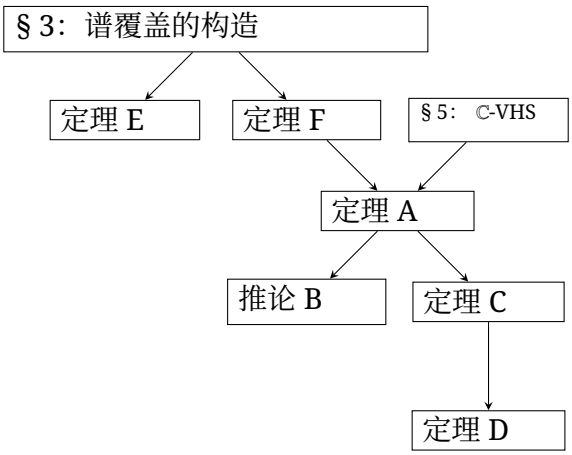


图 1. 主要定理之间的关系

定理 F 证明中的一个重要构成部分是 [CDY25, 定理 A] ，其讨论了关于映入具有最大准Albanese维数的拟射影簇的全纯曲线的大皮卡型定理。

0.4. 系列结构及后续发展。— 本文是 arXiv 上长篇预印本 [CDY22] 的第二部分，该预印本为投稿期刊而分为三部分。本文对应于 [CDY22] 的第 2 节和第 5–9 节。该系列的第一部分对应于 [CDY22] 的第 3 节和第 4 节，并以 [CDY25], 的形式发布于 arXiv；该部分运用 *Nevanlinna* 理论，确立了阿贝尔表示情形下的主要结果。本文主要基于非阿贝尔霍奇理论。本文所发展的方法与 [CDY25] 中的方法有很大不同；在假设其中定理 B 和定理 C 成立的情况下，本文的论证在很大程度上独立于该工作，因此可以独立阅读。该系列的第三部分将涵盖 [CDY22], 的其余章节，并致力于研究第一部分和本文结果的应用。特别是，我们将研究 Campana 特殊簇的基本群，并建立一个受 Kollár 猜想 [Kol95] 启发的结构定理。

自 2022 年问世以来，预印本 [CDY22] 已有若干后续应用（例如参见 [DYK23, DY25]）。此外，由于早期关于射影情形的研究中某些微妙之处需要仔细澄清，我们力求使本文尽可能自成一体。因此，我们的目标是以清晰易懂的方式呈现论证，即使是不熟悉紧致情形的读者也能读懂。例如，我们详细介绍了如何从给定的非刚性表示构造无界表示（参见 § 6.1）。此外，作为定理 E 证明的一部分，我们以自成一体的方式介绍了准射影情形下与非阿基米德局部系统相关的谱覆盖的构造（参见 § 3）。这一构造依赖于准射影情形下到欧氏建筑的等变多重调和映射的存在性；这是 Gromov–Schoen 在 [GS92] 中确立的射影情形结果的推广，由 Brotbek、Daskalopoulos、Mese 和第二作者在 [BDDM22, DM26] 中发展而来。

最后，由于本文从不同角度给出了结果，我们在图 1 中提供了一张示意图，总结主要定理之间的关系，方便读者阅读。

C约定与记号。— 本文采用以下约定和记号 ：

– 拟射影代数簇及其闭子簇通常假定为不可约，除非另有说明；而扎里斯基闭子集则可能是可约的。– 基本群始终指拓扑基本群。– 若 X 是复空间，则其正规化记作 X^{norm}。– 对于任意概形 S，记其约化为 S_{red}。

– 若双有理映射 $f\colon X \to Y$ 是拟射影正规簇之间的映射，且存在开集 $Y^\circ \subset Y$，使得 $Y \backslash\backslash Y^\circ$ 的余维至少为二，并且 f 在 Y° 上是真映射，则称其在余维一处真 。– 对于有限生成群 Γ、域 K 和表示 $\varrho\colon \Gamma \to \mathrm{GL}_N(K)$，若 ϱ 的扎里斯基闭包在 GL_N 中是一个约化代数群，则称其为约化 表示。当 K 的特征为零时，这等价于 ϱ 是半单的（参见 [Mil17，定理 22.42]）。这一术语强调的是 ϱ 的像在几何和群论方面的性质，而非表示的直和分解。

致谢。— 我们感谢 Michel Brion、Patrick Brosnan、Yohan Brunebarbe、Frédéric Campana、Benoît Claudon、Philippe Eyssidieux、Hisashi Kasuya、Chikako Mese、Gopal Prasad、Guy Rousseau 和 Carlos Simpson，与他们进行的许多有益讨论。我们尤其感谢 Ariyan Javanpeykar 对本工作的关注以及提出的宝贵意见。B.C. 和 Y.D. 感谢 ANR Karmapolis资助项目（ANR-21-CE40-0010）的支持。K.Y. 感谢 JSPS科学研究补助金（C）22K03286 的支持。

1. 预备知识与记号

1.1. 对数形式。— 设 (X, D) 为一个光滑对数对，即由一个光滑射影簇 X 及其上的一个简单正规交叉除子 D 构成的数据。我们有时将对数形式空间记为$T_1(X, D) := H^0(X, \Omega_X(\log D))$。类似地，若 X 是一个光滑拟射影簇，我们记为 $T_1(X) := T_1(X, D)$，其中 (X, D) 是 X 的任意光滑对数对紧化。注意，$T_1(X)$ 只依赖于 X，而不依赖于 X 的选取。

1.2. 半阿贝尔簇与拟阿尔巴内塞态射。— 本小节汇集一些关于拟射影簇的拟阿尔巴内塞态射以及半阿贝尔簇的结果。进一步细节请参阅 [NW14,Fuj24] 。

交换复代数群 A 称为半阿贝尔簇，如果存在一个复代数群的短正合列

$$1 \to H \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}_0 \to 1$$

其中 A_0 是一个阿贝尔簇，且 $H \cong (\mathbb{C}^*)^\ell$。

设 X 是一个光滑复拟射影簇。X 的拟 Albanese 簇是半阿贝尔簇

$$\mathcal{A}_X = T_1(X)^* / \varrho(H_1(X, \mathbb{Z}))$$

其中 $\varrho(\gamma) := (\eta \mapsto \int_\gamma \eta)$。若固定一个基点 $* \in X$，并记 $e \in \mathrm{A}_X$ 为单位元，则存在一个带基点簇之间的自然态射 $(X, *) \to (\mathrm{A}_X, e)$，由沿路径积分给出，与射影情形完全相同。此外，任何到半阿贝尔簇的带基点态射 $(X, *) \to (B, e)$ 都唯一地经由 A_X 分解，且分解态射是半阿贝尔簇的态射 $\mathrm{A}_X \to B$。

请注意，拟阿尔巴内塞态射的像仅仅是一个可构造集，通常既非闭集也非开集。

下面的引理将有助于证明关于拟阿尔巴内塞态射的分解结果。引理 ***1.1***。— 设 X 是一个光滑拟射影簇，并设 $q\colon X \to \mathcal{A}_X$ 是其拟阿尔巴内塞态射。设 $S \subset T_1(X)$ 是 X 上的一组对数形式，并设 $B \subset \mathcal{A}_X$ 是使所有 $\eta \in S$ 都消失的最大的半阿贝尔子簇，其中使用自然同一 $T_1(\mathrm{A}_X) \cong T_1(X)$。设

$$r : X \to \mathcal{A}_X / B$$

为商映射。于是，对于来自拟射影簇 Y的任意态射 $f\colon Y \to X$，$r(f(Y))$是一个点，当且仅当对于任意 $\eta \in S$，都有 $f^*(\eta) = 0$。

证明。——对 Y作奇点消解后，我们假设 Y 光滑。在 X 和 Y 上选取基点，使得存在一个带基点空间的图表

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{q} & \mathcal{A}_X & \xrightarrow{p} & \mathcal{A}_X/B \\ {\scriptstyle f}\uparrow & & {\scriptstyle g}\uparrow & & \\ Y & \xrightarrow{u} & \mathcal{A}_Y & & \end{array},$$

其中，半阿贝尔簇以其单位元为基点，且 g， p 是代数群态射。

上述图表表明， $p \circ q$当且仅当 $f(Y)$被映到一个点时， $g(\mathrm{A}_Y) \subset B$。根据 B 的定义，当且仅当对于任意 $\eta \in S \subset T_1(\mathrm{A}_X) = T_1(X)$， $g^*(\eta) = 0$。由于$u^*g^* = f^*q^*$，且该 q^*实现了识别 $T_1(\mathrm{A}_X) \cong T_1(X)$，这等价于引理的第二个条件。□

上述态射 r： $X \to \mathrm{A}_X/B$ 称为由 S 诱导的部分拟 *Albanese* 态射。

注记 ***1.2***。— 引理 1.1 使我们能够为拟射影正规簇 X 定义拟Albanese态射。设 Y是 X 的一个消解。令 $S \subset T_1(Y)$ 表示在 $Y \to X$ 的每个纤维上都消失的对数一形式的集合。那么，对于由 S 诱导的部分拟 Albanese 态射 $Y \to \mathrm{A}$，根据引理 1.1， $Y \to X$的每个纤维都被压缩为一个点。因此 $Y \to$A可经由 $X \to$ A 分解。注意，该构造不依赖于 X 的消解。这样的$X \to$ A称为 X 的拟阿尔巴内塞态射。

我们还需要两个用于评估半阿贝尔簇的子簇的Kodaira维数的标准结果（见 [NW14，命题5.6.21和5.6.22]）。

命题 ***1.3***。— 设$\mathcal{A}$ 为一个半阿贝尔簇。

(a) 设 $X \subset \mathcal{A}$为一个闭子簇。则 $\kappa(X) \geq 0$，当且仅当 X是某个半阿贝尔子簇的平移时取等号。*(b)* 设 $Z \subset \mathcal{A}$ 为一个扎里斯基闭子集。则 $\kappa(\mathcal{A} - Z) \geq 0$，当且仅当 Z 没有余维1的分支时取等号。□

引理***1.4***（ **[CDY25，引理1.3和1.4]**）。— 设 α： $X \to \mathcal{A}$ 为从光滑拟射影簇 X到半阿贝尔簇$\mathcal{A}$的一个（可能不为真）态射，且满足 $\kappa(X) = 0$。

(i) 若 α 是双有理的，则存在一个余维至少为二的扎里斯基闭子集 $Z \subset \mathcal{A}$，使得 α 在 $\mathcal{A}\backslash Z$ 上同构。(ii)若 $\dim X = \dim \alpha(X)$。则 $\pi_1(X)$是阿贝尔的。

□

1.3. 覆盖与伽罗瓦态射。— 若 X 是一个复代数簇，其基本群记为$\widetilde{\ }\pi_1(X)$，其万有覆盖通常记为 π: $X \to X$。

定义 ***1.5*** **(伽罗瓦态射)**。— 代数簇之间的有限映射 $\gamma: X \to Y$ 称为群为 G 的伽罗瓦态射，如果存在一个有限群 $G \subset \mathrm{Aut}(X)$，使得 γ 同构于商映射。

若 Y 是一个复流形且 $p: X \to Y$ 是一个 étale 覆盖，则存在一个伽罗瓦覆盖$p': X' \to Y$，它经过 p，且任意其他这样的伽罗瓦覆盖都经过 p'。当 X连通时，伽罗瓦覆盖 $p': X' \to Y$ 可描述如下。令 F为 p在 $y \in Y$ 上的纤维。则 $\pi_1(Y, y)$ 通过从一点 $x \in F$ 出发提升经过 y 的闭路，在 F 上传递地作用。这定义了一个群态射 $\varrho: \pi_1(Y, y) \to \mathfrak{S}(F)$，其中 $\mathfrak{S}$表示置换。现在，覆盖 $p': X' \to Y$对应于有限的 $\pi_1(Y, y)$-集合 $\mathrm{Im}(\varrho)$。由于该集合是正规子群 $\mathrm{Ker}(\varrho)$ 的陪集空间， $p': X' \to Y$ 是一个伽罗瓦覆盖。注意，有限的 $\pi_1(Y, y)$-集合之间存在一个满射 $\mathrm{Im}(\varrho) \to F$，由 $\sigma \mapsto \sigma(x_0)$ 定义，其中 $x_0 \in F$是不动点。因此 p' 经过 p。

现在，若 $p: X \to Y$ 是正规拟射影簇之间的有限态射，则可以取 X在 $\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}(Y)$的伽罗瓦闭包中的正规化。这是一个有限伽罗瓦态射$p': X' \to Y$，并可经由 X分解；在 $Y_\circ$这一处，即 p在 $p^{-1}(Y_\circ)$上étale 的区域，它与先前定义的伽罗瓦闭包一致。特别地， p' 在 $Y_\circ$上étale。

1.4. 代数簇的基本群。— 本文将用到以下关于基本群的著名结果，见 [ADH16，定理 2.1]:

引理 ***1.6***。— 设 $\mu: X' \to X$ 是不可约复正规解析簇之间的双亚纯适当态射。则 $\mu_*: \pi_1(X') \to \pi_1(X)$ 是满射；若 X' 和 X 均光滑，则它是同构。此外，对于任意适当闭解析子集 $A \subset X$，$\pi_1(X\backslash A) \to \pi_1(X)$ 是满射。□

我们还回顾以下结果。

引理 ***1.7***（见 **[Cam91，命题 1.3], [Kol95，命题 2.10]**）

设 $f: X \to Y$ 是拟射影簇之间的支配态射，且 Y 范 *l.*

*The*数 $f_*: \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ 的像在 $\pi_1(Y)$ 中具有有限指数。 □

现在我们给出基本群的大表示的定义，这种表示也称为泛点大表示，由 Kollár 在 [Kol95] 中提出：

定义 ***1.8***（**大表示**）。——设 X 是一个拟射影正规簇。设 $\varrho: \pi_1(X) \to G(K)$ 是一个表示，其中 G 是定义在某个域 K 上的代数群。若存在至多可数个扎里斯基闭子簇 $Z_i \subsetneq X$，使得对于每个满足 $Y \not\subset \cup Z_i$ 的正维闭子簇 $Y \subset X$，其像 $\varrho(\mathrm{Im}[\pi_1(Y_{\text{范数}}) \to \pi_1(X))])$ 均为无限集，则称 ϱ 为一个大表示。$X - \cup_i Z_i$ 中的点称为 X 中的非常一般点。

注 ***1.9***。——在第二和第三作者最近的一项工作 [DYK23]，中，他们证明：对于拟射影正规簇 X 和约化表示 $\varrho: \pi_1(X) \to \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$，若考察任意闭子簇 Z，则像 $\varrho(\mathrm{Im}[\pi_1(Z^{\mathrm{norm}}) \to \pi_1(X))])$ 是无限集，当且仅当 $\varrho(\mathrm{Im}[\pi_1(Z) \to \pi_1(X))])$。因此，当表示为约化表示时，在定义 1.8 中，我们可以不对 Y 取正规化，直接定义大表示。

1.5. 伪皮卡双曲性的概念。— 我们首先回顾 [Den23] 引入的伪皮卡双曲性定义。设 $f: \mathbb{D}^* \to X$ 是从穿孔圆盘 $\mathbb{D}^*$ 到拟射影簇 X 的全纯映射。若 f 可延拓为从圆盘 $\mathbb{D}$ 到 $\underline{X}$ 的某个射影紧化 X 的全纯映射，则对 X 的任意射影紧化 X' 也同样成立，因为 X 和 X' 是双有理的。

定义 ***1.10***（**伪皮卡双曲性**）。— 设 X 是光滑拟射影簇，且 X 是其光滑射影紧化。若存在扎里斯基闭真子集 $Z \subsetneq X$，使得任意满足 $f(\mathbb{D}^*) \not\subset X^-$ 的全纯映射 $f: \mathbb{D}^* \to X$ 都可延拓为全纯映射 $f: \mathbb{D} \to X$，则称 X 为伪皮卡超曲。若 $Z = \varnothing$，则称 X 为皮卡超曲。

正如 [CD21, 命题 1.7], 所示，伪皮卡超曲率簇具有以下代数性质。

命题 ***1.11***. — 设 X 是一个伪皮卡超曲的光滑拟射影簇。那么，任何从另一个光滑拟射影簇 Y 到 X 的亚纯映射 $f: Y \dashrightarrow X$，只要满足 $f(Y) \not\subset \mathrm{Sp}^{\mathrm{p}}(X)$，就是有理的。

尽管我们在 [CD21, 命题 1.7], 中只对支配亚纯映射 $f: Y \dashrightarrow X$ 陈述了这一命题，但同样的证明也适用于命题 1.11。为求完整起见，我们在此给出证明。

命题 *1.11* 的证明. — 设 Y 是 Y 的一个光滑射影紧化，使得 $D := Y$ 是一个简单正规交叉除子。设 X 是 X 的一个光滑射影紧化。注意到，f 是有理映射，当且仅当 f 延拓为一个亚纯映射 $f: Y \dashrightarrow X$。只需验证这一性质在 D 的任意点的某个邻域内成立。根据 [Siu75，定理 1], ，从复流形 W 的扎里斯基开集 W° 到紧凯勒流形 X 的任意亚纯映射，只要 $W - W^\circ$ 的余维至少为 2，就能延拓为从 W 到 X 的亚纯映射。因此，只需考察 f 在 D 光滑点附近的延拓性。任取这样的点 $p \in D$，并选取以 p 为中心的坐标系 $(\Omega; z_1, \ldots, z_n)$，使得 $\Omega \cap D = (z_1 = 0)$。若能证明 $f: \mathbb{D}^* \times \mathbb{D}^{n-1} \dashrightarrow X$ 延拓为亚纯映射 $\mathbb{D}^n \dashrightarrow X$，则定理得证。

记 S 为 $f|_{\mathbb{D}^* \times \mathbb{D}^{n-1}}: \mathbb{D}^* \times \mathbb{D}^{n-1} \dashrightarrow X$ 的不定点集，它是 $\mathbb{D}^* \times \mathbb{D}^{n-1}$ 的一个闭子簇，余维至少为二。由于我们假设 $f(Y) \not\subset \mathrm{Sp}^p(X)$，因此存在一个稠密开集 $W \subset \mathbb{D}^{n-1}$，使得对任意 $z \in W$ 每个截面 $\mathbb{D}^* \times \{z\} \not\subset S$ and $f(\mathbb{D}^* \times \{z\} - S) \not\subset \mathrm{Sp}^p(X)$。于是，限制映射 $f|_{\mathbb{D}^* \times \{z\}}: \mathbb{D}^* \times \{z\} \dashrightarrow X$ 有良好定义且为全纯映射。接着，$f: \mathbb{D}^* \times \{z\} \to X$ 对每个 $z \in W$ 都可延拓为全纯映射 $\mathbb{D} \times \{z\} \to X$。随后，我们应用 Siu 定理 [Siu75, p.442, (*)]，得出 $f|_{\mathbb{D}^* \times \mathbb{D}^{n-1}}$ 可以延拓

为亚纯映射 $\mathbb{D}^n \dashrightarrow X$。这意味着 f 可以延拓为亚纯映射 $f\colon Y \dashrightarrow X$。根据周定理，$f$ 是有理的。□

命题 1.11 的一个直接推论是，伪 Picard 双曲簇的代数结构具有以下唯一性。

推论 ***1.12.*** — 设 X 和 Y 是光滑拟射影簇，且其相关复空间之间存在解析同构 φ：$Y^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}}$。假设 X 是伪 *Picard* 双曲的。那么，φ 是代数同构。□

Borel [Bor72] 和 Kobayashi-Ochiai [KO71] 的一个经典结果表明，有界对称域被无挠格作用所得的商是皮卡超曲的。第二作者证明了一个类似结果：对于容许复霍奇结构变分的代数簇，该结果同样成立。

定理 ***1.13*** (**[Den23, 定理 A]**). — 设 X 是一个光滑拟射影簇。假设 X 上存在一个复霍奇结构变分，其周期映射在某一点处是单射。那么，X 是伪 *Picard* 双曲的。□

我们在本小节末尾回顾 § 0.2 中的强 Green-Griffiths-Lang 猜想；这些猜想是研究代数簇双曲性的基本问题（参见 [Lan91, I, 3.5] 和 [Lan91, VIII, 猜想 1.3]）。考虑到定理 C，我们也将伪 Picard 双曲性纳入陈述，并将广义 *Green-Griffiths-Lang* 猜想 表述如下。

猜想 ***1.14.*** — 设 X 是一个光滑拟射影簇。则以下性质等价：

(i) X 是对数一般型；(ii) X 是伪 *Picard* 双曲的，即，$\mathrm{Sp}_{\mathrm{p}}(X) \subsetneq X$；(iii) X 是伪布罗迪双曲的，即，$\mathrm{Sp}_{\mathrm{h}}(X) \subsetneq X$；(iv) $\mathrm{Sp}_{\mathrm{sab}}(X) \subsetneq X$；(v) X 是强对数一般型的，即，$\mathrm{Sp}_{\mathrm{alg}}(X) \subsetneq X$。

注意，如果 X 是对数一般型，那么在 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ 下的共轭簇 $X^\sigma := X \times_\sigma \mathbb{C}$ 也具有对数一般型。因此，根据猜想 1.14，如果 X 是伪 Brody（Picard）双曲的，那么据推测 X^σ 也具有伪 Brody（Picard）双曲性（参见 [Lan91，第 179] 页）。这一问题仍相当开放，目前是一个活跃研究领域。

2. 一些分解结果

本节证明关于准射影簇纤维化 $X \to Y$ 的若干预备结果。特别地，我们证明命题 2.5，并随后利用命题 2.5 从定理 A 推导出推论 B。

引理 ***2.1***（**拟 Stein 分解**）。— 设 $f\colon X \to Y$ 是光滑拟射影簇之间的一个态射。那么 f 可分解为态射 $\alpha\colon X \to S$ 和 $\beta\colon S \to Y$，使得

(a) S 是一个拟射影正规簇；(b) α 是一个支配态射，其一般纤维连通，但不一定是真或满射；(c) β 是一个有限态射。

这样的分解是唯一的。

证明. — 设 X 是 X 的一个部分光滑紧化，使得 f 可延拓为一个射影态射 $f\colon X \to Y$。对 f 取 Stein 分解，得到一个具有连通纤维的适当满射态射 $\bar{\alpha}\colon X \to S$ 以及一个有限态射 $\beta\colon S \to Y$。然后定义 $\alpha\colon X \to S$ 为 $\bar{\alpha}$ 在 X 上的限制；它是具有连通一般纤维的支配态射。显然，这一构造不依赖于 X 的选择。□

本文将前述分解称为拟 *Stein* 分解。

引理 ***2.2.*** — 设 $f\colon X \to Y$ 是拟射影簇之间的一个支配态射，且 X 光滑。则对于一般纤维的一个连通分支 F，有 像$[\pi_1(F) \to \pi_1(X)] \triangleleft \pi_1(X)$。

证明. — 根据引理 2.1，我们可以假设 $f\colon X \to Y$ 具有连通的一般纤维。存在一个扎里斯基开集 $Y^\circ \subset Y$，使得记 $X^\circ := f^{-1}(Y^\circ)$，限制 $f|_{X^\circ}\colon X^\circ \to Y^\circ$。

是光滑态射，而且在 Y°上是拓扑局部平凡纤维化。那么 $f|_{X^\circ}$ 的纤维由一个不可约分支 F 构成，并满足短正合列

$$\pi_1(F) \to \pi_1(X^\circ) \to \pi_1(Y^\circ) \to 0.$$

因此，$\mathrm{Im}[\pi_1(F) \to \pi_1(X^\circ)] \triangleleft \pi_1(X^\circ)$。注意，由引理 1.6，$\pi_1(X^\circ) \to \pi_1(X)$ 是满射。因此，$\mathrm{Im}[\pi_1(F) \to \pi_1(X)] \triangleleft \pi_1(X)$。□

引理 ***2.3.*** — 设 $f\colon X \to Y$ 是光滑拟射影簇之间的支配态射，且一般纤维连通。设 $\varrho\colon \pi_1(X) \to G(K)$ 是一个表示，其像无挠，其中 G 是定义在某个域 K 上的线性代数群。若对于一般纤维 F，$\varrho(\text{像}[\pi_1(F) \to \pi_1(X)])$ 是平凡的，则存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\mu} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow{\nu} & Y \end{array}$$

其中

(a) μ 是真双有理态射；*(b)* ν 是双有理但不一定是真态射；*(c)* f' 是支配的；

以及一个表示 $\tau\colon \pi_1(Y') \to G(K)$，使得 $f'^*\tau = \mu^*\varrho$。

证明。— 步骤*1.* 紧化与第一步约化。我们取 X 的一个部分光滑紧化 X，使得 f 延拓为一个射影满态射 $f\colon X \to Y$，且具有连通纤维。

~~断言~~ ***2.4***。— 我们可以假设 $f\colon \overline{X} \to Y$ 是等维的。

事实上，根据 Hironaka-Gruson-Raynaud 扁平化定理，存在一个来自光滑拟射影簇 Y_1 的真双有理态射 $Y_1 \to Y$，使得对于 $X \times_Y Y_1$ 中支配 Y_1 的不可约分支 T，诱导的态射 $f_T\colon = T \to Y_1$ 是满射、真且平坦的。特别地，f_T 的纤维是等维的。考虑正规化映射 $\nu\colon X_1 \to T$。于是诱导的态射 $f_1\colon X_1 \to Y_1$ 仍具有等维纤维。记诱导的真双有理态射为 $\mu\colon X_1 \to X$，并令 $X_1 := \mu^{-1}(X)$。注意，根据下面的引理 1.6，$\pi_1(X_1) \to \pi_1(X)$ 是一个同构。

于是有如下图表

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_1 & \longrightarrow & Y \end{array}$$

其中水平映射均为真双有理映射，并且左侧的两个空间在取 $\pi_1(X_1)$ 上的诱导表示时满足命题的假设。显然，只需证明将 X（分别将 Y）替换为 X_1（分别替换为 Y_1）后的结果。下文中，我们也可以将 X（分别将 Y）替换为 X_1 和 Y（分别替换为 Y_1）。

步骤 *2.* 在 Y 的开子集上诱导表示。考虑一个扎里斯基开集 $Y_\circ \subset Y$，使得 $X^\circ := f^{-1}(Y_\circ)$ 是一个以 $Y_\circ$ 为底、纤维为连通纤维 F 的拓扑局部平凡纤维化。于是我们有一个短正合列

$$\pi_1(F) \to \pi_1(X^\circ) \to \pi_1(Y^\circ) \to 0$$

根据我们的假设，$\varrho(\mathrm{Im}[\pi_1(F) \to \pi_1(X)])$ 是平凡的。因此，我们可以取商，从而得到一个表示 $\tau\colon \pi_1(Y_\circ) \to G(K)$，使得 $\varrho|_{\pi_1(X^\circ)} = f^*\tau$。

步骤 *3.* 约化 Y，我们可以假设 $Y - Y_\circ$ 的所有除子分量都与 $f(X)$ 相交。记 E 为包含在补集 $Y \setminus Y^\circ$ 中的 Y 的素因子之和。我们将 $E = E_1 + E_2$ 分解，使得 E_1 是与 $f(X)$ 不相交的 E 的素因子之和。我们用 $Y \setminus E_1$ 替换 Y。那么，对于包含在 $Y \setminus Y_\circ$ 中的任意素因子 P，$f^{-1}(P) \cap X \neq \varnothing$。

步骤 *4.* 将表示延拓到整个 $\pi_1(Y)$。

设 D 是 $Y - Y_\circ$ 的一个除子分量。由上文所述，$f^{-1}(D) \neq \varnothing$。由于 $\bar{f}\colon X \to Y$ 是等维的，因此对于 $f^{-1}(D)$ 的任意素分量 P，态射 $f|_P\colon P \to D$ 是支配的。此外，由于 X 是正规的，X 在 P 的一般点处是光滑的。

这使得我们可以找到点 $x \in P_{reg}$（分别为 $y \in D_{reg}$），其附近有适配于这些除子的局部坐标（$z_1, \ldots\ldots z_m$）（分别为（$w_1, \ldots\ldots, w_n$），使得 x（分别为 y）处满足 $f^*(w_1) = z_1^k$ 对某个 $k \geq 1$成立。因此，绕 P 一般点的子午环路 γ 被映射到 η^k，其中 η 是绕 D的子午环路。另一方面，由于 γ在 $\pi_1(X)$ 中是平凡的，因此

$$0 = \varrho(\gamma) = \tau(\eta^k).$$

Hence $\tau(\eta)$ 是一个挠元。由于我们假设 ϱ 的像不包含挠元，因此 $\tau(\eta)$ 必须是平凡的。于是，τ 延拓到 D的光滑轨迹。

由于这对任意除子分量 $D \subset Y - Y_\circ$ 都成立，因此这表明 τ 延拓到 $\pi_1(Y_{\circ\circ})$，其中 $Y_\circ \subset Y_{\circ\circ}$，且 $Y - Y^{\circ\circ}$ 在 Y中的余维为 ≥ 2。然而，由于 Y是光滑的，我们有$\pi_1(Y) \cong \pi_1(Y_{\circ\circ})$，因此 τ实际上延拓到 $\pi_1(Y)$。□

注意，上述证明比紧致情形更困难，因为 $f(X)$ 只是 Y 的一个可构造子集，而且 f并非真态射。

基于引理 2.3，我们证明以下分解结果，该结果对于证明推论 B 很重要。

命题 ***2.5.***—设 X是一个拟射影正规簇。设 $\varrho\colon \pi_1(X) \to G(K)$是一个表示，其中 G 是定义在零特征域 K 上的线性代数群。则存在一个图表

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{X} & \xrightarrow{\mu} & \widehat{X} & \xrightarrow{\nu} & X \\ \downarrow f & & & & \\ Y & & & & \end{array}$$

其中 Y 和 X 是光滑拟射影簇，并且

(a) $\nu\colon X \to X$ 是一个有限 *étale* 覆盖；*(b)* $\mu\colon X \to X$ 是一个双有理真态射；*(c)* $f\colon X \to Y$ 是一个具有连通一般纤维的支配态射；

使得存在一个大表示 $\tau\colon \pi_1(Y) \to G(K)$，满足 $f^*\tau = (\nu \circ \mu)^*\varrho$。

注意, hat when X i其证明jecti定理hi其结果lt i证明 d i定理 [Ko l93, Th 4 5 理 .].命题 *2.5* 的证明. — 步骤*1.* 不妨假设 ϱ 具有无挠像。由于像 $\varrho(\pi_1(X))$ 是有限生成线性群，根据 Selberg 的一个定理，存在一个有限指数正规子群 $\Gamma \subset \varrho(\pi_1(X))$，它是无挠的。取一个 étale 覆盖 $\nu\colon X \to X$，其基本群为 $\pi_1(\widehat{X}) = \varrho^{-1}(\Gamma)$。那么 $\nu^*\varrho$的像是无挠的。

下文中，我们可以用 X替换 X，并用 $\nu^*\varrho$替换 ϱ，从而假设 $\mathrm{Im}(\varrho)$ 无挠。

步骤 *2.* 我们来寻找一个合适的 *Shafarevich* 映射模型。记 $H := \ker(\varrho)$，它是 $\pi_1(X)$ 的正规子群。我们应用 [Kol93, 推论 3.5 和注释 4.1.1]，得到存在一个正规拟射影簇 $\mathrm{Sh}^H(X)$ 以及一个占优有理映射 $\mathrm{sh}_X^H\colon X \dashrightarrow \mathrm{Sh}^H(X)$，使得

(i) 存在一个扎里斯基开集 $X^\circ \subset X$，它与 $\mathrm{sh}_X^H|_{X^\circ}$ 的不定点集不相交，并且 $\mathrm{sh}_X^H|_{X^\circ}$ 的纤维在 X 中是闭的；(ii) $\mathrm{sh}_X^H\colon X^\circ \to \mathrm{Sh}^H(X)$ 具有连通的一般纤维；(iii) 至多存在可数多个闭子簇 $Z_i \subsetneq X$，使得对于每个满足 $W \not\subset \cup Z_i$ 的闭子簇 $W \subset X$，像 $\varrho\big(\mathrm{Im}[\pi_1(W^{\mathrm{norm}}) \to \pi_1(X)]\big)$ 是有限的（因而是平凡的，因为由步骤1可知，ϱ 的像是无挠的），当且仅当 $\mathrm{sh}_X^H(W)$是一个点。

我们首先取一个奇点消解 $Y_1 \to \mathrm{Sh}^H(X)$，然后取一个来自光滑拟射影簇 X_1 的双有理真态射 $X_1 \to X$，以消解 $X \dashrightarrow Y_1$ 的不定性。于是诱导的支配态射 $f_1\colon X_1 \to Y_1$ 满足引理 2.3 的条件。

因此，有如下交换图：

$$\begin{array}{ccccc} X_1' & \xrightarrow{\mu} & X_1 & \xrightarrow{q} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f_1'} & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \vdots \\ Y_1' & \xrightarrow{\nu} & Y_1 & \longrightarrow & \mathrm{Sh}^H(X) \end{array}$$

其中

(a) μ 是真双有理态射；(b) ν 是双有理态射（不一定是真态射）；(c) f_1' 是支配态射。

此外，存在一个表示 $\tau\colon \pi_1(Y_{/1}) \to G(K)$，使得 $(f_{/1})^*\tau$ 与拉回 $\mu^*q^*\varrho$ 相等。

因此，至多存在可数多个闭子簇 $Z_i' \subsetneq X_1'$，使得对于每个满足以下条件的闭子簇 $Z \subset X_1'$

- $Z \not\subset \cup Z_i'$;
- $f_1'(Z)$ is not a point,

映射 $Z \to (q \circ \mu)(Z)$ 是真双有理的，并且 $\mathrm{sh}_X^H((q \circ \mu)(Z))$ 不是一个点。记作 $\widetilde{Z} := (q \circ \mu)(Z)$。由条目 (iii)，$\varrho(\mathrm{Im}[\pi_1(\widetilde{Z}^{\mathrm{norm}}) \to \pi_1(X)])$ 是无限集。由下文的引理 1.6，$\pi_1(Z^{\mathrm{norm}}) \to \pi_1(\widetilde{Z}^{\mathrm{norm}})$ 是满射。因此，$(q \circ \mu)^*\varrho(\mathrm{Im}[\pi_1(Z^{\mathrm{norm}}) \to \pi_1(X_1'))])$ 是无限集。

步骤 *3.* 我们验证 τ 是大，并得到所需的图表。设 $X := X_1', Y := Y_{/1}$ 且 $f := f_{/1}$.~为简化记号，以下用同一个字母 ϱ 表示拉回 $\varrho\colon \pi_1(X) \to G(K)$。~因此 $\varrho = f^*\tau$。回顾步骤 2，至多存在可数多个闭子簇 $Z_i' \subsetneq X$~，使得对于每个满足 $Z \not\subset \cup Z_i'$ 且 $f(Z)$ 不是一点的闭子簇 $Z \subset X$，像 $\varrho(\mathrm{Im}[\pi_1(Z^{\mathrm{norm}}) \to \pi_1(\widetilde{X}))])$ 都是无限集。

~由于 $f\colon X \to Y$ 是支配且具有连通的一般纤维，对于一个包含非常一般点的子簇 $W \subset Y$，存在 $f^{-1}(W)$ 的一个不可约分支 Z，它支配 W 和 $Z \not\subset \cup Z_i'$。因此 $\tau(\mathrm{Im}[\pi_1(Z^{\mathrm{norm}}) \to \pi_1(Y)]) = \varrho(\mathrm{Im}[\pi_1(Z^{\mathrm{norm}}) \to \pi_1(X)])$ 是无限集。由于态射 $\pi_1(Z^{\mathrm{norm}}) \to \pi_1(Y)$ 经过 $\pi_1(W^{\mathrm{norm}}) \to \pi_1(Y)$ 分解，可知 $\tau(\mathrm{Im}[\pi_1(W^{\mathrm{norm}}) \to \pi_1(Y)])$ 是无限集。因此 τ 是大。□

由定理 A 推导推论 B。——利用命题 2.5，推导是直接的。事实上，对于推论 B 的陈述中给定的扎里斯基稠密表示 $\varrho\colon \pi_1(X) \to G(\mathbb{C})$，我们应用命题 2.5 得到以下对象：一个有限 étale 覆盖 $\nu\colon X \to X$，一个双有理且真态射 $\mu\colon X \to X$，一个具有连通的一般纤维的支配态射 $f\colon X \to Y$，以及一个大表示 $\tau\colon \pi_1(Y) \to G(\mathbb{C})$，满足 $f^*\tau = (\nu \circ \mu)^*\varrho$。由于 ϱ 是扎里斯基稠密的，性质 $f^*\tau = (\nu \circ \mu)^*\varrho$ 导出 τ 也是扎里斯基稠密的。由于 G 是半单的，我们可以对 $\tau\colon \pi_1(Y) \to G(\mathbb{C})$ 应用定理 A，从而得到 Y 是强对数一般型的，即 $\mathrm{Sp}^{\mathrm{alg}}(Y) \subsetneq Y$，并且是伪皮卡德（因而也是 Brody）双曲的。此外，根据我们约定 G 是非平凡的，有 $\dim Y > 0$。结合弱特殊的定义，这说明 X 不是弱特殊的。此外，X 不可能包含一条扎里斯基稠密整曲线。这是因为，~在 X 中存在这样一条曲线，将在 X 中诱导出一条曲线，进而在 Y 中也诱导出一条曲线，这与 Y 是伪布罗迪双曲的事实相矛盾。□

注 ***2.6***。——在 [DY25], 中，第二和第三作者将命题 2.5 推广到了域 K 具有正特征的情形。主要困难在于，塞尔伯格关于特征零下有限生成线性群具有虚无挠性的定理在正特征下并不成立。

3. 非阿基米德情形下的非阿贝尔霍奇理论

本节中，我们证明定理 E。我们的论证依赖于 [BDDM22, DM26] 中的两个关键结果：

– 存在一个 ϱ-等变调和映射 u： $X \to \Delta(G)$，从 X 的万有覆盖映射到 G 的 Bruhat-Tits 建筑 $\Delta(G)$，其在无穷远处的能量增长为对数级；– 通过此调和映射 u，在 X 上构造对数对称微分形式。

当 X 紧致时，定理 E 已由 Katzarkov [Kat97], Zuo [Zuo96], 和 Eyssidieux[Eys04]证明。在非紧致情形下，会出现若干微妙且技术上复杂的问题，因此我们在定理 E 的证明中尽可能提供详尽的细节。

出于独立的研究兴趣，并考虑到潜在的进一步应用，我们先在 § 3.1 中介绍一种初步的、更一般的谱覆盖构造。这些构造对于下一节定理 F 的证明至关重要。

3.1. 谱覆盖构造的初步介绍。 — 设 X 是一个拟射影簇。设 E 是 X 上的代数局部自由层。我们考虑一个分次环 $B_{X,\ \mathcal{E}} = \bigoplus_{i\geq 0}\Gamma(X,\ \mathrm{Sym}^i \mathrm{E})$ 以及分次环延拓 $B_{X,\ \mathcal{E}}[T] = B_{X,\ \mathcal{E}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[T]$，它带有自然分次，其中 T 的权为一。我们考虑如下形式的一个齐次元素

$$P(T) = T^n + \sigma_1 T^{n-1} + \cdots + \sigma_n \in B_{X,\mathcal{E}}[T] \tag{3.0.1}$$

其中 $\sigma_i \in \Gamma(X,\ \mathrm{Sym}^i \mathrm{E})$。设 $U \subset X$ 是一个非空开子集（在复拓扑中）。如果存在全纯截面 $\eta_1,\ \ldots\ldots,\ \eta_n \in \Gamma(U,\ \mathrm{E}^{\mathrm{an}}|_U)$，使得 $P(T)$ 在 U 上分裂，我们就称之为

$$P(T) = (T + \eta_1) \cdots (T + \eta_n)$$

在环 $B_{U,\ \mathcal{E}^{\mathrm{an}}|_U}[T]$ 中成立，其中 $B_{U,\ \mathcal{E}^{\mathrm{an}}|_U} = \bigoplus_{i\geq 0}\Gamma(U,\ \mathrm{Sym}^i \mathrm{E}^{\mathrm{an}}|_U)$。设 $\varphi\colon\ X' \to X$ 是来自另一个拟射影簇的态射。于是我们将 $\varphi^* P(T)$ 定义为

$$\varphi^* P(T) = T^n + (\varphi^*\sigma_1) T^{\ell-1} + \cdots + (\varphi^*\sigma_n),$$

其中 $\varphi^*\sigma_i \in \Gamma(X',\ \mathrm{Sym}^i(\varphi^*\mathrm{E}))$ 是 σ_i 的拉回。于是 $\varphi^* P(T) \in B_{X',\ \varphi^*\mathcal{E}}[T]$，其中 $B_{X',\ \varphi^*\mathcal{E}} = \bigoplus_{i\geq 0}\Gamma(X',\ \mathrm{Sym}^i(\varphi^*\mathrm{E}))$。

命题 ***3.1.*** — 设 X 是一个光滑拟射影簇。设 $\mathcal{E}$ 是 X 上的代数局部自由层。设 $P(T)$ 是如 (3.0.1) 中所给的 n 次齐次多项式。假设存在一个非空开子集 $U \subset X$，使得 $P(T)$ 在 U 上分裂。那么存在一个有限伽罗瓦覆盖 $\pi\colon\ \Sigma \to X$，它来自一个拟射影正规簇 Σ，并满足以下条件。

(i) $\pi^* P(T)$ 在 Σ 上分裂，即存在 $\eta_1, \ldots, \eta_n \in \Gamma(\Sigma, \pi^*\mathcal{E})$，使得

$$\pi^* P(T) = (T + \eta_1) \cdots (T + \eta_n).$$

(ii) 子集 $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\} \subset \Gamma(\Sigma, \pi^*\mathcal{E})$ 在自同构群(Σ/X) 对 $\Gamma(\Sigma, \pi^*\mathcal{E})$ 的自然作用下保持不变，并且自同构群(Σ/X) 在该子集上诱导的作用是忠实的。

(iii) 若 $\varphi\colon\ Y \to X$ 是一个来自拟射影正规簇 Y 的支配态射，且 $\varphi^* P(T)$ 在 Y 上分裂，则态射 $Y \to X$ 可分解为 $Y \to \Sigma \xrightarrow{\pi} X$。

(iv) 伽罗瓦态射 $\pi\colon\ \Sigma \to X$ 在以下范围之外是 *étale*

$$R := \{z \in \Sigma \mid \exists\, i \neq j \text{ such that } \eta_i \neq \eta_j \text{ and } (\eta_i - \eta_j)(z) = 0\},$$

并且它满足 $\pi^{-1}(\pi(R)) = R$。

我们指出，断言 (iii) 唯一确定覆盖 $\Sigma \to X$。在证明此命题之前，我们先给出三个关于系数属于不同域的多项式的预备引理。主要研究对象是变量 $T, x_1, \ldots, x_l$ 中的齐次多项式 f，其形式如下：

$$f = T^n + a_1 T^{n-1} + \cdots + a_n, \tag{3.1.1}$$

其中每个 a_i 都是 $x_1, \ldots, x_l$ 中次数为 i 的齐次多项式。我们关注如下形式的完全分解为线性形式：

$$f = (T + g_1) \cdots (T + g_n), \tag{3.1.2}$$

其中每个 g_j 的形式为

$$g_j = c_{j1} x_1 + \cdots + c_{jl} x_l. \tag{3.1.3}$$

我们称 f 在域 L 上完全分解为线性形式，若对所有 c_{ji} 都有 $c_{ji} \in L$。

引理 ***3.2***。——设 F 是一个非阿基米德赋值域， R 是 F 的赋值环。设 $f \in F[T, x_1, \ldots\ldots, x_l]$ 是次数为 n 的齐次多项式，如 (3.1.1) 所示。假设 f 在 F 上完全分解为线性形式，如 (3.1.2) 所示。若 $f \in R[T, x_1, \ldots\ldots, x_l]$，则对所有 $j = 1, \ldots\ldots, n$，都有 $g_j \in R[x_1, \ldots\ldots, x_l]$。

证明. — 我们将 $|\cdot|$ 记作 F 上的范数，将 $||\cdot||$ 记作多项式环 $F[x_1, \ldots, x_l]$ 上的高斯范数。对于 (3.1.3) 中的每个 g_j，通过改变指标 j，我们可以假设 $||g_1|| \geq ||g_2|| \geq \cdots \geq ||g_n||$。只需证明 $||g_1|| \leq 1$。

反设 $||g_1|| > 1$。令 m 为满足 $||g_m|| > 1$ 的最大指标。由于高斯范数是乘法范数，对于任意不同于 $j_i = i$ 的序列 $1 \leq j_1 < \ldots < j_m \leq n$，都有 $||g_1 \cdots g_m|| > ||g_{j_1} \cdots g_{j_m}||$。因此，高斯范数的强三角不等式推出 $||a_m|| = ||g_1|| \cdots ||g_m|| > 1$。这与假设 $a_m \in R[x_1, \ldots, x_l]$ 矛盾。因此，对于所有 $j = 1, \ldots, n$，都有 $||g_j|| \leq 1$，这意味着 $g_j \in R[x_1, \ldots, x_l]$。□

引理 ***3.3.***— 设 K 是一个域，且 L 是 K 的一个域扩张。设 $f \in K[T, x_1, \ldots, x_l]$ 是一个次数为 n 的齐次多项式，如 (3.1.1) 中所示。假设 f 在 L 上完全分解为线性形式，如 (3.1.2) 中所示。那么 f 在域 $K \cap L$ 上完全分解为线性形式。特别地， f 在 K 上完全分解为线性形式。

证明. — 我们可以假设 L 是由 (3.1.3) 中的 c_{ji} 在 K 上生成的。反设 L 在 K 上是超越的。不失一般性，通过对 K 作有限延拓，我们可以假设 $\mathrm{tr.deg}_K L = 1$。设 $c_{ji} \in L$ 在 K 上是超越的。于是我们可以在 L 上构造一个离散赋值，它在 K 上限制为平凡赋值，且满足 $|c_{ji}| > 1$。这与引理 3.2 矛盾。因此， L 在 K 上是代数的。□

引理 ***3.4.*** — 设 F 是一个完备非阿基米德离散赋值域， $R \subset F$ 是 F 的赋值环。假设 F 的剩余域具有特征零。设 $f \in R[T, x_1, \ldots\ldots、 x_l]$ 是次数为 n 的齐次多项式，如 (3.1.1) 所示，并且 f 在 F 上完全分解为线性形式，如 (3.1.2) 所示。假设不同的 g_i 和 g_j 在约化映射下于 $k[x_1$, 中有不同的约化 $g_i \neq g_j$，其中 k 是非阿基米德赋值域 F 的剩余域。那么， f 在 F^{ur} 上完全分解为线性形式，其中 $F^{ur} \subset F$ 是 F 的最大非分歧扩张。

证明. — 首先假设 f 在 $F[T, x_1, \ldots\ldots、 x_l]$ 中不可约。在这种情况下，对于 $i \neq j$，有 $g_i \neq g_j$。因此，对于 $i \neq j$，有 $g_i \neq g_j$。令 $\sigma \in$ = 伽罗瓦群(F/F^{ur})。那么 $\sigma(g_i) \in \{g_1、 \ldots\ldots、 g_n\}$，并且约化保持不变：由于 σ 在 k 上平凡作用，故 $\sigma(\overline{g_i}) = \overline{g_i}$。因此 $\sigma(g_i) = g_i$。于是，$g_i \in F^{ur}[x_1, \ldots\ldots、 x_l]$，这就证明了当 f 不可约时该引理成立。

对于一般情形，令 $f = f_1^{\nu_1} \cdots f_k^{\nu_k}$ 为 $F[T, x_1, \ldots, x_l]$ 中 f 的不可约分解。根据不可约情形的论证，每个因子 f_i 都能在 F^{ur} 上完全分解为线性形式。证毕。□

现在回到几何情形。设 X 是一个拟射影簇， E 是 X 上的代数局部自由层。假设给定一个多项式 $P(T)$，如 (3.0.1) 所示。设 K 是 X 的有理函数域，并设 $\xi : \mathrm{Spec}(K) \to X$ 为概形泛点。令 $E_K = \Gamma(\mathrm{Spec}(K), \xi^* \mathrm{E})$，它是域 K 上的一个向量空间。若取一组基 $x_1, \ldots, x_l \in E_K$，则 $B_{K, \xi^* \mathcal{E}} = \bigoplus_{i \geq 0} \mathrm{Sym}^i E_K$ 可识别为 K 上的多项式环 $K[x_1, \ldots, x_l]$，其中 $l = \mathrm{rank}(\mathrm{E})$。我们有拉回 $\xi^* P(T) \in B_{K, \xi^* \mathcal{E}}[T]$，它是一个次数为 n 的齐次多项式。

现在，如果 $P(T)$ 在 X 上分裂，那么 $\xi^* P(T) \in K[T, x_1, \ldots, x_l]$ 在 K 上完全分解为线性形式。下面的引理表明，反过来结论也成立。

引理 ***3.5.*** — 设 X 是一个拟射影正规簇。设 $\mathcal{E}$ 是 X 上的代数局部自由层。设 $P(T) = \sum_i \sigma_i T^i$ 是式 (3.0.1) 中给出的多项式。假设 $\xi^* P(T)$ 在 K 上完全分解为线性形式，其中 ξ : 谱 $(K) \to X$ 是 X 的概形泛点。那么 $P(T)$ 在 X 上分裂。

证明. — 由于 $\xi^* P(T)$ 在 K 上完全分解为线性形式，存在 $\eta_1, \ldots, \eta_n \in E_K$，使得

$$\xi^* P(T) = (T + \eta_1) \cdots (T + \eta_n) \in B_{K, \xi^* \mathcal{E}}[T].$$

每个 η_i 都是 E 的有理截面。令 $U \subset X$ 为所有 η_i 均为全纯截面的最大扎里斯基开集。我们旨在证明 $X \setminus U$ 不包含任何除子。为此，令 $D \subset X$

为任意除子。令 ζ 为 D的泛点，并令 $R = \mathrm{O}_{X,\,\zeta}$ 为相应的局部环。由于 X 是正规的， R 是有理函数域 K的离散赋值环。令 E_ζ 为 ζ处的茎，它是一个自由的 R-模。因此，我们可以写成 $\mathrm{E}_\zeta = Rx_1 + \cdots + Rx_l$，使得

$$\bigoplus_{i\geq 0} \mathrm{Sym}^i \mathcal{E}_\zeta = R[x_1, \ldots, x_l]. \tag{3.5.1}$$

这给出了如下恒等式 $B_{K,\ \xi^*\mathcal{E}} = K[x_1, \ldots\ldots,\ x_l]$。由于所有 $\xi^*\sigma_i \in K[x_1, \ldots\ldots,\ x_l]$都包含在 $R[x_1, \ldots\ldots,\ x_l]$中，引理 3.2 蕴含每个 η_i也都包含在 $R[x_1, \ldots\ldots,\ x_l]$中。这意味着 η_i 在 ζ处是正则的，即 $\zeta \in U$。由于这对每个除子 D都成立，我们得出 $X \setminus U$不包含任何除子。因此， $X \setminus U$ 在 X 中的余维大于一。

现在，对于每个使 E 平凡的 Zariski 开集 $\mathrm{Spec}(A) \subset X$，注意到 η_i 是 $\mathrm{Spec}(A) \setminus U$ 上的局部自由层 $\mathrm{E}|_{\mathrm{Spec}(A)}$的一个截面。由于 A是正规的，这样的截面可以延拓到 $\mathrm{Spec}(A)$ 上（参见 [GW10，定理 6.45]）。这表明 η_i 是 X 上的 E 的一个截面。由于自然环同态 $B_{X,\ \mathcal{E}}[T] \to B_{K,\ \xi^*\mathcal{E}}[T]$是单射的，我们推出 $P(T) = \prod_{i=1}^n (T + \eta_i)$ 在 $B_{X,\ \mathcal{E}}[T]$中。□

命题 3.1 的证明。— 我们首先构造 $\pi\colon\ \Sigma \to X$。必要时缩小 U 后，可以假设 U 包含在某个仿射开子集中，且 E 在该开子集上是自由层。令 K 为 X 的有理函数域，令 L 为 U上所有亚纯函数组成的域。于是有 $K \subset L$。令 $\xi\colon\ \mathrm{Spec}(K) \to X$ 为 X的概形泛点。由于 $P(T)$ 在 U 上分裂，齐次多项式 $\xi^*P(T) \in B_{K,\xi^*\mathrm{E}}[T]$在域扩张 L上完全分解为线性形式。因此，由引理 3.3， $\xi^*P(T)$ 在K上完全分解为线性形式。令 $F \subset K$ 为由分解中出现的线性形式的系数在 K 上生成的域。于是， F 是 K的有限伽罗瓦扩张，在该扩张上， $\xi^*P(T)$ 如 (3.1.2) 所示完全分解为线性形式。沿用 (3.1.2) 中的记号，这些线性形式 g_1、……、 g_n 在伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(F/K)$ 的伽罗瓦作用下保持不变，而 $\mathrm{Gal}(F/K)$ 在集合 $\{g_1$、……、 $g_n\}$ 上诱导的作用是忠实的。令 $\pi\colon\ \Sigma \to X$为 X在 F中的正规化。则 Σ是正规的，且$\pi\colon\ \Sigma \to X$是有限伽罗瓦扩张，并且 $\mathrm{Aut}(\Sigma/X) = \mathrm{Gal}(F/K)$。我们考察 $\pi^*P(T) \in B_{\Sigma,\pi^*\mathrm{E}}[T]$。令$\tau\colon\ \mathrm{Spec}(F) \to \Sigma$ 为 Σ的概形泛点。由于 $\tau^*\pi^*P(T)$ 在 F上完全分解为线性形式，引理 3.5 给出截面 $\eta_i \in \Gamma(\Sigma, \pi^*\mathrm{E})$，使得 $\pi^*P(T) = \prod_{i=1}^n (T + \eta_i)$。这就是 Σ 和 η_1、……、 η_n 的构造。根据构造，集合 $\{\eta_1$、……、 $\eta_n\}$ 在 $\mathrm{Aut}(\Sigma/X)$ 的作用下保持不变，而 $\mathrm{Aut}(\Sigma/X)$ 在该集合上诱导的作用是忠实的。

接下来，假设 $\varphi\colon Y \to X$ 是一个从正规簇出发的支配态射，且 $\varphi^*\mathrm{E}$ 在 Y 上分裂。于是其有理函数域 F' 是 K 的域扩张，并且 $\xi^*P(T)$ 在 F' 上完全分解为线性形式。根据 F 的定义，我们有 $F \subset F' \cap K$ （参见引理 3.3）。特别地， $F \subset F'$。因此， $Y \to X$ 分解 $\Sigma \to X$。

设 $D \subset X$ 是一个不包含在 $\pi(R)$ 中的素因子。取 D 的概形泛点 ζ，并证明 $\pi\colon \Sigma \to X$ 在 ζ 上非分歧。设 D' 是包含在 π^*D 中的素因子，并设 D' 的概形泛点为 ζ'。令 $\mathrm{O}_{X,\zeta} \subset K$ 为与 ζ 相关的局部环，$\mathrm{O}_{\Sigma,\zeta'} \subset F$ 为与 D' 相关的局部环。它们都是离散赋值环。我们对 F 上的赋值作规范化，使其延拓 K 上的赋值。令 $\hat{}_K \subset \hat{}_F$ 为相应的完备化。由 $D \not\subset \pi(R)$，可得 $\zeta' \in \Sigma \setminus R$。因此，在 $\pi^*\mathrm{E}_{\zeta'} \to \pi^*\mathrm{E}_{\zeta'} \otimes k$ 下，不同的 η_i 和 η_j 有不同的约化，其中 k 是 $\mathrm{O}_{\Sigma,\zeta'}$ 的剩余域。通过考虑 (3.5.1) 中的识别，我们将引理 3.4 应用于 $\xi^*P(T)$，并推出 $\hat{}_F \subset \hat{}K^{ur}$。这表明局部同态 $\pi^*\colon \mathrm{O}_{X,\zeta} \to \mathrm{O}_{\Sigma,\zeta'}$ 是非分歧的。因此， $\pi\colon \Sigma \to X$ 在 X 上所有不包含于 $\pi(R)$ 中的素因子的泛点处均非分歧。因此，根据分歧轨迹的纯性（Sta22，标签 0BMB）， [ ], $\pi\colon$ $\Sigma \to X$ 在 $X \setminus \pi(R)$ 上是 étale 的。由于集合 $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ 在 $\mathrm{Aut}(\Sigma/X)$ 的作用下不变，我们有 $\pi^{-1}(\pi(R)) = R$。因此， $\pi\colon \Sigma \to X$ 在 R 之外是 étale 的。□

注 ***3.6.*** — 我们指出，命题 3.1 中构造的覆盖满足以下函子性，这推广了命题 3.1.(iii)，尽管本文不会用到这一点。设X、E 和 $P(T)$ 与命题 3.1 中相同，特别是 $P(T)$ 在某个非空开子集 $U \subset X$上分裂。于是我们有覆盖 $\pi\colon\ \Sigma \to X$ 以及命题 3.1 中的扎里斯基闭子集 $R \subset \Sigma$。设 $\varphi\colon\ Y \to X$ 是从光滑拟射影簇 Y出发的态射，且 $\varphi(Y) \not\subset \pi(R)$。那么 $\varphi^*P(T)$ 在 $Y \setminus \pi(R)$ 的每个单连通域上分裂。因此，应用命题 3.1，我们可以构造覆盖 $\pi'\colon\ \Sigma' \to Y$，

Claim.3.7. *Th*映射 $\varphi\circ\pi' : \Sigma' \to X$ *f*因子为 $\Sigma' \to \Sigma \to X$

. 证明. — 我们首先假设 $\varphi\colon Y \to X$是一个局部闭浸入，且 $\varphi(Y)\cap\pi(R) = \emptyset$。令$Y'$为 $Y \times_X \Sigma$的一个不可约分支。于是由命题 3.1，诱导映射 $p\colon Y' \to Y$是有限 étale 且伽罗瓦的。由于存在自然的局部闭浸入 $\varphi' : Y' \to \Sigma$，拉回 $\varphi^*P(T)$ 在 Y'上分裂为

$$p^*\varphi^*P(T) = (T + (\varphi')^*\eta_1)\cdots(T + (\varphi')^*\eta_n).$$

因此 $p\colon Y' \to Y$可分解为 $Y' \to \Sigma' \to Y$（参见命题 3.1.(iii)）。由于 $\varphi^*P(T)$ 在Σ'上分裂，$\mathrm{Aut}(Y'/\Sigma') \subset \mathrm{Aut}(Y'/Y)$对集合 $\{(\varphi')^*\eta_1, \ldots, (\varphi')^*\eta_n\}$ 的作用是平凡的。另一方面，条件 $\varphi'(Y') \not\subset R$确保了自然映射 $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\} \to \{(\varphi')^*\eta_1, \ldots, (\varphi')^*\eta_n\}$ 的单射性，这意味着 $\mathrm{Aut}(Y'/Y) \subset \mathrm{Aut}(\Sigma/X)$ 忠实地作用于集合 $\{(\varphi')^*\eta_1, \ldots, (\varphi')^*\eta_n\}$（参见命题 3.1.(ii)）。因此，$\mathrm{Aut}(Y'/\Sigma')$ 是平凡的，由伽罗瓦理论可知 $Y' = \Sigma'$。这在假设 $\varphi\colon Y \to X$是一个局部闭浸入，且 $\varphi(Y)\cap\pi(R) = \emptyset$ 的条件下证明了我们的主张。

接下来考虑一般情形。我们可以取一个非空 Zariski 开子集 $W \subset Y$，使得 $\varphi|_W : W \to X$ 分解为 $W \to Z \to X$，其中 $W \to Z$ 是支配的，$Z \to X$ 是局部闭浸入，且 $Z \cap \pi(R) = \emptyset$。由上述论证可得一个有限 étale 伽罗瓦覆盖 $Z' \to Z$。由命题 3.1.(iii)，态射 $W \to Z$ 诱导一个态射$(\pi')^{-1}(W) \to Z'$；将其与 $Z' \to \Sigma$复合，得到一个态射$(\pi')^{-1}(W) \to \Sigma$。令$T \subset Y \times_X \Sigma$ 为自然映射$(\pi')^{-1}(W) \to Y \times_X \Sigma$的 Zariski 闭包。于是得到一个有限满射映射 $T \to Y$。由于 Σ'是正规的，映射$(\pi')^{-1}(W) \to T$可延拓至 $\Sigma' \to T$。因此，将 $\Sigma' \to T$ 与投影映射$T \to \Sigma$复合，便得到所需的映射 $\Sigma' \to \Sigma$ 。□

另一方面，若我们使用映射 $\varphi^*\mathrm{E} \to \mathrm{E}'$ 来构造覆盖 $\Sigma'' \to Y$，而不是 Σ'，则函子性通常会失效；以下例子对此作了说明。

例 3.8. — 令 $X =$ 谱 $\mathbb{C}[x, y]$，$Y =$ 谱 $\mathbb{C}[y]$，且 $\mathrm{E} = \Omega_X$。考虑由 $x = 0$ 定义的闭浸入$f\colon Y \to X$。取多项式 $P(T) = T^2 + 2dyT + (dy^2 - ydx^2)$，使得 $P(T) = (T + dy - \sqrt{y}dx)(T + dy + \sqrt{y}dx)$。相应的覆盖由 $\Sigma =$ 谱 $\mathbb{C}[x, \sqrt{y}]$ 给出。于是$\pi(R) = (y = 0)$，故 $Y \not\subset \pi(R)$。我们用 $[f^*P(T)]$ 表示将态射 $f^*\Omega_X \to \Omega_Y$ 作用于多项式 $f^*P(T)$ 的系数后得到的多项式。于是 $[f^*P(T)] = T^2 + 2dyT + dy^2$。相应的覆盖 Σ'' 不过就是 $Y =$ 谱$\mathbb{C}[y]$。因此，我们没有函子提升 $f' : \Sigma'' \to \Sigma$。

3.2. 几乎单代数群子群的某个有限性判据。 — 设 K 是一个非阿基米德局部域，G 是定义在 K 上的约化群。可以为 G 配备其 *Bruhat-Tits* 建筑 $\Delta(G)$；这是一个由与 $\mathbb{R}^N$ 等距的仿射空间粘合而成的单纯复形（称为公寓），其中 $N = \mathrm{rk}_K(G)$。它是一个 CAT(0) 空间。更多详情请参阅 [AB08、Rou23] 。

$G(K)$ 在 $\Delta(G)$ 上有一个自然的连续作用，该作用在公寓上传递，并且根据下文的引理 3.10，$\Delta(G)$ 中任意一点的稳定子都是 $G(K)$ 的有界子群。

我们先给出以下定义。

定义 ***3.9*** （**有界子群**）。— 设 G 是定义在非阿基米德局部域 K 上的约化代数群。固定一个嵌入 $G \to \mathrm{GL}_N$。若 $G(K)$ 中子群 H 的元素在 $\mathrm{GL}_N(K)$ 中的矩阵元素绝对值存在统一上界，则称 H 有界；否则称其为 无界。

引理 ***3.10*** （ **[Rou09，推论 7。2]**）。——设 G 是定义在非阿基米德局部域 K上的约化代数群。设 H 是 $G(K)$的子群。那么以下性质等价。

– H 是有界的。– H 包含于 $G(K)$的一个紧子群中。– H 固定了 $\Delta(G)$中的一个点。

表示 $\varrho\colon \pi_1(X) \to G(K)$ 是（有）界的，如果其像 $\varrho(\pi_1(X))$ 是 $G(K)$ 的一个（有）界子群。

T以下有限性判据将用于证明定理 4.1(ii)，这是基石 e of T定理 F。

引理 ***3.11***。—设 G 是定义在非阿基米德局部域K上的几乎单代数群。设 $\Gamma \subset G(K)$ 是一个有限生成子群，使得

– 它是 G中的扎里斯基稠密子群，– 它不包含于 $G(K)$

的任何有界子群中。

设 Υ 是 Γ 的一个有界正规子群。那么 Υ必为有限群。

证明。— 为证明该引理，我们不妨假设 G 是连通的。由于 $G(K)$在 $\Delta(G)$上传递作用，我们将 Υ的不动点集记为 $R \subset \Delta(G)$。由于 Υ 有界， R 非空。此外， R 是闭且凸的。我们将证明 R 还在 Γ下不变，即对于 $\gamma \in \Gamma$， $\gamma R \subset R$ 。

对于每个 $u \in \Upsilon$ 和 $\gamma \in \Gamma$，都有 $\gamma^{-1}u\gamma \in \Upsilon$，因为 $\Upsilon \triangleleft \Gamma$。于是，对于每个 $x \in R$，都有 $u(\gamma x) = \gamma((\gamma^{-1}u\gamma)x) = \gamma x$。因此， R 在 Γ 下保持不变。

如果 R 是有界的，根据布鲁哈-蒂茨不动点定理（参见 [AB08，定理 11.23]）， Γ 在 R 中固定一个点。于是，根据引理 3.10， Γ 是 $G(K)$ 的有界子群，这与我们的假设相矛盾。因此， R 是无界的。

考虑建筑 $\Delta(G)$ 的紧化 $\overline{\Delta(G)}$，即添加无穷远点。在 $\Delta(G)$ 中，一个无穷远点是 $\Delta(G)$ 中测地射线的等价类（参见 [AB08，§11.8.1]）。记 $\partial\Delta(G) := \overline{\Delta(G)} - \Delta(G)$。注意， $G(K)$ 在 $\overline{\Delta(G)}$ 上的作用在 $\Delta(G)$ 上诱导出一个自然作用。令 $\widetilde{R} = \Delta(G)^{\Upsilon}$ 为 Υ 在紧化 $\overline{\Delta(G)}$ 中的不动点集。则 $\widetilde{R}$ 是 $\widetilde{\ }$闭凸的。如果 $R \cap \partial\Delta(G)$ 为空，则 $\partial\Delta(G)$ 被若干个不与 R 相交的锥覆盖（由于 $\partial\Delta(G)$ 的紧性，这些锥的数量有限）。这些锥定义了 $\Delta(G)$ 上的拓扑（锥拓扑）。令 O 为 $\Delta(G)$ 中的一个原点，这样的锥是集合 $C(y, \epsilon)$，由 $\Delta(G)$ 中所有满足以下条件的 ξ 组成：线段（或测地射线） $[O, \xi]$ 包含一个点 x，该点到某个固定点 $y \in \Delta(G)$ 的距离小于 ϵ。为了得到该拓扑的一个基，还必须将 Δ 中的开球作为有界的 $\widetilde{\ }$ 锥来考虑。因此，如果 $R \cap \partial\Delta(G)$ 为空，则 $\partial\Delta(G)$ 包含在有限个锥 $C(y, 1/n)$ 的并集中，其中对于某个（很大的） n，有 $\widetilde{d}(O, y) = n$，且这些锥不与 R 相交。因此， $R = R$ 位于球 $\widetilde{B}(O, n)$ 中。这与 R 的无界性相矛盾。因此， $R \cap \partial\Delta(G) \neq \varnothing$。换言之， Υ 固定了一个无穷远点。于是， Υ 包含于 $P(K)$ 中，其中 $P \subset G$ 是 G 的一个真抛物子群。记 $H \subset G$ 为 Υ 在 G 中的扎里斯基闭包。于是 $H \subsetneq G$。由于 $\Upsilon \triangleleft \Gamma$ 和 Γ 在 G 中是 Zariski 稠密的，故 H 是 G 的正规子群。由于假设 G 几乎单，我们得到 H，从而 Υ 是有限的。这证明了该引理。□

我们提到，引理 3.11 也由 [Bru22] 通过类似论证得到。

3.3. 到欧氏建筑的调和映射。— $s_\varrho\colon X \to S_\varrho$定理 E 的构造基于一个关于映入 Bruhat-Tits 建筑的 ϱ-等变多重调和映射的存在性定理。

定理 ***3.12*** **([BDDM22,DM26])**。— 设 X 是一个光滑拟射影簇， G 是定义在非阿基米德局部域 K 上的约化群。设 $\Delta(G)$ 为 G 的 ***Bruhat-Tits*** $\widetilde{\ }$建筑。记 $\pi_X\colon X \to X$为万有覆盖映射。若 $\varrho\colon \pi_1(X) \to G(K)$是一个扎里斯基稠密表示，则以下陈述成立：

(i) 存在一个 ϱ-等变多重调和映射 $u\colon X \to \Delta(G)$，其具有对数能量增长。(ii) u 关于 X 上的任意 ***Kähler***度量都是调和的。(iii) 设 $f\colon Y \to X$ 是从光滑拟射影簇 Y出发的一个态射。记 $\widetilde{f}\colon Y \to X$ 为 f 在 Y 与 X 的万有覆盖之间的提升。则 $f^*\varrho$-等变 $\widetilde{\ }$映射 $u \circ f\colon Y \to \Delta(G)$ 是多重调和的，并具有对数能量增长。

注 ***3.13***。— 关于定理中出现的定义，详情请参阅 [BDDM22]或 [DM26 的第 2] 节。上述定理由 Brotbek、Daskalopoulos、Mese 和第二作者在 G 为半单时于 [BDDM22 的定理 A] 中证明。随后，第二作者和 Mese 以 [BDDM22], 为基础，在 [DM26 的定理 A] 中将该结果推广到一般约化情形。

在一般情形下，（扩展的）Bruhat–Tits 建筑 $\Delta(G)$ 是导出群 DG （即半单群）的 Bruhat– Tits 建筑 $\Delta(\mathrm{D}G)$ 与一个实欧几里得空间$V := \mathbb{R}^N$ 的乘积，其中 $G(K)$ 通过平移作用（参见 [KP23]）。$\Delta(G)$ 中任一点的稳定子都是 $G(K)$的一个开且有界子群。在 [DM26] 中构造的对数能量多重调和映射 u 随后分解为

$$(u_1, u_2) \colon \widetilde{X} \longrightarrow \Delta(\mathcal{D}G) \times V,$$

其中，u_1 是 ϱ_1-等变多重调和映射，其对数能量由 [BDDM22，定理 A], 构造，其中 ϱ_1 是 ϱ 与自然投影 $G \to \mathrm{D}（G）$ 的复合映射。

在 [DM26], 中，分量 u_2 是通过对 X 上的适当全局对数 1-形式$\eta_1, \ldots, \eta_\ell$ 进行积分定义的，这些形式沿边界具有纯虚留数。

~在此记号下，回顾一下，如果 $x \in X$ 存在一个开邻域 U，使得对于某个公寓 A有 $u（U） \subset A$，则称其为 u 的正则点。如果点 $x \in X$ 的某个（等价地，任意一个）在 X 中的原像是正则的，则称点 $x \in X$ 为~正则点。X中 u 的正则点构成一个非空开子集 R（u）；记其补集为 S（u）。根据 Gromov-Schoen 的深刻定理，S（u）具有较小的豪斯多夫维数。

定理 ***3.14*** **([GS92，定理 6。4])**。— $\mathcal{S}(u)$ 是 X 的一个闭子集，其豪斯多夫维数至多为$2\dim_{\mathbb{C}} X - 2$。□

另外还要提到，最近，第二作者和 Mese 在 [DM26] 中证明，S(u) 包含于 X 的一个真扎里斯基闭子集中，不过本文不会用到这一结果。

我们考虑一个 Kähler 流形 (M, ω) 上的多重调和映射 $u \colon M \to \Delta(G)$。我们回顾一下，能量密度 $|\nabla u|^2$ 在 [KS93] 中定义（另见 [BDDM22，第 2] 节），并且是 M 上的一个 L^1_{loc}-函数。由于目标空间是一个欧氏建筑，能量密度有比一般情形下映入非正曲率空间的调和映射更显式的表达式。事实上，对任意正则点 $x \in M$，根据定义，存在 x 的一个开邻域 Ω 和一个公寓 A，使得 $u(\Omega) \subset A$。固定一个等距变换 $i \colon A \to \mathbb{R}^N$，并记

$$i \circ u|_\Omega = (u_1, \ldots, u_N).$$

于是，$u|_\Omega$ 的能量密度与映入黎曼流形的调和映射的通常能量密度一致。特别地，对于任意 $x \in \Omega$，我们有

$$|\nabla u(x)|^2 = \sum_{i=1}^N |du_i(x)|^2_\omega = 2\sum_{i=1}^N |\partial u_i(x)|^2_\omega, \tag{3.14.1}$$

~其中第二个等号是因为 u 是多重调和的，因此对每个 i，都有 $\partial\partial u_i \equiv 0$。特别地，能量密度 $|\nabla u|^2$ 在 Ω上连续，因而在 R(u) 上也连续。我们指出，[DMW24，引理 4.27] 证明了能量密度可延拓为 M上的连续函数，不过这里我们不会用到这一事实。

引理 ***3.15.*** **—** 对于从 *Kähler* 流形(M, ω)到 $M \to \Delta(G)$ 的多重调和映射 u :，以下两个断言等价。

(1) 在 M上几乎处处成立 $|\nabla u|^2 = 0$。

(2) u 是常值映射。

证明. — 令 $V \subset M$ 为 u的所有正则点组成的集合。于是由 [GS92，定理 6.4]，$M \setminus V$是 M的闭子集，其豪斯多夫维数至多为 $2\dim_{\mathbb{C}} M - 2$。因此 V是连通的。由 (3.14.1)，$|\nabla u|^2$ 在 V上连续。因此，$|\nabla u|^2$ 几乎处处为零等价于 $|\nabla u|^2$在 V上处处为零。这意味着 u在 V上局部常值，故在 V 上为常值，因为 V 是连通的。由于 u 是局部利普希茨的，后一条件等价于 u 在 M上处处为常值。□

我们证明了一个关于调和映射的能量相对于边界值的连续性的结果。我们首先约定。

令 $P, Q \in \Delta(G)$，并令 $\gamma \colon [0, 1] \to \Delta(G)$ 表示从 P 到 Q 的唯一测地线。令

$$(1 - s)P + sQ := \gamma(s)$$

表示沿着 γ 从 P 到 Q 方向前进 s 比例处的点。

引理 ***3.16.*** — 设 $\mathbb{B}_r \subset \mathbb{R}^n$ 是以原点为中心、半径为 r 的欧几里得球，配备欧几里得度量，并记 $\mathbb{B} := \mathbb{B}_1$。设 $\Sigma = \partial\mathbb{B}$ 配备标准圆度量。假设 $n \geq 2$。考虑一族调和映射

$$u_t : \mathbb{B}_{1+\delta} \longrightarrow \Delta(G),$$

由 $t \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ 参数化，其中 $\delta > 0$ 是一个固定常值。假设存在常值 $C > 0$，使得对所有 $t \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$，限制映射 $u_t|_{\mathbb{B}}$ 是 C-利普希茨的，即

$$d\big(u_t(x), u_t(y)\big) \leq C\, d_{\mathbb{B}}(x, y) \quad \textit{for all } x, y \in \mathbb{B}. \tag{3.16.1}$$

记 $E(t) := E^{u_t}[\mathbb{B}]$ 为 u_t 在 $\mathbb{B}$ 上的能量，并记 $E_\Sigma(t)$ 为限制映射 $u_t|_\Sigma$ 的能量。假设函数

$$t \mapsto \int_\Sigma d^2(u_t, u_0)\, d\sigma$$

在 $t = 0$ 处连续，其中 $d\sigma$ 为圆测度。则函数

$$t \mapsto E(t)$$

在 $t = 0$ 处连续。这里 $d(-,-)$ 表示 $\Delta(G)$上的距离函数。

证明. — 根据 (3.16.1) 中 u_t 的一致利普希茨连续性，以及 [BDDM22，注 1.5], ， u_t 和 $u_t|_\Sigma$ 的能量密度满足

$$|\nabla u_t(x)|^2 \leq C \qquad \text{for all } x \in \mathbb{B} \text{ and } t \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$$
$$|\nabla (u_t|_\Sigma)(x)|^2 \leq C \qquad \text{for all } x \in \Sigma \text{ and } t \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0).$$

因此，存在一个常值 $K > 0$，使得

$$E(t) \leq K, \quad E_\Sigma(t) \leq K, \qquad \text{for all } t \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0). \tag{3.16.2}$$

对于任意 $\varrho \in (0,\ 1)$，我们定义微分同胚

$$\Phi : \mathbb{B}_{1-\rho} \to \mathbb{B}, \ \ x \mapsto \frac{x}{1-\rho}$$
$$\Psi_1 : \mathbb{B}\backslash\mathbb{B}_{1-\rho} \to \Sigma \times [0, \rho], \ \ x \mapsto \Big(\frac{x}{|x|}, 1 - |x|\Big)$$
$$\Psi_2 : \mathbb{B}\backslash\mathbb{B}_{1-\rho} \to \Sigma \times [0, \rho], \ \ x \mapsto \Big(\frac{x}{|x|}, |x| - 1 + \varrho\Big)$$

对于任意利普希茨映射 $f\colon \mathbb{B} \to \Delta(G)$，注意到 $f \circ \Phi$ 在 $\mathbb{B}$ 上的能量为

$$E^{f\circ\Phi}[\mathbb{B}_{1-\varrho}] = \int_{\mathbb{B}_{1-\varrho}} |\nabla(f \circ \Phi)|^2 d\mu = \int_{\mathbb{B}_{1-\varrho}} (1-\rho)^{n-2} \Phi^*(|\nabla f|^2 d\mu) \leq E^f[\mathbb{B}]. \tag{3.16.3}$$

这里 $d\mu$ 是欧几里得体积形式。

设 $f\colon \Sigma \times [0, \varrho] \longrightarrow \Delta(G)$ 是一个利普希茨映射。我们赋予 $\Sigma \times [0, \varrho]$ 乘积度量，即由 Σ 上的圆度量与区间上的标准欧几里得度量构成。我们有 (3.16.4)

$$\begin{aligned} E^{f\circ\Psi_i}[\mathbb{B}\backslash\mathbb{B}_{1-\varrho}] &:= \int_{\mathbb{B}\backslash\mathbb{B}_{1-\varrho}} |\nabla(f \circ \Psi_i)|^2 d\mu \\ &\leq \begin{cases} \int_{\Sigma\times[0,\varrho]} |\nabla f|^2 d\sigma dr =: E^f[\Sigma \times [0, \varrho]], & \text{if } n \geq 3 \\ (1-\varrho)^{-1} \int_{\Sigma\times[0,\varrho]} |\nabla f|^2 d\sigma dr = (1-\varrho)^{-1} E^f[\Sigma \times [0, \varrho]], & \text{if } n = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

因此，由 (3.16.2) 和 (3.16.4)，对于任意 $\varepsilon \in (0,\ 1)$，我们可以固定一个充分小的 $\varrho \in (0,\ 1)$，使得

$$K\rho < \frac{\varepsilon}{4}, \quad E^{f\circ\Psi_i}[\mathbb{B}\backslash\mathbb{B}_{1-\varrho}] \leq 2E^f[\Sigma \times [0, \varrho]]. \tag{3.16.5}$$

由于函数

$$t \longmapsto \int_\Sigma d^2(u_t, u_0)\, d\sigma$$

在 $t = 0$处连续，因此可得

$$\frac{1}{\rho}\int_{\Sigma} d^2(u_t, u_0)d\sigma < \frac{\varepsilon}{4} \tag{3.16.6}$$

当 $|t|$ 足够小时。

定义 $W_t\colon\ \Sigma \times [0,\rho] \to \Delta(G)$ 为

$$W_t(x,s) = (1-\frac{s}{\rho})u_t(x) + \frac{s}{\rho}u_0(x).$$

根据 [KS97，引理 3.12]，，当 $|t|$ 足够小时， W_t 的能量有界于

$$E^{W_t}[\Sigma \times [0,\varrho]] \leq \frac{\rho}{2}(E_\Sigma(0) + E_\Sigma(t)) + \frac{1}{\rho}\int_{\Sigma} d^2(u_t,u_0)\,d\sigma < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.16.7}$$

这里我们应用 (3.16.5) 和 (3.16.6)。定义 $w_t\colon\ \mathbb{B} \to \Delta(G)$ 为

$$w_t(x) = \begin{cases} u_0(\frac{x}{1-\rho}) & \text{for } x \in \mathbb{B}_{1-\rho} \\ W_t(\frac{x}{|x|}, 1-|x|) & \text{for } x \in \mathbb{B}\backslash\mathbb{B}_{1-\rho}. \end{cases}$$

由于 u_t 是能量极小的，且 $w_t|_{\partial\mathbb{B}} = u_t|_{\partial\mathbb{B}}$，当 $|t|$ 足够小时，我们有

$$E(t) \leq E^{w_t}[\mathbb{B}] = E^{u_0\circ\Phi}[\mathbb{B}_{1-\varrho}] + E^{W_t\circ\Psi_1}[\mathbb{B}\backslash\mathbb{B}_{1-\varrho}] \leq E(0) + 2E^{W_t}[\Sigma\times[0,\varrho]] < E(0)+\varepsilon.$$

这里我们应用 (3.16.3) 和 (3.16.7)。

类似地，我们定义另一个函数 $v_t\colon\ \mathbb{B} \to \Delta(G)$，如下：

$$v_t(x) = \begin{cases} u_t(\frac{x}{1-\rho}) & \text{for } x \in \mathbb{B}_{1-\rho} \\ W_t(\frac{x}{|x|}, |x|-1+\varrho) & \text{for } x \in \mathbb{B}\backslash\mathbb{B}_{1-\rho}. \end{cases}$$

由于 u_0是能量极小的，且 $v_t|_{\partial\mathbb{B}} = u_0|_{\partial\mathbb{B}}$，当 $|t|$充分小时，我们有

$$E(0) \leq E^{v_t}[\mathbb{B}] = E^{u_t\circ\Phi}[\mathbb{B}_{1-\varrho}] + E^{W_t\circ\Psi_2}[\mathbb{B}\backslash\mathbb{B}_{1-\varrho}] \leq E(t) + 2E^{W_t}[\Sigma\times[0,\varrho]] < E(t)+\varepsilon.$$

这里我们再次应用 (3.16.3) 和 (3.16.7)。引理得证。 □

推论 ***3.17.*** — 设 $v_n\colon\ \mathbb{D} \to \Delta(G)$ 是一个 C-利普希茨调和映射序列，在 $\mathbb{D}$ 上紧子集上一致收敛到一个 C-利普希茨调和映射 $v\colon\ \mathbb{D} \to \Delta(G)$。那么， v是常值，当且仅当对每个 $\delta \in (0,1)$， $E^{v_n}(\mathbb{D}_\delta) \to 0$当 $n \to \infty$。

证明. — 由于 v_n 在 $\partial\mathbb{D}_\delta$上一致收敛到 v ，我们有

$$\int_{\partial\mathbb{D}_\delta} d^2(v_n, v)\,d\sigma \to 0$$

如 $n \to \infty$。因此，通过应用引理 3.16，其中 $u_t = v_n$ 对 $\frac{1}{n+1} \leq |t| \leq \frac{1}{n}$ 和 $u_0 = \mathfrak{v}$，我们得到 $E^{v_n}(\mathbb{D}_\delta) \to E^{v}(\mathbb{D}_\delta)$。所以，只需证明： v为常值，当且仅当对于所有 $\delta \in (0,1)$， $E^{v}(\mathbb{D}_\delta) = 0$。后一个条件等价于能量密度 $|\nabla v|^2 = 0$ 在 $\mathbb{D}$上几乎处处为零。因此，我们的推论由引理 3.15 得出。□

3.4. 定理 E 的证明。—

定理 ***3.18*** **(=定理 E)**。— 设 X为一个复拟射影正规簇，且设G为定义在非阿基米德局部域 K上的约化代数群。设 $\varrho\colon\ \pi_1(X) \to G(K)$为一个 *Zariski* 稠密表示。则存在一个拟射影正规簇 S_ϱ 以及一个支配态射 $^s\varrho\colon\ X \to S_\varrho$，其一般纤维连通，使得对于 X的任意连通扎里斯基闭子集 T ，以下性质等价：

(a) 像 $\rho(Im[\pi_1(T) \to \pi_1(X)])$ 是 $G(K)$ 的有界子群。*(b)* 对于 T 的每个不可约分支 T_o，像 $\rho(Im[\pi_1(T\text{范数}_o) \to \pi_1(X)])$ 是 $G(K)$ 的有界子群。*(c)* 像 $^s\varrho(T)$ 是一个点。

我们将其证明分为 5 个步骤。在步骤 1–4 中，我们假设 X 是光滑的；在步骤 5 中，我们处理 X 是奇异的情形。步骤 4–5 与论文的其他部分相互独立，读者可以略过。值得强调的是，定理 3.18 将发挥关键作用，成为第二和第三作者关于准射影代数簇上约化表示的 Shafarevich 猜想的论文 [DYK23]的基石（类似结果也见 [Bru23] ）。

定理 3.18 的证明。——在此证明中，多重集指一对 (S,m)，其中 S 是底集，$m:\ S\to\mathbb{Z}_{>0}$ 是一个函数，为每个元素 $s\in S$ 指定其重数$m(s)$，也就是说，s 在多重集中出现的次数。我们常将多重集写成 $\{s_1,s_2,\dots,s_k\}_m$ 的形式，或简写为 $\{s_1,s_2,\dots,s_k\}$；在这种记法中，每个元素 s_i出现 $m(s_i)$ 次。两个多重集 (S,m) 和 (S',m') 的并定义为多重集 $(S\cup S',m+m')$。若群 G 作用于多重集 (S,m)，且 G 作用于 S 并且 m 在此作用下保持不变，则称群 G 作用于该多重集。

步骤*1.* 构造谱覆盖和谱一形式。设 X 是 X 的光滑射影紧化，满足 $D:=\overline{X}\backslash X$ 是一个简单正规交除子。

对于非阿基米德局部域 K上的约化代数群 G，它诱导出一个带有欧几里得度量的实欧几里得空间 V，以及一个在 V上等距作用的仿射魏尔群 W。该群 W是半直积 $T\rtimes W^v$，其中 W^v是向量魏尔群，它是由 V上的反射生成的有限群，而 T是 V的平移群（更多详情见 [Rou23]）。

对于 $\Delta(G)$中的任意公寓 A，存在一个同构 $i_A\colon A\to V$，称为坐标图。对于两个坐标图 $i_{A_1}\colon A_1\to V$和 $i_{A_2}\colon A_2\to V$，若 $A_1\cap A_2\neq\varnothing$，则它满足以下性质：(a) $Y:=i_{A_2}(i_{A_1}^{-1}(V))$ 是凸的。(b) 存在一个元素 $w\in W$，使得 $w\circ i_{A_1}|_{A_1\cap A_2}=i_{A_2}|_{A_1\cap A_2}$。

我们固定 V 的一组正交坐标 $(x_1,\ \dots\dots,\ x_N)$。由于 $W^v\subset\mathrm{GL}(V)$ 等距地作用于 V，对于任意 $w\in W^v$，$(w^*x_1,\ \dots\dots,\ w^*x_N)$ 是 V 的一组正交坐标。我们将多重集 Φ 定义为

$$\Phi:=\bigcup_{w\in W^v}\{w^*x_i\}_{i\in\{1,\dots,N\}},\tag{3.18.1}$$

其中并集按多重集处理。由于 W^v 是有限群，这是有限并，因此 Φ 的底集是 V^* 的有限子集。注意，W^v 作用于 Φ。我们将 $\Phi=\{\beta_1,\ \dots\dots,\ \beta_m\}$ 记作一个多重集。

由定理 3.12，存在一个具有对数能量增长的 ϱ-等变多调和映射 $u\colon X\to\Delta(G)$。对于 u 的任意正则点 $x\in\mathrm{R}(u)$，可选取 x 的一个单连通开邻域 U_x，使得

(1) 原像 $\pi_X^{-1}(U_x)=\coprod_{\alpha\in I}U_\alpha$ 是 $\widetilde{X}$ 中互不相交的开集之并，其中每个开集都由 $\pi_X\colon X\to X$ 同构地映射到 U 上。(2) 对于某个 $\alpha\in I$，存在 $\Delta(G)$ 的一个公寓 A_α，使得 $u(U_\alpha)\subset A_\alpha$。

令 $\Phi=\{\beta_1,\ \dots\dots,\ \beta_m\}$ 为 (3.18.1) 中定义的多重集。对于每个 $j\in\{1,\ \dots\dots,\ m\}$，我们定义一个实函数

$$u_{\alpha,j}=\beta_j\circ i_{A_\alpha}\circ u\circ(\pi_X|_{U_\alpha})^{-1}:U_x\to\mathbb{R}.\tag{3.18.2}$$

由 u的多重调和性可知，

$$\bar\partial\partial u_{\alpha,j}=0$$

对每个 $j\in\{1、\dots\dots、\ m\}$，因此，$\partial u_{\alpha,\ j}$是一个全纯 1- 形式。

断言 ***3.19***。— 全纯1形式的多重集

$$\eta_{U_x}:=\{\partial u_{\alpha,1},\dots,\partial u_{\alpha,m}\}$$

在 U_x 上不依赖于 U_α 的选取，也不依赖于包含 u（U_α）的公寓 A_α 的选取。因此，对任意 x、$y\in\mathcal{R}(u)$，若 $U_x\cap U_y\neq\varnothing$，则有

$$\eta_{U_x}=\eta_{U_y}\quad on\ U_x\cap U_y$$

作为多重集相等。

证明. — 对于任意 $\alpha\in I$，我们记为

$$u_\alpha:=i_{A_\alpha}\circ u\circ(\pi_X|_{U_\alpha})^{-1}:U_x\to V.$$

任取 $\alpha,\beta\in I$。于是存在 $\gamma\in\pi_1(X)$，使得 γ将 U_α同构地映射到 U_β。由于u是 ϱ-等变的，因此有 $\varrho(\gamma)u\circ(\pi_X|_{U_\alpha})^{-1}=u\circ(\pi_X|_{U_\beta})^{-1}$，从而

$$u_\beta=i_{A_\beta}\varrho(\gamma)i_{A_\alpha}^{-1}u_\alpha.$$

这意味着

$$u_\beta(U_x) \subset V \cap i_{A_\beta}\varrho(\gamma)i_{A_\alpha}^{-1}(V) \neq \emptyset.$$

根据 [KP23，推论 4.2.25] 以及 [KP23，公理 4.1.4 (A 1)]，，存在 $w \in W$ 使得$wx = i_{A_\beta}\varrho(\gamma)i_{A_\alpha}^{-1}(x)$ 对任意 $x \in V \cap i_{A_\beta}\varrho(\gamma)i_{A_\alpha}^{-1}(V)$ 均成立。这意味着 $u_\beta = wu_\alpha$。由于 Φ在 W^v的作用下保持不变，由 (3.18.2) 可得

$$\{\partial u_{\alpha,1}, \dots, \partial u_{\alpha,m}\} = \{\partial u_{\beta,1}, \dots, \partial u_{\beta,m}\}.$$

这表明多值 1-形式的构造是典范的。断言得证。 □

因此，若我们定义 $\sigma_{i,\eta_{U_x}} \in \Gamma(U_x, \mathrm{Sym}^i\Omega_{U_x})$ 如下

$$T^m + \sigma_1 T^{m-1} + \cdots + \sigma_m = (T - \partial u_{\alpha,1}) \cdots (T - \partial u_{\alpha,m}),$$

其中 T 是一个形式变量，则在 $U_x \cap U_y$上有 $\sigma_{i,\eta_{U_x}} = \sigma_{i,\eta_{U_y}}$。因此，这些局部截面可以粘合起来，定义 $\sigma_i \in \Gamma(\mathrm{R}(u), \mathrm{Sym}^i\Omega_{\mathcal{R}(u)})$。更多细节请参阅 [BDDM22，引理 4.3]。由于 u 是局部利普希茨的且具有对数能量增长，依照 [BDDM22，命题 4.4], 中的相同论证，每个 σ_i 都可延拓为$H^0(X, \mathrm{Sym}^i\Omega_X(\log D))$ 中的对数对称形式。事实上，u的局部利普希茨性质，加上 S (u) 的豪斯多夫余维至少为二这一事实，意味着每个 σ_i都可延拓穿过 S(u)；而 u 的对数能量增长表明，σ_i 沿 D至多有对数极点。因此，命题 3.1 的假设对 $\mathrm{E} = \Omega_X(\log D)$ 和 $P(T) = T^m + \sigma_1 T^{m-1} +$ 均成立 $\cdots + \sigma_m$。令

$$\pi : \overline{X^{\mathrm{sp}}} \to \overline{X}$$

为命题 3.1 中定义的覆盖 $\Sigma \to X$。于是我们有

$$\eta_1, \dots, \eta_m \in H^0(\overline{X^{\mathrm{sp}}}, \pi^*\Omega_{\overline{X}}(\log D))$$

使得 $\pi^*P(T) = (T - \eta_1) \cdots (T - \eta_m)$。根据命题 3.1.(ii) 和 3.1.(iv)，我们有以下两个断言。

断言 ***3.20***。——任意 $g \in G :=$ 自同构群(X^{sp}/X) 都通过置换作用于集合（底层集合）$\{\eta_1, \dots, \eta_m\}$。

断言 ***3.21***。——伽罗瓦态射 $\pi : X^{\mathrm{sp}} \to X$ 在以下集合之外是 *étale* 的

$$R := \{z \in \overline{X^{\mathrm{sp}}} \mid \exists \eta_i \neq \eta_j \text{ with } (\eta_i - \eta_j)(z) = 0\},$$

其满足 $\pi^{-1}(\pi(R)) = R$。

定义 ***3.22*** **（谱覆盖与 1-形式）**。— 伽罗瓦态射 $\pi : X^{\mathrm{sp}} \to X$称为与 ϱ 相关联的 X 的谱覆盖。截面 $\eta_1, \dots, \eta_m$ 在$H^0(X^{\mathrm{sp}}, \pi^*\Omega_X(\log D))$ 中构成的多重集，称为由 ϱ 诱导的谱一形式。

步骤 *2.* 多重调和映射与谱一形式。令 $Y \to X^{\mathrm{sp}}$ 为一个奇点消解。对于每个 $i = 1, \dots, m$，我们通过将 $\eta_i \in H^0(X^{\mathrm{sp}}, \pi^*\Omega_X(\log D))$ 拉回至 Y，定义 $\tau_i \in H^0(Y, \Omega_Y)$。此外，我们令 $p : Y \to X$为复合 $Y \to X^{\mathrm{sp}} \to X$。

断言 ***3.23***。— 设 $f : Z \to Y$ 是从光滑拟射影簇 Z 出发的一个态射。以下三个断言等价：

(1) 对于所有的 $\tau_1, \dots, \tau_m \in H^0(Y, \Omega_Y)$，都有 $f^*\tau_1 = \cdots = f^*\tau_m = 0$属于 $H^0(Z, \Omega_Z)$。

(2) 多重调和映射 $u \circ p \circ f : Z \to \Delta(G)$是常值的，其中 $p \circ f : Z \to X$ 是$p \circ f : Z \to X$ 在 Z 和 X的万有覆盖之间的提升。*(3)* 像 $p^*\rho(\mathrm{Im}[\pi_1(Z) \to \pi_1(Y)])$是 $G(K)$的有界子群。

证明。— 在本证明中，为简便起见，我们记 $u_f = u \circ p \circ f$。我们首先证明 (2) 与(3) 等价。注意，$(p \circ f)^*\varrho$-等变映射 $u_f : Z \to \Delta(G)$ 是多重调和的，且具有对数能量增长（参见定理 3.12）。假设 u_f是常值的。令 $\{P\}$ 为 u_f的像。由于 u_f是 $(p \circ f)^*\varrho$-等变的，故 $p^*\varrho(\mathrm{Im}[\pi_1(Z) \to \pi_1(Y)])$ 固定 P。由引理 3.10，P的稳定子是 $G(K)$ 的有界子群，因此 $(p \circ f)^*\varrho(\pi_1(Z))$ 是有界的。接下来，假设$p^*\rho(\mathrm{Im}[\pi_1(Z) \to \pi_1(Y)])$ 有界。令 P为 $p^*\varrho((\mathrm{Im}[\pi_1(Z) \to \pi_1(Y)])$ 的不动点，

~并定义常值映射 $u'\colon Z \to \{P\}$。那么 u' 是 $(p \circ f)^*\varrho$-等变且调和的。由 [DM26，定理 B],中的唯一性结论可知

$$|\nabla_{u_f}|^2 = |\nabla_{u'}|^2 = 0$$

~在 Z 上几乎处处成立。因此，由引理 3.15， u_f 是常值的。我们已证明 (2) 与 (3) 等价。

接下来证明 (1) 与 (2) 等价。为此，我们对全纯映射 $g\colon \mathbb{D} \to Y$引入以下两个断言：

(i) 对所有 τ_1、……、 $\tau_m \in H^0(Y,\ \Omega_Y)$，都有 $g^*\tau_1 = \cdots = g^*\tau_m = 0$属于 $H^0(\mathbb{D},\ \Omega_{\mathbb{D}})$。~(ii) $u_g = u \circ \widetilde{p} \circ g\colon \mathbb{D} \to \Delta(G)$ 是常值的，其中 $\widetilde{p} \circ g\colon \mathbb{D} \to X$ 是 $p \circ g\colon \mathbb{D} \to X$ 到 X的万有覆盖上的提升。

条件 (1) 等价于要求 (i) 对所有可经由 $Z \to Y$分解的 $g\colon \mathbb{D} \to Y$ 都成立。同理，(2) 等价于要求 (ii) 对所有可经由 $Z \to Y$分解的 $g\colon \mathbb{D} \to Y$ 都成立。因此，只需对每个全纯映射 $g\colon \mathbb{D} \to Y$证明 (i) 与 (ii) 等价。此外，要确立这一等价性，只需证明它在 $\mathbb{D}$ 上局部成立，其中映射 $g\colon \mathbb{D} \to Y$ 是浸入。因此，只需在以下假设下证明等价性：我们可以将 $g\colon \mathbb{D} \to Y$ 延拓为映射 $G\colon \mathbb{D} \times \mathbb{D}^k \hookrightarrow Y$，使得限制 $G|_{\mathbb{D}\times\{0\}}$等于 g，且 G是到 Y的某个开子集上的双全纯映射。记 $u_G\colon \mathbb{D} \times \mathbb{D}^k \to \Delta(G)$ 为 $\widetilde{p} \circ G\colon \mathbb{D} \times \mathbb{D}^k \to \tilde{X}$ 与 $u\colon \tilde{X} \to \Delta(G)$ 的复合映射。那么，$u_G\colon \mathbb{D} \times \mathbb{D}^k \to \Delta(G)$ 是局部利普希茨且多重调和的。

令 S:=($p \circ G)^{-1}$(S (u))。设 V为所有满足以下条件的点的集合：$(\mathbb{D} \times \{w\}) \cap S$在 $\mathbb{D}$中测度为零。由于 S(u) 的豪斯多夫余维至少为二（事实上，根据 [DM26], 它包含于 X的某个真扎里斯基闭子集中），由富比尼定理可知 $\mathbb{D}^k \setminus V$ 测度为零。特别地， V在 $\mathbb{D}^k$中稠密。记 $\iota_w\colon \mathbb{D} \hookrightarrow \mathbb{D} \times \mathbb{D}^k$ 为嵌入

$$\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D} \times \{w\} \longrightarrow \mathbb{D} \times \mathbb{D}^k.$$

我们在 $\mathbb{D}$上固定一个 Kähler度量 $\omega := \sqrt{-1}dz \wedge d\bar{z}$。由于 u_G是多重调和的，因此对每个 $w \in \mathbb{D}^k$，映射

$$u_G \circ \iota_w : \mathbb{D} \longrightarrow \Delta(G)$$

是调和的。根据构造，对每个 $w \in V$，全纯 1-形式

$$\iota_w^* G^* \tau_1, \ldots, \iota_w^* G^* \tau_m \in \Gamma(\mathbb{D}, \Omega^1_{\mathbb{D}})$$

对应于 $u_G \circ \iota_w$ 在非空开稠密集 $\mathbb{D}\setminus \iota_w^{-1}(S)$上的复微分。因此，由 (3.14.1) 和 (3.18.1)， $u_G \circ \iota_w$ 相对于 $w \in V$ 的能量密度满足（参见 [DM26，式 (3.7)]）

$$|\nabla_{u_G \circ \iota_w}|^2 = \frac{2}{|W^v|} \sum_{i=1}^{m} \left|\iota_w^* G^* \tau_i\right|^2_{\omega} \quad \text{on } \mathbb{D} \setminus \iota_w^{-1}(S).$$

因此，对于每个 $\delta \in (0,1)$，我们有

$$E^{u_G \circ \iota_w}[\mathbb{D}_\delta] = \frac{1}{|W^v|} \int_{\mathbb{D}_\delta} \iota_w^* G^* \left(\sqrt{-1} \sum_{i=1}^{m} \tau_i \wedge \bar{\tau}_i\right) \quad \text{for each } w \in V.$$

由于 u_G是局部利普希茨连续的，当 $w \to 0$趋于 $\mathbb{D}$ 时， $u_G \circ \iota_w \to u_G \circ \iota_0$在 $\mathbb{D}$ 上的紧子集上一致收敛。因此，根据推论 3.17， $u_G \circ \iota_0$ 为常值，当且仅当 $E^{u_G \circ \iota_w}[\mathbb{D}_\delta] \to 0$ 沿着 $w \in V$趋于$w \to 0$。

注意，

$$w \mapsto \int_{\mathbb{D}_\delta} \iota_w^* G^* \left(\sqrt{-1} \sum_{i=1}^{m} \tau_i \wedge \bar{\tau}_i\right)$$

是整个 $w \in \mathbb{D}^k$ 上的连续函数。因此， $E^{u_G \circ \iota_w}[\mathbb{D}_\delta] \to 0$ 作为 $w \to 0$ 沿着$w \in V$ 等价于

$$\int_{\mathbb{D}_\delta} \iota_0^* G^* \left(\sqrt{-1} \sum_{i=1}^{m} \tau_i \wedge \bar{\tau}_i\right) = 0.$$

注意到 $u_g = u_G \circ \iota_0$，这意味着

$$u_g \text{ is constant} \iff \iota_0^* G^* \tau_i = 0 \text{ for all } i \iff g^* \tau_i = 0 \text{ for all } i.$$

(i) 与 (ii) 的等价性得证。 □

步骤 *3.* 通过谱一形式构造部分拟 *Albanese* 态射。设 $\mu : X^{\mathrm{sp}\prime} \to X^{\mathrm{sp}}$ 是一个 $\widetilde{G}$-等变奇点消解，使得 $E := (\pi \circ \mu)^{-1}(D)$ 是一个简单正规交叉除子。记 $Y := (\pi \circ \mu)^{-1}(X)$，这是一个光滑拟射影簇。我们将谱一形式 $\{\mu^*\eta_1, \ldots, \mu^*\eta_m\}$ 拉回，并将其视为 $H^0(X^{\mathrm{sp}\prime}, \Omega_{X^{\mathrm{sp}\prime}}(\log E))$ 上的 1-形式。定义 $A \subset \mathrm{A}_Y$ 为拟 Albanese 簇 A_Y 中包含的最大半阿贝尔簇，其中每个 η_i 都消失。我们将商记为 $\mathrm{A} := \mathrm{A}_Y/A$，它也是一个半阿贝尔簇。根据断言 3.20，由 Y 上的 G-作用诱导的 A_Y 上的自然 G-作用，给出 A 上的一个 G-作用。

断言 ***3.24.*** — 复合 $Y \to \mathcal{A}_Y \to \mathcal{A}$ 经由 $\alpha : X^{\mathrm{sp}} \to \mathcal{A}$ 分解。此外，α 是 G-等变的。

断言 *3.24* 的证明. — 由于 X^{sp} 是正规的，$Y \to X^{\mathrm{sp}}$ 的每个纤维 F 都是连通的。对于任意 $\eta \in \{\mu^*\eta_1, \ldots, \mu^*\eta_m\}$，我们有 $\eta|_F = 0$。由引理 1.1 可知，在态射 $Y \to \mathrm{A}$ 下，F 映射到同一个点。因此，它经由 $X^{\mathrm{sp}} \to \mathrm{A}$ 分解。第二点很容易证明，因为我们之前的所有构造都是 G-等变的。□

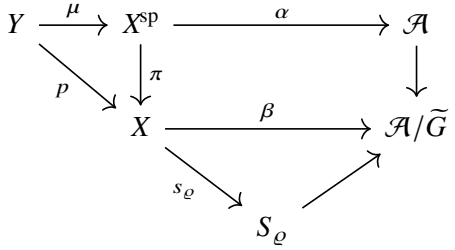
定义 ***3.25*** **（部分拟 Albanese 态射）**。— 上述态射 $\alpha : X^{\mathrm{sp}} \to \mathrm{A}$ 称为由谱一形式 $\{\eta_1, \ldots, \eta_m\}$ 诱导的部分拟 Albanese 态射。

We d注 by $p : Y \to X$ th$^{\text{e compos}}$ ite of $\mu|_Y : Y \to X^{\mathrm{sp}}$ and $\pi : X^{\mathrm{sp}} \to X$.断言 ***3.26.*** — 设 $f : Z \to Y$ 是从光滑拟射影簇 Z 出发的一个态射。则以下断言等价：

(1) 像 $p^*\rho(Im[\pi_1(Z) \to \pi_1(Y)])$ 是 $G(K)$ 的一个有界子群。*(2)* 复合映射 $\alpha \circ \mu \circ f : Z \to A$ 是常值的。*(3)* 多重调和映射 $u \circ p \circ f : Z \to \Delta($ $G)$ 是常值的，其中 $p \circ f : Z \to X$ 是 $p \circ f : Z \to X$ 在 Z 和 X 的万有覆盖之间的一个提升。

证明. — 这直接由断言 3.23 和引理 1.1 得出。事实上，根据断言 3.23，只需证明断言 3.23 中的条件 (1) 与断言 3.26 中的条件 (2) 等价。此等价性由引理 1.1 得出。□

步骤 *4.* 约化映射的构造 $s_\rho : X \to S_\rho$. 映射 $\alpha : X^{\mathrm{sp}} \to \mathrm{A}$ 是 G-等变的，这里考虑 X^{sp} 和 A 上的 G-作用（参见断言 3.24）。由于 $X = X^{\mathrm{sp}}/G$，这便给出了一个态射 $\beta : X \to \mathrm{A}/G$，满足以下交换图



其中 $s_\varrho : X \to S_\varrho$ 是 β 的拟 Stein 分解。

在假设 X 光滑的情况下，以下断言证明了我们的定理（定理 3.18）。

断言 ***3.27.*** — 设 T 是 X 的任意连通扎里斯基闭子集。则以下性质等价。

(1) $s_\varrho(T)$ 的像是 S_ϱ 中的一个点。*(2)* $\rho(Im[\pi_1(T) \to \pi_1(X)])$ 是 $G(K)$ 的有界子群。*(3)* 对于 T 的每个不可约分支 T_o，像 $\rho(Im[\pi_1(T$范数$_o) \to \pi_1(X)])$ 是 $G(K)$ 的有界子群。

证明。$\overline{\pi_1(X)}$由 $\mathrm{Im}[\pi_1(T_{\text{范数}o}) \to \pi_1(X)] \subset \mathrm{Im}[\pi_1(T)$ 可直接得出蕴含关系 (2) $\Rightarrow$(3)。

接下来证明 (3) $\Rightarrow$ (1)。设 T_0 是 T的一个不可约分支。令 $p = \mu \circ \pi\colon Y \to X$。存在 $p^{-1}(T_o)$ 的一个不可约分支 W，使得 $p(W) = T_o$。令 $Z \to W$ 为一个消解，并令 $f\colon Z \to Y$ 为 $Z \to W$ 与 $W \hookrightarrow Y$ 的复合映射。于是自然映射 $Z \to T_o$ 经由 $Z \to T_{\text{范数}o}$ 分解。因此，条件 (3) 蕴含 $\rho(\mathrm{Im}[\pi_1(Z) \to \pi_1(X)])$ 有界。由此 $\alpha \circ \mu \circ f\colon Z \to \mathrm{A}$ 为常值（参见断言 3.26）。因此，像 $s_\varrho(T_o)$ 是 S_ϱ中的一个点。由于 T连通，像 $s_\varrho(T)$ 是 S_ϱ中的一个点。

我们证明 (1) $\Rightarrow$ (2)。记 T 为 T的万有覆盖。令 $u_T\colon T \to \Delta(G)$ 为由诱导映射 $T \to X$ 与 $u\colon X \to \Delta(G)$ 复合而成的复合映射。我们证明 $u(T)$ 是单点。令 $P \in \Delta(G)$。令 $T\mathrm{reg}$ 为 T的正则部分。只需证明，对于 $T\mathrm{reg}$ 的每个连通分支 W，u是常值的。注意，$T\mathrm{reg} \to T^{\mathrm{reg}}$是局部同胚，其中 $T\mathrm{reg}$ 是 T的正则部分。令 W为 W 的像。则 W是 $T\mathrm{reg}$ 的一个连通分支，且诱导映射 $W \to W$ 是局部同胚。令 Z为局部闭子集 $p^{-1}(W) \subset Y$的一个不可约分支 C的消解，使得 C 支配 W。那么诱导映射 $Z \to W$ 是光滑拟射影簇之间的适当满射态射。因此，诱导的万有覆盖之间的映射 $Z \to W$ 是满射。于是复合映射 $Z \to W \to \mathrm{W}$ 也是满射。第一项 (1) 表明映射 $Z \to \mathrm{A}$ 是常值的。由断言 3.26，映射 $Z \to \Delta(G)$ 是常值的，因此 $\mathrm{W} \to \Delta(G)$ 是常值的。这表明 $u_T(T)$ 是单点 $P \in \Delta(G)$。这意味着

$$\varrho\big(\mathrm{Im}[\pi_1(T) \to \pi_1(X)]\big)$$

固定点 P，因此是有界的。于是蕴含关系得证。 □

因此，当 X 光滑时，定理得证。

步骤 *5.* 我们不假设 X 是光滑的。设 $\mu : Y \to X$ 是一个奇点消解。由于 X是正规的，$\mu^\varrho\colon \pi_1(Y) \to G(K)$ 也是一个扎里斯基稠密表示（参见引理 1.6）。根据断言 3.27，所需的约化映射 $s_{\mu^*\varrho}\colon Y \to S_{\mu^*\varrho}$ 存在。

设 F 是 μ的任意一个纤维，由于 X 是正规的，该纤维是连通且紧的。显然，$\mu^*\varrho(\mathrm{Im}[\pi_1(F) \to \pi_1(Y)]) = \{e\}$。因此，$s_{\mu^*\varrho}(F)$ 是一个点。于是存在一个态射 $s_\varrho\colon X \to S_{\mu^*\varrho}$，使得 $s_\varrho \circ \mu = s_{\mu^*\varrho}$。我们将证明它满足定理中的所需性质。

令 $T' := \mu^{-1}(T)$。由于 X是正规的，因此 μ的每个纤维都是连通的。于是，自然态射 $T' \to T$ 具有连通纤维。由 [DYK23，引理 3.47]（参见下文注3.29），可知 $\pi_1(T') \to \pi_1(T)$ 是满射。

(3) 的证明 $\Rightarrow$*(1)*。由于 $s_{\mu^*\varrho}(T') = s_\varrho(T)$ 是一个点，因此

$$\varrho(\mathrm{Im}[\pi_1(T) \to \pi_1(X)]) = \mu^*\varrho(\mathrm{Im}[\pi_1(T') \to \pi_1(Y)])$$

是有界的。

(1) 的证明 $\not\Rightarrow$*(2)*。这是显然的。

(2) 的证明 $\Rightarrow$*(3)*。我们取 T'的一个不可约分支，记为 T'_o，它支配 T_o。考虑

$$\mu^*\varrho(\mathrm{Im}[\pi_1(T'_o) \to \pi_1(Y)]) \subset \varrho(\mathrm{Im}[\pi_1(T_o) \to \pi_1(X)]),$$

我们可以得出 $\mu^*\varrho(\mathrm{Im}[\pi_1(T'_o) \to \pi_1(Y)])$ 是有界的。由断言 3.27，$s_{\mu^*\varrho}(T'_o)$ 是一个点。这就得出 $s_\varrho(T_o)$ 也是一个点。由于 T是连通的，我们得出 $s_\varrho(T)$ 是一个点。

我们完成该定理的证明。 □

我们以一些关于上述冗长证明的评论结束本节。

注***3.28***。 — 为证明定理 A，我们只需研究态射 $\alpha\colon X^{\mathrm{sp}} \to \mathrm{A}$ 的性质，以及断言 3.21 中关于分歧轨迹$\pi\colon X^{\mathrm{sp}} \to X$的精确信息。约化 $s_\varrho\colon X \to S_\varrho$将是研究

line拟射影簇的 Shafarevich 猜想（见 [Eys04, EKPR12], 最近的 nt wor由 Green-Griffiths-Katzarkov [GGK22], 和 [DYK23、DY25]) 得到。

注***3.29.*** — 为了完整起见，我们回顾并证明 [DYK23, 引理 3.47] 。

引理 ***3.30.*** — 设 $f\colon X \to Y$ 是连通（可能可约）准射影代数簇 X 与 Y之间的真满射态射。假设 f 的每个纤维都是连通的。那么$f_*\colon \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$是满射。

~ ~证明. — 令 $Y \to Y$为 Y的万有覆盖。考虑纤维积 $X' := X \times_Y Y$。

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\pi_1} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \widetilde{Y} & \xrightarrow{\pi_2} & Y \end{array}$$

~由于 f是真且 f的每个纤维都是连通的，因此 $f'\colon X' \to Y$是真、满射的，并且 f'的每个纤维都是连通的。

断言 ***3.31***。— X' 是连通的。

证明。— 反设 X' 不连通。那么 $X' = \sqcup_{\alpha\in I} X_\alpha$，其中 X_α 是 X'的连通分支。由于 f，的每个纤维都是连通的，因此 f' 的任意纤维都包含在某个 X_α 中。这意味着，如果 $\alpha \neq \beta$，则 f，$(X_\alpha) \cap f$，$(X_\beta) = \varnothing$。由于 f，是满射，~可知 $\sqcup_{\alpha\in I} f$，$(X_\alpha) = Y$。注意，由于 f，是~真映射，f，(X_α) 和 f，$(\sqcup_{\beta\in I,\beta\neq\alpha} X_\beta)$ 都是闭集。这与 Y的连通性矛盾。因此 X' 是连通的。□

~我们选取一个基点 $x \in X$ 和 $y \in Y$，使得 $y = f(x)$。令 $x' \in X'$ 和 $y' \in Y$ 满足 $x = \pi_1(x')$、$y = \pi_2(y')$ 和 $y' = f'(x')$。那么，对于任意元素 $\gamma \in \pi_1(Y, y)$，

~ ~将 γ 提升到 Y 后，从 y' 出发，终点将是某个 y''，使得 $y = \pi_2(y'')$。由于 $X' = X \times_Y Y$，可知存在唯一的 $x'' \in f'^{-1}(y'')$，使得 $x = \pi_1(x'')$。由于 X' 是连通的，存在一条连续路径 $\sigma\colon [0,1] \to X'$，使得 $x' = \sigma(0)$ 和 $x'' = \sigma(1)$。考虑~连续路径 $f' \circ \sigma\colon [0,1] \to Y$，那么 $y' = f' \circ \sigma(0)$ 和 $y'' = f' \circ \sigma(1)$。由此可得 $\gamma = [\pi_2 \circ f' \circ \sigma] = [f \circ \pi_1 \circ \sigma]$。注意，$x = \pi_1 \circ \sigma(0) = \pi_1 \circ \sigma(1)$。这证明了$f_*([\pi_1 \circ \sigma]) = \gamma$。因此，$f_*\colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$ 是满射。引理得证。□

4. 双曲性与非阿基米德局部系统

本节致力于证明定理 F。在 § 4.1 中，我们证明定理 F 中与 ϱ 相关联、并在定义 3.22 中定义的谱覆盖 $X^{\mathrm{sp}} \to X$ 所对应的簇 X^{sp} 是对数一般型，且由其谱 1-形式诱导的部分拟 Albanese 态射（参见定义 3.22）到其像是一般有限的。在 § 4.2 中，基于 § 4.1，我们在更一般的框架下提取出一些关于容许 π_1 的无界非阿基米德表示的代数簇的本质性质（见性质 4.3）。在 § 4.3 中，我们回顾本系列第一部分 [CDY25]中的一些关于双曲性的结果。最后，在 § 4.4 中，我们从适当的分歧覆盖上扩散正性，并在 § 4.5 中完成定理 F 的证明。

4.1. 谱覆盖的对数典范丛的正性。—

定理 ***4.1.*** — 设 X 是一个光滑拟射影簇。假设存在一个扎里斯基稠密表示 $\varrho\colon \pi_1(X) \to G(K)$，其中 G 是定义在非阿基米德局部域 K 上的几乎单代数群。当 ϱ 是大且无界时，

(i) 定义 *3.22* 中定义的 X 的谱覆盖 X^{sp} 是对数一般型。(ii) 设 $\alpha\colon X^{\mathrm{sp}} \to \mathcal{A}$ 是由定义 *3.25* 中定义的谱一形式$\{\eta_1, \ldots, \eta_m\} \subset H^0(X^{\mathrm{sp}}, \pi^*\Omega_X)$诱导的部分拟 *Albanese* 映射。那么 维数 X^{sp} =维数 $\alpha(X^{\mathrm{sp}})$。

证明. — 步骤*1.* 我们将 X^{sp} 替换为一个光滑模型。 我们将使用 § 3.4 中的记号。设$\mu : Y \to X^{\mathrm{sp}}$为奇点消解，并设 $p\colon Y \to X$ 为复合映射。由于 $p_*\colon \pi_1(Y) \to \pi_1(X)$ 的像根据引理 1.7 具有有限指数，$p^*\varrho(\pi_1(Y))$ 的扎里斯基闭包 H 包含 G的单位分支 G^o，因此也几乎单。我们还有：

Cl定理 ***4.2.*** — 表示 p $^*\varrho$ 是大。

证明. — 对于任意包含 Y 中一个非常一般点的闭子簇 $Z \subset Y$，其像 $p(Z)$ 是一个经过 X 中一个非常一般点的闭子簇。由于 $Z \to p(Z)$ 是满射，根据引理 1.7，$\mathrm{Im}[\pi_1(Z^{\mathrm{norm}}) \to \pi_1(p(Z)^{\mathrm{norm}})]$ 在 $\pi_1(p(Z)^{\mathrm{norm}})$ 中具有有限指数。因此，$p^*\varrho(\mathrm{Im}[\pi_1(Z^{\mathrm{norm}}) \to \pi_1(Y)])$ 在 $\varrho(\mathrm{Im}[\pi_1(p(Z)^{\mathrm{norm}}) \to \pi_1(X)])$ 中具有有限指数。由于 $p(Z)$ 包含 X 中的一个非常一般点，后一个群是无限的，这意味着 $p^*\varrho(\mathrm{Im}[\pi_1(Z^{\mathrm{norm}}) \to \pi_1(Y)])$ 是无限的。这就证明了我们的断言。□

步骤 2. 我们证明 $\kappa(Y) \geq 0$。令 $q\colon Y \to \mathrm{A}$ 为 $\mu\colon Y \to X^{\mathrm{sp}}$ 与 $\alpha\colon X^{\mathrm{sp}} \to \mathrm{A}$ 的复合映射。令 $F \subset Y$ 为 $q\colon Y \to q(Y)$ 的一般纤维的一个连通分支。那么 F 是一个光滑拟射影簇。断言 3.26 表明，$p^*\varrho(\mathrm{Im}[\pi_1(F) \to \pi_1(Y)])$ 是 $H(K)$ 的有界子群。然而，根据引理 2.2，$p^*\varrho(\mathrm{Im}[\pi_1(F) \to \pi_1(Y)])$ 是 $p^*\varrho(\pi_1(Y))$ 的正规子群。由于 $p^*\varrho\colon \pi_1(Y) \to H(K)$ 是扎里斯基稠密且无界的，引理 3.11 推出 $p^*\varrho(\mathrm{Im}[\pi_1(F) \to \pi_1(Y)])$ 有限。然而，根据断言 4.2，$p^*\varrho$ 是大线丛。于是 F 必须是一个点。这意味着 $q\colon Y \to \mathrm{A}$，因此 $\alpha\colon X^{\mathrm{sp}} \to \mathrm{A}$ 到其像一般有限。令 Z 为 $q(Y)$ 的扎里斯基闭包。根据命题 1.3，$\bar{\kappa}(Z) \geq 0$。因此，对于支配且一般有限的 $Y \to Z$:，有 $\kappa(Y) \geq 0$。 –

步骤 3. 我们证明 Y 的对数饭田纤维化是平凡的。我们可以用双有理修改替换 Y，使得 Y 的对数饭田纤维化可定义为一个支配态射 $f\colon Y \to B$，且具有连通的一般纤维。注意，f 的一个非常一般纤维 F 是连通的光滑拟射影簇，且 $\kappa(F) = 0$。此外，由于 $q\colon Y \to \mathrm{A}$ 在其像上一般有限，其限制 $q|_F\colon F \to \mathrm{A}$ 也一般有限。由引理 1.4.(ii)可知，$\pi_1(F)$ 是阿贝尔的。因此，$p^*\varrho(\mathrm{Im}[\pi_1(F) \to \pi_1(Y)])$ 是 $G(K)$ 的阿贝尔子群。注意，由引理 2.2，$\pi_1(F) \triangleleft \pi_1(Y)$。由于 $p^*\varrho\colon \pi_1(Y) \to H(K)$ 是扎里斯基稠密的，且 H 几乎单，因此 $p^*\varrho(\mathrm{Im}[\pi_1(F) \to \pi_1(Y)])$ 的扎里斯基闭包要么是有限的，要么是 H 的有限指数子群。由于 $p^*\varrho(\mathrm{Im}[\pi_1(F) \to \pi_1(Y)])$ 是阿贝尔的，第二种情况不可能发生。因此，$p^*\varrho(\mathrm{Im}[\pi_1(F) \to \pi_1(Y)])$ 必定是有限的。现在，由于 $p^*\varrho$ 是大的（参见断言 4.2），这意味着 F 是一个点。我们得出结论，因此 X^{sp} 是对数一般型。□

4.2. 具有基本群非阿基米德表示的代数簇的性质。 — 为便于后续应用，也因其本身具有独立意义，我们为光滑拟射影簇 X 表述如下性质。

性质 ***4.3***。— 设 X 为光滑拟射影簇。假设存在一个光滑射影紧化 X，其边界除子 $D = X\backslash X$ 为简单正规交，并存在一个有限满射态射 $\pi : \Sigma \to X$，其中 $\Sigma \to X$ 来自正规射影簇 Σ，且有非零截面 $\tau_1, \ldots, \tau_l \in H^0(\Sigma, \pi^*\Omega_X(\text{对数 } D))$ 满足以下两个条件：

(i) 令 $\Sigma = \pi^{-1}(X)$，则代数簇 Σ 为对数一般型，并存在一个态射 $a\colon \Sigma \to A$ 到半阿贝尔簇 A，且 维数 Σ = 维数 $a(\Sigma)$；(ii) 定义

$$R := \{s \in \overline{\Sigma} \mid \exists\, i \text{ such that } \tau_i(s) = 0\},$$

那么 $R \subsetneq \overline{\Sigma}$ 是一个真扎里斯基闭子集，并且 $\pi\colon \Sigma \to \overline{X}$ 在 $\overline{R}$ 之外是 *étale* 的。

引理 ***4.4***。— 设 X 是一个光滑拟射影簇。设 G 是定义在非阿基米德局部域 K 上的几乎单代数群。假设 $\varrho\colon \pi_1(X) \to G(K)$ 是一个大且无界的扎里斯基稠密表示。那么 X 满足性质 *4.3*。

证明。— 令 $\pi\colon X^{\mathrm{sp}} \to \overline{X}$ 为与 ϱ 相关联的谱覆盖，该覆盖在定义 3.22 中定义；令 $\{\eta_1, \ldots, \eta_m\} \in H^0(X^{\mathrm{sp}}, \pi^*\Omega_X(\log D))$ 为定义 3.22 中定义的由此得到的谱一形式。由定理 4.1(ii)，与 $\{\eta_1, \ldots, \eta_m\}$ 相关联的部分拟 Albanese 态射 $\alpha\colon X^{\mathrm{sp}} \to \mathrm{A}$ 满足 $\dim X^{\mathrm{sp}} = \dim \alpha(X^{\mathrm{sp}})$。由定理 4.1(i)，$X^{\mathrm{sp}}$ 是对数一般型。对 $\eta_i \neq \eta_j$，令 $\tau_{ij} = \eta_i - \eta_j$。于是，根据断言 3.21，$\pi$ 在 $\{\tau_{ij} = 0\}$ 之外是 étale 的。因此，X 满足性质 4.3。□

在本节余下部分中，我们将看到，若拟射影簇 X 满足性质 4.3，则 X 是对数一般型，并且任意 Zariski 稠密的全纯映射 $f\colon \mathbb{D}^* \to X$ 在原点处都没有本性奇点。在引理 4.11 中，我们证明存在一个真扎里斯基闭子集 $E \subsetneq X$，使得对于任意闭子簇 $V \not\subset E$，簇 V 也满足性质 4.3。结合引理 4.4，即可证明定理 F。

4.3. 关于双曲性的两个结果。 — 我们回顾论文系列第一部分中的两个结果，它们将用于证明定理 F。这些结果是通过应用 Nevanlinna 理论证明的。定理 ***4.5*** **([CDY25, 定理 C]).** — 设 X 是一个光滑拟射影簇。假设存在一个态射 $a\colon X \to A$ 到半阿贝尔簇 A，使得 $\dim X = \dim a(X)$。那么以下性质等价：

(a) X 是对数一般型；(b) X 是强对数一般型；(c) X 是伪 *Picard* 双曲；(d) X 是伪布罗迪双曲；(e)扩散正性$_{\mathrm{sab}}(X) \subsetneq X$。 □

定理 ***4.6*** **([CDY25, 定理 B]).** — 设 X 是一个光滑拟射影簇。假设 X 满足性质 *4.3*，那么每个具有 *Zariski* 稠密像的全纯映射 $f\colon \mathbb{D}^* \to X$ 都有一个全纯延拓 $f\colon \mathbb{D} \to X$，其中 X 是X的任意光滑射影紧化。□

4.4. 通过适当的分歧覆盖扩散正性。 —

命题 ***4.7.*** — 设 X 是一个光滑拟射影簇。如果 X 满足性质 *4.3*，那么它是对数一般型。

证明。——我们使用性质 4.3 中描述的以下对象： $\pi\colon \Sigma \to X, \tau_1, \ldots\ldots, \tau_l \in H^0(\Sigma, \pi^*\Omega_X($对数$D))$，以及 $R \subset \Sigma$。注意，正规簇之间任意有限满射态射都可以扩充为伽罗瓦覆盖，而不改变分歧轨迹（例如参见 [GKP16，定理 3.7]）。具体而言，存在一个从射影正规簇 $\nu\colon Y \to \Sigma$ 出发的有限满射态射，使得复合 $p := \pi \circ \nu$ 是伽罗瓦群为 G的伽罗瓦覆盖，且 p 和 π 的分歧轨迹相同，记为 $B \subset X$。于是， $p\colon Y \to X$ 在 $p^{-1}(B)$ 之外是 étale 的。根据性质 4.3.(ii)，我们有 $B \subset \pi(R)$。因此， p 在$R' := p^{-1}(\pi(R))$之外是 étale 的。

我们定义一个截面

$$\sigma := \prod_{g\in G} \prod_{i\in\{1,\ldots,l\}} g^*\nu^*\tau_i \in H^0(Y, \mathrm{Sym}^N p^*\Omega_X(\log D)),$$

which 非零，并且根据 R 的定义在 $\nu^{-1}(R)$ 处消失（参见性质 4.3.(ii)）。由于 σ 在 G-作用下保持不变，因此 σ 下降为一个截面

$$\sigma^G \in H^0(X, \mathrm{Sym}^N \Omega_X(\log D))$$

使得 $p^*\sigma^G = \sigma$。由于 σ 在 $\nu^{-1}(R)$ 上消失，因此 σ^G 在 $p(\nu^{-1}(R)) = \pi(R)$ 处消失；后者是 X 的一个真扎里斯基闭子集。令 $E \subset \pi(R)$ 为包含于 $\pi(R)$ 中的素因子的和。这意味着存在一个非平凡态射

$$\mathcal{O}_X(E) \to \mathrm{Sym}^N \Omega_X(\log D). \tag{4.7.1}$$

根据性质 4.3.(i)， Σ 是对数一般型。由于 $\pi|_{\Sigma\setminus R}\colon \Sigma\setminus R \to X\setminus\pi(R)$ 是有限 étale 的，根据 [Iit77，下面的定理 3] 或引理 4.8， $X\setminus\pi(R)$ 也是对数一般型。按照我们的构造，$\pi(R)\setminus E$ 在 X 中的余维至少为二。根据 [NWY13，引理 3]， $K_X + E + D$ 是大除子。结合 (4.7.1)，我们可以应用 [CP19，推论 8.7]，从而得到 $K_X + D$ 是大除子。因此 X 是对数一般型。□

引理 ***4.8***。— 设 $f'\colon U \to V$ 是光滑拟射影簇之间的有限 *étale* 态射。则对数 *Kodaira* 维数 $\bar{\kappa}(U) = \bar{\kappa}(V)$。

证明。— 我们首先取 V 的一个光滑射影紧化 Y，使得 $D_Y := Y - V$ 是一个简单正规交叉除子。由 § 1.3，存在一个正规射影簇 X 紧化 U，使得 f' 延拓为有限态射 $f\colon X \to Y$。令 $\mu\colon Z \to X$ 为严格消解，使得 $\mu^{-1}(U) \simeq U$，且 $D_Z := Z - \mu^{-1}(U)$ 是一个简单正规交叉除子。记 $g = f \circ \mu$。

断言 ***4.9***。— $E := K_Z + D_Z - g^*(K_Y + D_Y)$ 是一个有效的例外除子。

断言 *4.9* 的证明。——由于 $g\colon (Z, D_Z) \to (Y, D_Y)$ 是一个对数态射， E 是有效的。设 D_Y^{sing} 为 D_Y 的奇点，它是 Y 中余维至少为二的扎里斯基闭子集。记 $Y_\circ := Y - D_Y^{\mathrm{sing}}$，以及 $X^\circ := f^{-1}(Y_\circ)$。注意到 X° 是光滑的，且 $D_X^\circ := X^\circ - U$ 是一个光滑的

X° 中的除子。此外，由 [Den22 引理 A.12] 的证明可知，对于任意 $x \in D_X^\circ$，我们可以在 x 周围取一个全纯坐标 $(\Omega; x_1, \ldots, x_n)$，满足 $D_X^\circ \cap \Omega = (x_1 = 0)$；并在 $f(x)$ 周围取一个全纯坐标 $(\Omega'; y_1, \ldots, y_n)$，满足 $D_Y \cap \Omega' = (y_1 = 0)$，使得

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1^k, x_2, \ldots, x_n).$$

这意味着 $K_{X^\circ} + D_X^\circ = f^*(K_{Y^\circ} + D_Y^\circ)$。由于 μ是严格消解，因此可得$\mu^{-1}(X^\circ) \simeq X^\circ$。因此，$\mu(K_Z + D_Z - g^*(K_Y + D_Y))$ 包含于 $f^{-1}(D_Y^{\mathrm{sing}})$ 中，而后者的余维至少为二。□

因此，有

$$\kappa(K_Z + D_Z) = \kappa(g^*(K_Y + D_Y) + E) = \kappa(g^*(K_Y + D_Y)) = \kappa(K_Y + D_Y).$$

其中，第一个等式由上述断言得出，第二个等式归因于 [Laz04, 例 2.1。16] 最后一个等式由 [Uen75, 引理 5.13]得出。这说明 $\bar{\kappa}(U) = \bar{\kappa}(V)$。□

4.5. 定理 F 的证明。—

定理 ***4.10*** **(=定理 F)**。— 设 X 是一个复光滑拟射影簇，且 G 是某个非阿基米德局部域 K 上的几乎单代数群。如果 $\varrho\colon \pi_1(X) \to G(K)$是一个扎里斯基稠密且无界的大表示，那么 X 既是强对数一般型的，也是伪 *Picard* 双曲的。

证明基于定理 4.5 和定理 4.6，以及命题 4.7 与引理 4.4。我们先证明下面的引理。

引理 ***4.11.*** — 设 X 是满足性质 *4.3* 的光滑拟射影簇。那么存在一个真扎里斯基闭子集 $E \subsetneq X$，使得若 $V \subset X$ 是满足 $V \not\subset E$ 且维数为正的闭子簇，则其任意光滑修改 $W \to V$ 都满足性质 *4.3*。

证明. — 我们使用性质 4.3 中描述的以下对象：$\pi\colon \Sigma \to X, \tau_1, \ldots, \tau_l \in H^0(\overline{\Sigma}, \pi^*\overline{\Omega}_X(\text{（对数 } D\text{）}))$，$a\colon \overline{\Sigma} \to A$，以及 $R \subset \Sigma$。此外，我们设 $\overline{Z_i} := \{z \in \Sigma \mid \tau_i(z) = 0\}$，使得 $R = \cup_i Z_i$。

步骤1。 我们构造 $E \subsetneq X$。给定 i，我们首先构造一个真扎里斯基闭子集 $F_i \subsetneq \Sigma$，使其具有以下性质：若 $g\colon T \to \Sigma$ 是从光滑拟射影簇T出发的态射，且 $g^*\tau_i$在 $H^0(T, \Omega_T)$中消失，并且 $g(T) \not\subset F_i$，则 $g(T) \cap Z_i = \emptyset$。

$F_i \subsetneq \Sigma$ 的构造如下。设 $\mu : Y \to \Sigma$ 是一个奇点消解，满足$Y := \mu^{-1}(\Sigma)$。令 $\alpha_Y\colon Y \to \mathrm{A}_Y$ 为拟阿尔巴内塞态射。由拟阿尔巴内塞态射的泛性质，复合映射 $a \circ \mu\colon Y \to A$ 可经由 α_Y因子分解。设 $\omega_i := \mu^*\tau_i$。我们知道，存在一个对数一形式 $\widetilde{\omega}_i \in T_1(\mathrm{A}_Y)$，使得 $\omega_i = \alpha_Y^*\widetilde{\omega}_i$。考虑$\mathrm{A}_Y$ 中使 $\widetilde{\omega}_i$ 消失的最大半阿贝尔子簇 B_i。记 $q_i : \mathrm{A}_Y \to \mathrm{A}_Y/B_i$ 为商映射，并令$\beta_i\colon Y \to \mathrm{A}_Y/B_i$ 为复合态射。记 $Z_i' := (\omega_i = 0)$，它是 Y的一个真扎里斯基闭子集。由引理 1.1，对于 Z_i'的任意不可约分支 Z，$\beta_i(Z)$是A_Y/B_i中的一个点。由于 Z_i'只有有限个不可约分支，因此 $\beta_i(Z_i')$是A_Y/B_i中的有限点集。记 $F_i' := \beta_i^{-1}(\beta_i(Z_i'))$，它是 Y的一个真扎里斯基闭子集。扩大F_i'后，我们可以假设 $\mu\colon Y - F_i' \to \Sigma$ 是一个开浸入。令 $F_i = \mu(F_i')$。于是 $F_i \subsetneq \Sigma$是一个真扎里斯基闭集。

为了证明 F_i 具有所需性质，设 $g\colon T \to \Sigma$ 是从光滑准射影簇 T出发的一个态射，使得 $g^*\tau_i$在 $H^0(T, \Omega_T)$ 中消失，且 $g(T) \not\subset F_i$。由于 $\mu\colon Y \to \Sigma$在 F_i上是同构，我们可以取一个光滑修改 $T' \to T$，使得 $g\colon T \to \Sigma$ 提升为$g'\colon T' \to Y$。由 $g^*\tau_i = 0$，我们有 $(g')^*\omega_i = 0$。由引理 1.1，我们得出 $\beta_i \circ g'(T')$ 是 A_Y/B_i 中的一个点。由 F_i'的构造可知，$\beta_i \circ g'(T') \not\subset \beta_i(Z_i')$。因此 $g'(T) \cap Z_i' = \emptyset$。由 $\mu^{-1}(Z_i) \subset Z_i'$，我们有 $g(T) \cap Z_i = \emptyset$。于是，我们构造出了具有所需性质的 $F_i \subsetneq \Sigma$。

由定理 4.5，我们有 $\mathrm{Sp}^{\mathrm{alg}}(Y) \subsetneq Y$。根据性质 4.3.(i)，我们取一个真扎里斯基闭集 $\Xi \subsetneq \Sigma$，使得 $a\colon \Sigma - \Xi \to A$是拟有限的。我们令 $E = \pi \circ \mu(\mathrm{Sp}^{\mathrm{alg}}(Y)) \cup \pi(\Xi) \cup \cup_i \pi(F_i)$。于是 $E \subsetneq X$ 是一个真扎里斯基闭子集。

步骤 2. 设 $V \subset X$ 是一个正维闭子簇，满足 $V \not\subset E$。记 $W \to V$ 为一个光滑修改。设W 是W 的一个光滑射影紧化，使得

$D := \overline{W} - W$ 是一个简单正规交叉除子，并且 $(W, D) \to (X, D)$ 是一个对数态射。

设 S 是 $\overline{W} \times_X \Sigma$ 的一个不可约分支的正规化。

$$\begin{array}{ccc} \overline{S} & \xrightarrow{g} & \overline{\Sigma} \\ \downarrow p & & \downarrow \pi \\ \overline{W} & \longrightarrow & \overline{X} \end{array}$$

令 $S := p^{-1}(W)$。则 $g(S) \not\subset \Xi \cup \mu(\mathrm{Sp}^{\mathrm{alg}}(Y))$。因此，$S$ 是对数一般型的，且 $\dim S = \dim a \circ g(S)$。所以，性质 4.3 的性质 4.3.(i) 得以满足。

令 ψ_i 为 $\tau_i \in H^0(\Sigma, \pi^*\Omega_X(\log D))$ 在 $S \to \Sigma$ 下的拉回。于是，我们可以将 ψ_i 视为 $H^0(S, p^*\Omega(\log D))$ 中的一个截面。令 I 为所有满足 W 的 i 的集合 $S \to \Sigma$ 的像与 $Z_i := \{z \in \Sigma \mid \tau_i(z) = 0\}$ 相交。

断言 ***4.12***。——对于 $i \in I$，$\psi_i \neq 0$ 在 $H^0(S, p^*\Omega(\log D))$。

证明. — 反设 $\psi_i = 0$ in $H^0(S, p^*\Omega(\log D))$. 设 $\varphi : T \to S$ 是一个 W 光滑修改。于是 $\varphi^*\psi_i = 0$。因此，根据 F_i 的选取，我们有 $g \circ \varphi(T) \cap Z_i = \emptyset$，从而 $g(S) \cap Z_i = \emptyset$。这与假设 $i \in I$ 矛盾。□

我们设

$$R' := \{z \in \overline{S} \mid \exists i \in I \text{ with } \psi_i(z) = 0\}.$$

根据上述断言，R' 是 S 的一个真扎里斯基闭子集。回想一下，$\pi : \Sigma \to X$ 在 $\Sigma - R$ 上是 étale 的，其中 $R := \cup_i Z_i'$。由于 étale 态射的基变换仍是 étale 态射，因此可知 p 在 $S - g^{-1}(R)$ 上是 étale 的。我们有 $g^{-1}(R) \subset R'$，因为对于 $i \notin I$，$S \to \Sigma$ 的像与 Z_i 不相交，所以这样的 Z_i 不会对 $g^{-1}(R) \cap S$ 有所贡献。因此，p 在 $S - R'$ 上是 étale 的。引理 4.11 的证明完成。□

定理 *4.10* 的证明。——由引理 4.4，簇 X 满足性质 4.3。令 $E \subsetneq X$ 为引理 4.11 中的一个真扎里斯基闭子集。

令 $Z \subset X$ 为一个不包含于 E 中的正维闭子簇，并令 $Z' \to Z$ 为一个光滑修改。由引理 4.11，簇 Z' 满足性质 4.3。因此，由命题 4.7，Z'，进而 Z，是对数一般型。由此可得

$$\mathrm{Sp}_{\mathrm{alg}} \subset E \subsetneq X,$$

因此 X 是强对数一般型。

现在令 $f : \mathbb{D}^* \to X$ 为一个满足 $f(\mathbb{D}^*) \not\subset E$ 的全纯映射。令 $V \subset X$ 表示 $f(\mathbb{D}^*)$ 的扎里斯基闭包。于是 $V \not\subset E$。令 $W \to V$ 为一个光滑修改。于是，由引理 4.11，W 满足性质 4.3。应用定理 4.6，我们得出 f 可延拓为一个全纯映射

$$\bar{f} : \mathbb{D} \to \overline{X}.$$

因此，

$$\mathrm{Sp}_{\mathrm{p}} \subset E \subsetneq X,$$

并且 X 是伪皮卡超曲的。这就完成了定理的证明。□

5. 刚性表示与 ℂ-VHS

在本节中，我们证明，光滑准射影代数簇基本群的刚性表示源自复霍奇结构变分（简称 ℂ-VHS），这就是定理 5.8 的内容。Mochizuki 首先在其篇幅宏大且技术细节繁复的论文 [Moc06] 中确立了这一结果。为求完整起见，我们在此给出证明。我们的论证依赖于 Mochizuki 在非紧情形下的小林–希钦对应，以及他在 [Moc06,Moc07b] 中所发展的、X 上从 $\pi_1(X)$ 到 $\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ 的约化表示与驯化纯虚调和丛之间的对应。

5.1. 温和与纯虚调和丛。—

定义 ***5.1*** （**Higgs 丛**）。——复流形 X 上的一个 *Higgs* 丛 是一个对 $(E,\ \theta)$，其中 E 是全纯向量丛，$\theta:\ E \to E \otimes \Omega_X^1$ 是取值于自同态丛 $\mathrm{End}(E)$ 的全纯一形式，称为 *Higgs* 场，并满足 $\theta \wedge \theta = 0$。

设 $(E,\ \theta)$ 是复流形 X 上的一个 Higgs 丛。假设 h 是 E 上的光滑厄米度量。记 ∇_h 为相对于 h 的 Chern 联络，记 $\theta^\dagger{}_h$ 为相对于 h 的 θ 的伴随。为简便起见，我们用 $\theta^\dagger$ 表示 $\theta^\dagger{}_h$。若联络 $\mathbb{D}_1 := \nabla_h + \theta + \theta^\dagger$ 是平坦的，即 $\mathbb{D}_1^2 = 0$，则称度量 h 为 调和的 。

定义 ***5.2*** （**调和丛**）。— X 上的一个调和丛 是一个赋有调和度量 h 的 Higgs 丛 $(E,\ \theta)$。

设 $\overline{X}$ 是一个紧复流形，$D = \sum_{i=1}^{\ell} D_i$ 是 X 的一个简单正规交叉除子，且 $X = X\backslash D$ 是 D 的补集。设 $(E,\ \theta,\ h)$ 是 X 上的一个调和丛。取 D 中任意一点 p，并设 $(U;\ z_1,\ \ldots\ldots,\ z_n)$ 是以 p 为中心的坐标系，使得 $D \cap U = (z_1 \cdots z_\ell = 0)$。在 U 上，我们有如下描述：

$$\theta = \sum_{j=1}^{\ell} f_j d\log z_j + \sum_{k=\ell+1}^{n} f_k dz_k.$$

定义 ***5.3*** （**温和性**）。— 令 t 为一个形式变量。对于任意 $j = 1$、...、l，特征多项式 $\det(f_j - t) \in \mathrm{O}(U\backslash D)\ [t]$是关于 t的多项式，其系数为全纯函数。如果对于所有 j，这些函数都可以延拓为 U 上的全纯函数，则称调和丛在 p处是温和的 。如果调和丛在每一点处都是温和的，则称其为温和的 。

对于 X上的温和调和丛（$E,\ \theta,\ h$），我们通过一个 O_X-模${}^\diamond E_h$层将 E 延拓到 $\overline{X}$上，具体如下：对于 X的任意开集 U，

$${}^\diamond E_h(U) := \{\sigma \in \Gamma(U\backslash D, E|_{U\backslash D}) \mid |\sigma|_h \lesssim \prod_{i=1}^{\ell} |z_i|^{-\varepsilon} \ \text{ for all } \varepsilon > 0\}.$$

在 [Moc07a] 中，Mochizuki 证明了 ${}^\diamond E_h$ 是局部自由的，并且 θ 延拓为一个态射

$${}^\diamond E_h \to {}^\diamond E_h \otimes \Omega_{\overline{X}}(\log D),$$

我们仍将其记为 θ。

定义 ***5.4*** （**纯虚、幂零留数**）。— 设（$E,\ h,\ \theta$）是 $X\backslash D$上的温和调和丛。留数 $\mathrm{Res}_{D_i}\theta$ 在 ${}^\diamond E_h|_{D_i}$上诱导出一个自同态。其特征多项式具有常值系数，因而特征值为常值。若对于 D的每个分支 D_i，$\mathrm{Res}_{D_i}\theta$的特征值全都是纯虚数（相应地，全部为零），则称（$E,\ \theta,\ h$）是纯虚的 （相应地，具有幂零留数）。

可以验证，定义 5.4 不依赖于 $X\backslash D$ 的紧化 $\overline{X}$。

定理 ***5.5*** (**Mochizuki [Moc07b, 定理 25.21]**). — 设 X 是一个光滑拟射影簇，且 (E, θ, h) 是 X 上的一个驯化纯虚调和丛。那么，平坦丛$(E, \nabla_h + \theta + \theta^\dagger)$是半单的。反过来，如果$(V, \nabla)$是 X 上的半单平坦丛，那么存在 X 上的一个驯化纯虚调和丛(E, θ, h)，使得$(E, \nabla_h + \theta + \theta^\dagger) \simeq (V, \nabla)$。此外，当 ∇ 是单时，任意这样的调和度量 h 在正数倍意义下唯一。

5.2 正则滤过 Higgs 丛。 — 本小节中，我们回顾正则滤过 Higgs 丛的概念。更多细节请参见 [Moc06]。设 X 是一个复流形，$D = \sum_{i=1}^{\ell} D_i$ 是一个约化简单正规交叉除子，且 $U = X - D$ 是 D 的补集。我们将 U 到 X 的包含映射记为 j。

定义 ***5.6.*** — (E_*, θ) 上的正则滤过 *Higgs* 丛是 E 上的全纯向量丛，连同一个由 j_*E 的相干子层构成的 $\mathbb{R}^\ell$ 索引滤过 ${}_aE$（所谓的抛物结构），使得

1. $a \in \mathbb{R}^\ell$ 和 ${}_aE|_U = E$。2. 对于 $1 \le i \le l$，${}_{a+\mathbf{1}_i}E = {}_aE \otimes \mathrm{O}_X(D_i)$，其中 $\mathbf{1}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$，第 i 个分量为 1。3. 对任意满足 $0 < \varepsilon \ll 1$ 的向量 $\varepsilon = (\varepsilon, \ldots, \varepsilon)$，${}_{a+\varepsilon}E = {}_aE$。

4. 集合 权重 $\{\boldsymbol{a} \mid {}_{\boldsymbol{a}}E/{}_{\boldsymbol{a}-\varepsilon}E \neq 0$ 对于任意满足 $0 < \varepsilon \ll 1$ 的向量 $\varepsilon = (\varepsilon, \ldots, \varepsilon)\}$ 在 $\mathbb{R}^{\ell}$ 中是离散的。5. 存在一个 O_X-线性映射，即所谓的 Higgs 场，

$$\theta : {}^{\circ}E \to \Omega^1_X(\log D) \otimes {}^{\circ}E$$

使得 $\theta \wedge \theta = 0$，并且

$$\theta({}_{\boldsymbol{a}}E) \subseteq \Omega^1_X(\log D) \otimes {}_{\boldsymbol{a}}E.$$

将 ${}_{\mathbf{0}}E$ 记作 ${}^{\circ}E$，其中 $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$。根据 Borne-Vistoli 的工作，抛物丛的抛物结构是局部阿贝尔的，即 它存在与滤过相容的局部标架（例如参见 [IS07] 和 [BV12]）。

一类自然的正则滤过 Higgs 丛来自温和调和丛的延拓。我们首先回顾 [Moc07a, §2.2.1] 中的一些概念。设 E 是一个带有 C^{∞} 厄米度量 h 的全纯向量丛，定义在 $X - D$ 上。任取 $x \in D$。设 $(\Omega; z_1, \ldots, z_n)$ 是以 x 为中心的 X 坐标系。对于任意截面 $\sigma \in \Gamma(\Omega - D, E|_{\Omega - D})$，令 $|\sigma|_h$ 表示 σ 关于度量 h 的范数函数。若存在正数 C 使得 $|\sigma|_h \leq C \cdot \prod_{i=1}^{\ell} |z_i|^{-b_i}$，则记 $|\sigma|_h \in$ 为 $\mathrm{O}(\prod_{i=1}^{\ell} |z_i|^{-b_i})$。对于任意 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\ell}$，记 $-\mathrm{ord}(\sigma) \leq \boldsymbol{b}$ 表示：

$$|\sigma|_h = O(\prod_{i=1}^{\ell} |z_i|^{-b_i - \varepsilon})$$

对任意实数 $\varepsilon > 0$ 和 $0 < |z_i| \ll 1$。对任意 $\boldsymbol{b}$，层 ${}_{\boldsymbol{b}}E$ 定义如下：

$$\Gamma(\Omega, {}_{\boldsymbol{b}}E) := \{\sigma \in \Gamma(\Omega - D, E|_{\Omega - D}) \mid -\mathrm{ord}(\sigma) \leq \boldsymbol{b}\}.$$

层 ${}_{\boldsymbol{b}}E$ 称为按递增次序 $\boldsymbol{b}$ 对 E 的延拓。特别地，在 $\boldsymbol{b} = (0, \ldots, 0)$ 的情形下，我们使用记号 ${}^{\circ}E$。

根据 Simpson [Sim90，定理 2] 以及 Mochizuki [Moc07a，定理 8.58]，，上述延拓给出了一个正则滤过 Higgs 丛。

定理 ***5.7***（**Simpson，Mochizuki**）。— 设 (X, D) 是一个复流形 X，带有一个简单正规交叉除子 D。若 (E, θ, h) 是 $X - D$ 上的一个温和调和丛，则上述定义的相应滤过 ${}_{\boldsymbol{b}}E$ 在 (X, D) 上定义了一个正则滤过 *Higgs* 丛 $(\boldsymbol{E}_{\ast}, \theta)$。□

5.3. 特征簇与刚性表示。 — 本小节讨论特征簇与刚性表示。设 X 是一个拟射影流形，G 是一个定义在数域 k 上的约化代数群。我们有一个定义在 $\mathbb{Q}$ 上的仿射概形 $\mathrm{Hom}(\pi_1(X), G)$，它表示函子

$$S \mapsto \mathrm{Hom}(\pi_1(X), G(S))$$

对于任意环 S。特征簇 $M_B(\pi_1(X), G) := \mathrm{Hom}(\pi_1(X), G)//G$ 是 $\mathrm{Hom}(\pi_1(X), G)$ 在 G 的共轭作用下所得的 GIT 商，其中 G 通过共轭作用在其上。请注意，尽管称其为簇，它也可能是可约的。因此，$\mathrm{Hom}(\pi_1(X), G) \to M_B(\pi_1(X), G)$ 是满射。对于任意表示 $\varrho : \pi_1(X) \to G(\mathbb{C})$，我们用 $[\varrho]$ 表示它在 $M_B(\pi_1(X), G)$ 中的像。我们列出本文将用到的一些特征簇的性质；更多细节请参阅综述论文 [Sik12]。

设 K 是任意一个包含 k 的特征零代数闭域。若表示 $\varrho : \pi_1(X) \to G(K)$ 的 $\varrho(\pi_1(X))$ 的扎里斯基闭包是一个约化群，则称该表示为约化 表示。特别地，当 G 是约化群时，$\mathrm{Hom}(\pi_1(X), G)(K)$ 中的扎里斯基稠密表示都是约化的。

根据 [Sik12，定理 30]，，当且仅当表示 ϱ 在 $\mathrm{Hom}(\pi_1(X), G)(K)$ 中的轨道是闭的时，ϱ 是约化的。两个约化表示 ϱ，ϱ' 当且仅当 $[\varrho] = [\varrho']$ 时，在 $G(K)$ 作用下共轭。

约化表示 $\varrho : \pi_1(X) \to G(K)$ 若包含 $[\varrho]$ 的 $M_B(\pi_1(X), G)$ 的不可约分支是零维的，则称为刚性；否则称为非刚性。对于刚性约化表示 ϱ，根据上述论证，任何约化的连续变形 $\varrho' : \pi_1(X) \to G(K)$ of ϱ 都在 $G(K)$ 下与 ϱ 共轭。

5.4. 刚性表示底层为 $\mathbb{C}$-VHS。 — 我们将证明，任何刚性表示的底层都是一个 $\mathbb{C}$-VHS。关于相对于某个充分极化 L 的正则滤过 Higgs 丛的 μ_L-稳定性定义，请参阅 [Moc06, §3.1.3] 。

定理 ***5.8***。——设 X是一个准射影流形。设 $\sigma\colon \pi_1(X) \to G(\mathbb{C})$是一个扎里斯基稠密表示，其中 G 是 $\mathbb{C}$上的约化代数群。若 σ 是刚性的，则 σ 底层对应一个 $\mathbb{C}$-*VHS*。

证明。——固定一个忠实表示 $G \to \mathrm{GL}_N$， σ诱导出一个表示 $\varrho\colon \pi_1(X) \to \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$，其扎里斯基闭包为 G。

步骤*1*。我们可以假设 ϱ 是一个单表示。由于 ϱ 的扎里斯基闭包是 G，可知 ϱ是半单的，因此 $\varrho = \oplus_{i=0}^{\ell}\varrho_i$，其中 $\varrho_i\colon \pi_1(X) \to GL(V_i)$是一个单表示，且 $\oplus_{i=0}^{\ell}V_i = \mathbb{C}^N$。令 $G_i \subset GL(V_i)$为 ϱ_i的扎里斯基闭包，它是约化的。于是 $G := \prod_{i=0}^{\ell} G_i$，从而 $M_B(X, G) = \prod_{i=1}^{\ell} M_B(X, G_i)$。由于 $[\varrho]$是 $M_B(X, G)$中的一个孤立点，这意味着每个 $[\varrho_i]$都是孤立点，因而是刚性的。因此，为证明该定理，我们可以假设 $\varrho\colon \pi_1(X) \to \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$是一个单表示。

步骤 *2*。*Higgs* 场与实数缩放。取 X 的一个射影紧化 X ，使得 $D := X\backslash X$ 是一个简单正规交叉除子。在 X 上固定一个充 ample 极化 L 。根据定理 5.5，我们可以找到一个单值化为 ϱ 的温和纯虚调和丛（E， θ， h），其单值化表示由定理 5.5 给出。于是，根据定理 5.7，可以令（$\mathbf{E}_*$, $\overline{\theta}$）为（E， θ， h）在对数对（X， D）上所对应的正则滤子 Higgs 丛。这个滤子 Higgs 丛是具有平凡特征数的 μ_L-稳定正则滤子 Higgs 丛。

令 t 为 $]0,1]$ 中的一个实数。则（E_*， $t\theta$）同样是具有平凡特征数的 μ_L-稳定对象。根据小林-希钦对应 [Moc06，定理 9.4], ，存在一个适用于（E， $t\theta$）的多重调和度量 h_t ，其适配于（E_*, $t\theta$）的抛物结构。特别地，（E， $t\theta$，h_t）是一个温和调和丛。此外，由于 t 是实数，它还是纯虚的。因此，根据定理 5.5，平坦联络$\mathbb{D}_t := \nabla_{h_t} + t\theta + (t\theta)^{\dagger}\mathrm{h}_t$的相关单值化表示 $\varrho_t\colon \pi_1(X) \to \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$是半单的。这里， ∇_t 是（ E，h_t ）的 Chern 联络。根据 [Moc06，引理 10.10], ， ϱ_t 的 Zariski 闭包与 ϱ 的 Zariski 闭包重合，因此也是 G。所以 $[\varrho_t] \in M_B$（π_1（X）， G）$\mathbb{C}$。

步骤 *3.* 变形之间等距变换的存在性。 由 [Moc06 的证明、定理 10.1 和引理 10.11],可知，映射

$$]0,1] \to M_B(\pi_1(X), G)(\mathbb{C})$$
$$t \mapsto [\varrho_t]$$

是连续的，其中我们赋予复仿射簇 $M_B(\pi_1(X), G)(\mathbb{C})$ 解析拓扑。由于 $[\varrho] \in M_B(X, G)(\mathbb{C})$ 是孤立的，且 ϱ_t是约化的，因此 ϱ_t与 ϱ共轭。这意味着对每个 $t \in]0,1]$， ϱ_t 也都是单的。设 V 为 E的底层光滑向量丛。固定某些$t \in]0,1[$。由此可构造一个光滑自同构 $\varphi\colon V \to V$，使得 $\mathbb{D}_t = \varphi^*\mathbb{D}_1 := \varphi^{-1}\mathbb{D}_1\varphi$。因此，由 $\varphi^*\mathrm{h}(u,v) := \mathrm{h}(\varphi(u), \varphi(v))$ 定义的 $\varphi^*\mathrm{h}$ 是平坦丛 $(V, \varphi^*\mathbb{D}_1) = (V, \mathbb{D}_t)$ 的调和度量。根据定理 5.5 中单平坦丛的调和度量的唯一性，存在一个常值 $c > 0$，使得 $c\varphi^*\mathrm{h} = \mathrm{h}_t$。将 V的自同构 φ替换为 $\sqrt{c}\varphi$，从而得到 $\varphi^*\mathrm{h} = \mathrm{h}_t$。

步骤 *4*。 θ 是幂零的。 由于关于度量 h_t 将 $\mathbb{D}_t$ 分解为酉联络与自伴算子之和的方式是唯一的，这意味着

$$\nabla_{h_t} = \nabla_{\varphi^*h} = \varphi^*\nabla_h$$
$$t\theta + (t\theta)^{\dagger}_{h_t} = \varphi^*(\theta + \theta^{\dagger}_h).$$

由于 $E = (V, \nabla^{0,1}h) = (V, \nabla^{(0,1)}h_t)$，第一个等式意味着 φ 是 E 的全纯同构。第二个等式意味着

$$t\theta = \varphi^*\theta := \varphi^{-1}\theta\varphi. \tag{5.8.1}$$

令 T 为一个形式变量。考虑特征多项式

$$\det(T - \varphi^{-1}\theta\varphi) = \det(T - \theta) = T^N + a_1T^{N-1} + \cdots + a_0$$

其中 $a_i \in H^0(\overline{X},\ \Omega^i_{\overline{X}}(\log\ D))$。注意到

$$\det(T - t\theta) = T^N + ta_1T^{N-1} + \cdots + t^N a_0.$$

由 (5.8.1) 和 $t \in (0,1)$，可得 $a_i \equiv 0$ 对每个 $i = 1, \ldots, N$ 均成立。因此，θ 是幂零的 .

步骤 5. 将 θ 按 U(1) 中的元素缩放。由上一步可知，(E, θ, h) 按定义 5.4 的意义具有幂零留数。于是，对任意 $\lambda \in \mathrm{U}(1)$，$(E, \lambda\theta, \mathrm{h})$ 也具有幂零留数，因此是驯化纯虚调和丛。我们应用 [Moc06 的引理 10.9 和 10.10]，得出对于平坦联络 $\mathbb{D}_\lambda := \nabla_h + \lambda\theta + \lambda\theta^\dagger \mathrm{h}$ 的单值化表示 ϱ_λ，其扎里斯基闭包也是 G，这意味着 ϱ_λ是约化的。因此 $[\varrho_\lambda] \in M_B(\pi_1(X), G)(\mathbb{C})$。由于 ϱ_λ 是 $\mathrm{Hom}(\pi_1(X), G)(\mathbb{C})$ 中 ϱ的连续变形，且 $[\varrho] \in M_B(X, G)(\mathbb{C})$ 是孤立的，因此 ϱ_λ 与 ϱ共轭。

步骤 *6.* 证明结束。 其余证明与 [BDDM22，命题 4.8] 完全相同；为求完备起见，我们仍将其给出。现固定一个 $\lambda \in \mathrm{U}(1)$，它不是单位根。由上述相同论证可知，存在一个光滑自同构 $\phi : V \to V$，使得 $\mathbb{D}_\lambda = \phi^*\mathbb{D}_1 := \phi^{-1}\mathbb{D}_1\phi$且 $\phi^*h = h$。此外，

$$\nabla_h = \nabla_{\phi^*h} = \phi^*\nabla_h$$
$$\lambda\theta + \overline{\lambda}\theta^\dagger_h = \phi^*(\theta + \theta^\dagger_h).$$

换言之，$\phi : (E, h) \to (E, h)$ 是一个全纯自同构，而且还是一个等距变换。此外，$\phi^*\theta = \lambda\theta$。考虑 § 5.1 中通过范数增长定义的 $^\diamond E_h$ 在X 上的延拓。由于 $\phi : (E, h) \to (E, h)$ 是一个等距变换，因此它延伸为一个全纯同构$^\diamond E_h \to {}^\diamond E_h$，仍记作 ϕ。回顾一下，(E, θ, h) 和 $(E, \lambda\theta, h)$ 是 tame，因此我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} {}^\diamond E_h & \xrightarrow{\lambda\theta} & {}^\diamond E_h \otimes \Omega_{\overline{X}}(\log D) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle \phi\otimes\mathrm{id}} \\ {}^\diamond E_h & \xrightarrow{\theta} & {}^\diamond E_h \otimes \Omega_{\overline{X}}(\log D). \end{array}$$

令 T 为一个形式变量。考虑 T的多项式 $\det(\phi - T) = 0$。由于其系数是定义在 X上的全纯函数，因此它们全都是常值。令 η 为 $\det(\phi - T) = 0$的一个特征值。考虑由 $\ker(\phi - \eta)^\ell = 0$ 定义的广义特征空间 $^\diamond E_{h,\eta}$，其中取充分大的 l。可以验证 $\theta : {}^\diamond E_{h,\eta} \to {}^\diamond E_{h,\lambda^{-1}\eta} \otimes \Omega_{\overline{X}}(\log\ D)$。由于 λ不是单位根，ϕ的特征值可分成有限条形如 $\lambda^i\eta, \ldots, \lambda^{-j}\eta$的链，使得 $\lambda^{i+1}\eta$ 和 $\lambda^{-j-1}\eta$ 都不是 ϕ的特征值。因此，存在直和分解 $^\diamond E_h = \oplus_{i=0}^m {}^\diamond E_i$，使得

$$\theta : {}^\diamond E_i \to {}^\diamond E_{i+1} \otimes \Omega_{\overline{X}}(\log D).$$

用 [Den22 的术语来说，定义 2.10] $(^\diamond E_h = \oplus_{i=0}^m E_i, \theta)$ 是一个对数霍奇丛系统。可应用 [Den22，命题 2.12] 证明，调和度量h 还是霍奇度量，其含义见 [Den22，定义 2.11], 即 $h(u, v) = 0$当 $u \in E_i|_X$且 $v \in E_j|_X$满足$i \neq j$时。因此，由 [Sim88，§8], (E, θ, h) 对应于 X中的复霍奇结构变分。定理得证。 □

注 ***5.9.*** **—** 上述定理在以下情形中已为我们所知：当 X 是射影的，Simpson 已证明了这一点 [Sim92]；当 σ 在无穷远处具有拟幺幂单值变换且 $G = \mathrm{SL}_n$时，Corlette-Simpson 已证明了这一点 [CS08]；当 $G = \mathrm{GL}_N$ 且 σ 的相应调和丛在无穷远处具有幂零留数时，[BDDM22]中证明了这一点。在上述证明的步骤 1–4 中，我们利用 Mochizuki 的工作证明了 θ 是幂零的。

6. 定理 A 的证明

在本节中，我们证明本文的第一个主要结果——定理 A。证明思路如下：根据表示 ϱ: $\pi_1(X) \to G(\mathbb{C})$ 是否刚性，将论证分为两个关键情形。这一策略现已成为标准做法，其起源可追溯至 [Zuo96]。

情形 1：非刚性。表示非刚性时，我们首先构造一个无界表示 $\varrho'\colon \pi_1(X) \to G(F)$，其中 F 是某个零特征的非阿基米德局部域（参见命题 6.1 ），然后应用定理 F。

情形 2：刚性。当 ϱ 是刚性时，我们可以假设它定义在某个数域 L上。若存在 L 的某个非阿基米德赋值 v ，使得该表示相对于 v无界，我们就应用定理 F。否则，根据定理 5.8，该表示成为一个 $\mathbb{Z}$-霍奇结构变分的复直因子。接着应用定理 1.13。

在我们的证明中，首先在更强的假设 G 是几乎单的条件下实施这一策略，然后将一般的半单情形化归为几乎单情形。此外，我们还需要扎里斯基稠密且大的表示 $\varrho\colon \pi_1(X) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$在伽罗瓦共轭下仍存在这一性质（参见命题 6.5）。

6.1. 无界表示的存在性。—— 我们首先证明一个关于在非阿基米德局部域上的几乎单代数群中构造无界表示的定理。这改进了 [Yam10, §4.2]中的一个先前结果。

命题 ***6.1.*** **—** 设 X 是一个光滑拟射影簇， G 是定义在 $\mathbb{C}$上的几乎单代数群。假设存在一个扎里斯基稠密的非刚性表示$\varrho\colon \pi_1(X) \to G(\mathbb{C})$，那么存在一个扎里斯基稠密的无界表示 $\varrho'\colon \pi_1(X) \to G(F)$，其中 F 是某个特征零的非阿基米德局部域。此外，如果 ϱ 是大簇，那么 ϱ'也取为大簇。

在证明这一点之前，我们先准备两个引理。

引理 ***6.2.*** **—** 设 G 是定义在特征零域 K 上的几乎单代数群。那么它的李代数$\mathrm{Lie}(G)$ 是单的。

证明. — 由于 G 是几乎单的，根据假设 $\mathrm{char}(K) = 0$（参见 [Mil17, 命题 4.1.]），$\mathrm{Lie}(G)$ 是半单的。我们可以将其分解为 $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_r$，其中 $\mathfrak{g}_i$ 是 $\mathrm{Lie}(G)$ 的一个单理想。我们需要证明 $r = 1$。因此反设 $r > 1$。那么 $\mathfrak{g}_1 \subset \mathrm{Lie}(G)$ 既非平凡，也不等于 $\mathrm{Lie}(G)$ 本身。令 $H = C_G(\mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_r)$，这是 G的一个子群，由下式定义

$$C_G(\mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_r) = (R \rightsquigarrow g \in G(R) \mid gx = x \text{ for all } x \in \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_r(R))$$

对所有 k-代数 R 均成立（参见 [Mil17，命题 3.40]）。这意味着 H 在 $\mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_r$ 上作用平凡。因此 $\mathrm{Lie}(H) = \mathfrak{g}_1$。令 $H^0 \subset H$ 为 H 的单位分支。则 $\mathrm{Lie}(H^0) = \mathrm{Lie}(H) = \mathfrak{g}_1$。因此 $\mathrm{Lie}(H^0) \subset \mathrm{Lie}(G)$ 是一个理想。因此 $H^0 \subset G$ 是正规的（参见 [Mil17，定理 3.31]），且既非平凡群，也非 G 本身。由于 G 几乎单，这就产生了矛盾。因此 $r = 1$，且 $\mathrm{Lie}(G)$ 是单的。□

引理 ***6.3***。——设 G 是定义在特征零域 K 上的几乎单代数群。令 伴随表示： $G \to$ 自同构群(李代数(G)) 为伴随表示。设 $W \subset$ 李代数(G) 是一个 K-线性子空间，且在 G 作用下不变。那么，要么 $W =$ 李代数(G)，要么 $W = \{0\}$。

证明. — 写作 $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$。考虑伴随表示$G \to \mathrm{GL}_{\mathfrak{g}}$。对于 V 的任意 K-子空间P，函子

$$R \rightsquigarrow \{g \in G(R) \mid gP_R = P_R\} \text{ for all } K\text{-algebra } R$$

是 G 的一个子群，记作 G_P。根据我们的假设 $G_W = G$。由 [Mil17，命题 3.38],可知 $\mathrm{Lie}(G)_W = \mathrm{Lie}(G)_W$ 其中

$$\mathrm{Lie}(G)_W := \{x \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}(x)(W) \subset W\}.$$

换言之，对于所有 $x \in \mathfrak{g}$， $[x, y] \in W$ $y \in W$ 即 $W \subset \mathfrak{g}$ 是一个理想。注意， $\mathfrak{g}$ 是单李代数。因此 $W = \mathfrak{g}$ 或 $W = \{0\}$。□

命题 ***6.1*** 的证明. — 由于 G 是几乎单的，根据定义在 $\mathbb{C}$ 上的几乎单线性代数群的分类，G 同源于以下各项中的恰好一个：$A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$。因此， G 定义在某个数域 $k \subset \mathbb{Q}$ 上。此外，它是绝对几乎单的，即对于任意域扩张 L/k，基变换 G_L 也是定义在 L 上的几乎单代数群。

由于 $\pi_1(X)$ 是有限表示的，存在一个定义在 k 上的仿射概形 R，使得

$$R(L) = \mathrm{Hom}(\pi_1(X), G(L))$$

对于每个域扩张 L/k。该空间定义如下：我们为 $\pi_1(X)$ 选择生成元 γ_1、……、γ_ℓ。令 R 为生成元 γ_i 之间的关系集合。于是

$$R \subset \underbrace{G \times \cdots \times G}_{\ell \text{ times}}$$

是由方程 $r(m_1,\dots,m_\ell) = 1$ for $r \in$R 定义的闭子概形。表示τ：$\pi_1(X) \to G(L)$ 对应于点 $(m_1,\dots,m_\ell) \in R(L)$，其中 $m_i = \tau(\gamma_i)$。注意，R是一个仿射概形，因为它是仿射簇的闭子概形。

断言 ***6.4.*** **—** 存在一个定义在 k 上的扎里斯基闭子集 $E \subset R$，具有如下性质：设 L 是 k 的域扩张，且 $\tau\colon \pi_1(X) \to G(L)$ 是一个表示，使得$\tau(\pi_1(X))$是无限的。那么，当且仅当相应的点 $[\tau] \in R(L)$ 满足 $[\tau] \in E(L)$ 时，$\tau(\pi_1(X))$在 $G(L)$中不是扎里斯基稠密的。

断言 6.4 的证明。—— [AB94，命题 8.2] 中证明了一个更强的结果。为了完备起见，我们在此给出一个证明。考虑定义在 k 上的伴随作用 $G \curvearrowright \mathrm{Lie}(G)$。该作用在 k 上诱导出对 $G \curvearrowright \mathrm{Gr}_d(\mathrm{Lie}(G)$ 的作用，其中 $0 < d < \dim G$。这里，$\mathrm{Gr}_d(\mathrm{Lie}(G)$ 是格拉斯曼簇，我们将其记为 X_d。回顾一下，对于 L 的延拓 k，G_L 是几乎单的。我们注意到，作用 $G(L) \curvearrowright X_d(L)$ 没有不动点。事实上，如果存在一个不动点 $[P] \in X_d(L)$，其中 $P \subsetneq \mathrm{Lie}(G)_L$ 是一个定义在 L 上的 d 维子空间，则我们得到一个 $G(L)$ 不变子空间 $P \subset \mathrm{Lie}(G)_L = \mathrm{Lie}(G_L)$，这由引理 6.3 可知是不可能的。另一方面，如果 $H \subset G_L$ 是一个维数为 d 的代数子群，那么 $H(L)$ 固定点 $[\mathrm{Lie}(H)] \in X_d(L)$。

设 $S = \{\gamma_1,\dots,\gamma_l\} \subset \pi_1(X)$ 是生成 $\pi_1(X)$ 的有限子集。我们将扎里斯基闭子集 $W_d \subset X_d \times G^S$ 定义为

$$W_d = \{(x, h_1, \dots, h_l); h_i x = x, \forall i \in \{1,\dots,l\}\}.$$

那么，若表示 $\tau\colon \pi_1(X) \to G(L)$ 满足 $\tau(\pi_1(X)) \subset H(L)$，其中某个维数为 d 的代数子群满足该条件，且 $0 < d < \dim G$，则有 $([\mathrm{Lie(H)}], \tau(\gamma_1),\dots,\tau(\gamma_l)) \in W_d(L)$。

设 $p\colon X_d \times G^S \to G^S$ 为投影。由于 X_d 完备，故 p 是真映射。因此，$p(W_d) \subset G^S$ 是定义在 k 上的扎里斯基闭子集。令 $E_d = p(W_d) \cap R$，它是 R 的扎里斯基闭子集。因此，若表示 $\tau\colon \pi_1(X) \to G(L)$ 满足 $\tau(\pi_1(X)) \subset H(L)$，其中某个维数为 d 的代数子群满足该条件，则相应的点满足 $[\tau] \in E_d(L)$。

现在设 $\tau\colon \pi_1(X) \to G(L)$ 是一个表示，使得 $\tau(\pi_1(X))$ 是无限的。首先假设 $\tau(\pi_1(X))$ 在 $G(L)$ 中不是扎里斯基稠密的。令 $H \subset G$ 为 $\tau(\pi_1(X)) \subset G(L)$ 的扎里斯基闭包。则 H 定义在 L 上。由于 $\tau(\pi_1(X))$ 是无限的，我们有 $d = \dim H > 0$。因此，根据上述讨论，我们有 $[\tau] \in E_d(L)$。接下来，设对于某个 d 且 $0 < d < \dim G$，有 $[\tau] \in E_d(L)$。那么根据 $E_d(L) \subset p(W_d(L))$，存在一个 d 维的 L-子空间 $P \subset \mathrm{Lie}(G)_L$，使得 $([P], \tau(\gamma_1),\dots,\tau(\gamma_l)) \in W_d(L)$。因此，$\tau(\pi_1(X))$ 固定点 $[P] \in X_d(L)$。如果 $\tau(\pi_1(X)) \subset G(L)$ 是扎里斯基稠密的，那么 $G(L)$ 也固定 $[P] \in X_d(L)$。如上所见，这是不可能的。因此，$\tau(\pi_1(X)) \subset G(L)$ 不是扎里斯基稠密的。

我们令 $E = E_1 \cup \cdots \cup E_{\dim G - 1}$。至此，命题得证。 □

现在回到命题的证明。群 G 通过同时共轭作用于 R。令 $M = R/\!/G$，并令 $p\colon R \to M$ 为满射的商映射。那么 M 是定义在 k 上的仿射概形。令 $\varrho \in R(\mathbb{C})$ 为对应于扎里斯基稠密表示 $\varrho\colon \pi_1(X) \to G(\mathbb{C})$ 的点。

令 W 为 x_1、……、x_ℓ 中的字的集合。给定 $w \in W$ 我们定义由 $Z_w = \{(m_1$、……、$m_\ell) \in R;\ w(m_1$、……、$m_\ell) = 1\}$ 定义的闭子概形 $Z_w \subset R$。那么 Z_w 定义在 k 上。

令 M' 为 $M_{\bar{\mathbb{Q}}}$ 的不可约分支，使得 $[\varrho] \in M'(\mathbb{C})$。由于 ϱ 是非刚性的，因此 $\dim M' > 0$。令 R' 为包含 ϱ 的 $R_{\bar{\mathbb{Q}}}$ 的不可约分支。由于 $p\colon R_{\bar{\mathbb{Q}}} \to M_{\bar{\mathbb{Q}}}$ 是满射，故 $p|_{R'}\colon R' \to M'$ 是满射。于是 R' 和 M' 定义在 k 的某个有限扩张 K 上。注意，R' 和 M' 是几何不可约的。令 $\eta \in R'$ 为概形泛点。则 $K(\eta)$ 是在 K 上有限生成的。令 $\mathfrak{K}$ 为 K 的一个域扩张，该扩张在 K 上有限生成，并且满足存在一个嵌入 $K(\eta) \hookrightarrow \mathfrak{K}$，且 ϱ 定义在 $\mathfrak{K}$ 上，即$\varrho\colon \pi_1(X) \to G(\mathfrak{K})$。

令 p 为一个素数，并令 $\mathbb{Q}_p$ 为其完备化。由于 $\mathbb{Q}_p$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的超越次数是无限的，且 $\mathfrak{K}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上有限生成，故存在一个有限扩张 $L/\mathbb{Q}_p$，使得存在一个嵌入 $\mathfrak{K} \hookrightarrow L$。于是我们有 $[\varrho] \in R(L)$。回顾一下，G_L 是定义在 L 上的几乎单代数群。我们指出，$\varrho\colon \pi_1(X) \to G(L)$ 是扎里斯基稠密的。因此，根据断言 6.4，我们有 $[\varrho] \notin E(L)$。特别地，我们有 $E \subsetneq R$。

当且仅当 $Z_w(L) \cap R'(L) \subsetneq R'(L)$ 时，我们将 $W_o \subset W$ 定义为 $w \in W_o$。注意到 W 因此 W_o 是可数的。我们可以取 $\eta_0 \in R'(L)$，使得相应的映射 $\eta_0\colon \operatorname{Spec} L \to R'$ 的像 $\eta \in R'$ 具有 。于是，对于所有 $w \in W_o$，都有 $\eta_0 \notin Z_w(L)$，并且 $\eta_0 \notin E(L)$。

由于 $\dim M' > 0$，存在一个 L-概形态射 $\psi\colon M' \to \mathbb{A}^1$，使得像 $\psi(M')$ 在 $\mathbb{A}^1$ 中扎里斯基稠密。回顾一下，$p|_{R'}\colon R' \to M'$ 是满射。因此，像 $\psi \circ p(R')$ 在 $\mathbb{A}^1$ 中扎里斯基稠密，并且存在一条定义在 L 上的仿射曲线 $C \subset R'$，使得限制映射 $\psi \circ p|_C\colon C \to \mathbb{A}^1$ 是一般有限的，且 $\eta_0 \in C(L)$。由于 R' 几何不可约，对于所有 $w \in W_o$ 和 $C \not\subset E$，都有 $C \not\subset Z_w$。我们可以取一个扎里斯基开子集 $U \subset \mathbb{A}^1$，使得 $\psi \circ p|_C$ 在 U 上有限。设 $x \in U(L)$ 是一个点，$y \in C(\bar{L})$ 是 x 上方的一个点。那么，y 定义在 L 的某个扩张上，且其扩张次数有界于 $\psi \circ p|_C\colon C \to \mathbb{A}^1$ 的次数。注意，这样的域扩张只有有限多个。因此，存在一个有限扩张 F/L，使得 $U(L)$ 上方的点都包含在 $C(F)$ 中。由于 $U(L) \subset \mathbb{A}^1(F)$ 无界，像 $\psi \circ p(C(F)) \subset \mathbb{A}^1(F)$ 也是无界的。

令 $R_0 \subset R(F)$ 为对应于 p-有界表示的点集。令 $M_0 \subset M(F)$ 为 R_0 在商映射 $p\colon R \to M$ 下的像。于是由 Yam10 引理 4.2]，M_0 是紧的。因此 $\psi(M_0)$ 是紧的。特别地，它是有界的。另一方面，$\psi \circ p(C(F)) \subset \mathbb{A}^1(F)$ 是无界的。因此 $\psi \circ p(C(F))\backslash\psi(M_0)$ 是一个不可数集。因此 $C(F)\backslash R_0$ 是一个不可数集。于是我们可以取 $y \in C(F)$，使得 $y \notin R_0$，并且对所有 $w \in W_0$ 和 $y \notin E(F)$，均有 $y \notin Z_w(F)$。这里注意到 $C(F) \cap Z_w$ 和 $C(F) \cap E$ 是有限集，因此 $\cup_{w \in W_o}(C(F) \cap Z_w) \cup (C(F) \cap E)$ 是可数集。令 $\varrho'\colon \pi_1(X) \to G(F)$ 为对应于 $y \in C(F) \subset R(F)$ 的表示，即 $[\varrho'] = y$。那么 ϱ' 是一个 p-无界表示，并且根据断言 6.4，ϱ' 是扎里斯基稠密的或具有有限像。

下面我们证明 $\ker(\varrho') \subset \ker(\varrho)$。事实上，$\ker(\varrho')$ 中的每个元素都可写成 $w(\gamma_1, \ldots\ldots, \gamma_\ell)$，其中 $w \in W$ 于是 $[\varrho'] \in Z_{w\circ}$ 因此 $w \notin W_{0\circ}$ 因此 $R(F) \subset Z_{w\circ}$ 特别地，$[\varrho] \in Z_w$，从而 $w(\gamma_1, \ldots\ldots, \gamma_\ell) \in \ker(\varrho)$。这表明 $\ker(\varrho') \subset \ker(\varrho)$。因此，如果 ϱ 是大的，那么 ϱ' 也是大的。特别地，ϱ' 具有无限像，因而具有 Zariski 稠密像。这就完成了命题的证明。□

6.2. 构造伽罗瓦共轭簇的基本群的线性表示。——设 X 是一个复光滑射影簇。回顾一下，给定任意自同构 $\sigma \in \operatorname{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$，我们可以构造共轭簇 X^σ，其定义为复代数簇 $X \times_\sigma \operatorname{Spec} \mathbb{C}$，即通过如下笛卡尔图构造

$$\begin{array}{ccc} X^\sigma & \xrightarrow{\sigma^{-1}} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Spec}\mathbb{C} & \xrightarrow{\sigma^*} & \operatorname{Spec}\mathbb{C} \end{array}$$

它是一个光滑射影簇。若 X 由某个射影空间中的齐次多项式 $P_1, \ldots, P_r$ 定义，则 X^σ 由 P_i 在 σ 下的共轭定义。在这种情况下，笛卡尔图中从 X^σ 到 X 的态射将坐标为 $(x_0 : \ldots : x_n)$ 的闭点映射到齐次坐标为 $(\sigma^{-1}(x_0) : \ldots : \sigma^{-1}(x_n))$ 的闭点，因此我们可以将其记作 σ^{-1}。

态射 $\sigma^{-1}\colon X^\sigma \to X$ 是抽象概形之间的同构，但它不是复代数簇之间的态射。值得注意的是，一般而言，复代数簇 X 和 X^σ 的基本群可能截然不同，Serre [Ser64]的著名例子便说明了这一点。尽管如此，它们的代数基本群（即拓扑基本群的有限生成完备化）之间存在典范同构。

以下命题在定理 A 的证明中起着关键作用：

命题 ***6.5.***—设 X 是一个光滑拟射影簇，且 $\rho\colon \pi_1(X) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 是一个表示。设 $\sigma \in$自同构群$(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$。那么，存在一个表示 $\tau\colon \pi_1(X^\sigma) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$，使得 *Zariki* 闭包满足

$$\overline{\rho(\pi_1(X))}^{\mathrm{Zar}} = \overline{\tau(\pi_1(X^\sigma))}^{\mathrm{Zar}}. \tag{6.5.1}$$

更准确地说，τ 满足以下性质：若 $Y \to X$ 是从光滑拟射影簇 Y出发的态射，则有

$$\overline{\rho(\mathrm{Im}[\pi_1(Y) \to \pi_1(X)])}^{\mathrm{Zar}} = \overline{\tau(\mathrm{Im}[\pi_1(Y^\sigma) \to \pi_1(X^\sigma)])}^{\mathrm{Zar}}. \tag{6.5.2}$$

特别地，若 ρ 是大（分别为大）的，则 τ 是大（分别为大）的。

证明。——设 $\gamma_1, \ldots, \gamma_k \in \pi_1(X)$是 $\pi_1(X)$（作为幺半群）的生成元系。对于 $l = 1, \ldots, k$，令 $\rho(\gamma_l) = (a_{ij}(\gamma_l))_{1\le i,j,\le n} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$。令 $S \subset \mathbb{C}$为由$S = \{a_{ij}(\gamma_l);\ 1 \le i, j \le n, 1 \le l \le k\}$定义的有限子集。令 $\mathbb{Q}(S) \subset \mathbb{C}$为由 S在 $\mathbb{Q}$上生成的子域。于是$\mathbb{Q}(S)$是 $\mathbb{Q}$上的有限生成域。根据 Cassels 的 p 进嵌入定理（参见 [Cas76]），存在一个素数 $p \in \mathbb{N}$和一个嵌入 $\iota\colon \mathbb{Q}(S) \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$，使得

$$|\iota(a)|_p = 1 \tag{6.5.3}$$

对所有 $a \in S$。

我们断言存在一个同构

$$\mu : \overline{\mathbb{Q}_p} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$$

使得对所有 $a \in S$，$\mu \circ \iota(a) = a$，其中$\overline{\mathbb{Q}_p}$ 是 $\mathbb{Q}_p$ 的代数闭包。我们证明这一点s.

设 $B \subset \mathbb{C}$ 是 $\mathbb{C}/\mathbb{Q}(S)$ 的超越基。设 $B' \subset \mathbb{Q}_p$ 是$\mathbb{Q}_p/\iota(\mathbb{Q}(S))\overline{\text{的}}$超越基。那么对于基数，我们有$\#B = \#B' = \#\mathbb{R}$。因此，存在一个延拓$\iota_1\colon \mathbb{Q}(S)(B) \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$ of ι，使得 $\iota_1(\mathbb{Q}(S)(B)) = \iota(\mathbb{Q}(S))(B')$。由于 $\mathbb{C} = \mathbb{Q}(S)(B)$ 且$\mathbb{Q}_p = \iota(\mathbb{Q}(S))(B')$，$\iota_1$ 可延拓为一个同构 $\iota_2\colon \mathbb{C} \to \mathbb{Q}_p$。然后我们令 $\mu = \iota_2^{-1}$，它是一个同构，使得对所有 $a \in S$，$\mu \circ \iota(a) = a$。利用这个同构 μ，我们考虑

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \subset \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_p}) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).$$

由 (6.5.3)，我们有 $\rho(\pi_1(X)) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$。因此，我们可以将 ρ视为 $\rho\colon \pi_1(X) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$，使得

$$\rho(\gamma_l) = (\iota(a_{ij}(\gamma_l)))_{1\le i,j,\le n} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p).$$

$\widehat{}$由于 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ 是一个丛有限群，ρ可延拓为 $\widehat{\rho}\colon \pi_1(X) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$，其中 $\pi_1(X)$ 是 $\pi_1(X)$ 的$\widehat{}$丛有限完备化。注意，$\pi_1(X)$ 是 X 的 étale 基本群，而 X 和 X^σ 的 étale 基本群自然同构：

$$\widehat{\pi_1(X)} \simeq \widehat{\pi_1(X^\sigma)}. \tag{6.5.4}$$

因此，我们通过以下映射的复合定义$\overline{\ }$ $\tau\colon \pi_1(X^\sigma) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$：

$$\pi_1(X^\sigma) \to \widehat{\pi_1(X^\sigma)} \simeq \widehat{\pi_1(X)} \xrightarrow{\widehat{\rho}} \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p) \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_p}).$$

接下来我们证明 (6.5.1)。首先证明

$$\widehat{\rho}(\widehat{\pi_1(X)}) \subset \overline{\rho(\pi_1(X))}^{\mathrm{Zar}} \subset \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_p}). \tag{6.5.5}$$

注意，~~$\rho(\pi_1(X))^{\mathrm{Zar}} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$~~是扎里斯基闭的，因此是 p-进闭的。由于 $\widehat{\rho}\colon \widehat{\pi_1(X)} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ 连续，~~$\widehat{\rho}^{-1}(\rho(\pi_1(X))^{\mathrm{Zar}}) \subset \widehat{\pi_1(X)}$~~是一个闭子集。由于 $\pi_1(X)$ 在 $\to \widehat{\pi_1(X)}$ 中的像稠密，且包含于 $\widehat{\rho}^{-1}(\rho(\pi_1(X))^{\mathrm{Zar}})$ 中~~。因此 $\widehat{\rho}^{-1}(\rho(\pi_1(X))^{\mathrm{Zar}}) = \widehat{\pi_1(X)}$~~。这证明了 (6.5.5)。因此 ~~$\widehat{\rho}(\widehat{\pi_1(X)}) \subset \rho(\pi_1(X))^{\mathrm{Zar}}$~~。反向包含关系显然成立。因此我们有

$$\overline{\rho(\pi_1(X))}^{\mathrm{Zar}} = \overline{\widehat{\rho}(\widehat{\pi_1(X)})}^{\mathrm{Zar}} \subset \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_p}). \tag{6.5.6}$$

类似地，我们有

$$\overline{\tau(\pi_1(X^\sigma))}^{\mathrm{Zar}} = \overline{\widehat{\rho}(\widehat{\pi_1(X)})}^{\mathrm{Zar}} \subset \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_p}).$$

因此，我们在 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ 中有 (6.5.1)。因此，(6.5.1) 在 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 中成立。

最后，我们取一个来自光滑拟射影簇 Y 的态射 $Y \to X$。于是有自然同构 $\widehat{\pi_1(Y)} = \widehat{\pi_1(Y^\sigma)}$，它与 (6.5.4) 交换：

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\pi_1(Y^\sigma)} & = & \widehat{\pi_1(Y)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{\pi_1(X^\sigma)} & = & \widehat{\pi_1(X)} \end{array}$$

由于像 $\mathrm{Im}[\widehat{\pi_1(Y)} \to \widehat{\pi_1(X)}] \to \mathrm{Im}[\pi_1(Y) \to \widehat{\pi_1(X)}]$ 稠密，对 (6.5.6) 的证明作类似论证可得

$$\overline{\rho(\mathrm{Im}[\pi_1(Y) \to \pi_1(X)])}^{\mathrm{Zar}} = \overline{\widehat{\rho}(\mathrm{Im}[\widehat{\pi_1(Y)} \to \widehat{\pi_1(X)}])}^{\mathrm{Zar}} \subset \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_p}).$$

类似地，我们有

$$\overline{\tau(\mathrm{Im}[\pi_1(Y^\sigma) \to \pi_1(X^\sigma)])}^{\mathrm{Zar}} = \overline{\widehat{\rho}(\mathrm{Im}[\widehat{\pi_1(Y)} \to \widehat{\pi_1(X)}])}^{\mathrm{Zar}} \subset \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_p}).$$

因此，我们在 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ 中得到 (6.5.2)，从而也在 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 中得到。

注意，$\overline{\tau(\mathrm{Im}[\pi_1(Y^\sigma) \to \pi_1(X^\sigma)])}^{\mathrm{Zar}}$ 为正维，当且仅当 $\tau(\mathrm{Im}[\pi_1(Y^\sigma) \to \pi_1(X^\sigma)])$ 是无限的。这就证明了定理的最后一个断言。□

6.3. 定理 A 的证明。 — 现在我们可以证明本文的第一个主要结果。定理 ***6.6*** **(=定理 A)。** — 设 X 是一个复拟射影正规簇，且 G 是定义在 $\mathbb{C}$上的半单线性代数群。假设 $\varrho\colon \pi_1(X) \to G(\mathbb{C})$ 是扎里斯基稠密的大表示。对于 X 在 $\sigma \in$ 自同构群 $(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ 作用下的任意伽罗瓦共轭簇 X^σ，

(i) 存在一个真扎里斯基闭子集 $Z \subsetneq X^\sigma$，使得任何不包含于 Z 中的 X^σ的闭子簇 V都是对数一般型。(ii) 此外， X^σ 是伪 *Picard* 双曲。

证明。— 根据引理 1.6，我们可以用消解替换 X，因此可以假设 X 是光滑的。我们先对 X 本身证明该定理。证明分两步进行。

步骤*1.* 我们假设 G 几乎单。 注意， G 与下列某一个群同源：A_n， B_n， C_n， D_n， E_6， E_7， E_8， F_4， G_2，且定义在某个数域 L'上。此外，它是绝对几乎单的。我们分两种情形证明定理。

情形 *1*： ϱ 是刚性的。 由于 ϱ 是 G-刚性的，它共轭于某个扎里斯基稠密表示$\tau\colon \pi_1(X) \to G(L)$，其中 L 是 L'的有限扩张。此外，对于每个嵌入 $v\colon L \to \mathbb{C}$，表示 $v\tau\colon \pi_1(X) \to G(\mathbb{C})$都是刚性的，即 $[v\tau]$是复仿射簇 $M_B(\pi_1(X), G)_{\mathbb{C}}$中的一个孤立点。

情形 *1.1*： 假设对于 L的某个非阿基米德赋值 v，相应的表示$\tau_v\colon \pi_1(X) \to G(L_v)$无界，其中 L_v表示 L关于 v的完备化。注意， τ_v 仍然是扎里斯基稠密且大的，并且 G_{L_v} 是定义在 L_v上的绝对单代数群。应用定理 4.10即可得出定理 6.6。

情形 1.2：固定一个忠实表示 $G \to \mathrm{GL}_N$。假设对于 L 的每个非阿基米德赋值 v，相应的表示 $\tau_v\colon \pi_1(X) \to G(L_v)$ 都是有界的。那么存在一个分解 $\tau\colon \pi_1(X) \to \mathrm{GL}_N(\mathrm{O}_L)$，其中 O_L 是整数环。对于每个嵌入 $v\colon L \to \mathbb{C}$，由于 $v\tau\colon \pi_1(X) \to G(\mathbb{C})$ 是刚性的，根据定理 5.8， $v\tau\colon \pi_1(X) \to \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ 是一个 $\mathbb{C}$-VHS 的底层表示。我们应用 [LS18、命题 7.1 和引理 7.2]，得出 τ 是一个 $\mathbb{Z}$-Hodge结构变分 τ'' 的复直因子。由于 τ 是大子簇， τ'' 也如此。因此，这个 $\mathbb{Z}$-VHS 的周期映射 $p\colon X \to \mathrm{D}/\Gamma$ 满足 $\dim X = \dim p(X)$，其中 Γ 是单值群。令 $Z \subset X$ 为 X 的真扎里斯基闭子集，使得 $p|_{X-Z}$ 是有限的。那么根据定理 1.13，我们得到 X 的伪 Picard 双曲性。由 [BC20]（另见 [CD21]）可知， X 中任何不包含于 Z 的闭子簇 V 都是对数一般型。

情形 *2*： ϱ 是非刚性的。 由命题 6.1 可知，存在一个扎里斯基稠密、大且无界的表示 $\pi_1(X) \to G(K)$，其中 K 是某个零特征的非阿基米德局部域。再次应用定理 4.10，即得证明。

因此，我们已经证明了当 G 是几乎单时， X 的定理成立。

步骤 *2*。我们处理 G 为半单的情形。 注意， G 只有有限多个极小正规子群簇 H_1，……， H_k，且乘法映射

$$H_1 \times \cdots \times H_k \to G$$

是一个同源。每个 H_i 都是几乎单的，并且被其余子群中心化。于是，乘积 $H_1 \cdots H_{i-1}H_{i+1} \cdots H_k$ 也是 G 的一个正规子群。定义 $G_i := G/(H_1 \cdots H_{i-1}H_{i+1} \cdots H_k)$。由此可知，自然映射 $G \to G_1 \times \cdots \times G_k$ 是一个同源。这使我们能够用 $G_1 \times \cdots \times G_k$ 替换 G，而由 ϱ 诱导的表示 $\pi_1(X) \to G_1(\mathbb{C}) \times \cdots \times G_k(\mathbb{C})$ 也扎里斯基稠密且大。我们仍用 ϱ 表示此表示。取投影 $\varrho_i\colon \pi_1(X) \to G_i(\mathbb{C})$。那么对于所有 i， ϱ_i 都是扎里斯基稠密的。

我们应用命题 2.5。然后，经过 X 的一个 étale 覆盖后，存在一个有理映射 $p_i\colon X \dashrightarrow Y_i$ 以及一个大表示 $\tau_i\colon \pi_1(Y_i) \to G_i(\mathbb{C})$，使得 $p_i^*\tau_i = \varrho_i$。于是 τ_i 是大且 Zariski 稠密的。因此，我们可以应用上文的步骤1，得到真 Zariski 闭集 $Z_i \subsetneq Y_i$，使得定理6.6.(ii) 对 Y_i 成立，其中 Z_i 是例外集。令 $q\colon X \dashrightarrow Y_1 \times \cdots \times Y_k$ 为自然映射，并令 $\alpha\colon X \dashrightarrow S$ 为 q 的拟 Stein 分解（参见引理 2.1）。那么 α 是双有理的。事实上，令 $F \subset X$ 为 α 的一般纤维。为证明 $\dim F = 0$，反设 $\dim F > 0$。由于诱导映射 $F \to Y_i$ 是常值的，我们有 $\varrho_i(\mathrm{Im}[\pi_1(F) \to \pi_1(X)]) = \{1\}$。因此 $\varrho(\mathrm{Im}[\pi_1(F) \to \pi_1(X)]) = \{1\}$。这与 ϱ 是大的假设矛盾。因此 $\dim F = 0$，故 α 是双有理的。

现在我们设 $Z = \mathrm{Ex}(\alpha) \cup (\cup_i p_i^{-1}(Z_i))$。设 $f\colon \mathbb{D}^* \to X$ 全纯，且其像不包含于 Z。那么由上面的步骤1可知，映射 $p_i \circ f\colon \mathbb{D}^* \to Y_i$ 在 $0 \in \mathbb{D}$ 处没有本性奇点，因此 $\alpha \circ f\colon \mathbb{D}^* \to S$ 也同样如此。这就证明了 X 的定理 6.6.(ii)。

我们来证明定理 6.6.(i)。我们将对 k 使用归纳法证明该结论。 $k = 1$ 的情形已由步骤1证明。现在假设该结论对 $k-1$ 成立。对于表示 $\varrho'\colon \pi_1(X) \to G_2(\mathbb{C}) \times \cdots \times G_k(\mathbb{C})$，它由 ϱ 与商 $G(\mathbb{C}) \to G_2(\mathbb{C}) \times \cdots \times G_k(\mathbb{C})$ 复合定义。根据命题 2.5，将 X 替换为一个有限 étale 覆盖和一个双有理真态射后，存在一个支配态射 $p\colon X \to Y$（分别为 $p_1\colon X \to Y_1$），其一般纤维连通；并存在一个大且扎里斯基稠密的表示 $\tau\colon \pi_1(Y) \to G_2(\mathbb{C}) \times \cdots \times G_k(\mathbb{C})$（分别为 $\tau_1\colon \pi_1(Y_1) \to G_1(\mathbb{C})$），使得 $p^*\tau = \varrho$（分别为 $p_1^*\tau_1 = \varrho_1$）。由归纳假设，存在一个真 Zariski 闭集 $Z_0 \subsetneq Y$（分别为 $Z_1 \subsetneq Y_1$），使得任意闭子簇 $V \not\subset Z_0$（分别为 $V_1 \not\subset Z_1$）均为对数一般型。正如我们上面所见，自然态射

$$\begin{aligned} q : X &\to Y_1 \times Y \\ x &\mapsto (p_1(x), p(x)) \end{aligned}$$

满足 $\dim X = \dim q(X)$。令 $\alpha\colon X \dashrightarrow S$ 为 q 的拟 Stein 分解。则 α 是双有理的。设 $Z := p^{-1}(Z_0) \cup p_1^{-1}(Z_1) \cup \mathrm{Exc}(\alpha)$。令 $V \subset X$ 为任意一个不包含于 Z 中的闭子簇。则闭包 $p(V)$ 是对数一般型。由于 $p_1(V) \not\subset Z_1$，对于 $p|_V\colon V \to p(V)$ 的一般纤维 F， $p_1(F)$ 不包含于 Z_1。因此 $p_1(F)$ 是对数一般型。注意， p 的 $\alpha|_F\colon F \to \alpha(F)$ 是一般有限的。因此 $p_1|_F\colon F \to p_1(F)$ 也是一般有限的。由此可知 F 也是对数一般型。我们使用 Fujino 加法公式来处理对数 Kodaira 维数 [Fuj17, 定理 1.9]，从而证明 V 是对数一般型，这证明了 X 的定理 6.6.(i)。因此，我们已经证明了关于 X 的定理。

令 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$。利用命题 6.5，我们可以构造一个表示 $\varrho^\sigma\colon \pi_1(X^\sigma) \to G(\mathbb{C})$，它同样是扎里斯基稠密且大的，并满足定理的条件。因此，我们已经证明了 X^σ 的情形。□

注 ***6.7***。——请注意，定理 6.6 中的条件是尖锐的。例如，考虑一个维数为 n 的阿贝尔簇 X。该表示

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^{2n} \simeq \pi_1(X) &\to (\mathbb{C}^*)^{2n} \\ (a_1, \ldots, a_{2n}) &\mapsto (\exp(a_1), \ldots, \exp(a_{2n})) \end{aligned}$$

是扎里斯基稠密表示。然而， X 不是一般型，且包含扎里斯基稠密整曲线。此例表明，G 的半单性是定理 6.6 成立的必要条件。

另一个值得考虑的例子是一条亏格至少为 2 的曲线 C 。存在一个扎里斯基稠密表示 $\varrho\colon \pi_1(C) \to G(\mathbb{C})$，其中 G是某个定义在 $\mathbb{C}$ 上的半单代数群。表示 $\varrho\colon \pi_1(C\times\mathbb{P}^1) \to G(\mathbb{C})$ 是扎里斯基稠密的，但不是大表示。显然， $C\times\mathbb{P}^1$ 既不是伪布罗迪双曲的，也不是一般型。因此，定理 6.6 中的大性条件也是必要的。

7. 关于广义 Green-Griffiths-Lang 猜想

本节证明定理 C 和 D。我们先证明以下引理。

引理 ***7.1.***—设 X是一个拟射影正规簇，且设 $\varrho\colon \pi_1(X) \to \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$是一个约化且大的表示。则存在

– 一个半阿贝尔簇 A,– 一个满足 $\mathrm{Sp}_{\mathrm{p}}(Y) \subsetneq Y$和 $\mathrm{Sp}_{\mathrm{alg}}(Y) \subsetneq Y$的光滑准射影簇 Y, – 一个有限 *étale* 覆盖 $X \to X$的双有理修改 $X' \to X$, – 一个态射 $g\colon X' \to A\times Y$

使得 维数 $g(X')$ = 维数 X'。此外 $p\colon X' \to Y$是支配的，其中 p是 g与第二个投影 $A\times Y \to Y$的复合映射。

证明。—令 G为 ϱ的扎里斯基闭包，它是约化的。令 G_0为包含 G的单位元的 G 的连通分支。将 X 替换为对应于有限指数子群 $\rho^{-1}(\varrho(\pi_1(X)) \cap G_0(\mathbb{C}))$ of $\pi_1(X)$ 的有限 étale 覆盖后，我们可以假设 ϱ 的扎里斯基闭包 G 是连通的。因此， G 的根基 $R(G)$是一个环面，而导出群 DG 是半单群或平凡群。记 $G_2 := G/\mathrm{D}G$ 以及 $G_1 = G/R(G)$。那么 G_1 是半单群或平凡群，而 G_2 是一个环面。此外，自然态射 $G \to G_1\times G_2$ 是一个同源。令 $\varrho'\colon \pi_1(X) \to G_1(\mathbb{C})\times G_2(\mathbb{C})$为 ϱ与 $G(\mathbb{C}) \to G_1(\mathbb{C})\times G_2(\mathbb{C})$的复合。于是它也是大的且扎里斯基稠密的。记 $\varrho_i\colon \pi_1(X) \to G_i(\mathbb{C})$为$\varrho\colon \pi_1(X) \to G_1(\mathbb{C})\times G_2(\mathbb{C})$与 $G_1(\mathbb{C})\times G_2(\mathbb{C}) \to G_i(\mathbb{C})$的复合映射，它是扎里斯基稠密的。将 X替换为一个有限 étale 覆盖后，我们可以假设 $H_1(X,\mathbb{Z})$无挠。因此， ϱ_2经由准阿尔巴内塞映射 $a\colon X \to A$分解，也就是说，存在 $\varrho_2'\colon H_1(X,\mathbb{Z}) \to G_2(\mathbb{C})$使得 $a^*\varrho_2' = \varrho_2$。

若 G_1 非平凡，则应用命题 2.5。于是，将 X 替换为有限 étale 覆盖 $\nu\colon X \to X$，并作双有理修改 $\mu\colon X' \to X$后，存在一个支配态射 $p\colon X' \to Y$，其一般纤维连通；还存在一个表示 $\tau\colon \pi_1(Y) \to G_1(\mathbb{C})$，使得$p^*\tau = (\nu\circ\mu)^*\varrho_1$，且 τ是大且扎里斯基稠密的。由定理 A，$\mathrm{Sp}_{\mathrm{alg}}(Y) \subsetneq Y$且 $\mathrm{Sp}_{\mathrm{p}}(Y) \subsetneq Y$。若 G_1 平凡，则令 Y 为一点，并令 $p\colon X' \to Y$ 为常值映射。在此情形下，我们同样有 $\mathrm{Sp}_{\mathrm{alg}}(Y) \subsetneq Y$且 $\mathrm{Sp}_{\mathrm{p}}(Y) \subsetneq Y$。

考虑由 $x \mapsto (a\circ\nu\circ\mu(x),\ p(x))$ 定义的态射 $g\colon X' \to A\times Y$。令 $\beta\colon X' \to S$为引理 2.1 中定义的 g 的拟 Stein 分解。则 β 是双有理的。事实上，设 $F \subset X'$ 为 β的一般纤维。我们将证明 $\dim F = 0$。由于诱导映射 $F \to Y$为常值映射，我们有 $(\nu\circ\mu)^*\varrho_1(\mathrm{Im}[\pi_1(F^{\mathrm{norm}}) \to \pi_1(X')]) = \{1\}$。由于诱导映射 $F \to A$为常值映射，我们有 $(\nu\circ\mu)^*\varrho_2(\mathrm{Im}[\pi_1(F^{\mathrm{norm}}) \to \pi_1(X')]) = \{1\}$。因此，有 $(\nu\circ\mu)^*\varrho(\mathrm{Im}[\pi_1(F^{\mathrm{norm}}) \to \pi_1(X')]) = \{1\}$。由于 $(\nu\circ\mu)^*\varrho\colon \pi_1(X') \to G$是大映射，我们有 $\dim F = 0$。因此 β 是双有理的。于是 $\dim g(X') = \dim S = \dim X'$。 □

引理 ***7.2*** (**[CDY25, 引理 1。6]**)。——设 $\alpha\colon X \to \mathcal{A}$ 是从光滑拟射影簇 X到半阿贝尔簇 $\mathcal{A}$的一个（可能不是真）态射，且满足 $\kappa(X) = 0$。假设维数 X = 维数 $\alpha(X)$且维数 $X > 0$。则$\mathrm{Sp}_{\mathrm{sab}}(X) = X$。 □

我们回顾论文系列第一部分中的一个定理。

定理 ***7.3*** (**[CDY25, 推论 10。8]**). — 设 X 是一个光滑拟射影簇，且存在态射a: $X \to A\times S^\circ$，使得 维数 X = 维数 $a(X)$，其中 S° 是一个光滑拟射影簇（S 可以是一个点）。将 $b\colon X \to S^\circ$ 写成 a 与投影映射$A\times S^\circ \to S^\circ$ 的复合。假设 b 是支配的。

(i) 假设 S° 是伪 *Picard* 双曲的。若 X 是对数一般型，则 X 是伪 *Picard* 双曲的。(ii) 假设 $\mathrm{Sp}^{\mathrm{alg}}(S^\circ) \subsetneq S^\circ$。若 $\mathrm{Sp}^{\mathrm{sab}}(X) \subsetneq X$，则 $\mathrm{Sp}^{\mathrm{alg}}(X) \subsetneq X$。

□

我们来证明定理 C。

定理 ***7.4*** **(=定理 C)**。——设 X 是一个复光滑拟射影簇，且存在一个大且约化的表示 ϱ: $\pi_1(X) \to \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$。那么对于任意自同构 $\sigma \in$自同构群$(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$，下列性质等价：

(a) X^σ 是对数一般型。
(b) $\mathrm{Sp}^{\mathrm{p}}(X^\sigma) \subsetneq X^\sigma$。(c) $\mathrm{Sp}^{\mathrm{h}}(X^\sigma) \subsetneq X^\sigma$。(d) $\mathrm{Sp}^{\mathrm{sab}}(X^\sigma) \subsetneq X^\sigma$。(e) $\mathrm{Sp}^{\mathrm{alg}}(X^\sigma) \subsetneq X^\sigma$。

证明。——我们利用命题 6.5 说明，只需证明定理对 X 本身成立。我们应用引理 7.1。然后，将 X 替换为一个有限 étale 覆盖并进行双有理修改后，得到一个光滑拟射影簇 Y（可能是零维的）、一个半阿贝尔簇 A，以及一个态射 $g: X \to A \times Y$，它们满足以下性质：

– 维数 $X =$ 维数 $g(X)$。– 令 $p: X \to Y$ 为 g 与射影映射 $A \times Y \to Y$ 的复合。那么 p 是支配的。– $\mathrm{Sp}^{\mathrm{p}}(Y) \subsetneq Y$ 以及 $\mathrm{Sp}^{\mathrm{alg}}(Y) \subsetneq Y$。

因此，定理 7.3 中的条件均已满足。这得到两个蕴含关系：$(a) \not\Longrightarrow (b)$ 和 $(d) \Longrightarrow (e)$。根据 [CDY25，引理 2.1]，，我们得到以下蕴含关系：$(b) \Longrightarrow (c)$ 和 $(c) \Longrightarrow (d)$。由于 $(e) \Longrightarrow (a)$ 的蕴含关系是直接的，我们证明了 (a)、(b)、(c)、(d) 和 (e) 等价。□

定理 ***7.5*** **(=定理 D)**。— 设 X是一个光滑拟射影簇，且 $\varrho: \pi_1(X) \to \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ 是一个大且约化的表示。那么对于任意自同构 $\sigma \in$ 自同构群$(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$，

(i) 定义 *0.1* 中定义的四个特殊子集相同，即

$$\mathrm{Sp}_{\mathrm{alg}}(X^\sigma) = \mathrm{Sp}_{\mathrm{sab}}(X^\sigma) = \mathrm{Sp}_{\mathrm{h}}(X^\sigma) = \mathrm{Sp}_{\mathrm{p}}(X^\sigma).$$

(ii) 这些特殊子集在自同构群 σ作用下共轭，即

$$\mathrm{Sp}_\bullet(X^\sigma) = \mathrm{Sp}_\bullet(X)^\sigma, \tag{7.5.1}$$

其中，$\mathrm{Sp}_\bullet$ 表示$\mathrm{Sp}^{\mathrm{sab}}$、$\mathrm{Sp}^{\mathrm{h}}$、$\mathrm{Sp}^{\mathrm{alg}}$ 或Sp^{p}中的任意一个。

证明。— 步骤*1*。 设 Y 是 X 的一个非对数一般型闭子簇。设 $\iota: Z \to Y$是一个消解。则 $\iota^*\varrho$是大且约化的。根据定理 7.4，有 $\mathrm{Sp}^{\mathrm{sab}}(Z) = Z$。因此 $Y \subset \mathrm{Sp}^{\mathrm{sab}}(X)$，这意味着 $\mathrm{Sp}^{\mathrm{alg}}(X) \subset \mathrm{Sp}^{\mathrm{sab}}(X)$。

步骤 *2*。 设 $f: \mathbb{D}^* \to X$ 是一个在原点具有本性奇点的全纯映射。设 Z 是 $f(\mathbb{D}^*)$的扎里斯基闭包的一个消解。注意，自然态射$\iota: Z \to X$诱导出一个大且约化的表示 $\iota^*\varrho$。由于 $\mathrm{Sp}^{\mathrm{p}}(Z) = Z$，定理 7.4 意味着 Z不是对数一般型。因此 $\iota(Z) \subset \mathrm{Sp}^{\mathrm{alg}}(X)$，这意味着 $\mathrm{Sp}^{\mathrm{p}}(X) \subset \mathrm{Sp}^{\mathrm{alg}}(X)$。根据 [CDY25，引理 2.1] 以及步骤1，我们得出 $\mathrm{Sp}^{\mathrm{alg}}(X) = \mathrm{Sp}^{\mathrm{sab}}(X) = \mathrm{Sp}^{\mathrm{h}}(X) = \mathrm{Sp}^{\mathrm{p}}(X)$。

步骤 *3.* 我们利用命题 6.5 证明存在一个大且约化的表示$\varrho^\sigma: \pi_1(X^\sigma) \to \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$。由步骤 2，我们得出 $\mathrm{Sp}^{\mathrm{alg}}(X^\sigma) = \mathrm{Sp}^{\mathrm{sab}}(X^\sigma) = \mathrm{Sp}^{\mathrm{h}}(X^\sigma) = \mathrm{Sp}^{\mathrm{p}}(X^\sigma)$。

步骤 *4.* *</style}*一个准射影簇 是对数一般型，当且仅当其共轭 是对数一般型。由此可得 *Sp( ) Sp( )* 。 由步骤 3，我们得出 (7.5.1)。定理的证明至此完成。 □

我们给出一类拟射影簇，其基本群具有约化且大表示。

命题 ***7.6***。——设 X 是一个正规拟射影簇。若 $a\colon X \to A$ 是到半阿贝尔簇 A 的一个态射，且满足 维数 $a(X)$ = 维数 X，则存在一个大且约化的表示 $\varrho\colon \pi_1(X) \to \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$。此外，若 a是拟有限的，则 ϱ还是大表示。证明。——我们从以下两个断言开始。

断言 ***7.7***。—如果 A_0 是阿贝尔簇，那么 $\pi_1(A_0)$是大的。

断言 *7.7* 的证明。—设 Z 是 A_0 的任意闭正维子簇。假设 $\mathrm{Im}[\pi_1(Z^{\mathrm{norm}}) \to \pi_1(A_0)]$ 是有限的。那么存在一个有限 étale 覆盖 $Y \to Z^{\mathrm{norm}}$，使得 $\mathrm{Im}[\pi_1(Y) \to \pi_1(A_0)] = \{1\}$。因此，自然态射 $Y \to A_0$ 可提升为全纯映射$Y \to \widetilde{A}_0$，其中 $\widetilde{A}_0$ 是 A_0 的万有覆盖，且同构于 $\mathbb{C}^N$。因此 $Y \to \widetilde{A}_0$ 是常值的，矛盾。□

断言 ***7.8***。—设 Y 是 X 的闭子簇。如果 $a(Y)$不是一个点，那么 像$[\pi_1(Y_{\text{范数}}) \to \pi_1(A)]$是无限的。

断言 *7.8* 的证明. — 注意到 A 有一个短正合列

$$0 \to (\mathbb{C}^*)^k \to A \xrightarrow{\pi} A_0 \to 0. \tag{7.8.1}$$

令 Z为 $\pi \circ a(Y)$ 的闭包。若 Z是正维的，则由断言 7.7 可知 $\mathrm{Im}[\pi_1(Z^{\mathrm{norm}}) \to \pi_1(A_0)]$ 是无限的。由引理 1.7 可得，$\mathrm{Im}[\pi_1(Y_{\text{范数}}) \to \pi_1(A)]$也无限，因此断言得证。

现在假设 $\pi \circ a(Y)$是一个点。令 W 为 $a(Y)$的闭包。由 (7.8.1)，W 包含于 $(\mathbb{C}^*)^k$ 中。由于假设 W 是正维的，因此它必定支配 $(\mathbb{C}^*)^k$ 的某个因子 $\mathbb{C}^*$。再次由引理 1.7，$\mathrm{Im}[\pi_1(W^{\mathrm{norm}}) \to \pi_1((\mathbb{C}^*)^k)]$是无限的。由于我们有以下短正合列：

$$0 = \pi_2(A_0) \to \pi_1((\mathbb{C}^*)^k) \to \pi_1(A),$$

由此可得 $\mathrm{Im}[\pi_1(W^{\mathrm{norm}}) \to \pi_1(A)]$是无限的。再次应用引理 1.7，我们得出 $\mathrm{Im}[\pi_1(Y_{\text{范数}}) \to \pi_1(A)]$是无限的。断言得证。□

由于 $\dim(X) = \dim a(X)$，存在一个真扎里斯基闭子集 $\Xi \subsetneq X$使得 $a|_{X\setminus\Xi}\colon X\setminus\Xi \to A$ 是拟有限的。注意到 $\Xi = \varnothing$ 如果 a 是拟有限的。因此，对于任意具有 $Y \not\subset \Xi$的正维闭子簇 Y，我们有 $\dim(a(Y)) > 0$。根据断言 7.8，我们可以得出 $\mathrm{Im}[\pi_1(Y_{\text{范数}}) \to \pi_1(A)]$是无限的。

由于 $\pi_1(A)$ 是阿贝尔的，我们可以将其忠实地嵌入 $(\mathbb{C}^*)^N \hookrightarrow \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ 中，其中后者是对角嵌入。因此，复合 $\varrho\colon \pi_1(X) \to \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ 与 $a_*\colon \pi_1(X) \to \pi_1(A)$ 是一个大表示。此外，当 a是拟有限的时，ϱ是大的。由于 $\varrho(\pi_1(X))$ 包含于 $(\mathbb{C}^*)^N$ 中，其扎里斯基闭包是 $\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ 中的一个环面。因此，ϱ是约化的。这就完成了该命题的证明。□

我们以一些较新的进展结束本文。

注 ***7.9***。— 基于本文所发展的思想和结果，在 [DY25]中，第二和第三作者证明了与定理 A和C类似的结果，适用于扎里斯基稠密且大表示$\pi_1(X) \to G(K)$，其中G是定义在代数闭域 K 上的约化或半单代数群，该域具有正特征。

参考文献

[AB94] N. A'Campo & M. Burger – "关于 G. A. Margulis 理论中的算术格与交换子群", *Invent. Math.* **116** (1994), 第 1–3 期，第 1–25 页（法语），https://doi.org/10. 1007/BF01231555。↑36

[AB08] P. Abramenko & K. S. Brown –建筑物：理论与应用。，《研究生数学丛书》，第 248 卷，柏林：施普林格，2008（英语），https://doi.org/10.1007/978-0-387-78835-7。↑16, 17[ADH16] D. Arapura, A. Dimca & R. Hain – "关于正规簇的基本群"，*Commun. Contemp. Math.* **18** (2016), 第 4 期，第 17 页（英语），编号 1550065，https://doi.org/10.1142/S0219199715500650。↑7[BC20] Y. Brunebarbe & B. Cadorel – "支撑 Hodge 结构变分的代数簇的双曲性"，*Int. Math.Res. Not.* **2020** (2020), 第 6 期，第 1601–1609 页（英语），https://doi. org/10.1093/imrn/rny054。↑39

[BDDM22] D. Brotbek, G. Daskalopoulos, Y. Deng & C. Mese – “映入建筑物的多重调和映射与对称微分”，arXiv 电子预印本（2022），第 arXiv:2206.11835 页，https://doi.org/10.48550/arXiv.2206.11835。↑2, 4, 5, 12, 17, 18, 19, 22, 34[Bor72] A. Borel – “对称空间算术商空间的若干度量性质及一项延拓定理”，J. Differential Geometry 6 (1972)，第 543–560 页，http://projecteuclid. org/euclid.jdg/1214430642。↑9[Bru22] Y. Brunebarbe – “大局部系统存在时的双曲性”，arXiv 电子预印本（2022），第 arXiv:2207.03283 页，https://doi.org/10.48550/arXiv.2207.03283。↑4, 17[Bru23] ，“拟射影簇上半单局部系统的 Shafarevich态射的存在性”，arXiv 电子预印本（2023），第 arXiv:2305.09741 页，https://doi.org/10. 48550/arXiv.2305.09741。↑20[BV12] N. Borne & A. Vistoli – “对数概形上的抛物层”，Adv. Math. 231 (2012)，第 3–4 期，第 1327–1363 页（英语），https://doi.org/10.1016/j.aim.2012.06.015。↑32[Cam91] F. Campana – “C类的扭量空间”，Journal of Differential Geometry 33 (1991)，第 2 期，第 541–549 页，https://doi.org/10.4310/jdg/1214446329。↑8[Cam11] F. Campana – “特殊几何轨形与紧凯勒簇的双有理分类”，J. Inst. Math. Jussieu 10 (2011)，第 4 期，第 809–934 页，https://doi.org/10.1017/S1474748010000101。↑3[Cas76] J. W. S. Cassels – “域的一个嵌入定理”，Bull. Austral. Math. Soc. 14 (1976)，第 2 期，第 193–198 页，https://doi.org/10.1017/S000497270002503X。↑38[CCE15] F. Campana, B. Claudon & P. Eyssidieux – “凯勒群的线性表示：分解与线性 Shafarevich 猜想”，《组合数学》151 (2015)，第 2 期，第 351–376 页（法语），https://doi.org/10.1112/S0010437X14007751。↑2, 3, 4[CD21] B. Cadorel & Y. Deng – “具有幂零调和丛的流形的皮卡超曲性”，arXiv 电子预印本（2021），第 arXiv:2107.07550 页，https://arxiv.org/abs/2107.07550。↑8, 39[CDY22] B. Cadorel, Y. Deng & K. Yamanoi – “复拟射影簇的双曲性与基本群”，arXiv 电子预印本：arXiv:2212.12225（2022），https://doi.org/ 10.48550/arXiv.2212.12225。↑5[CDY25] ，“复拟射影簇的双曲性与基本群（I）：Nevanlinna 理论与最大准Albanese维数”，arXiv 电子预印本：arXiv:2511.04405（2025），https://doi.org/10.48550/arXiv.2511.04405。↑1, 2, 5, 7, 26, 28, 41, 42[CP19] F. Campana & M. Păun – “具有正斜率的叶状结构与轨形余切丛的双有理稳定性”，《高等科学研究所数学出版物》129 (2019)，第 1–49 页（英语），https: //doi.org/10.1007/s10240-019-00105-w。↑4, 28[CS08] K. Corlette & C. Simpson – “拟射影基本群的二阶表示分类”，《组合数学》144 (2008)，第 5 期，第 1271–1331 页（英语），https://doi.org/10.1112/S0010437X08003618。↑3, 34[Dem20] J.-P. Demailly – “关于 Kobayashi 猜想与 Green-Griffiths-Lang 猜想的最新结果”，Jpn. J. Math. (3) 15 (2020)，第 1 期，第 1–120 页（英语），https://doi.org/10.1007/ s11537-019-1566-3。↑1[Den22] Y. Deng – “ 由单位球一致化的复准射影流形的刻画 ”，《数学年刊》（ 2022 ）（英语），https://doi.org/https://doi.org/10.1007/ s00208-021-02334-z。↑29, 34[Den23] ，“允许 Hodge 结构变分的代数簇的大Picard定理与代数双曲性”，Épijournal de Géométrie Algébrique 第 7 卷（2023），https://doi. org/10.46298/epiga.2023.volume7.8393。↑8, 9[DM26] Y. Deng & C. Mese – “到欧氏建筑的多重调和映射的存在性与唯一性及其应用”，载于《Teichmüller理论的新进展》，纯数学进展研究，第 10 卷，日本数学会，东京，2026，即将出版，https://doi.org/10.48550/arXiv.2410.07871。↑2, 4, 5, 12, 17, 18, 23[DMW24] Y. Deng, C. Mese & B. Wang – “大基本群的变形开性及其应用”，arXiv 电子预印本（2024），第 arXiv:2412.08636 页，https://doi.org/10.48550/ arXiv.2412.08636。↑18[DY25] Y. Deng & K. Yamanoi – “正特征下的线性 Shafarevich 猜想、双曲性及其应用”，J. Reine Angew. Math.（2025），https://doi.org/doi: 10.1515/crelle-2025-0078。↑4, 5, 12, 26, 43

[DYK23] Y. Deng, K. Yamanoi & L. Katzarkov – “约化 Shafarevich 猜想”，arXiv 电子预印本（2023），第 arXiv:2306.03070 页，https://doi.org/10.48550/arXiv.2306.03070.↑5, 8, 20, 25, 26[EKPR12] P. Eyssidieux, L. Katzarkov, T. Pantev & M. Ramachandran – “线性 Shafarevich 猜想”，《数学年刊》（第 2 辑）176（2012），第 3 期，第 1545–1581 页（英文），https://doi.org/ 10.4007/annals.2012.176.3.4.↑26[Eys04] P. Eyssidieux – “关于复代数射影簇的约化线性覆叠的全纯凸性”，Invent. Math. 156（2004），第 3 期，第 503–564 页（法文），https: //doi.org/10.1007/s00222-003-0345-0.↑4, 13, 26[Fuj17] O. Fujino – “弱正性定理札记”，载于《代数簇与自同构群》。2014 年 7 月 7–11 日于日本京都京都大学 RIMS 举行的研讨会论文集，东京：日本数学会（MSJ），2017，第 73–118 页（英文）。↑40[Fuj24] , “关于拟阿尔巴内塞映射”，《意大利数学联合会通报》（2024），第 1– 41 页。↑6[GGK22] M. Green, P. Griffiths & L. Katzarkov – “Shafarevich 映射与周期映射”，arXiv 电子预印本（2022），第 arXiv:2209.14088 页，https://arxiv.org/abs/2209.14088.↑26[GKP16] D. Greb, S. Kebekus & T. Peternell – “Kawamata 对数终端空间的 étale 基本群、平坦层与阿贝尔簇的商”，《杜克数学杂志》165（2016），第 10 期，第 1965–2004 页，https://doi.org/10.1215/00127094-3450859.↑28[GS92] M. Gromov & R. Schoen – “映入奇异空间的调和映射与秩一群中格的 p-进超刚性”，《高等科学研究所数学出版物》76（1992），第 165–246 页（英文），https://doi.org/10.1007/BF02699433.↑5, 18[GW10] U. Görtz & T. Wedhorn –《代数几何 I》，《数学高级讲座》，Vieweg+ Teubner，威斯巴登，2010，附例题与习题的概形，https://doi.org/10. 1007/978-3-8348-9722-0。↑15[Iit77] S. Iitaka – “关于代数簇的对数 Kodaira 维数”，载于《复分析与代数几何》（W. L. Baily Jr. & T. Shioda 编），岩波书店，东京，1977，第 175–190 页。↑28[IS07] J. N. N. Iyer & C. T. Simpson – “de Rham 丛的抛物 Chern 特征之间的关系”，《数学年刊》338（2007），第 2 期，第 347–383 页，https://doi.org/10.1007/ s00208-006-0078-7。↑32[Kat97] L. Katzarkov – “关于 Shafarevich 映射”，载于《代数几何》。1995 年 7 月 9–29 日于美国加利福尼亚州圣克鲁斯举行的暑期研究所论文集，普罗维登斯（罗得岛州）：美国数学会，1997，第 173–216 页（英文）。↑4, 13[KO71] S. Kobayashi & T. Ochiai – “Satake 紧化与大 Picard 定理”，J. Math. Soc. Japan 23（1971），第 340–350 页，https://doi.org/10.2969/jmsj/02320340.↑9[Kol93] J. Kollár – “Shafarevich 映射与代数簇的多重属”，Invent. Math. 113（1993），第 1 期，第 177–215 页（英文），https://doi.org/10.1007/BF01244307.↑11[Kol95] ，《Shafarevich 映射与自守形式》，普林斯顿大学出版社，普林斯顿（新泽西州），1995（英文）。↑2, 5, 8[KP23] T. Kaletha & G. Prasad –《Bruhat-Tits 理论——一种新方法》，《新数学专著》第 44 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2023。↑18, 22[KS93] N. J. Korevaar & R. M. Schoen – “度量空间目标的 Sobolev 空间与调和映射”，Commun. Anal. Geom. 1（1993），第 4 期，第 561–659 页（英文），https://doi.org/ 10.4310/CAG.1993.v1.n4.a4.↑18[KS97] N. J. Korevaar & R. M. Schoen – “映入非局部紧空间的调和映射的整体存在性定理”，Commun. Anal. Geom. 5（1997），第 2 期，第 333–387 页（英文），https: //doi.org/10.4310/CAG.1997.v5.n2.a4.↑20[Lan91] S. Lang –《数论 III》，《数学科学百科全书》第 60 卷，施普林格出版社，柏林，1991，丢番图几何，https://doi.org/10.1007/ 978-3-642-58227-1。↑2, 3, 9[Laz04] R. Lazarsfeld –《代数几何中的正性 I：经典情形：线丛与线性系》，《数学与相关领域成果》第三辑第 48 卷，柏林：施普林格，2004（英文）。↑29[LS18] A. Langer & C. Simpson – “射影基本群的秩 3 刚性表示”，《组合数学》154（2018），第 7 期，第 1534–1570 页（英文），https://doi.org/10.1112/S0010437X18007182。↑39

[Mil17] J. S. Milne –《代数群：域上有限型群概形理论》，Camb. Stud. Adv. Math. 第 170 卷，剑桥：剑桥大学出版社，2017（英文），https://doi.org/10.1017/9781316711736. ↑6, 35[Moc06] T. Mochizuki – “温和调和丛的小林-希钦对应及其应用”，Astérisque（2006），第 309 期，第 viii 页。+117. ↑30, 31, 33, 34[Moc07a] , “温和调和丛的渐近行为及其在纯 twistor$D$-模中的应用 I”，Mem. Amer. Math. Soc. 185（2007），第 869 期，第 xii 页+324，https://doi.org/ 10.1090/memo/0869。 ↑31, 32[Moc07b] , “温和调和丛的渐近行为及其在纯 twistor$D$-模中的应用 II”，Mem. Amer. Math. Soc. 185（2007），第 870 期，第 xii 页 +565，https://doi.org/ 10.1090/memo/0870。 ↑30, 31[Mok92] N. Mok – “凯勒群的半单离散表示的因子分解”，Invent. Math. 110（1992），第 3 期，第 557–614 页（英文），https://doi.org/10.1007/BF01231345.↑2, 3[NW14] J. Noguchi & J. Winkelmann –《多复变函数中的 Nevanlinna 理论与丢番图逼近》，Grundlehren Math. Wiss. 第 350 卷，东京：施普林格，2014（英文），https://doi.org/10.1007/978-4-431-54571-2. ↑6, 7[NWY13] J. Noguchi, J. Winkelmann & K. Yamanoi – “代数簇中的全纯曲线的退化 II”，Vietnam J. Math. 41（2013），第 4 期，第 519–525 页（英文），https: //doi.org/10.1007/s10013-013-0051-1. ↑28[Rou09] G. Rousseau – “欧氏建筑”，载于《负曲率或零曲率几何、离散群与刚性》，巴黎：法国数学会（SMF），2009，第 77–116 页（英文）。↑16[Rou23] ，《欧氏建筑——几何与群作用》，EMS 数学专题第 35 卷，EMS Press，柏林， [2023] ©2023，https://doi.org/10.4171/etm/35。 ↑16, 21[Ser64] J.-P. Serre – “非同胚的共轭射影簇的例子”，C. R. Acad. Sci. Paris 258（1964），第 4194–4196 页。 ↑37[Sik12] A. S. Sikora – “特征簇”，Trans. Am. Math. Soc. 364（2012），第 10 期，第 5173–5208 页（英文），https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2012-05448-1. ↑32[Sim88] C. T. Simpson – “利用杨–米尔斯理论构造霍奇结构变分及其在一致化中的应用”，J. Amer. Math. Soc. 1（1988），第 4 期，第 867–918 页，https: //doi.org/10.2307/1990994. ↑34[Sim90] , “ 非紧曲线上的调和丛 ”，J. Amer. Math. Soc. 3（1990），第 3 期，第 713–770 页，https://doi.org/10.2307/1990935. ↑32[Sim92] , “Higgs 丛与局部系统”，Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.（1992），第 75 期，第 5–95 页，http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1992__75__5_0。 ↑34[Siu75] Y. T. Siu – “映入凯勒流形的亚纯映射的延拓”，Ann. of Math.（第 2 辑）102（1975），第 3 期，第 421–462 页，https://doi.org/10.2307/1971038. ↑8[Sta22] T. Stacks project 作者 – “Stacks project”，https://stacks.math.columbia.edu，2022。 ↑15[Uen75] K. Ueno –《代数簇与紧复空间的分类理论》。与 P. Cherenack 合作撰写的笔记，Lect. Notes Math. 第 439 卷，施普林格，Cham，1975（英文）。 ↑29[Yam10] K. Yamanoi – “关于代数簇的基本群与值分布理论”，Ann. Inst. Fourier 60（2010），第 2 期，第 551–563 页（英文），https://doi.org/10.5802/aif. 2532。 ↑2, 4, 35, 37[Yam15] , “小林双曲性与高维内文林纳理论”，载于《流形上的几何与分析：纪念小林昭七教授》，施普林格，2015，第 209–273 页。↑1[Zuo96] K. Zuo – “ 紧凯勒流形表示的 Shafarevich 映射的 Kodaira 维数与陈双曲性 ”，J. Reine Angew. Math. 472（1996），第 139–156 页（英文），https://doi.org/10.1515/crll.1996.472.139. ↑2, 4, 13, 34

星期四 *18th 2025*年*12*月B. Cadorel • 电子邮箱：benoit.cadorel@univ-lorraine.fr，洛林埃利·嘉当研究所，洛林大学，法国南锡54000，法国 • 网址：http://www.normalesup.org/~bcadorel/

Y. Deng • 电子邮件：ya.deng@math.cnrs.fr, deng@imj-prg.fr, 法国国家科学研究中心, Jussieu-Paris Rive Gauche数学研究所，索邦大学，皮埃尔与玛丽·居里校区，4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, 法国 • 网址：https://ydeng.perso.math.cnrs.fr K. Yamanoi • 电子邮件：yamanoi@math.sci.osaka-u.ac.jp, 大阪大学理学研究科数学系，丰中市，大阪 560- 0043, 日本 • 网址：https://sites.google.com/site/yamanoimath/