arXiv:2512.15395v1 [math.GT] 17 Dec 2025

# 四维4维2手柄体中带状曲面的量子不变量

ANNA BELIAKOVA、MARCO DE RENZI 和 QUENTIN FAES

摘要。我们利用幺模带状范畴，构造四维 2-手柄体中带状曲面在 1-同痕意义下的量子不变量。在此过程中，我们重新得到 Bobtcheva–Messia、Broda–Petit、Gainutdinov–Geer–Patureau–Runkel（与第二作者合作）以及 Lee–Yetter 所提出的不变量。我们的方法不要求半单性，其基础是将 Reshetikhin–Turaev 函子推广到带标记的 Kirby 图范畴；这一推广还给出了四维 2-手柄体边界中带框架链环在 2-变形意义下的不变量。此框架具有很强的灵活性，允许采用多种不同的构造方式，包括使用满足 Hennings 和 Bobtcheva–Messia 所引入方程的中心元、修正迹，以及满足由 Hughes、Kim 和 Miller 为嵌入曲面开发的图示演算所规定条件的 Frobenius 代数上的模。

## 1. 引言

光滑嵌入曲面对理解 4 维拓扑至关重要。它们在 Gluck 构造等手术操作中占据重要地位 [Gl62], ，也出现在通过三分解表示闭 4 维流形的过程中 [GK12]。Freedman、Gompf、Morrison 和 Walker 还提出了一种策略，旨在推翻 4 维光滑庞加莱猜想以及有限群表示的 Andrews–Curtis猜想 [FGMW09], ；该策略基于排除在同伦 4 维球中光滑嵌入（且边界给定的）2 维圆盘存在的可能性。

本文构造了嵌入于 4 维 2 把手体中的带状曲面的新型非半单量子不变量。我们的方法基于将 Kirby 演算推广到对偶 $(W,\ \Sigma)$ 的情形，其中 $W$ 是闭光滑 4 维流形，而 $\Sigma \subset W$ 是光滑嵌入的闭曲面；这一思路沿袭 Hughes、Kim 和 Miller 的工作。相关图示称为带带的平凡链环图，表示由 Kirby 链环 $L$（对应于 $W$）和一个平凡链环 $U$ 组成的三价带框图；该平凡链环配有带框弧（或带） $B$ ，其端点位于 $U$上，并对应于 $\Sigma$。文献 *HKM*中建立了一组完备的变换，称为带移动，它们联系表示曲面同痕嵌入的带带无结图 [HKM18]。

一方面，首个非半单四维流形量子不变量的构造见于 [BM02], ，其基础是一个幺模带状 Hopf 代数 $H$。在定义中，Bobtcheva 和 Messia 使用一对在反 antipode 作用下不变的中心元 $w, z \in H$ ，分别为四维流形 $W$的 1-把手和 2-把手标记。另一方面，嵌入曲面的量子不变量最近在 [LY23]中构造出来，它使用与融合带状范畴 C 相关联的 Reshetikhin–Turaev 函子 $F_{\mathscr{C}}$ 。为此，使用 Frobenius 代数 F $\in$ C 和 F-模 V $\in$ C，分别为嵌入曲面的带带无结图中的带和平凡链环标记 $\Sigma \subset W$。在

同时，Kirby 颜色[1] $\mathscr{C}$ 用于标记1-手柄（属于 $W$）；而融合带状子范畴$\mathscr{C}' \subset \mathscr{C}$ 的 Kirby 颜色则用于标记2-手柄（属于 $W$）。其缺点在于，已知半单范畴无法感知光滑四维拓扑中的奇异现象[2]，，见 [Re20、BD21]。本文将 [BM02] 和 [LY23] 推广到任意幺模带状范畴，而不假设其具有半单性。

1.1. 2-等价与 1-同痕。我们将聚焦于一类特定的、具有非空边界的光滑 4 维流形，称为四维 2-手柄体。一般而言，$n$维 $k$-柄体是一个光滑的 $n$-流形，它由有限个用于 $0 \leqslant i \leqslant k$ 的 $n$维 $i$-手柄构造而成。四维 2-手柄体之所以本身就很有趣，是因为它们恰好是可以通过 Kirby 图示形象化并表示的光滑 4 维流形类别。事实上，即使我们只关注闭光滑四维流形，为了对其进行操作，通常也只考虑四维 2-手柄体，并援引 [LP72]，以断言至多存在一种将四维三柄和四柄附加到边界上以填充边界的方式。

如果我们追踪柄体结构，那么在四维 2-手柄体这一类对象上，除了同伦等价、同胚和微分同胚之外，还存在其他等价关系。一种自然的等价关系由一类特定的微分同胚生成，这类微分同胚称为 2-变形；这种等价关系称为 2-等价。A$k$-变形是两个 $k$-手柄体之间的一种微分同胚，它通过对手柄附着映射进行有限次初等操作实现，且这些操作从不引入指标为 $i > k$ 的手柄。换言之，我们可以通过柄移动关联一对 2-等价的四维 2-手柄体，而始终不脱离四维 2-手柄体这一类对象。这种等价关系不仅在四维 2-手柄体的语境中十分自然，也会在量子不变量的语境中自发出现。事实上，[BD21] 利用幺模带状 Hopf 代数 $H$ 的表示范畴 $\mathsf{C} = H$-mod 构造的四维 2-手柄体不变量 $J_{\mathscr{C}}$，只有在 $H^*$ 是半单时，才能保证在任意微分同胚下保持不变。由于最有趣的幺模带状 Hopf 代数通常不是半单的，而且半简单带状范畴在检测异 exotic 结构方面通常毫无用处，这意味着原则上，量子不变量更适合研究 2-等价，而非微分同胚。请注意，目前尚不清楚微分同胚与 2-变形是否确定了不同的等价关系。事实上，这个问题是 Gompf 提出的一个猜想的核心；他预言，有一族明确给出的、与 $D^4$ 微分同胚的四维 2-手柄体，无法通过任何 2-变形 [Go91] 简化为空 Kirby 图。此外，这个问题可以理解为 Andrews–Curtis 猜想的一个四维类比，而推翻后者将证明 2-等价不同于微分同胚。目前这两个问题都仍悬而未决。

类似地，我们不考虑光滑嵌入四维 2-手柄体中的任意曲面，而是聚焦于一类具有非空边界的特定曲面，称为带状曲面。它们将 $D^4$ 中的带状曲面推广到了任意四维 2-手柄体，并可定义为光滑嵌入的二维 1-手柄体。请注意，关于一个

[1]融合带状范畴的 Kirby 颜色，是由一族代表简单对象同构类的元素构成的形式线性组合。[2]事实上，[LY23] 包含了一种半单不变量的构造；据称该不变量能够区分 Akbulut 塞内部框架结的奇异对，不过关键在于，该不变量不受同痕保持，详见第4.5 节和5.2 节。

具有给定边界的二维圆盘光滑嵌入 $D^4$ 后，是否总能通过光滑同痕变为带状曲面，这一问题称为切片缎带猜想。

与四维 2-手柄体的情形一样，带状曲面类上存在一种内在的等价关系，预计它不同于同伦、连续同痕和平滑同痕。它由一类特定的平滑同痕生成，这类同痕称为 (1,2)-变形，而这种等价关系称为 1-同痕。同样，目前尚不清楚平滑同痕与 1-同痕是否确定不同的等价关系。

1.2. **形式、元素、迹与模**。为了说明我们的代数框架，我们先考虑一个 幺模带状范畴[3] $\mathscr{C}$，其定义见第 3.1 节。按照 Lyubashenko 的做法，我们考虑霍普夫代数

$$\mathscr{E} = \int_{X\in\mathscr{C}} X \otimes X^*, \tag{1}$$

它定义为函子的端

$$\begin{aligned}(\_ \otimes \_^*) : \mathscr{C} \times \mathscr{C}^{\mathrm{op}} &\to \mathscr{C}\\ (X, Y) &\mapsto X \otimes Y^*.\end{aligned}$$

例如，若 C $= H$-模来自一个幺模带状 Hopf 代数 $H$，则 E 由 $H$ 的伴随表示 $H$ 给出。

在第3.5节中，我们在任意霍普夫代数 $H \in \mathscr{C}$ 上引入几类中心元和量子特征 $\in$:

◇ Hennings 形式 $\varphi$ : H $\to$ 是满足等式 (33) 的双侧量子特征；◇ Bobtcheva–Messia 元素 $w$ : $\to$E 是反 antipode 不变中心元，且存在相容的 Hennings 形式 $\varphi$ : E $\to$满足等式 (36)；◇ 带状无结形式 $\psi$ : E $\to$ 是双侧量子特征，且存在相容的 Bobtcheva–Messia 元素 $w$ : $\to$E 以及相容的 Hennings 形式 $\varphi$ : E $\to$ 满足等式 (39)。

例如，每个双侧积分形式 $\lambda$ : $\mathscr{H}$ $\to$ 都给出一个 Hennings 形式，而每个归一化双侧积分元 $\Lambda$ : $\to\mathscr{H}$ 都给出一个相容的 Bobtcheva–Messia 元素，见引理 3.10。此外，理解霍普夫代数$\mathscr{H}$ $\in \mathscr{C}$ 的反 antipode 不变中心元集合，可得出其他 Hennings 形式和带状无结形式，正如引理 3.8 和3.12所示；一些具体示例见第 5.5 节。

接下来，在第 3.7 节中，我们回顾修正迹的定义，该定义由 Geer 和 Patureau 在 [GKP10 中引入，见 GKP11]。如果 $\mathscr{I}$ $\subset C$ 是一个理想，即一个对收缩封闭且在张量积下吸收的全子范畴，那么 t 在 $\mathscr{I}$ 上的迹是由线性映射构成的族 $\mathrm{t}_V : \mathrm{End}_{\mathscr{C}}(V)$ $\to \Bbbk$ ，对每个 $V \in \mathscr{I}$ 均满足定义 *3.14* 中给出的循环性和偏迹性质。

最后，在第3.8节中，我们引入带状 Frobenius 代数，即满足方程（47）的 Frobenius 代数 F $\in$C；以及带状无结模块，即配备带状 Frobenius 代数左作用 $\rho$ : F$\otimes$V $\to$ V 的对象 V $\in$ C。相应的带态射 B : V$^*\otimes$V $\to$V$^*\otimes$V 由方程（48）定义，并满足定义3.15中所述的透明性和偏迹性质。

[3]幺模范畴特别是一种有限范畴。

1.3. **Kirby 图与 Reshetikhin–Turaev 函子的一般化**。在第 4.1 节中，我们引入 $\mathscr{C}$-带标记的*Kirby*图 的概念，它们是由一个 Kirby 链环与一个不相交的 $\mathscr{C}$ -带标记带状图的并集；该 Kirby 链环的带点分量和无点分量分别以 $\mathscr{C}$ 的反幂等中心元和双侧量子特征着色。 $\mathscr{C}$-带标记的Kirby图的同痕类可组织为一个范畴$\mathsf{K}_{\mathscr{C}}$ ，该范畴包含以 $\mathscr{R}_{\mathscr{C}}$ 表示的 $\mathscr{C}$-带标记带状图范畴作为子范畴。

在第 4.2 节中，我们构造了一个带状函子

$$F_{\mathscr{C}} : \mathscr{K}_{\mathscr{C}} \to \mathscr{C},$$

称为*Kerler–Lyubashenko–Reshetikhin–Turaev* 函子，它扩展了原始的 Reshetikhin–Turaev 函子 $F_{\mathscr{C}}$ ： $\mathscr{R}_{\mathscr{C}} \to \mathscr{C}$ ，其定义于 [Tu94]。其定义以*Kirby* 缠结的底顶表示 为基础；借助端的泛性质，这些表示给出了张量幂之间的态射$\mathscr{E}$ 。这一构造是早期将 Reshetikhin–Turaev 函子扩展到4维情形的类比；早期扩展的对象是带有$\mathscr{C}$标记的双色图 ，最早见于 [DGP17]和 [DGGPR19]。这将为本文中的所有构造提供主要的基础工具。

1.4. **主要结果**。 下面以适合本引言的形式介绍我们的四项主要构造。精确表述和详细证明见第 4 节及附录 A。

我们进行的第一种构造得到一个不变量 $J_{\mathscr{C}}$ ，它对应于4维 2把手体 $W$。给定一个 Kirby 链环 $L$、一个 $w$ 上的 Bobtcheva–Messia 元素$\mathscr{E}$以及一个 $\varphi$ 在$\mathscr{E}$上的相容 Hennings 形式，我们用 $L_{w,\ \varphi}$ 表示这样一个带 $\mathscr{C}$标记的 Kirby 链环：将 $L$ 的每个带点分量标记为 $w$ ，并将 $L$的每个无点分量标记为 $\varphi$，具体说明见第 4.3节。

**定理 A** （定理 4.6）。 若 $w$ 是$\mathscr{E}$ 上的 *Bobtcheva–Messia* 元素，且 $\varphi$是$\mathscr{E}$上的相容 *Hennings* 形式，并且 $W$ 是一个由 *Kirby* 链环 4维 2把手体表示的 $L$，那么

$$J_{\mathscr{C}}(W) = F_{\mathscr{C}}(L_{w,\varphi})$$

在 $L$的2变形下不变。

当 $\mathscr{C}$ $= H$-模 对应于一个配备了归一化双侧积分元 $H$ 和左积分形式 $\Lambda \in H$ 的幺模带状霍普夫代数 $\lambda \in H^*$时，不变量 $J_{\mathscr{C}}$ 就恢复了 [BM02] 的 Bobtcheva–Messia 不变量，该不变量对应于一对反 antipode 不变中心元 $w$， $z \in H$ 满足

- $wz = \Lambda$,
- $zz_{(1)} \otimes z_{(2)} = z \otimes z$,

通过设定 $\varphi = \lambda(z\ \_)$。特别地，该构造涵盖了 [He96]，的原始 Hennings 不变量，该不变量通过考虑一个可因子化带状 Hopf 代数 $H$ 得到。显然，取 E 的一个归一化双侧积分元 $\Lambda$ 和 E 上的一个双侧积分形式 $\lambda$ ，也可以恢复 [BD21] 中定义的不变量。此外，每个幺模带状子范畴 $\mathsf{C}' \subset \mathsf{C}$ 都会诱导一个 Hopf 满同态 $\pi : \mathsf{E} \to \mathsf{E}'$，其中 $\mathsf{E}' \in \mathsf{C}'$ 表示有限带状范畴 $\mathsf{C}'$ 的公式 (1) 中的端。若 $\lambda'$ 是 $\mathsf{E}'$ 上的双侧积分形式，则 $\lambda' \circ \pi$ 是 E 上的 Hennings 形式，并且与 E 的一个双侧积分元 $\Lambda$ 相容，见命题 4.7。若 C 是半单的，则该构造可以扩展为闭四维流形的不变量；当 C 可因子化时，它可以恢复 Broda[Br95] 和 Petit [Pe08] 的双色不变量。

我们进行的第二种构造将 $J_{\mathscr{C}}$ 扩展为一对 $(W,\ \Sigma)$ 的不变量，其中 $W$ 是一个四维 2-手柄体， $\Sigma \subset W$ 是一个带状曲面。给定

一个带带无结 $U \cup B$、E 上的带状无结形式 $\psi$ 、E 的一个相容 Bobtcheva–Messia 元素 $w$ ，以及 E 上的一个相容 Hennings 形式 $\varphi$ ，我们用 $L'_{\psi,w,\varphi}(U,B)$ 表示如下得到的 C- 标记 Kirby 链环：按照第 4.4 节的说明，将平凡链环 $U$ 标记为 $\psi$，将带 $B$ 的双份标记为 $\varphi$，并将它们的交集 $U \cap B$ 标记为 $w$。

**定理 B** (定理 4.9)。若 $\psi$ 是$\mathscr{C}$上的带状无结形式，若 $w$ 是$\mathscr{C}$的相容 *Bobtcheva–Messia* 元素，若 $\varphi$ 是$\mathscr{C}$上的相容的 *Hennings* 形式，并且若$\Sigma$ 是由一个带状无结表示的带状曲面 $U \cup B$，它位于一个 四维2-柄体 $W$ 内，该柄体由一个 *Kirby* 链环表示 $L$，那么

$$J_{\mathscr{C}}(W,\Sigma) = F_{\mathscr{C}}(L_{w,\varphi} \cup L'_{\psi,w,\varphi}(U,B))$$

在 $L \cup U \cup B$ 的带移动下不变。

我们构造的第三种构造给出了一个不变量 $J'_{\mathscr{C}}$，它定义在对 $(W,G)$ 上，其中 $W$ 是一个四维 2-手柄体， $G \subset \partial W$ 是一个闭合的 C 标记 Kirby 图。该定义需要一个理想 I 上的迹 t，以及 E 的一个 Bobtcheva–Messia 元素 $w$ 和 E 上一个相容的 Hennings 形式 $\varphi$ 。此外，闭合的 C 标记带状图 $G$ 必须同时是 I- 可容许的（即它应包含一条标签属于 I 的边），并且是 $\varphi$-相容的（即它的所有标签都应能在 $\varphi$ 上滑动），如第 4.5 节所述。给定一个 I-可容许且 $\varphi$-相容的 C 标记带状图 $G$，我们用 $T_V(G)$ 表示 $G$ 的一个切割表示；该表示通过切开 $G$ 的一条标记为对象 $V \in$I 的边得到，如第 4.5 节所述。

**定理 C** (定理4.12)。若 t 是理想 $\mathscr{I} \subset \mathscr{C}$上的迹，若 $w$ 是$\mathscr{C}$中的 *Bobtcheva–Messia* 元素，若 $\varphi$ 是 $\mathscr{C}$上的相容 *Hennings* 形式，并且若 $G$ 是一个 $\mathscr{I}$-可容许 $\varphi$-相容的 $\mathscr{C}$ 标记的 *Kirby* 图，位于由 *Kirby* 链环表示的四维 4维2-柄体 $W$ 的边界内 $L$，则

$$J'_{\mathscr{C}}(W,G) = \mathrm{t}_V(F_{\mathscr{C}}(L_{w,\varphi} \cup T_V(G)))$$

在 $L \cup G$ 的 2-变形下保持不变。

作为一个特例， $J'_{\mathscr{C}}$ 给出 $\mathscr{I}$-可容许 $\varphi$-相容的 $\mathscr{C}$ 标记的、位于四维 4维 2-柄体边界内的定向带框链环的不变量。当 $\mathscr{C}$ 可因子化时，取 $\Lambda$（属于$\mathscr{C}$ 的双侧积分形式 $\lambda$（定义在$\mathscr{C}$上），该构造可恢复 [DGGPR19]的不变量。

第四种构造将 $J'_{\mathscr{C}}$ 特化为一对 $(W,\Sigma)$ 的不变量，其中 $W$ 是一个四维 2-手柄体， $\Sigma \subset W$ 是一个带状曲面。给定带带无结 $U \cup B$ 和一个 Frobenius 代数 F $\in$ C 上的带带无结模块 V $\in$ C，我们将通过分别以 V 标记无结 $U$ 、以 F 标记带的集合 $B$ ，并以 $\rho$ 标记它们的交集 $U \cap B$ 而得到的 C 标记带状图记为 $G_{\mathscr{V},\mathscr{F}}(U, B)$，如第 4.6 节所述。

定理 *D*（定理 *4.13*）。若 *t* 是理想 $I \subset C$ 上的迹，若 $w$ 是 *E* 的 *Bobtcheva–Messia* 元素，若 $\varphi$ 是 *E* 上相容的 *Hennings* 形式，若 $V \in I$ 是定义在 $\varphi$-相容 *Frobenius* 代数 $F \in C$ 上的带状无结模块，且若 $\Sigma$是由四维 *2*-手柄体 $W$ 内的带带无结 $U \cup B$ 表示的带状曲面，而该四维 *2*-手柄体由 *Kirby* 链环 $L$ 表示，则

$$J'_{\mathscr{C}}(W,\Sigma) = \mathrm{t}_{\mathscr{V}}(F_{\mathscr{C}}(L_{w,\varphi} \cup T_{\mathscr{V}}(G_{\mathscr{V},\mathscr{F}}(U,B))))$$

在 $L \cup U \cup B$ 的带移动下保持不变量。

在适当的假设下，该构造可以扩展为嵌入闭曲面的不变量；当 [LY23]满足$\mathscr{C}$ 是半单且可因子化时，该不变量可还原为 Lee–Yetter 不变量。

综合定理A–D，可为4维2把手体在2等价意义下、其边界中的带框架链环以及在1同痕意义下的带状曲面，提供获得非半单量子不变量的灵活工具。尽管该构造以抽象的范畴论术语表述，使用幺模带状范畴$\mathscr{E}$中的 Lyubashenko 端$\mathscr{C}$，但对于每个幺模带状 Hopf 代数，都可以将其转化为非常具体的形式 $H$，如第5.1节所述。因此，我们的方法同时推广了若干已有不变量；这些不变量要么以幺模带状 Hopf 代数的术语表述，要么仅适用于半单有限带状范畴这一特殊情形。第5.2节展示了一些计算，第5.3–5.5节讨论了一些例子，不过，正如第5.6节所述，寻找更有趣的例子将留待未来研究。

1.5. **致谢**。 作者谨向 Ivelina Bobtcheva、Azat Gainutdinov、Robert Laugwitz 和 Riccardo Piergallini 致谢，感谢他们进行富有成果的讨论并提供真知灼见的建议。第一位和第三位作者的研究得到了 Simons 低维拓扑新结构合作项目以及瑞士国家科学基金会资助项目 200020_207374 的支持。第三位作者还获得了 FNRS 资助项目 1.B.176.24F 的支持。

## 2. 拓扑学预备知识

本节将介绍 1-同痕 在 带状曲面 中 4-维 2-把手体中的概念，并介绍一种基于带带无结图、由 Hughes、Kim 和 Miller 在 [HKM18] 中引入的相应等价关系的图示演算。

关于我们的约定和记号，本文所考虑的所有流形均为紧致、光滑且定向的，并且所有微分同胚均保持定向。单位 $n$-圆盘记作 $D^n$ ，单位 $n$-球面记作 $S^n$。由带边界流形之间取乘积，以及沿其边界的子流形粘合流形而产生的所有角点，都可以在微分同胚意义下典范地光滑化；对此我们将不再另行说明而默认进行光滑化。我们所考虑的真嵌入之间的同痕通常不要求在边界上限制为恒等映射。当需要这种限制时，我们将始终明确称其为相对于边界的同痕，以免混淆。

2.1. 四维 2-手柄体与 2-等价。设 $n$ 和 $k \leqslant n$ 为自然数。回顾一下，一个 $n$ 维 $k$-手柄是 $D_{(k,n)}$ -流形 $n$ 的一个副本 $D^k \times D^{n-k}$。其核心是 $k$-流形 $D^k \times \{0\}$，而其余核心是 $(n-k)$-流形 $\{0\} \times D^{n-k}$。其边界 $\partial D_{(k,n)}$ 由附着管 $A_{(k,n)} := (\partial D^k) \times D^{n-k}$ 和腰带管 $B_{(k,n)} := D^k \times (\partial D^{n-k})$ 组成。这些分别在 $\partial D_{(k,n)}$ 内为附着球面 $(\partial D^k) \times \{0\}$ 和腰带球面 $\{0\} \times (\partial D^{n-k})$ 提供管状邻域。一个 $n$ 维 $k$ -手柄 $D_{(k,n)}$ 可以利用一个嵌入 $\varphi : A_{(k,n)} \hookrightarrow \partial X$ 附着到一个 $n$-流形 $X$ 的边界上。关于将 $D_{(1,2)}$ 的一个副本附着到边界上的示例，参见 [GS99，图 4。1]

**定义 2.1**。一个 $n$维 $k$柄体，或简称柄体，是一个配备了滤过的$n$流形 $X$

$$\varnothing = X^{-1} \subseteq X^0 \subset \ldots \subset X^{k-1} \subset X^k = X$$

$n$流形，使得对于每个指标 $0 \leqslant i \leqslant k$， $n$流形 $X^i$ 是通过以下步骤从 $n$流形 $X^{i-1}$ 得到的：首先沿由恒等映射诱导的典范识别（换言之，边界的领圈）附加一个圆柱体 $(\partial X^{i-1}) \times [0,1]$ $(\partial X^{i-1}) \times \{0\} \to \partial X^{i-1}$，然后沿嵌入 $\varphi$：$(A_{(k,n)})^{\sqcup a_k} \hookrightarrow (\partial X^{i-1}) \times \{1\}$ 附加 $a_k$ 个 $n$维$k$柄 $D_{(k,n)}$。

大多数时候，我们会不严谨地仅用把手体的底层流形来指称它，而不提及其附带的滤过。只要指定边界的一个领圈，我们总可以将一个 $n$维 $k$柄体解释为一个没有（$k+1$）柄的 $n$维（$k+1$）柄体（若 $k<n$），必要时我们也总是默认如此处理。

注意， $n$维 $k$柄体在一个 $n$流形$X$ 上的结构等价于选择一个自指标化莫尔斯函数 $h:\ X\to[0,k+\varepsilon]$满足 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$。特别是， $h$ 中指标为 $i$ 的所有临界点都位于$h^{-1}(i)$内部，因此 $X^i=h^{-1}([0,i+\varepsilon])$，参见 [GS99，第 4 节。2]。

以下是一个众所周知的经典结果。

**命题 2.2**。每个闭 $n$流形 $X$ 都具有 $n$ $n$维柄体的结构，而每个 $n$流形 $X$ 只要边界非空，就具有 $n$维$(n-1)$柄体的结构。

**定义 2.3**。一个 $n$维 $k$柄体 $X$ 的把手同痕是指在 $(\partial X^{i-1})\times\{1\}$ 内，对 $i$ 个把手的粘接映射进行一系列同痕所构成的有限序列，其中 $0\leqslant i\leqslant k$。如果两个 $n$维 $k$柄体可通过把手同痕相互关联，则称它们手柄同痕。类似地，一个 $n$维柄体 $X$ 的 $d$ 变形是指以下操作构成的有限序列：

> $\diamond$在（$\partial X^{i-1}$）内部对 $0\leqslant i\leqslant d$ 的 $i$ 把手的粘接映射进行同痕；$\diamond$ 为 $0\leqslant i\leqslant d$，将 $i$ 把手滑动到其他 $i$ 把手上；$\diamond$ 为 $1\leqslant i\leqslant d$，创建/移除一对（$i-1$）/$i$ 把手。

如果两个 $n$ 维 $k$ 把手体可通过一次 $d$ 变形相互关联，则称它们是 $d$-等价的 。

注意，若两个 $n$维 $k$把手体 $k$-等价，则它们可以在始终不离开$n$维 $k$把手体的类别的情况下变形为彼此。关于以下众所周知的结果，参见 [GS99，定理4.2。12] 以及 [BP11，第1节。2]。

**命题2.4**。 两个 $n$ 维 $n$ 把手体 $X$ 和 $X'$ 若且唯若 $n$ 等价，则它们微分同胚；两个 $n$ 维 $(n-1)$把手体 $X$和 $X'$ 若且唯若 $(n-1)$等价，则它们微分同胚。

本文将重点讨论 $n=4$ 和 $k=2$ 的情形，并始终考虑连通的 4维2柄体。经过1变形后，每个连通的 4维 2柄体都可以假定只有一个0柄，参见例如 [BP11，命题1.2。4]因此，我们始终假定所考虑的每个连通的 4维 2柄体都是由一份 $D^4$ 粘接有限个 1柄和 2柄构成的。

根据命题 2.4，两个 4维 2柄体 $W$ 和 $W'$ 微分同胚，当且仅当它们 3等价。目前尚不清楚，对 2等价是否也成立。事实上， [Go91的猜想B]提出答案可能是否定的，并给出了一族具体反例。

**猜想2.5** (Gompf)。 存在4维2把手体，它们彼此微分同胚，但并不2等价。

2.2. **Kirby 链环及其图示**。 A4维2柄体可由一个位于 *Kirby* 链环 中的 $S^3$表示，它编码了各柄的粘接映射。我们回顾一些定义，并请参阅 [GS99第 5] 章以了解更多细节。下文中，我们将 $S^3$ 与 $\mathbb{R}^3$的一点紧化等同起来，从而可以将立方体 $[0,1]^{\times 3}$ 视为 $S^3$的子集。

**定义 2.6**。一个*Kirby* 缠结 $T = T_1 \cup T_2 \subset [0,1]^{\times 3}$ 是一个（未框架化、无定向的）平凡链环 $T_1$ 与一个不相交的（已框架化、无定向的）缠结 $T_2$ 的并；后者的边界由包含在 $[0,1] \times \{\frac{1}{2}\} \times \{0,1\} \subset [0,1]^{\times 3}$ 中的有限个点组成，每个点都配备由单位法向量 (0，1，0) $\in \mathbb{R}^3$所确定的框架。

若 $T = T_1 \cup T_2$ 是 Kirby 缠结，则 $T_1$ 的各分支将以圆点标记，以便与 $T_2$的闭合分支区分开来。带点解链 $T_1$ 将以紫色绘制，而无点缠结 $T_2$ 将以绿色绘制。因此，满足 $T_1 = \varnothing$ 的 Kirby 缠结 $T = T_1 \cup T_2$ 有时称为绿色缠结。

**定义 2.7**。Kirby 缠结 $T = T_1 \cup T_2 \subset [0,1]^{\times 3}$ 的图示是将 $T$ 投影到 $[0,1]^{\times 2}$ 上的一般位置投影，不含相切点或三重点，并为每个双重点配备交叉状态，且将 $T_2$ 的框架映射为黑板框架。若带点解链 $T_1$ 的像围成一组嵌入于 $[0,1]^{\times 2}$ 中的 Seifert 圆盘（这些圆盘可以与无点缠结 $T_2$的像相交，但彼此不得相交），则称该 Kirby 缠结的图示为正则。

为简便起见，Kirby 缠结 $T = T_1 \cup T_2 \subset [0,1]^{\times 3}$ 的正则图也记作 $T = T_1 \cup T_2 \subset [0,1]^{\times 2}$。

**定义 2.8.** *Kirby* 链环 $L = L_1 \cup L_2 \subset [0,1]^{\times 3} \subset S^3$ 是边界为空的 Kirby 缠结。

Kirby 链环中带点的分支表示四维 1-柄，而不带点的分支表示四维 2-柄。事实上，可以从 Kirby 链环$L$ 的正则图出发，按以下方式构造一个四维 2-手柄体 $W(L)$：

- $W(L)^1$ 通过挖去带点平凡链环 $L_1$ 的一组有限个适当嵌入的 Seifert 圆盘的开管状邻域而得到，每个分支对应一个圆盘；
- $W(L)^2$ 则通过沿不带点链环 $L_2$ 的管状邻域附加一组有限个四维 2-手柄，从 $W(L)^1$ 得到，并利用框架确定粘合映射。

如果 $W(L)$ 的边界与 $(S^1 \times S^2)^{\#n}$ 微分同胚，其中某个整数为 $n \geqslant 0$，那么，根据 [LP72] 中的证明，将 $n$ 个四维 3-柄和一个四维四柄粘合到 $W(L)$ 上，从而得到闭 ˆ4-流形 $W(L)$ 的方式在微分同胚意义下唯一。更多细节请参阅 [GS99，第 4.4 节和第 5 节。

**命题 2.9**。对于每个连通的 4 维 2-柄体 $W$，都存在一个 *Kirby* 链环的正则图 $L$，使得 $W$ 和 $W(L)$ 手柄同痕。

这一点众所周知，但为方便起见，我们略述证明。

证明。考虑一个四维 2-手柄体 $W$。给每个 1-手柄附加一个互补的 2-手柄，再移除由此得到的消去对，我们便得到一个 $D^4$ 的拷贝，其上只附加了 2-手柄。消去对中 2-手柄的余核，是适当嵌入 $D^4$ 的二维圆盘，其边界 $L_1$ 与原有 2-手柄的附着球面的像 $L_2$ 不相交。由此得到表示 $W$ 的 Kirby 链环 $L \subset S^3$，并且在把手同痕下，我们可以假设 $L \subset [0,1]^{\times 3}$。考虑到 $[0,1]^{\times 2}$ 的一般位置投影，我们得到 $L$ 的图示。由于 $L_1$ 的像构成平凡链环的图示，我们可以在 $[0,1]^{\times 2}$ 中进行同痕和雷德迈斯特变换，将其化为平凡图示（注意，对于 $L_2$ 的像，我们只能使用带框架的雷德迈斯特变换）。□

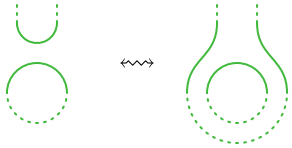
我们可以将 2-等价的 4维 2-柄体转化为 Kirby 链环正则图之间的等价关系，遵循 [BP11]。

**定义 2.10**。 Kirby 链环的正则图的一个 2-变形 $L = L_1 \cup L_2$是下列操作之一：

◇ 在 $[0,1]^{\times 2}$中的同痕；◇ 正则 雷德迈斯特变换（即涉及来自单个点标记分支的至多一条带状图的股，且至少涉及另一个分支的带框架的 Reidemeister 变换）；◇ 创建/移除由点标记分支和无点分量组成的消去对；



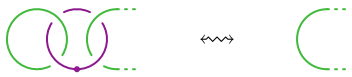
◇ 按照框架，将无点分量滑过其他无点分量。



**命题 2.11**。 设 $L$、$L'$ 为 *Kirby* 链环的正则图。那么 $W(L)$ 和$W(L')$ 是2-等价的，当且仅当 $L$ 和 $L'$ 可通过有限序列的2-变形相互得到。

证明见 [BP11，命题 2.2。8],在我们的情形中，所有标签都等于 1 。

注意，命题2.11特别意味着，一个1-手柄在另一个1-手柄上的滑动可以通过 1/2-手柄的消去以及2-手柄在其他2-手柄上的滑动来实现；同样，2-手柄从1-手柄下方滑过也是如此，参见 [BP11，图 2.2.8 和 2.2.11]。由 1/2-手柄的消去以及2-手柄在其他2-手柄上的滑动还可推出另一种操作，即创建/移除以其他 1/2-手柄为基点的 2-手柄链对。对于正则图，这相当于创建/移除以其他无点分量为基点的带点与无点分量链对，如下图所示。



2.3. **带状曲面与1-同痕**。 下面我们讨论一类适当嵌入四维 2-手柄体内部的曲面，并将其称为带状曲面，同时引入它们之间的一种等价关系，称为 1-同痕。回顾一下，流形的嵌入 $\iota : Y \hookrightarrow X$ 称为真的，若对每个紧子集 $K \subset X$，$\iota^{-1}(K)$ 都是紧的。由于我们假设$Y$是紧的，因此当且仅当 $\iota^{-1}(\partial X) = \partial Y$ 时，这一条件成立。

**定义 2.12**。在一个 $n$ 维柄体 $X$ 内，对一个 $m$ 维柄体 $j$ 的真嵌入 $\iota : Y \hookrightarrow X$ 是一个 $m$维子$j$柄体，或简称为子柄体；若它对每个指标 $0 \leqslant i \leqslant k$ 都限制为一个真嵌入 $\iota^i : Y^i \hookrightarrow X^{i+1}$，则称其为过滤相容的。

在情况允许时，我们有时会省略嵌入 $\iota$，而直接写作 $Y \subset X$。

在子流形 $Y$ 上的过滤相容 $m$维子$j$柄体结构，与选择一个自指标化莫尔斯函数 $h\colon X \to [0, k+\varepsilon]$ 等价（相差同痕），其中 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$，且 $Y$ 与 $h$ 的临界点不相交；其限制 $g\colon Y \to [\frac{1}{2}, k+\varepsilon]$ 是一个莫尔斯函数，并且 $g^{-}\frac{1}{2}$ 自指标化。特别地，指标为 $i$ 的 $h$ 的所有临界点都位于 $h^{-1}(i)$ 内，而指标为 $i$ 的 $g$ 的所有临界点都位于 $g^{-1}(i+\frac{1}{2})$ 内，因此 $X^i = h^{-1}([0, i+\varepsilon])$，而 $Y^i = g^{-1}([\frac{1}{2}, i+1+\varepsilon])$。

Wh在 $n = 4$ 和 $m = 2$中，我们有以下结果 ult.

**定理 2.13**。 在同痕意义下，嵌入闭合流形内部的每个闭曲面，都可赋予一个结构，使其成为某个四维 *4*-手柄体中过滤相容的二维子 *2*-手柄体；而适当嵌入具有非空边界的 *4*-流形内部的每个边界非空曲面，都可赋予一个结构，使其成为某个四维 *3*-手柄体中过滤相容的二维子 *2*-手柄体。

定理 2.13 的证明归功于 Hughes、Kim 和 Miller，其依据是带状无结这一概念，我们将在第 2.13 节回顾该概念。

**定义 2.14**。 （定向）带状曲面 是一个四维 2-柄体 $W$中的（定向）二维子 1-手柄体 $\Sigma$。

换言之，一个（定向的）带状曲面 $\Sigma \subset W$ 由有限个（定向的）二维 0-手柄（即圆盘）的不交并，以及附着于其上的有限个（定向的）二维 1-手柄（即带）组成（通过保持定向相容的粘接映射）。注意，在 $W$ 没有 1-手柄或 2-手柄的情况下，我们便得到通常意义下 $D^4$ 中的带状曲面概念。

**定义 2.15**。 一个 $n$维 $k$柄体 $X$ 的 $m$维子$j$柄体 $Y$ 的手柄同痕是以下各项组成的序列：

◇ 将 $Y$ 同痕到 $X$，同时保持手柄粘接映射；◇ $Y$的嵌入把手同痕；◇ $X$的环境把手同痕。

$n$维 $k$柄体的两个 $m$维子$j$柄体，如果它们通过一次手柄同痕相互关联，则称为手柄同痕的。类似地，一个 $n$维 $k$柄体$X$ 的 $m$维子$j$柄体 $Y$的（$c$，$d$）变形是以下各项组成的序列：

◇ 保持手柄附着映射的将 $Y$ 同痕到 $X$ 中；$c$ 的嵌入式变形；$d$ 的环境变形。

$n$ 维把手体中的两个 $m$ 维子-$j$-把手体，若可通过 $(c, d)$-变形相互关联，则称它们是 $(c, d)$-等价的。

注意，若两个 $m$ 维子-$j$-把手体 $n$维 $k$-把手体是$(j, k)$-等价的，那么它们可以彼此变形，且始终不离开 $m$ 维子-$j$-把手体 $n$维 $k$-把手体这一类。以下结果归功于 Hughes、Kim 和 Miller，参见[HKM18，定理 4。3]。

**定理 2.16**。两个过滤相容的2维子-2-把手体，分别位于4 维4-把手体中，当且仅当它们是(2,4)-等价的，才微分同胚；两个过滤相容的2维子-2-把手体，分别位于4维3-把手体中，当且仅当它们是(2,3)-等价的，才微分同胚。

**定义 2.17**。 1-同痕 是带状曲面之间的一种 (1，2)-变形。

我们采用 1-同痕这一术语，以扩展 [BP11，定义 1.35] 中为带状曲面 $D^4$引入的术语；不过读者应牢记，按照我们的约定，手柄同痕和 1-同痕不仅是曲面的同痕，还包括环境柄体的变形。

**猜想 2.18.** 存在彼此微分同胚但不1-同伦的带状曲面。

2.4. **带状无结及其图示。** 为了以更组合的方式描述带状曲面，我们将采用 [HKM18]中提出的图示描述。

**定义 2.19.** 带状无结 $L\cup U\cup B\subset[0,1]^{\times 3}\subset S^3$ 是由一个 Kirby 链环 $L$、一个（无框架、无定向的）平凡链环 $U$以及一组（带框架、无定向的）弧（或带） $B$ 组成的并集，并满足以下条件：

◇ $L_1$ 与 $U$ 的并集仍是一个平凡链环；◇ $B$ 的内部与 $L\cup U$不相交，且其端点位于 $U$上。

若平凡链环 $U$ 带有定向，则带状无结 $L\cup U\cup B$ 带有定向。若带状无结 $L\cup U\cup B$ 带有定向，则我们要求在 $U\cap B$的每一点处，三元组 $(x,\ y,\ z)$ 都是 $S^3$的切空间的正基，其中 $x$ 是 $B$的出射切向量， $y$ 是由定向指定的 $U$ 的切向量，而 $z$ 是 $B$的框架。

如果 $L\cup U\cup B$ 是一个带状无结，那么 Kirby 链环 $L$ 将以紫色和绿色绘制，平凡链环 $U$ 将以蓝色绘制，而带的集合 $B$ 将以红色绘制。注意，在 [HKM18的第 3], 节中，蓝色平凡链环 $U$ 是以黑色绘制的，并且还要求 $U\cup B$ 满足一项额外性质，才能表示闭曲面。在我们的设定中，我们考虑更一般形式的带状无结，因为我们主要关注带状曲面。

**定义 2.20。**（定向）带状无结 $L\cup U\cup B\subset[0,1]^{\times 3}$的图示是将 $L\cup U\cup B$ 一般位置投影到 $[0,1]^{\times 2}$ 所得的投影，其中没有相切点或三重点；该投影为每个双重点配备一个交叉状态，并将 $L_2$ 和 $B$ 的框架映射为黑板框架。若带状无结图示中，带点解链 $L_1$ 的像围成一组嵌入于 $[0,1]^{\times 2}$ 中的 Seifert 圆盘，且这些圆盘与平凡链环 $U$ 的像不相交（但仍允许与无点链环 $L_2$ 及带 $B$的像相交），并且 $U$ 上的黑板框架是零框架，则该图示称为正则。

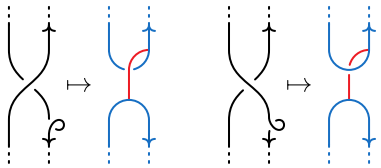
略去符号上的区别，带带无结的正则图 $L\cup U\cup B\subset[0,1]^{\times 3}$也记作 $L\cup U\cup B\subset[0,1]^{\times 2}$。

$U$ 的分支代表二维 0-手柄，而 $B$ 中的带代表二维 1-手柄。事实上，可以按照以下方式从带带无结的正则图$L\cup U\cup B$ 出发，构造过滤相容的带状曲面 $\Sigma$（$U$, $B$） $\subset W$（$L$）：

◇ $W(L)$ 是由 Kirby 链环 $L$ 确定的四维 2-手柄体；◇ $\Sigma(U,B)^0\subset W(L)^1$ 由定向无结 $U$ 的一组有限个正常嵌入的 Seifert 圆盘给出，每个分支对应一个圆盘，因此 $\partial\Sigma(U,B)^0$由 $U\subset\partial W(L)^1$ 给出；◇ $\Sigma(U,B)^1\subset W(L)^2$ 通过按照带 $B$ 的指定附加一组有限个二维 1-手柄，从而由 $\Sigma(U,B)^0$ 得到，因此 $\partial\Sigma(U,B)^1$ 由链环 $U(B)$ 给出，该链环由 $U$ 沿 $B$ 进行带手术得到。

若 $\Sigma(U, B)$ 的边界与某个整数 $m \geqslant 0$ 对应的 $(S^1)^{\sqcup m}$ 微分同胚，则存在唯一的粘接方式（相差同痕），将 $m$ 个二维 2-手柄粘接到 $\Sigma(U, B)$ 上，从而得到闭的、过滤相容的二维 ˆ 子 2-柄体 $\Sigma(U, B)$。

例如，Seifert 算法将每个结的定向图与一个带状曲面 $\Sigma \subset S^3 \subset D^4$联系起来，而表示 $\Sigma$ 的带带无结图可由 $K$ 的结图按如下方式得到。



请注意一个微妙之处。一方面，下面是一个带带无结，表示适当嵌入 $D^4$中的 $D^2$ 的一个拷贝。



另一方面，下面的图不是带带无结，因为 $L_1 \cup U$ 是一个 Hopf 链环，而非平凡链环。



事实上，尽管第二幅图仍可理解为表示适当嵌入 $D^4$中的 $D^2$ 的一个拷贝，但这种嵌入并不与滤过相容。

请注意，由于每个闭4维流形 $W$ 都存在一个 Kirby 链环 $L$ 使得 $W$ 微分同胚于ˆ$W(L)$，定理2.13 的第一部分直接由 [HKM18、引理 4.9 和定义 4.15], 保证存在一个ˆ带带无结 $U \cup B$ 使得 $\Sigma(U, B)$ 与 $\Sigma$同位。对于 $W$ 和 $\Sigma$ 具有边界的情形，同一证明也适用。更准确地说，我们有以下结果。

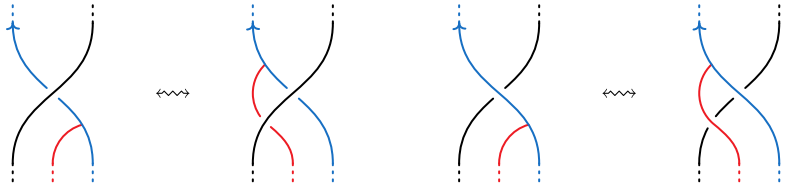
**命题 2.21**。对于每个（定向）带状曲面 $\Sigma \subset W$，都存在一个（定向）带带无结的正则图示 $L \cup U \cup B$，使得 $\Sigma \subset W$ 和$\Sigma$（$U$、$B$）$\subset W$（$L$）手柄同痕。

证明。在手柄同痕意义下，我们可以找到一个自指标化莫尔斯函数 $h$，定义在 $W$ 上，其在 $g$ 上的限制 $\Sigma$ 也是一个莫尔斯函数，并且$g$ 的所有临界点都处于不同的层级。换言之，在手柄同痕意义下，我们可以假设 $\Sigma$相对于定义在 $W$上的自指标化莫尔斯函数 $h$ 处于一般位置，采用 [HKM18，定义 4.8]中的术语。特别要注意的是，我们可以假设 $\Sigma$ 的每个$k$-手柄恰好包含 $g$的一个指标为 $k$ 的临界点。于是，[HKM18 引理 4.9] 的证明给出了一种算法，通过有限序列的 $h$-正则且$h$-不相交的水平和垂直同痕，将 $\Sigma$ 置于水平-垂直位置，如 [HKM18，定义 2.4], 所述；这些同痕均为手柄同痕。此外，[HKM18 引理 4.6]的证明给出了一种算法，通过有限序列的 $h$-正则且 $h$-不相交的水平和垂直同痕，确保 $\Sigma$ 的极小点位于鞍点下方；这些同痕均为手柄同痕。最后，[HKM18 命题 4.4] 的证明给出了一种算法，通过有限序列的 $h$-正则且 $h$-不相交的水平和垂直同痕，将 $\Sigma$ 置于带带无结位置，如 [HKM18，定义 3.1], 所述；这些同痕均为手柄同痕。□

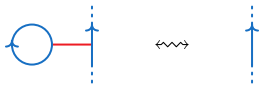
我们可以按照 1-同痕，将（定向）带状曲面转化为（定向）带状无结正则图示之间的等价关系，遵循 [HKM18]。

**定义 2.22**。（定向）带状无结$L \cup U \cup B$的正则图示的**带移动** 是下列操作之一：

◇ $[0,1]^{\times 2}$中的同痕；◇ 正则 雷德迈斯特变换（指带框架的 Reidemeister 变换，其中至多涉及来自单个带点分量的一股，并且至少涉及另一个分量）；
◇ 平凡结与带之间的交点穿过交叉时的移动（黑色股线可以取任意颜色）；



◇ 平凡结与带的杯对 的创建/消去（称为杯移动）；



◇ 带点分量与无点分量的消去对 的创建/消去；



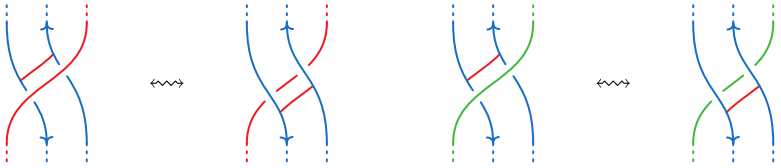
◇ 带在其他带上的滑动；



◇ 带和无点分量按照框架在其他无点分量上的滑动；

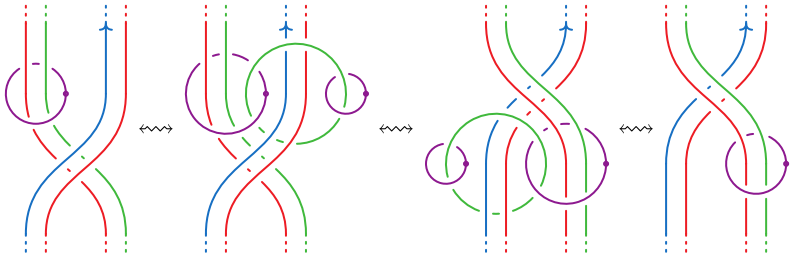


◇ 带和无点分量穿过其他带的游动。



注意到，[HKM18，图 4]还包括另外两种移动，即帽移动，以及在带点分量下方滑动无链环分支和带。一方面，这里特意省略了第一种移动，因为我们关注的是1-同痕，而非同痕；帽移动正是二者的区别所在。尤其是，我们采用更严格的含义来使用带移动

就 Hughes、Kim 和 Miller 而言。另一方面，滑动带点分量下方的无链环分支和带，可以由其余移动推出，如下方示例所示。



出于同样的原因，无点分量在带点分量下方滑动，以及带点分量在其他带点分量上方滑动，也可由其余移动推出，如 [BP11，图示2.2.9和2.2.11]所示。

**命题2.23**。设 $L \cup U \cup B$和 $L' \cup U' \cup B'$ 是（定向）带状无结的正则图。那么， $\Sigma(U、B) \subset W(L)$与 $\Sigma(U'、B') \subset W(L')$是1-同痕，当且仅当 $L \cup U \cup B$ 和 $L' \cup U' \cup B'$ 可由有限序列的带移动相互关联。

证明。一方面，若 $L \cup U \cup B$和 $L' \cup U' \cup B'$可由有限序列的带移动相互关联，那么显然 $\Sigma(U, B) \subset W(L)$与 $\Sigma(U', B') \subset W(L')$是1-同痕的。

另一方面，如果 $W(L)$ 和 $W(L')$ 2-等价，那么 $L$ 和 $L'$ 可通过有限序列的2-变形彼此关联。更准确地说， $W(L)$ 中 $1/2$-手柄消去对的产生／消去，可通过 $L$ 中点标记分量和无点分量消去对的产生／消去来实现；而将 $W(L)$ 中的 2-手柄滑过其他 2-手柄，则可通过将 $L$中的无点分量滑过其他无点分量来实现。由于这些都是带移动的特殊情形，我们可以假设 $L = L'$。此外，我们总可以假设 $\Sigma(U, B)$ 和 $\Sigma(U', B')$ 是一般位置曲面，如 [HKM18，定义 4.8], 所述，并且它们之间的1-同痕与 $h$不相交，如 [HKM18，定义 2.3], 所述，因为后者是一般位置条件。于是，由 [HKM18，引理 4.11] 可知，若存在从 $\Sigma(U, B)$ 到 $\Sigma(U', B')$ 的 1-同痕，那么 $U \cup B$和 $U' \cup B'$可通过有限序列的带移动彼此关联。更准确地说，保持手柄附着映射不变的 $\Sigma(U, B)$ 同痕，可通过以下有限序列来实现： $[0, 1]^{\times 2}$中 $U \cup B$ 的同痕、 $U \cup B$的正则 Reidemeister移动、将 $U \cup B$ 的带滑过 $L$的无点分量，以及 $U \cup B$穿过带游动；而 $\Sigma(U, B)$ 中 $0/1$-手柄消去对的嵌入式产生／消去，可通过杯移动来实现；将 $\Sigma(U, B)$ 中的 1-手柄嵌入式滑过其他 1-手柄，则可通过将 $U \cup B$ 的带滑过其他带来实现。□

## 3. 代数预备知识

本节回顾构造四维 2-手柄体中带状曲面 1-同痕量子不变量所需的基本代数框架。

关于约定和符号，本文中我们始终固定一个代数闭域 $\Bbbk$；除非另有说明，linear 一词均表示 $\Bbbk$-线性。

3.1. **幺模带状范畴**。 根据 [EGNO15，定义 1.8。5], 有限范畴是一个线性范畴 C，其基域为 $\Bbbk$ ，并且它等价于范畴$A$-模，即有限维左 $A$-模的范畴，其中的代数是有限维代数 $A$，其基域为$\Bbbk$。EGNO15 提供了一个等价且更为明确的刻画： [EGNO15，定义 1.8。6]有限范畴 $\mathscr{C}$ 具有足够多的射影对象，这意味着

每个对象 $X \in$C 都有一个投射覆盖 $P_X \in$ C，并配备一个投影态射 $\varepsilon_X : P_X \to X$。

带状范畴是配备带状结构的辫刚性幺半范畴 C。幺半结构通过引用[ML71, Theorem XI.3.1], 而始终假设为严格结构，其由张量积 $\otimes$ : C $\times$C $\to$ C 和张量单位 $\in$ C 给出。C 的刚性确保双侧对偶的存在，因此我们可以为每个 $X \in$ C 固定左、右求值态射和余求值态射的双自然族 $\overleftarrow{\mathrm{ev}}_X$ : $X^* \otimes X \to$ , $\overleftarrow{\mathrm{coev}}_X$ : $\to X \otimes X^*$, $\overrightarrow{\mathrm{ev}}_X$ : $X \otimes X^* \to$ , 以及 $\overrightarrow{\mathrm{coev}}_X$ : $\to X^* \otimes X$。辫结构由自然的辫同构族 $c_{X,Y}$: $X \otimes Y \to Y \otimes X$ 给出，其中任意 $X, Y \in$ C 均成立。最后，带状结构由自然的扭转同构族 $\vartheta_X$ : $X \to X$ 给出，对每个 $X \in$C 均成立。这些数据必须满足若干公理，详见[EGNO15, Sections 2.1, 2.10, 8.1, 8.10]。

刚性范畴 $\mathscr{C}$ 是 幺模的 当且仅当它是有限的且 $P^* \cong P_{\mathbb{1}}$，参见[EGNO15，定义 6.5。7]。

若 C 是一个编织幺半范畴，则称态射 $f \in$ C($X$, $Y$) 关于对象 $Z \in$C 透明，或称为 $Z$-透明，如果

$$(f \otimes \mathrm{id}_Z) \circ c_{Z,X} \circ c_{X,Z} = f \otimes \mathrm{id}_Z,$$

若它对每个对象 $Z \in$C 都是 $Z$-透明的，则称它是透明的。若对象 $X \in$ C 满足 $\mathrm{id}_X \in \mathrm{End}_{\mathscr{C}}(X)$ 透明，则称其为透明对象。C 中透明对象构成的全子范畴 $M$(C) 称为 C 的 Müger中心。若幺模带状范畴 C 的所有透明对象都是平凡的，也就是说，它们同构于张量单位 的若干个副本的直和，则称 C 可因子化。可因子化带状范畴 C 有时也称为模范畴。正如 [Sh16，定理 1.1] 和 [BD21，命题 7.1]所证明的，上述定义等价于其他几种定义。

3.2. 幺模带状 Hopf 代数。幺模带状范畴的一个重要例子来源，是幺模带状 Hopf 代数的表示范畴。事实上，设 $H$ 是域 $\Bbbk$上的一个霍普夫代数，其单位元为 $\eta$ : $\Bbbk \to H$，乘积为 $\mu$ : $H \otimes H \to H$，余单位为 $\varepsilon$ : $H \to \Bbbk$，余乘法为$\Delta$ : $H \to H \otimes H$，反 antipode 为 $S$: $H \to H$。对所有元素 $x, y \in H$，我们采用以下简记： $\mu(x \otimes y) = xy$表示乘积， $\eta(1) = 1$表示单位元，$\Delta^{(n)}(x) = x_{(1)} \otimes \ldots \otimes x_{(n)}$表示迭代余乘积，其中 $\Delta^{(0)} = \varepsilon$, $\Delta^{(1)} = \mathrm{id}_H$,$\Delta^{(2)} = \Delta$，并递归地对每个 $n \geqslant 3$有 $\Delta^{(n)} = (\Delta \otimes \mathrm{id}_H) \circ \Delta^{(n-1)} = (\mathrm{id}_H \otimes \Delta) \circ \Delta^{(n-1)}$ （注意，我们使用隐藏求和的 Sweedler 记号）。若 $H$是有限维的，则反 antipode $S$ 是可逆的，证明见 [Ra12，定理 7.1。14]

$H$ 上的带状结构由一个 R-矩阵 $R = R'_i \otimes R''_i \in H \otimes H$ （其中隐藏了求和）和一个带状元 $v_+ \in$ Z($H$)给出，参见 [Ka95，定义 VIII.2.2 和 XIV.6.1]。我们将 $v_- \in$ Z($H$)记作逆带状元，将 $u \in H$ 记作 Drinfeld 元，并将与 R-矩阵$R$相关联的 M矩阵记作 $M \in H \otimes H$ ；它们分别由 $v_+ v_- = 1$、 $u = S(R''_i)R'_i$和 $M = R''_j R'_i \otimes R'_j R''_i$定义（其中隐藏了求和）。我们还将 $g \in H$ 记作唯一的、与 $v_+$相容的尖点（或平衡）元素；该元素是由 $g = uv_-$定义的类群元。

若元素 $x \in H$ 满足反演不变，且形式 $\alpha \in H^*$ 满足平衡的，则

$$S(x) = x, \qquad \alpha(S(g^2 y)) = \alpha(y) \tag{2}$$

对每个 $y \in H$。我们用 $H^S \subset H$ 表示 $H$ 中反 antipode 不变元构成的子空间，并用 $(H^*)^g \subset H^*$ 表示 $H$ 上平衡形式构成的子空间。

右积分元 $\Lambda \in H$ 是 $H$ 中满足以下条件的一个元素

$$\Lambda x = \varepsilon(x)\Lambda \tag{3}$$

对每个 $x \in H$，左积分形式 $\lambda \in H^*$ 是 $H$ 上的线性形式，满足

$$\lambda(x_{(2)})x_{(1)} = \lambda(x)1 \tag{4}$$

对每个 $x \in H$，参见 [Ra12，定义 10.1.1 和 10.1.2]。右积分元$\Lambda \in H$ 与左积分形式 $\lambda \in H^*$ 是 归一化的，如果它们满足

$$\lambda(\Lambda) = 1 = \lambda(S(\Lambda)). \tag{5}$$

若 $H$ 是有限维的，那么，由于 [Ra12，定理 10.2.2], 右积分元空间和左积分形式空间均为 1维的，因此它们存在一对归一化的生成元 $\Lambda \in H$ 和 $\lambda \in H^*$，且 *Radford* 映射

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda : H &\to H^* \\ z &\mapsto \lambda(z\_) \end{aligned} \tag{6}$$

是一个线性同构，其逆元为

$$\begin{aligned} \Psi_\Lambda : H^* &\to H \\ \varphi &\mapsto \varphi(S(\Lambda_{(1)}))\Lambda_{(2)}. \end{aligned} \tag{7}$$

右积分元 $\Lambda \in H$ 若为双侧，或简称积分元，则其反 antipode 不变。若 $H$ 是有限维的，则反演不变的右积分元 $\Lambda \in H$ 也是左积分元，因为它满足

$$x\Lambda = \varepsilon(x)\Lambda \tag{8}$$

对每个 $x \in H$，参见 [Ra12，引理 10.5。1]。有限维霍普夫代数$H$ 是 幺模的，如果其非零右积分元 $\Lambda \in H$ 是双侧的；此时其非零左积分形式 $\lambda \in H^*$ 是平衡的，比较 [Ra12，定理 10.5。4]。如果 $H$ 是幺模的，那么有限维左 $H$-模范畴 $H$ 构成幺模带状范畴，这得益于 [Lo97，引理 2。5]。

元素 $z \in H$ 若满足以下条件，则称其为中心的

$$xz = zx \tag{9}$$

对每个 $x \in H$。我们用 $\mathsf{Z}(H) \subset H$ 表示 $H$ 中中心元构成的向量空间，也称为 $H$ 的中心；用 $\mathsf{Z}^S(H) = \mathsf{Z}(H) \cap H^S$ 表示 $H$ 中反演不变中心元构成的子空间。单位元 $1 \in H$ 是反演不变中心元的一个例子。线性形式 $\varphi \in H^*$ 若满足以下条件，则称为左量子特征

$$\varphi(xy) = \varphi(yS^2(x)) \tag{10}$$

对所有 $x, y \in H$ 均成立。我们将 $H$ 上的左量子特征所构成的向量空间记为 $\mathsf{Q}(H) \subset H^*$，将 $H$ 上的平衡左量子特征所构成的子空间记为 $\mathsf{Q}^g(H) = \mathsf{Q}(H) \cap (H^*)^g$。余单位 $\varepsilon \in H^*$ 是平衡左量子特征的一个例子。若 $H$ 是幺模的，则 [Ra12, Theorem 10.5.4] 蕴含双侧积分元 $\Lambda \in H$ 是 $H$ 的反 antipode 不变中心元，而左积分形式 $\lambda \in H^*$ 是 $H$ 上的平衡左量子特征。此外，由 [Ra12, Corollary 10.7.2] 和 [He96, Proposition 4.2] 可知，公式 (6) 中的 Radford 映射（其逆映射由公式 (7) 给出）限制后得到线性同构 $\Phi_\lambda : \mathsf{Z}(H) \to \mathsf{Q}(H)$ 和 $\Phi_\lambda : \mathsf{Z}^S(H) \to \mathsf{Q}^g(H)$，其逆映射分别为 $\Psi_\Lambda : \mathsf{Q}(H) \to \mathsf{Z}(H)$ 和 $\Psi_\Lambda : \mathsf{Q}^g(H) \to \mathsf{Z}^S(H)$。

若反 antipode 不变中心元 $z \in H$ 满足以下条件，则称其为*Hennings* 元素

$$zz_{(1)} \otimes z_{(2)} = z \otimes z. \tag{11}$$

我们用 $\mathrm{Z}_{\mathrm{H}}^{S}(H) \subset \mathrm{Z}^{S}(H)$表示 $H$的 Hennings 元素集合。单位元 $1 \in H$就是 Hennings 元素的一个例子。注意，Hennings 元素 $z \in H$具有反演不变性，因此也满足

$$z_{(1)} \otimes z z_{(2)} = z \otimes z, \tag{12}$$

这与 [He96 命题 4 中的原始定义相符。3]。若平衡左量子特征标 $\varphi \in H$ 是一个左 *Hennings* 形式，则它满足

$$\varphi(x y_{(1)})\varphi(y_{(2)}) = \varphi(x)\varphi(y) \tag{13}$$

对所有的 $x, y \in H$ 均成立。我们用 $\mathrm{Q}^{g}\,\mathrm{H}(H) \subset \mathrm{Q}^{g}(H)$ 表示$H$上的左 Hennings 形式集合。余单位 $\varepsilon \in H^{*}$ 是左 Hennings 形式的一个例子。若 $H$ 是幺模的，则双侧积分元 $\Lambda \in H$ 是 Hennings 元，而左积分形式 $\lambda \in H^{*}$ 是左 Hennings 形式。由命题 3.8 和 3.13 可知，若 $\varphi \in H^{*}$ 是左 Hennings 形式，则对于每个 Hennings 元 $z \in H$， $\varphi(z\_) \in H^{*}$ 也是左 Hennings 形式。

反 antipode 不变中心元 $w \in H$ 若存在左 Hennings 形式 $\varphi \in H^{*}$ 满足以下条件，则称为 *Bobtcheva–Messia* 元素

$$\varphi(wx) = \varepsilon(x) \tag{14}$$

对所有 $x \in H$。此时，我们称 Bobtcheva–Messia 元素 $w$ 与左 Hennings 形式 $\varphi$ 彼此相容。当 $H$ 为幺模时，应将此定义与 [BM02中的定理 2 进行比较。14]，该定理考虑了一个类似条件，即存在一个 Hennings 元素 $z \in H^{*}$ 使得

$$\lambda(zwx) = \lambda(\Lambda x) \tag{15}$$

对所有 $x \in H$，以及对于归一化双侧积分元 $\Lambda \in H$ 和左积分形式 $\lambda \in H^{*}$，均有此条件。请注意，由于 $H$ 的双侧积分元空间和 $H$ 上的左积分形式空间都是 1 维的，因此此条件与 $\Lambda \in H$ 和 $\lambda \in H^{*}$ 的选取无关。我们用 $\mathrm{Z}_{\mathrm{BM}}^{S}(H) \subset \mathrm{Z}^{S}(H)$ 表示 $H$ 的 Bobtcheva–Messia 元素集合。单位元 $1 \in H$ 就是一个 Bobtcheva–Messia 元素，因为余单位 $\varepsilon \in H^{*}$ 是一个相容的左 Hennings 形式。若 $H$ 是幺模的，则双侧积分元 $\Lambda \in H$ 是一个 Bobtcheva–Messia 元素，因为左积分 $\lambda$ 是一个相容的左 Hennings 形式。

反 antipode 不变中心元 $e \in H$ 若满足以下条件，则为幂等元

$$e^{2} = e. \tag{16}$$

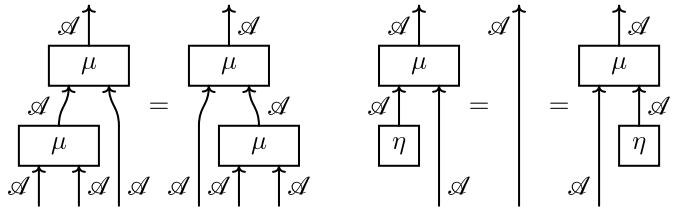
我们用 $\mathrm{Z}_{\mathrm{I}}^{S}(H) \subset \mathrm{Z}^{S}(H)$ 表示$H$的反极不变中心幂等元集合。反极不变中心幂等元的一个例子是单位元 $1 \in \mathrm{Z}_{\mathrm{I}}^{S}(H)$。若存在一个 Bobtcheva–Messia 元素 $w \in H$ 以及一个相容的左 Hennings 形式$\varphi \in H^{*}$，使得以下条件成立，则平衡左量子特征标 $\psi \in H^{*}$ 是左带状无结形式

$$\psi(x y_{(1)})\varphi(y_{(2)}) = \psi(x)\varphi(y), \qquad \psi(x w_{(1)})\psi(w_{(2)}) = \psi(x) \tag{17}$$

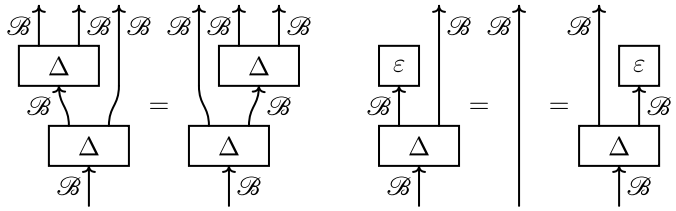
对所有 $x, y \in H$ 均成立。在这种情况下，我们称左带状无结形式 $\psi$、Bobtcheva–Messia 元素 $w$ 和左 Hennings 形式 $\varphi$ 彼此相容。我们用 $\mathrm{Q}^{g}\,\mathrm{BU}(H) \subset \mathrm{Q}^{g}(H)$ 表示 $H$ 上左带状无结形式的集合。若$w \in H$ 是 Bobtcheva–Messia 元素，且 $\varphi \in H^{*}$ 是与之相容的左 Hennings 形式，则相容的带状无结形式的一个例子是 $\varphi \in \mathrm{Q}^{g}\,\mathrm{BU}(H)$。由命题 3.12 和 3.13 可知，若 $w \in H$ 是 Bobtcheva–Messia 元素，且$\varphi \in H^{*}$ 是与之相容的左 Hennings 形式，则对于任意反 antipode 不变中心幂等元 $e \in H$， $\varphi(e\_) \in H^{*}$ 都是相容的带状无结形式。

3.3. **幺半范畴中的（余）代数**。设 $\mathscr{C}$ 为一个幺半范畴。

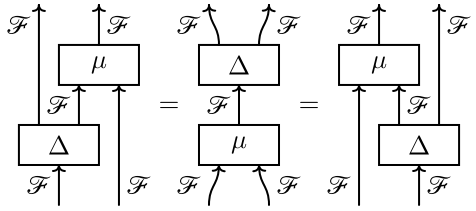
C 中的一个代数 是一个对象 A $\in$ C，配备一个乘积 $\mu$ : A $\otimes$A $\to$ A 和一个单位元 $\eta$ : $\to$A，并满足 $\mathbb{1}$



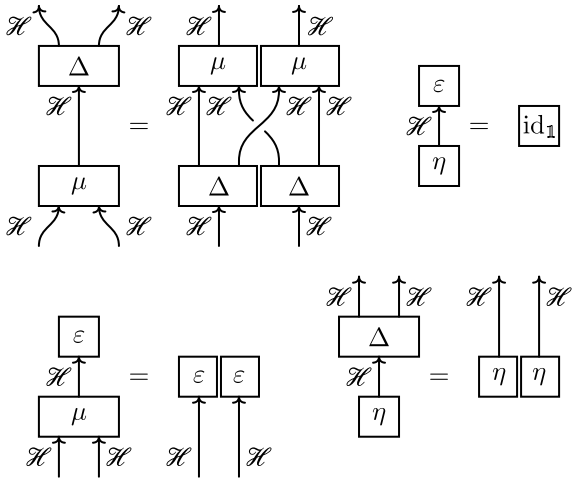
C 中的一个余代数是一个对象 B $\in$C，配备一个余乘法 $\Delta$: B $\to$B $\otimes$B 和一个余单位 $\varepsilon$: B $\to$ ，满足 $\mathbb{1}$

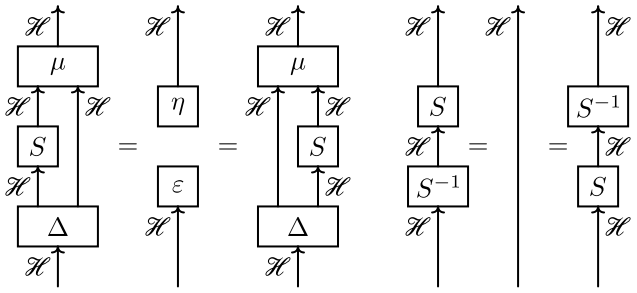


C 中的一个*Frobenius* 代数是一个对象 F $\in$C，配备代数结构和余代数结构，满足

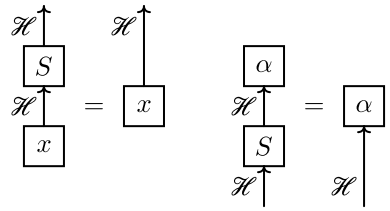


若 C 是辫状的，则 C 中的一个霍普夫代数 是一个对象 H $\in$ C，配备了代数结构和余代数结构，以及一个反 *antipode* $S$ : H $\to$ H，其逆元为$S^{-1}$ : H $\to$H，并满足





**3.4. 积分、中心元与量子特征**。固定一个辫状幺半范畴 C。若 H $\in$ C 是一个霍普夫代数，则 H 的一个元素 是一个态射 $x:\to$H，而 H 上的一个形式 是一个态射 $\alpha:$H $\to$ 。H 的一个元素 $x$ 和 H 上的一个形式 $\alpha$ 若满足以下条件，则称为反演不变

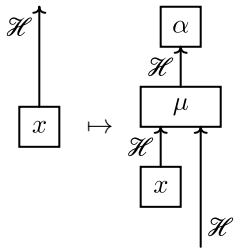


(18)

我们用 C( ,H)$^S$ $\subset$C( ,H) 表示 H 的反 antipode 不变元集合，并用 C(H, )$^S$ $\subset$C(H, ) 表示 H 上的反 antipode 不变形式集合。

H 上的每个形式 $\alpha$ 都定义了一个映射

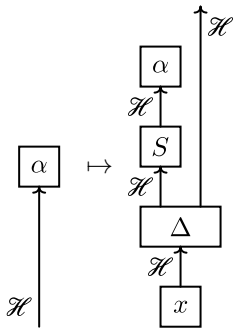
$$\Phi_\alpha : \mathscr{C}(\mathbb{1}, \mathscr{H}) \to \mathscr{C}(\mathscr{H}, \mathbb{1})$$



(19)

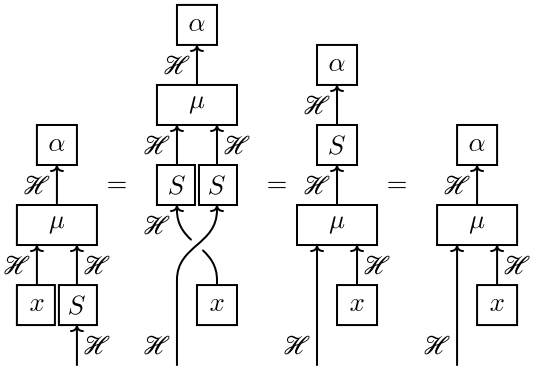
并且 H 的每个元素 $x$ 都定义了一个映射

$$\Psi_x : \mathscr{C}(\mathscr{H}, \mathbb{1}) \to \mathscr{C}(\mathbb{1}, \mathscr{H})$$

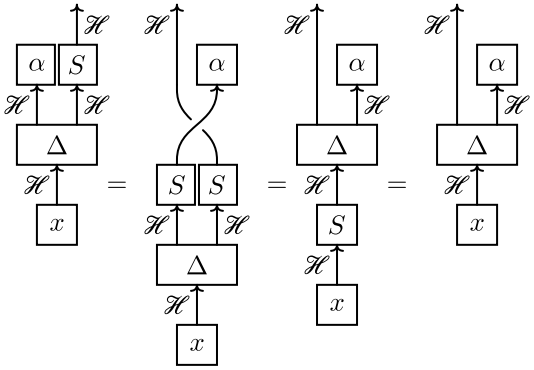


(20)

注意，如果 $x$和 $\alpha$ 都是反演不变的，那么



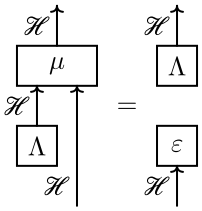

(21)




(22)

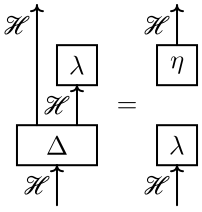
因此，一般而言， $\Phi_\alpha$ 和 $\Psi_x$ 并不保持反演不变这一性质，即使 $x$ 和 $\alpha$ 本身都是反演不变的。

霍普夫代数 H $\in$ C 的一个右积分元是满足以下条件的 H 的一个元素 $\Lambda$



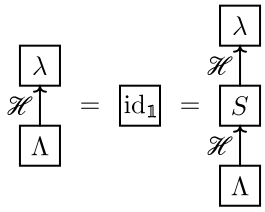

(23)

霍普夫代数 H $\in$C 上的一个左积分形式 是 H 上满足以下条件的一个形式 $\lambda$



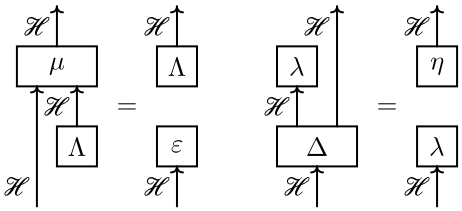

(24)

H 的一个右积分元 $\Lambda$ 和 H 上的一个左积分形式 $\lambda$ 若满足以下条件，则称为归一化的




(25)

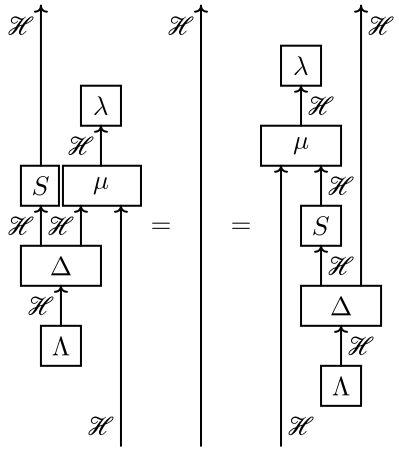
右积分元 $\Lambda$ 属于$\mathscr{H}$ 是双侧的，或者简称积分元，当且仅当它是反演不变的；而 $\lambda$ 定义在$\mathscr{H}$ 上的左积分形式，或者简称积分形式，当且仅当它是反演不变的。注意，双侧积分元 $\Lambda$属于$\mathscr{H}$ 且双侧积分形式 $\lambda$ 定义在$\mathscr{H}$上时，由于它们反演不变，也满足以下条件，参见 [BBDP23，表 3.3.4，方程（i1′）和（i2′）]。




(26)

命题 *3.1.* 若 $H \in C$ 是一个霍普夫代数，具有归一化右积分元 $\Lambda$ 和左积分形式 $\lambda$，则由公式（*19*）定义的 *Radford* 映射 $\Phi_\lambda : C(\ , H) \to C(H, \ )$ 是一个双射，其逆映射为 $\Psi_\Lambda : C(H, \ ) \to C(\ , H)$，由公式（*20*）定义；此外，若 $\Lambda$ 和 $\lambda$ 都是双侧的，则 *Radford* 映射限制为一个双射 $\Phi_\lambda : C(\ , H)^S \to C(H, \ )^S$，其逆映射为$\Psi_\Lambda : C(H, \ )^S \to C(\ , H)^S$。

证明。 第一个结论等价于

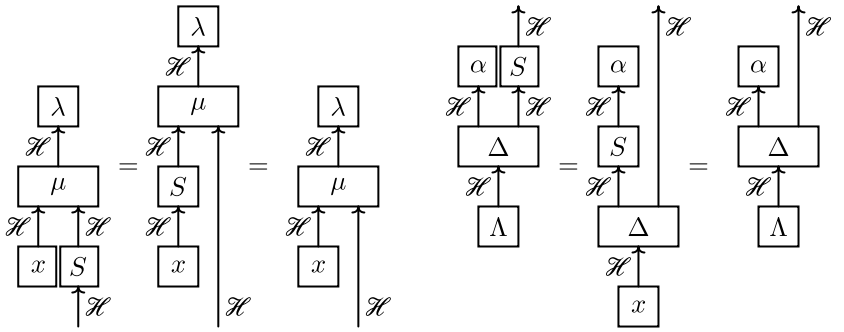



(27)

一方面，左侧的恒等式等价于 [BBDP23，《表 3.3.4》，方程 (e3)]，只需用 $S$对两项同时进行共轭。由于 [BBDP23，《图 B.2》1]中的证明只使用了 [BBDP23，《表 3.3.1》，方程 (i1)、(i2)、(i3)]，以及霍普夫代数公理，因此当 $\Lambda$仅为右积分元且 $\lambda$ 仅为左积分形式时，该结果同样成立。另一方面，右侧的恒等式与 [BBDP23，《表 3.3.4》，方程 (e3′)]，一致，但 [BBDP23，《图 B.2》2] 中的证明在最后一步使用了 [BBDP23，《表 3.3.1》，方程 (i5)；《表 3.3.4》，方程 (i1′)]，而当 $\lambda$ 仅为左积分形式时，这些方程并不成立。

不过，也可以通过应用 [BBDP23，《表 3.1.1》，方程 (s2)；《表 3.1.2》，方程 (s5)；《表 3.3.1》，方程 (i1)] 来等价地实现这一恒等式，至少在 $\Lambda$ 和 $\lambda$ 归一化的情况下如此。

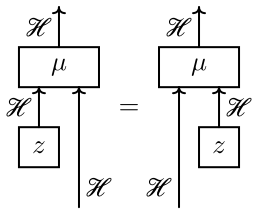
如果 $\Lambda$ 和 $\lambda$ 均为双侧的，那么第二个陈述由 [BBDP23，表 3.3.4，方程 (e6) 和 (e7)]，推出，因为对于每个反 antipode 不变元$x$ 在$\mathscr{H}$ 上的每个反 antipode 不变形式 $\alpha$ 在$\mathscr{H}$ 上，我们都有如下结论。




(28)

□

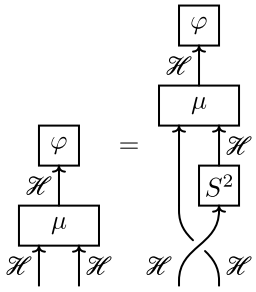
霍普夫代数 H $z$ C 中的一个元素 $\in$，如果满足以下条件，则称为中心的




(29)

我们将 Z(H) $\subset$ C( , H) 记为 H 的中心元集合，并将 $Z^S$(H) $=$Z(H) $\cap$C( , H)$^S$ 记为 H 的反 antipode 不变中心元子集。单位元 $\eta \in Z^S$(H) 是一个反 antipode 不变中心元，这由 [BBDP23，表 3.1.3，方程 (s6)]可得。

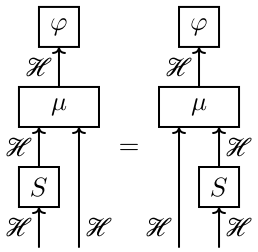
霍普夫代数 H $\varphi$ C 上的一个形式 $\in$，如果满足以下条件，则称为左量子特征




(30)

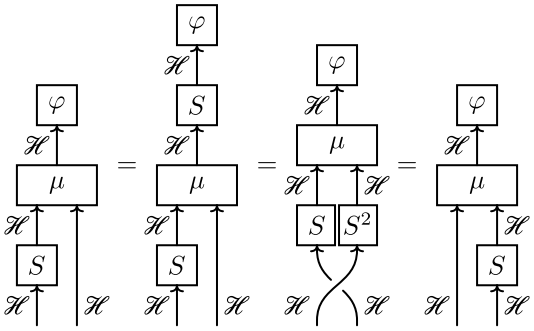
我们将 Q(H) $\subset$ C(H, ) 记为 H 上左量子特征的集合，并将 $Q^S$(H) $=$ Q(H)$\cap$C(H, )$^S$ 记为 H 上双侧量子特征，或简称量子特征的子集。余单位 $\varepsilon \in Q^S$(H) 是一个双侧量子特征，这一点可由 [BBDP23，表 3.1.3，公式 (s7)] 得出。注意，等价地，Hopf 代数 H 上的双侧量子特征 $\in$ C

可以定义为 H 上满足以下条件的反 antipode 不变形式

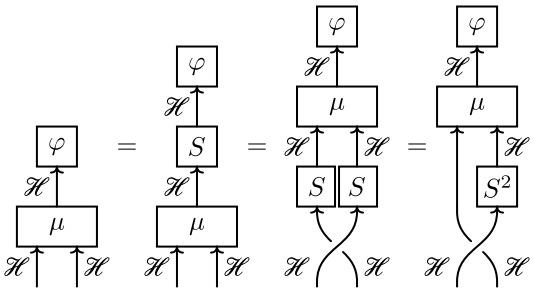


(31)

该等价性直接由 [BBDP23，表 3.1.3，公式（4）]得到。事实上，公式（30）推出公式（31），如下所示。



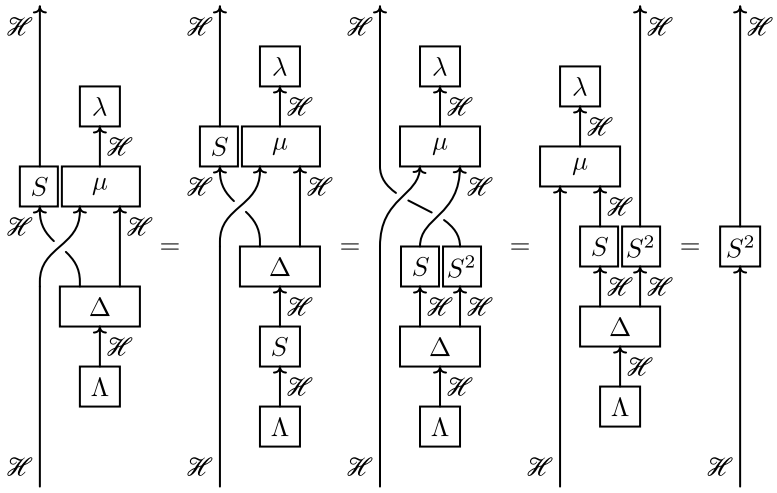
同样，公式（31）推出公式（30），如下所示。



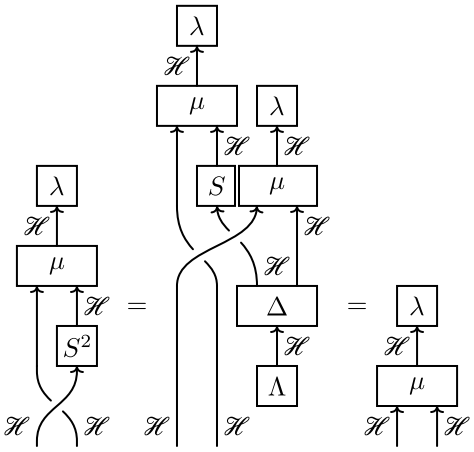
**引理 3.2**。若$\mathscr{H} \in \mathscr{C}$是一个具有归一化双侧积分元 $\Lambda$ 和左积分形式 $\lambda$的霍普夫代数，则 $\Lambda \in \mathrm{Z}^S(\mathscr{H})$ 和 $\lambda \in \mathrm{Q}(\mathscr{H})$。

证明。.....这一事实 $\Lambda$ 是$\mathscr{H}$ 的反 antipode 不变中心元，这可由方程（23）和（26）得出。.....这一事实 $\lambda$ 是$\mathscr{H}$ 上的左量子特征，可由以下事实得出

以下恒等映射本身可由方程（27）得出。



那么，再次利用方程（27），我们得到



□

反 antipode 不变中心元与双侧量子特征可通过 Radford 映射建立双射。事实上，我们有以下结果。

**命题 3.3**。 若$\mathscr{H}$ $\in\mathscr{C}$ 是一个霍普夫代数，则：

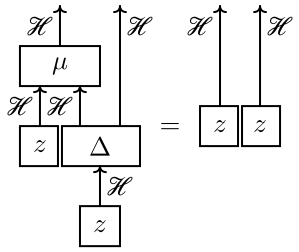
（$i$）对于每个量子特征 $\varphi\in \mathrm{Q}(\mathscr{H})$，由方程 （19）定义的映射限制为映射 $\Phi_\varphi : \mathrm{Z}(\mathscr{H}) \to \mathrm{Q}(\mathscr{H})$；（$ii$）对于每个中心元 $z \in \mathrm{Z}(\mathscr{H})$，由方程定义的映射限制为映射 $\Psi_z : \mathrm{Q}(\mathscr{H}) \to \mathrm{Z}(\mathscr{H})$。 (20)

由于命题 3.3的证明直接明了但相当冗长，我们将其推迟至附录 A.1。以下陈述则直接由命题 3.1 和 3.3推出。

推论 *3.4.* 若 $H \in C$ 是一个霍普夫代数，具有归一化右积分元$\Lambda$ 和左积分形式 $\lambda$，则由公式（*19*）定义的 *Radford* 映射在 $Z(H) \to Q(H)$ 上的限制 $\Phi_\lambda$ 是一个双射，其逆映射 $\Psi_\Lambda : Q(H) \to Z(H)$ 由公式（*20*）定义；此外，若 $\Lambda$和 $\lambda$ 都是双侧的，则$\Phi_\lambda : Z^S(H) \to Q^S(H)$ 是一个双射，其逆映射为 $\Psi_\Lambda : Q^S(H) \to Z^S(H)$。

3.5.**Hennings 形式、Bobtcheva–Messia 元素和带状无结形式**。固定一个编织幺半范畴 $\mathscr{C}$。

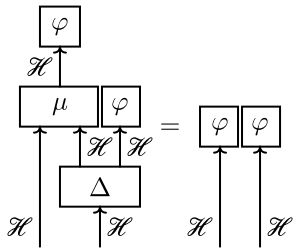
**定义 3.5**。 霍普夫代数 H $\in$C 的反 antipode 不变中心元 $z \in Z^S(H)$ 若满足以下条件，则称为 *Hennings* 元



(32)

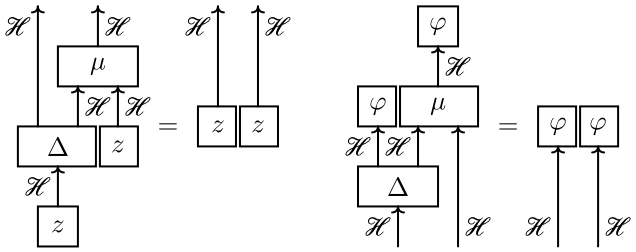
我们用 $Z_H^S(H) \subset Z^S(H)$ 表示 H 的 Hennings 元集合。单位元 $\eta \in Z_H^S(H)$ 就是一个 Hennings 元的例子。

**定义 3.6**。 霍普夫代数 H $\in$C 上的双侧量子特征 $\varphi \in Q^S(H)$ 若满足以下条件，则称为 *Hennings* 形式



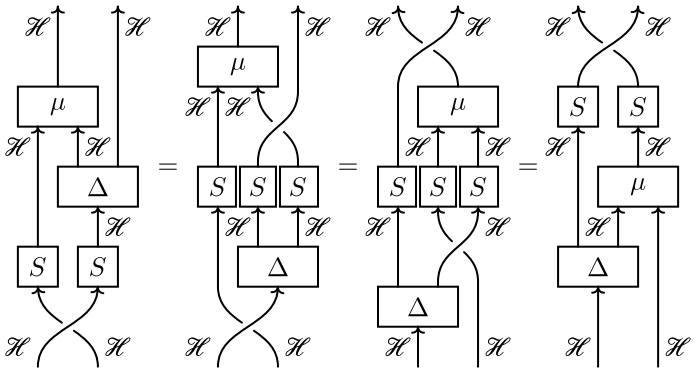
(33)

我们用 $Q_H^S(H) \subset Q^S(H)$ 表示 H 上的 Hennings 形式集合。余单位 $\varepsilon \in Q_H^S(H)$ 就是一个 Hennings 形式的例子。注意，H 上的 Hennings 元 $z$ 和 Hennings 形式 $\varphi$ 由于反演不变，也满足



(34)

因为 [BBDP23，表 3.1.3、方程（4）和（5）], 或更一般地 [BBDP23，命题 3.17], 表明



(35)

**引理 3.7**。 若$\mathscr{H}$ $\in\mathscr{C}$ 是一个具有双侧积分元 $\Lambda$ 和双侧积分形式 $\lambda$的霍普夫代数，则 $\Lambda\in \mathrm{Z}^S_{\mathrm{H}}(\mathscr{H})$和 $\lambda\in \mathrm{Q}^S_{\mathrm{H}}(\mathscr{H})$。

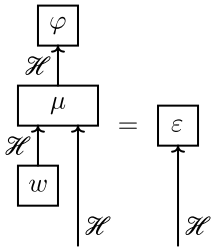
证明。 事实 $\Lambda$ 是$\mathscr{H}$ 的 Hennings 元素，这由公式（23）可知；而事实 $\lambda$ 是定义在 $\mathscr{H}$ 上的 Hennings 形式，这由公式（24）可知。□

根据以下结果，Hennings 元素可得到 Hennings 形式。

**命题 3.8**。 若 $\mathscr{H}$ $\in\mathscr{C}$ 是具有 *Hennings* 形式的霍普夫代数 $\varphi$，则由公式 (19) 定义的映射 $\Phi_\varphi : \mathrm{Z}^S_{\mathrm{H}}(\mathscr{H}) \to \mathrm{Q}^S_{\mathrm{H}}(\mathscr{H})$。

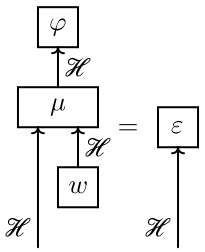
我们将命题3.8 的证明推迟到附录 A.2。

**定义 3.9**。 霍普夫代数 H $\in$ C 的反 antipode 不变中心元 $w \in \mathrm{Z}^S(\mathrm{H})$，若存在满足以下条件的 Hennings 形式$\varphi \in\mathrm{Q}^S_{\mathrm{H}}(\mathrm{H})$，则称为*Bobtcheva–Messia* 元素




(36)

在这种情况下，我们称 Bobtcheva–Messia 元素 $w$ 与 Hennings 形式$\varphi$ 彼此相容。我们用 $\mathrm{Z}^S_{\mathrm{BM}}(\mathrm{H}) \subset \mathrm{Z}^S(\mathrm{H})$ 表示 H 的 Bobtcheva–Messia 元素集合。Bobtcheva–Messia 元素的一个例子是单位元 $\eta \in \mathrm{Z}^S_{\mathrm{BM}}(\mathrm{H})$，因为余单位 $\varepsilon \in\mathrm{Q}^S_{\mathrm{H}}(\mathrm{H})$ 是一个相容的 Hennings 形式。注意，H 的 Bobtcheva–Messia 元素 $w$ 由于是中心的，也满足

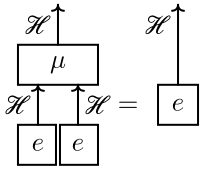



(37)

**引理 3.10**。 若$\mathscr{H}$ $\in\mathscr{C}$ 是一个具有归一化双侧积分元 $\Lambda$ 和双侧积分形式 $\lambda$的霍普夫代数，则 $\Lambda \in \mathrm{Z}^S_{\mathrm{BM}}(\mathscr{H})$ 与$\lambda \in \mathrm{Q}^S_{\mathrm{H}}(\mathscr{H})$相容。

证明。 以下事实： $\Lambda$ 是$\mathscr{H}$ 的一个与 Hennings 形式 $\lambda$ 在$\mathscr{H}$ 上相容的 Bobtcheva–Messia 元素，由方程 (23) 和 (25) 可得。□

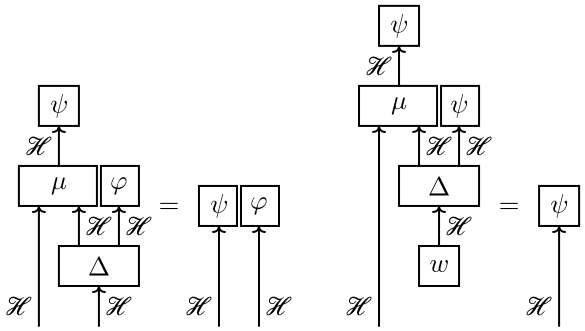
霍普夫代数 H $\in$C 的反 antipode 不变中心元 $e \in\mathrm{Z}^S(\mathrm{H})$ 若满足以下条件，则为幂等元




(38)

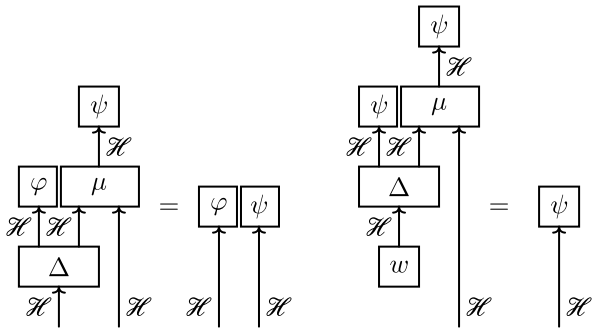
我们用 $\mathrm{Z}^S_{\mathrm{I}}(\mathrm{H}) \subset \mathrm{Z}^S(\mathrm{H})$ 表示 H 的反 antipode 不变中心幂等元集合。单位元 $\eta \in \mathrm{Z}^S_{\mathrm{I}}(\mathrm{H})$ 就是一个反 antipode 不变中心幂等元的例子。

**定义 3.11.** 霍普夫代数 H $\in$ C 上的双侧量子特征 $\psi \in$Q$^S$(H)，如果存在 Bobtcheva–Messia 元素$w \in$ Z$^S_{\mathrm{BM}}$(H) 和相容的 Hennings 形式 $\varphi \in$ Q$^S_{\mathrm{H}}$(H) 使得




(39)

在这种情况下，我们称带状无结形式 $\psi$、Bobtcheva–Messia 元素$w$和 Hennings 形式 $\varphi$ 彼此相容。我们用 Q$^S_{\mathrm{BU}}$(H) $\subset$ Q$^S$(H) 表示 H 上带状无结形式的集合。若 $w$ 是 H 的 Bobtcheva–Messia 元素，且 $\varphi$ 是 H 上与之相容的 Hennings 形式，则相容的带状无结形式的一个例子是 $\varphi \in$ Q$^S_{\mathrm{BU}}$(H)。注意，H 上的带状无结形式$\varphi$ 是反演不变的，因此也满足




(40)

根据方程（35）。

反 antipode 不变中心幂等元可导出带状无结形式，这归功于以下结果。

**命题 3.12。** 若$\mathscr{H} \in \mathscr{C}$ 是一个带有 *Bobtcheva–Messia* 元素 $w$和相容的 *Hennings* 形式 $\varphi$，则由方程 (19) 定义的映射 $\Phi_\varphi$ :Z$^S_{\mathrm{I}}(\mathscr{H}) \to$ Q$^S_{\mathrm{BU}}(\mathscr{H})$。

同样，我们将命题 3.12 的证明推迟到附录A.3。

3.6. **Lyubashenko 的端。** 每个有限刚性幺半范畴 C 都存在一个端

$$\mathscr{E} := \int_{X \in \mathscr{C}} X \otimes X^* \in \mathscr{C},$$

它定义为以.....为目标的泛余自然变换

$$(\_ \otimes \_^*) : \mathscr{C} \times \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{C}$$
$$(X, Y) \mapsto X \otimes Y^*,$$

参见 [ML71，第 IX.4-IX.6] 节，了解相关术语。特别是，这样的端由一个对象$\mathscr{E} \in \mathscr{C}$ 以及一族二自然的结构态射$i_X$： $\mathscr{E} \to X \otimes X^*$ 对每个 $X \in \mathscr{C}$而言，意为 $(f \otimes \mathrm{id}_{X^*}) \circ i_X = (\mathrm{id}_Y \otimes f^*) \circ i_Y$对于

每个 $f\colon X \to Y$。端 E 在同构意义下唯一，并且可以描述为一个核，也就是说，它适合于正合列

$$0 \longrightarrow \mathscr{E} \xhookrightarrow{\iota} \bigoplus_{P\in\mathscr{P}_{\mathscr{E}}} P\otimes P^* \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{f\in\mathscr{B}} T(f)\otimes S(f)^* \tag{41}$$

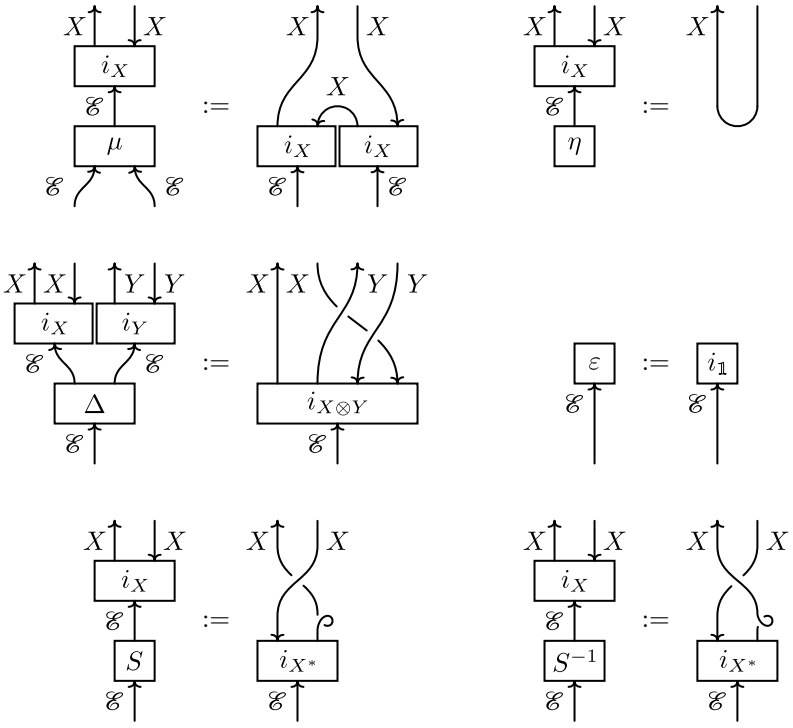
C 的态射，其中 $\mathsf{P}_{\mathscr{E}}$ 是 C 的不可分解投射对象同构类的一组代表元，其中 $\mathsf{B}_P^Q$ 是对所有 $P,Q\in\mathsf{P}_{\mathscr{E}}$而言 $\mathsf{C}(P,Q)$ 的一组基，其中我们设 $S(f):=P$ 且 $T(f):=Q$，对每个 $f\in \mathsf{B}_P^Q$，并且

$$\mathscr{B}_P := \bigcup_{Q\in\mathscr{P}_{\mathscr{E}}} \mathscr{B}_P^Q, \qquad \mathscr{B}^Q := \bigcup_{P\in\mathscr{P}_{\mathscr{E}}} \mathscr{B}_P^Q, \qquad \mathscr{B} := \bigcup_{P,Q\in\mathscr{P}_{\mathscr{E}}} \mathscr{B}_P^Q, \tag{42}$$

并且

$$\iota := (i_P)_{P\in\mathscr{P}_{\mathscr{E}}}, \qquad \delta := (f\otimes \mathrm{id}_{P^*})_{\substack{f\in\mathscr{B}_P\\ P\in\mathscr{P}_{\mathscr{E}}}} - (\mathrm{id}_Q\otimes f^*)_{\substack{f\in\mathscr{B}^Q\\ Q\in\mathscr{P}_{\mathscr{E}}}}. \tag{43}$$

此外，若 C 是带状范畴，则端的泛性质唯一确定这些态射




使得$\mathscr{E}$ 成为$\mathscr{C}$中的霍普夫代数。此外，若$\mathscr{C}$ 是一个幺模带状范畴，则端$\mathscr{E}$ 还存在一个积分元 $\Lambda : \to \mathscr{E}$ 以及一个积分形式 $\lambda : \mathscr{E} \to$ ，它们在相差一个标量的意义下唯一 [BKLT97，命题 3.1 和 4。10], 并且我们总能选取一个归一化对，其存在性由 [BKLT97，定理 3。3]保证。接着，如 [BD21，命题 7。3], 这些

态射，与



使 E 成为 BP 霍普夫代数。

如果 $H$ 是有限维带状霍普夫代数且 $\mathsf{C} = H$-模，那么 E 是伴随表示 $H$，它由带有伴随作用的 $\Bbbk$-向量空间 $H$ 本身给出

$$x \triangleright y = x_{(1)} y S(x_{(2)})$$

对于所有 $x \in H$ 和 $y \in H$，其结构态射的二自然族由下式给出

$$i_X : \underline{H} \to X \otimes X^*$$
$$x \mapsto \sum_{a=1}^{n} (x \cdot v_a) \otimes f^a$$

对于每个 $X \in \mathsf{C}$，其中 $\{v_a \in X | 1 \leqslant a \leqslant n\}$ 和 $\{f^a \in X^* | 1 \leqslant a \leqslant n\}$ 分别是 $X$ 和 $X^*$ 的对偶基。$H$-模中 $H$ 上的霍普夫代数结构由以下 $H$-交织子给出

$$\underline{\mu}(x \otimes y) = xy, \qquad \underline{\eta}(1) = 1,$$
$$\underline{\Delta}(x) = x_{\underline{(1)}} \otimes x_{\underline{(2)}} = x_{(1)} S(R_i'') \otimes (R_i' \triangleright x_{(2)}), \qquad \underline{\varepsilon}(x) = \varepsilon(x),$$
$$\underline{S}(x) = R_i'' S(R_i' \triangleright x), \qquad \underline{S^{-1}}(x) = S^{-1}(R_i' \triangleright x) R_i''.$$

**命题 3.13**。如果 $H$ 是一个幺模带状霍普夫代数，具有归一化的双侧积分元 $\Lambda \in H$ 和左积分形式 $\lambda \in H^*$，那么：

$(i)$ 映射

$$T_{\mathrm{Z}} : \mathrm{Z}(H) \to \mathrm{Z}(\underline{H})$$
$$z \mapsto \underline{z}$$

由 $z(1) \underline{=} z$ 定义的映射是一个线性同构，其限制为一个线性同构 $T_{\mathrm{Z}} : \mathrm{Z}^S(H) \to \mathrm{Z}^S(H)$ 以及双射 $T_{\mathrm{Z}} : \mathrm{Z}^S_{\mathrm{H}}(H) \to \mathrm{Z}^S_{\mathrm{H}}(H)$，$T_{\mathrm{Z}} : \mathrm{Z}^S_{\mathrm{BM}}(H) \to \mathrm{Z}^S_{\mathrm{BM}}(\underline{H})$，且 $T_{\mathrm{Z}} : \mathrm{Z}^S_{\mathrm{I}}(H) \to \mathrm{Z}^S_{\mathrm{I}}(\underline{H})$；

$(ii)$ 映射

$$T_{\mathrm{Q}} : \mathrm{Q}(H) \to \mathrm{Q}(\underline{H})$$
$$\varphi \mapsto \underline{\varphi}$$

对每个 $x \in \underline{H}$，由 $\varphi(x) = \varphi(x)$ 定义的映射是线性同构，并且其限制是线性同构 $T_{\mathrm{Z}} : Q^g(H) \to Q^S(H)$，以及双射 $T_{\mathrm{Q}} : Q^g H(H) \to Q^S_{\mathrm{H}}(H)$ 和 $T_{\mathrm{Q}} : Q^g BU(H) \to Q^S_{\mathrm{BU}}(H)$；

$(iii)$ 反 *antipode* 不变中心元 $\Lambda \in \mathrm{Z}^S(H)$ 是 $H$ 的双侧积分元；$(iv)$ 双侧量子特征 $\lambda \in \mathrm{Q}^S(H)$ 是 $H$ 上的双侧积分形式。

证明。首先，如果 $z \in H$ 是中心元，那么 $z : \Bbbk \to H$ 是一个 $\underline{H}$-交织算子，因为

$$x \triangleright z = x_{(1)} z S(x_{(2)}) = x_{(1)} S(x_{(2)}) z = \varepsilon(x) z$$

对每个 $x \in H$都成立。此外，中心元 $z \in H$ 是反演不变的，当且仅当 $z\colon \Bbbk \to H$ 是反演不变的，因为

$$\underline{S}(z) = R_i'' S(R_i' \triangleright z) = \varepsilon(R_i') R_i'' S(z) = S(z).$$

同样，若 $\varphi \in H^*$ 是左量子特征，则 $\varphi\colon H \to \Bbbk$ 是一个 $H$-交织算子，因为

$$\varphi(x \triangleright y) = \varphi(x_{(1)} y S(x_{(2)})) = \varphi(y S(x_{(2)}) S^2(x_{(1)})) = \varphi(y S(S(x_{(1)}) x_{(2)})) = \varepsilon(x)\varphi(y)$$

对所有 $x \in H$ 和 $y \in H$均成立。此外，左量子特征 $\varphi \in H^*$ 是平衡的，当且仅当 $\varphi\colon \Bbbk \to H$ 是反演不变的，因为

$$u^{-1} = R_i'' S^2(R_i'), \qquad S(v) = v \tag{44}$$

推出

$$\begin{aligned}
\varphi(\underline{S}(x)) &= \varphi(R_i'' S(R_i' \triangleright x)) = \varphi(R_j'' R_k'' S(R_j' x S(R_k'))) = \varphi(R_j'' R_k'' S^2(R_k') S(x) S(R_j')) \\
&= \varphi(R_k'' S^2(R_k') S(x) S(R_j') S^2(R_j'')) = \varphi(R_k'' S^2(R_k') S(x) S(S(R_j'') R_j')) \\
&= \varphi(u^{-1} S(x) S(u)) = \varphi(S(x) S(u) S^2(u^{-1})) = \varphi(S(S(u^{-1}) u x)) \\
&= \varphi(S(S(g^{-1} v^{-1}) g v x)) = \varphi(S(g v^{-1} g v x)) = \varphi(S(g^2 x))
\end{aligned}$$

对每个 $x \in H$。

$\Lambda$ 仍是 $H$ 的右积分元，这一事实源于 $H$ 的乘积和余单位与 $H$的乘积和余单位相同。这证明了第（$iii$）点。

$\lambda$ 仍是 $H$ 上的左积分形式，这一事实源于

$$\varepsilon(R_i') R_i'' = 1 = \varepsilon(R_i'') R_i', \tag{45}$$

因为

$$\lambda(x_{(2)}) x_{(1)} = \lambda(R_i' \triangleright x_{(2)}) x_{(1)} S(R_i'') = \varepsilon(R_i') \lambda(x_{(2)}) x_{(1)} S(R_i'') = \lambda(x_{(2)}) x_{(1)}$$

对每个 $x \in H$都成立。这证明了第（$iv$）点。

这一事实表明 $z$ 是 $H$ 的中心元，当且仅当 $z$ 是$H$ 的中心元，这源于 $H$ 的乘积与 $H$的乘积相同。因此， $T_{\mathrm{Z}}$ 和 $T_{\mathrm{Q}}\colon = \Phi_\lambda \circ T_{\mathrm{Z}} \circ \Psi_\Lambda$ 都是线性同构，其中 $\Psi_\Lambda$ 由方程（7）定义，且 $\Phi_\lambda$ 由方程（19）定义。若 $z$ 是 $H$的 Hennings 元，则 $z$ 是 $H$ 的 Hennings 元，因为

$$\begin{aligned}
z z_{(1)} \otimes z_{(2)} &= z z_{(1)} S(R_i'') \otimes R_i' \triangleright z_{(2)} = z S(R_i'') \otimes R_i' \triangleright z \\
&= \varepsilon(R_i') z S(R_i'') \otimes z = z \otimes z.
\end{aligned}$$

同样地，如果 $z$ 是 $H$ 的 Hennings 元素，那么 $z$ 是 $H$ 的 Hennings 元素，因为

$$\begin{aligned}
z z_{(1)} \otimes z_{(2)} &= z z_{(1)} S(R_i'') \otimes S(R_i') \triangleright z_{(2)} = z S(R_i'') \otimes S(R_i') \triangleright z \\
&= \varepsilon(S(R_i')) z S(R_i'') \otimes z = z \otimes z.
\end{aligned}$$

接下来，如果 $\varphi$ 和 $\psi$ 是定义在 $H$ 上的左量子特征，那么

$$\begin{aligned}
\psi(x y_{(1)}) \varphi(y_{(2)}) &= \psi(x y_{(1)} S(R_i'')) \varphi(R_i' \triangleright y_{(2)}) = \varepsilon(R_i') \psi(x y_{(1)} S(R_i'')) \varphi(y_{(2)}) \\
&= \psi(x y_{(1)}) \varphi(y_{(2)})
\end{aligned}$$

对所有 $x$, $y \in H$ 均成立。特别地， $\varphi$ 是 $H$ 上的左 Hennings 形式，当且仅当 $\varphi$ 是 $H$ 上的 Hennings 形式。因此，由于 $H$ 的乘积和余单位与 $H$ 的相应结构一致， $w$ 是 $H$ 的 Bobtcheva–Messia 元素，当且仅当 $w$ 是 $H$ 的 — Bobtcheva–Messia 元素；反 antipode 不变中心幂等元和带状无结形式也同样如此。至此，点（$i$）和（$ii$）的证明完成。□

3.7. 理想与迹。遵循 [GKP10，定义 3.1。1]，编织幺半范畴 C 的理想 I ⊂C 是一个全子范畴，且对收缩封闭；这意味着，对于 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to X$，若 $X \in$ I 且 $f \circ g = \mathrm{id}_Y$，则 $Y \in$ I；它还对张量积具有吸收性，即若 $X \in$ I 且 $Y \in$C，则 $X \otimes Y \in$ I。注意，由于对收缩封闭蕴含满性（即对同构封闭），且 C 是编织的，因此若 $X \in$ C 且 $Y \in$ I，则自动有 $X \otimes Y \in$ I。C 的投射对象理想 Proj(C) 是 C 的最小非零理想，也就是说，若 I ⊂C 是一个非零理想，则 Proj(C) ⊂ I，参见 [GKP10，第 4.4] 节。若 C 是半单的，则 Proj(C) =C。

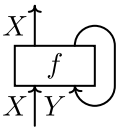
**定义 3.14.** 带状范畴 C 的理想 I ⊂C 上的一个迹 t 是一族线性映射

$$\{\mathrm{t}_X : \mathrm{End}_{\mathscr{C}}(X) \to \Bbbk \mid X \in \mathscr{I}\}$$

满足：

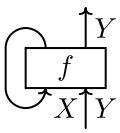
($i$) 循环性：对于所有对象 $X, Y \in$I 以及所有态射 $f \in$ C($X, Y$) 和 $g \in$ C($Y$, $X$)，有 $\mathrm{t}_X(g \circ f) = \mathrm{t}_Y(f \circ g)$；($ii$) 偏迹：对于所有对象 $X \in$I 和 $Y \in$C，以及每个态射 $f \in \mathrm{End}_{\mathscr{C}}(X \otimes Y)$，有 $\mathrm{t}_{X \otimes Y}(f) = \mathrm{t}_X(\mathrm{ptr}_{\mathrm{R}}(f))$，其中 $\mathrm{ptr}_{\mathrm{R}}(f) \in \mathrm{End}_{\mathscr{C}}(X)$ 定义为

$$\mathrm{ptr}_{\mathrm{R}}(f) :=$$




注意，在带状范畴 C 中，理想 I ⊂C 上的迹 t 自动满足：对于所有对象 $X \in$ C 和 $Y \in$ I，以及每个态射 $f \in \mathrm{End}_{\mathscr{C}}(X \otimes Y)$，有 $\mathrm{t}_{X \otimes Y}(f) = \mathrm{t}_Y(\mathrm{ptr}_{\mathrm{L}}(f))$，其中 $\mathrm{ptr}_{\mathrm{L}}(f) \in \mathrm{End}_{\mathscr{C}}(Y)$ 定义为

$$\mathrm{ptr}_{\mathrm{L}}(f) :=$$

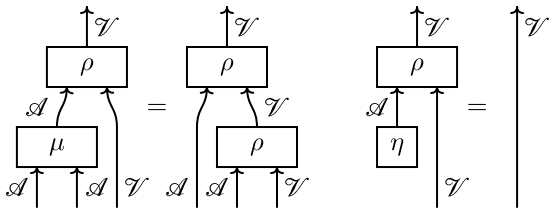



我们称 I 上的迹 t 是非退化的，若对所有 $X \in$I 和 $Y \in$C，双线性配对

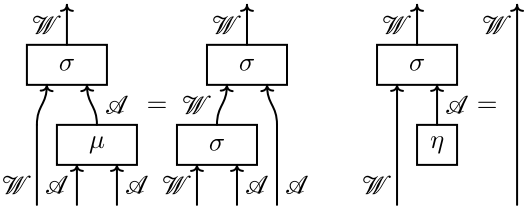
$$\begin{aligned} \mathrm{t}_X(\_ \circ \_) : \mathscr{C}(Y, X) \times \mathscr{C}(X, Y) &\to \Bbbk \\ (g, f) &\mapsto \mathrm{t}_X(g \circ f) \end{aligned}$$

是非退化的。若$\mathscr{C}$ 是幺模带状范畴，则存在一个t，定义在Proj($\mathscr{C}$)上的非零迹；它在相差一个标量的意义下唯一，且还是非退化的，这由 [GKP11，推论 3.21]和 [GR17，命题 42]可知。相比之下，标准的范畴迹$\mathrm{tr}_{\mathscr{C}}$ 在Proj($\mathscr{C}$) 上恒为零，只要$\mathscr{C}$ 是非半单的。

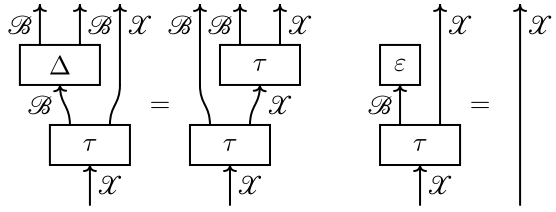
3.8. **带状无结模**。设 C 为一个幺半范畴。若 A ∈C 是一个代数，则一个左A-模是一个对象 V ∈ C，并配备一个左作用$\rho$ : A ⊗V → V，使其满足



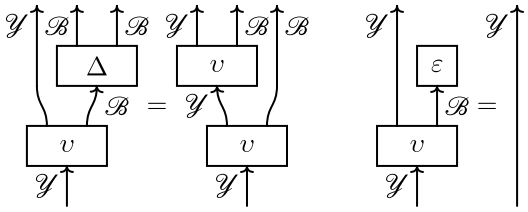
类似地，一个右A-模是一个对象 W $\in$ C，并配备一个右作用$\sigma$ : W $\otimes$A $\to$ W，使其满足



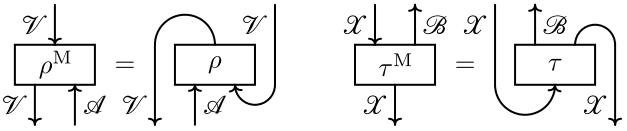
若 B $\in$ C 是一个余代数，则左B-余模是一个对象 X $\in$C，并配备一个左余作用 $\tau$ : X $\to$ B $\otimes$X，使其满足



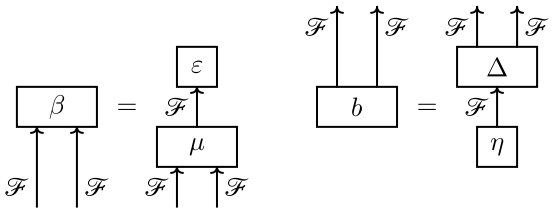
类似地，右B-余模是一个对象 Y $\in$ C，并配备一个右余作用$\upsilon$ : Y $\to$ B $\otimes$Y，使其满足



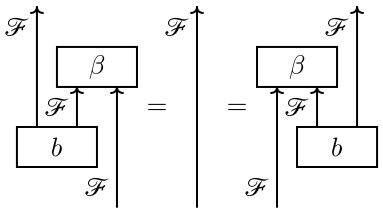
注意，若 C 是刚性的，则每个左 A-模 V $\in$ C 和每个左 B-余模 X $\in$ C 都确定了 V$^*$ $\in$C 上的一个右 A-模结构，以及 W$^*$ $\in$ C 上的一个右 B-余模结构，它们分别由右作用 $\rho^{\mathrm{M}}$ : V$^*$ $\otimes$A $\to$ V$^*$ 和右余作用 $\tau^{\mathrm{M}}$ : X$^*$ $\to$ X$^*$ $\otimes$ B 定义如下



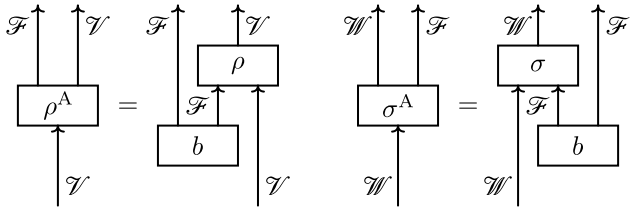
还需注意，每个 Frobenius 代数 F $\in$ C 都是自对偶的，其对偶态射由配对 $\beta$ : F $\otimes$ F $\to$ 以及余配对 $b$ : $\to$ F $\otimes$F 给出，定义如下：



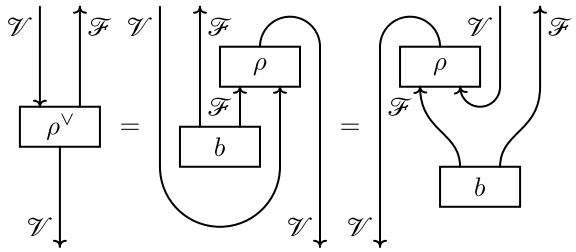
事实上，配对和余配对满足



并且它们交换代数结构与余代数结构。若 F ∈C 是一个 Frobenius 代数，则每个左 F-模 V ∈ C 和每个右 F-模 W ∈C 都确定了 V ∈C 上的左 F-余模结构以及 W ∈ C 上的右 F-余模结构，分别由左余作用 $\rho^{\mathrm{A}}: \mathrm{V} \to \mathrm{F}\otimes\mathrm{V}$ 和右余作用 $\sigma^{\mathrm{A}}: \mathrm{W} \to \mathrm{W}\otimes\mathrm{F}$ 定义如下：

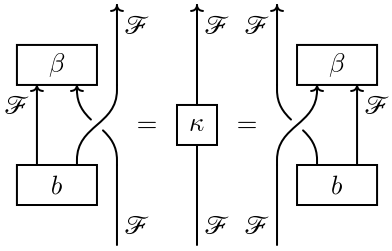


左 F-模 V ∈ C 若满足 $\rho^{\mathrm{MA}} = \rho^{\mathrm{AM}}$，则称为刚性 。若左 F-模 V ∈ C 是刚性的，我们用 $\rho^{\vee}: \mathrm{V}^* \to \mathrm{V}^* \otimes \mathrm{F}$ 表示由下式定义的右 F-余作用：



(46)

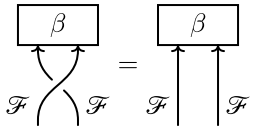
现在令 C 为一个带状范畴。若 Frobenius 代数 F ∈C 满足



(47)

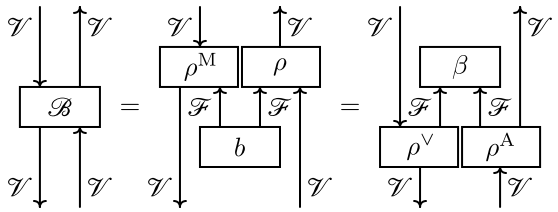
例如，对称 Frobenius 代数 F ∈C 总是带状的，其中对称 意为配对 $\beta: \mathrm{F} \otimes \mathrm{F} \to$ 满足

$$\mathbb{1}$$



注意，若 F ∈ C 是带状 Frobenius 代数，则每个左 F-模 V ∈ C 都是刚性的。若 F ∈ C 是带状 Frobenius 代数，则带态射

左 F-模 V ∈ C 的带态射 B : V* ⊗V → V* ⊗V 定义如下：




(48)

注意，带态射 B : V* ⊗V → V* ⊗V 是自对偶的，即 B* =B。

**定义3.15**。 F ∈C 上的左 F-模 V ∈ C（其中 F 是带状 Frobenius 代数）若其带态射 B : V* ⊗V → V* ⊗V 满足以下条件，则称为<禁用词>带状无结模块</禁用词>：

(*i*) 透明性： $\mathscr{B}$ 是透明的；(*ii*) 偏迹： $\mathrm{ptr}_{\mathrm{L}}(\mathscr{B}) = \mathrm{id}_{\mathscr{V}}$。

注意，ptrL(B) = id$_{\mathscr{V}}$ 自动推出 ptrR(B) =id$_{\mathscr{V}^*}$，因为

$$\mathrm{ptr}_{\mathrm{R}}(\mathscr{B}) = \mathrm{ptr}_{\mathrm{L}}(\mathscr{B}^*)^* = \mathrm{ptr}_{\mathrm{L}}(\mathscr{B})^* = \mathrm{id}^*_{\mathscr{V}} = \mathrm{id}_{\mathscr{V}^*}.$$

## 4. Quantum invariants

本节将介绍 Kirby 图及其函子不变量，其精神与 [Tu94，定理 2。5], 的 [DGP17，命题 2。5], 以及 [DGGPR19，命题 3。1]相同。它们用于定义带状曲面的量子不变量。

**4.1.** 带标记的 Kirby 图及其图示。若 C 是一个带状范畴，则由 C 标记的带状图构成的范畴 R$_{\mathscr{C}}$ 是带状范畴，其对象是有限序列 $(\varepsilon, V) = ((\varepsilon_1, V_1) \dots, (\varepsilon_m, V_m))$，其中每个整数 $1 \leqslant j \leqslant m$ 对应一个符号 $\varepsilon_j \in \{+, -\}$ 和一个 C 中的对象 $V_j \in$ 。其态射是 C 标记的带状图 $G \subset [0,1]^{\times 3}$ 在边界相对意义下的同痕类。带状图是指边经过框架化、定向并标记为 C 中对象的图；其内部顶点称为券，具有指定的输入基和输出基，并标记为 C 中的态射。更多详情参见 [Tu94，第 I.2 节。3] 复合通过先将 $[0,1]^{\times 3}$ 的两个副本沿竖直方向粘合，再将所得结果收缩为 $[0,1]^{\times 3}$ 的单个副本来定义。张量积通过先将 $[0,1]^{\times 3}$ 的两个副本沿水平方向粘合，再将所得结果收缩为 $[0,1]^{\times 3}$ 的单个副本来定义。编织由正交叉给出，而扭结由正扭结给出。

若 C 是带状范畴，则 C-标记 *Kirby* 链环 是一个 Kirby 链环 $L = L_1 \cup L_2$，其带点分量由 E 的反 antipode 不变中心元标记，无点分量则由 E 上的双侧量子特征标记。C 标记的 *Kirby* 图 $L \cup G$ 是一个 C 标记的 Kirby 图 $L$ 与一个不相交的 C 标记的带状图 $G$的并集。

**定义 4.1**。 C 标记的 *Kirby* 图 K$_{\mathscr{C}}$ 的 范畴是一个带状范畴，其对象为 $(\varepsilon, V) \in$ R$_{\mathscr{C}}$，态射为相对于边界的 C-标记 Kirby 图 $T_1 \cup G \subset [0,1]^{\times 3}$的同痕类。复合和张量积按 R$_{\mathscr{C}}$中的定义给出，且两个带状结构重合。

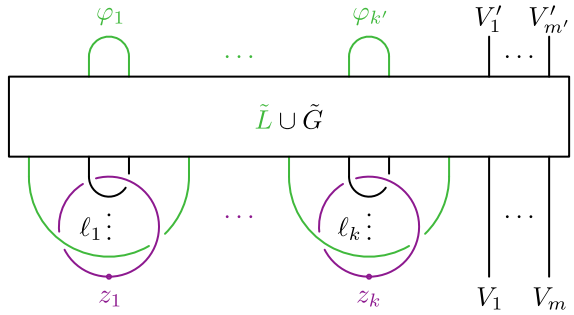
C 标记的 Kirby 链环 $L$ 将以紫色和绿色绘制，而 C 标记的带状图 $G$ 将以黑色绘制。因此，如果 $L = \varnothing$，C 标记的 Kirby 图 $L \cup G \subset [0,1]^{\times 3}$ 有时也称为黑色图。C 标记的带状图范畴 R$_{\mathscr{C}}$ 可视为 K$_{\mathscr{C}}$ 中黑色图的子范畴。

**定义 4.2**。C 标记的 Kirby 图 $L\cup G\subset[0,1]^{\times 3}$ 的图示是将 $L\cup G$ 投影到 $[0,1]^{\times 2}$ 的一般位置投影，不含相切点或三重点；它为每个双重点配备一个交叉状态，并将 $L_2$ 和 $G$的框架映射为黑板框架。如果 Kirby 缠结$L$ 的像是正则图，则该图示称为正则图示。

同样，滥用记号，C 标记的 Kirby 图$L\cup G\subset[0,1]^{\times 3}$的正则图也记作 $L\cup G\subset[0,1]^{\times 2}$。

4.2. Kerler–Lyubashenko–Reshetikhin–Turaev 函子。若 C 是幺模带状范畴，则下面说明如何将 [Tu94, Theorem I.2.5] 中的 Reshetikhin–Turaev 函子 $F_{\mathscr{C}}$ : $\mathsf{R}_{\mathscr{C}}\to\mathsf{C}$ 扩展为函子 $F_{\mathscr{C}}:\mathsf{K}_{\mathscr{C}}\to\mathsf{C}$。首先注意到，由于 $\mathsf{K}_{\mathscr{C}}$ 的对象与 $\mathsf{R}_{\mathscr{C}}$的对象相同，因此 $F_{\mathscr{C}}$ 已在对象上定义，我们只需在态射上定义它。因此，考虑一个 C-标记 Kirby 链环 $L=L_1\cup L_2\subset[0,1]^{\times 3}$，以及一个与之不相交的 C 标记带状图 $G\subset[0,1]^{\times 3}$，它从 $(\varepsilon,V)$ 到 $(\varepsilon',V')$。设 $k$和$k'$分别为 $L_1$和 $L_2$的分支数，并设 $\ell_1,\dots,\ell_k$为 $L_2\cup G$ 与一族对应于 $L_1$ 各分支的 Seifert 圆盘之间的几何交点数。C 标记 Kirby 图 $L\cup G$的一个底顶表示 $\tilde{L}\cup\tilde{G}\subset[0,1]^{\times 3}$是由一个不含闭合分支的绿色缠结 $L$与一个 C着色带状图 $G$的并组成，其中

$L_1\cup L_2\cup G=$




(49)

注意，与 $L_1$ 的 Seifert 圆盘相交的 $L_2\cup G$ 的股可以是绿色的，也可以是黑色的，并且各种构型都可能出现，因此这幅图仅用于说明一个例子。链是 $L$ 的一组股，其元素都包含在 $L$ 的同一分支中；圈则是关于包含关系的极大链。$L\cup G$ 的底顶表示会诱导 C 标记的 Kirby 图 $L\cup G$ 的一条$k'$-二自然变换

$$\eta_{\tilde{L}\cup\tilde{G}}:F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon},\underline{V})\dot{\Rightarrow}(\_\otimes\_^*)^{\otimes k'}\otimes F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon'},\underline{V'}),$$

其中 $F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon},\underline{V}):(\mathsf{C}\times\mathsf{C}^{\mathrm{op}})^{\times k'}\to\mathsf{C}$ 表示一个常值函子，它将每个对象 $(X_1,Y_1,\dots,X_{k'},Y_{k'})\in(\mathsf{C}\times\mathsf{C}^{\mathrm{op}})^{\times k'}$ 都映射到对象 $F_{\mathscr{C}}(\varepsilon,V)\in\mathsf{C}$，其中

$$(\_\otimes\_^*)^{\otimes k'}\otimes F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon'},\underline{V'}):(\mathscr{C}\times\mathscr{C}^{\mathrm{op}})^{\times k'}\to\mathscr{C}$$

将每个对象（$X_1$，$Y_1$，……，$X_{k'}$，$Y_{k'}$）$\in$（$\mathsf{C}\times\mathsf{C}^{\mathrm{op}}$）$^{\times k'}$映射到对象

$$\bigotimes_{j=1}^{k'}(X_j\otimes Y_j^*)\otimes F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon'},\underline{V'})\in\mathscr{C},$$

并且其中 $k'$-二自然性意味着 $\eta_{\tilde{L}\cup\tilde{G}}$ 定义了一个二自然变换

$$\eta_{\tilde{L}\cup\tilde{G}}:F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon},\underline{V})\circ\sigma\dot{\Rightarrow}\Big((\_\otimes\_^*)^{\otimes k'}\otimes F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon'},\underline{V'})\Big)\circ\sigma$$

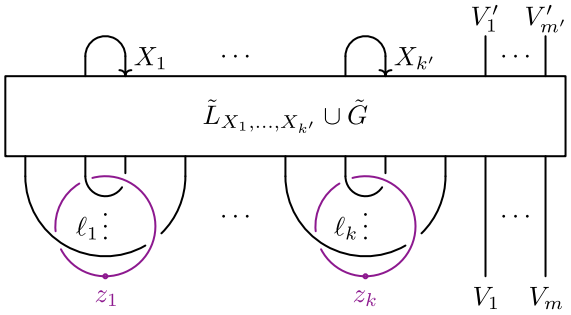
对于置换函子

$$\sigma:\mathscr{C}^{\times k'}\times(\mathscr{C}^{\times k'})^{\mathrm{op}}\to(\mathscr{C}\times\mathscr{C}^{\mathrm{op}})^{\times k'}$$

将每个对象 $((X_1,\dots,X_{k'}),(Y_1,\dots,Y_{k'}))\in \mathsf{C}^{\times k'}\times(\mathsf{C}^{\times k'})^{\mathrm{op}}$ 映射为对象 $(X_1,Y_1,\dots,X_{k'},Y_{k'})\in(\mathsf{C}\times\mathsf{C}^{\mathrm{op}})^{\times k'}$。为了解释如何定义 $\eta_{\tilde{L}\cup\tilde{G}}$，对于每个对象 $(X_1,\dots,X_{k'})\in\mathsf{C}^{\times k'}$，我们来考察由 $L\cup G$ 的底顶表示 $L\cup G$ 得到的 $\mathsf{C}$ 标记的带状图

$L_{X_1,\dots,X_{k'}}\cup G$：将 $L$ 的第 $j$ 个圈从第 $(2j)$ 个出射边界点定向至第 $(2j-1)$ 个出射边界点，并对每个 $1\leqslant j\leqslant k'$ 将其标记为 $X_j$，如图所示。

$$L_1\cup L_{2,X_1,\dots,X_{k'}}\cup G=$$

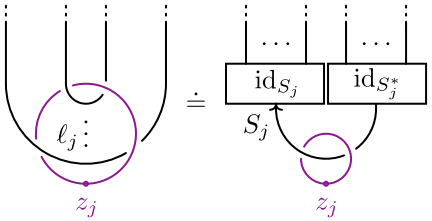



(50)

这唯一确定了对象 $S_j:=S_j(L_{X_1,\dots,X_{k'}}\cup G)\in\mathsf{C}$，对每个满足以下条件的 $1\leqslant j\leqslant k$

$$F_{\mathscr{C}}(\tilde{L}_{X_1,\dots,X_{k'}}\cup\tilde{G})\in\mathscr{C}\left(\bigotimes_{j=1}^{k}(S_j\otimes S_j^*)\otimes F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon},\underline{V}),\bigotimes_{j=1}^{k'}(X_j\otimes X_j^*)\otimes F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon}',\underline{V'})\right).$$

注意，在 skein 等价意义下，我们可以假设 $L_1$ 的每个分支都与 $\mathsf{C}$着色带状图 $L_{2,X_1,\dots,X_{k'}}\cup G$的一股相连，因为




(51)

于是，$\eta_{\tilde{L}\cup\tilde{G}}$ 将态射与每个对象 $(X_1,\dots,X_{k'})\in\mathsf{C}^{\times n}$ 相关联

$$(\eta_{\tilde{L}\cup\tilde{G}})_{X_1,\dots,X_{k'}}:=F_{\mathscr{C}}(\tilde{L}_{X_1,\dots,X_{k'}}\cup\tilde{G})\circ\left(\bigotimes_{j=1}^{k}i_{S_j}\otimes\mathrm{id}_{F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon},\underline{V})}\right).$$

定义端 $\mathsf{E}$ 的泛性质意味着，对象 $\mathsf{E}^{\otimes k'}\otimes F_{\mathscr{C}}(\varepsilon',V')$ 配备结构态射的二自然族 $\_\ \_$

$$\bigotimes_{j=1}^{k'}i_{X_j}\otimes\mathrm{id}_{F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon}',\underline{V'})}$$

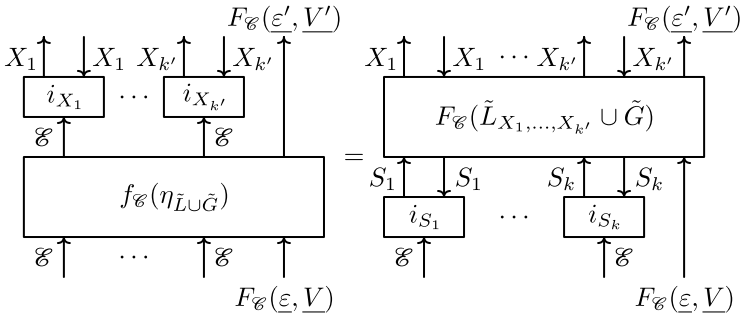
对于每个 $(X_1,\dots,X_{k'})\in\mathsf{C}^{\times k'}$，都是该函子的端

$$\left((\_\otimes\_^*)^{\otimes k'}\otimes F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon}',\underline{V'})\right)\circ\sigma.$$

这确定了一个唯一的态射

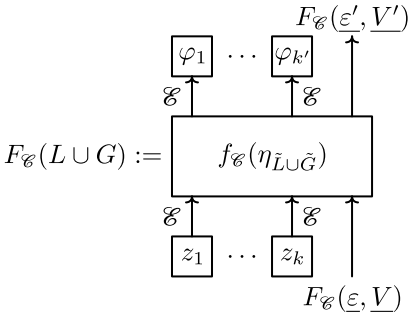
$$f_{\mathscr{C}}(\eta_{\tilde{L}\cup\tilde{G}})\in\mathscr{C}(\mathscr{C}^{\otimes k}\otimes F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon},\underline{V}),\mathscr{C}^{\otimes k'}\otimes F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon}',\underline{V'}))$$

满足




(52)

然后我们定义 $F_{\mathscr{C}}(L \cup G) : F_{\mathscr{C}}(\varepsilon, \underline{V}) \to F_{\mathscr{C}}(\varepsilon', \underline{V'})$ 如下




(53)

**命题 4.3**。 设 $\mathscr{C}$ 是一个幺模带状范畴。那么 $F_{\mathscr{C}} : \mathscr{K}_{\mathscr{C}} \to \mathscr{C}$ 是一个定义良好的带状函子。

这一结论的证明与 [DGGPR19，命题 3。1]，中的证明完全类似，不过有两个主要区别：首先，我们改变了约定，因为我们使用端

$$\mathscr{E} = \int_{X \in \mathscr{C}} X \otimes X^*$$

而非余端

$$\mathscr{L} = \int^{X \in \mathscr{C}} X^* \otimes X,$$

这意味着，例如，我们需要将底部缠结替换为顶部缠结；此外，由于紫色虚线无结 $L_1$ 的处理方式不同于绿色实线链环 $L_2$，我们还需要检查一些额外条件。尽管这些改动很小，为求完整，我们仍给出详细证明。不过，由于论证相当冗长，我们将其推迟到附录 A.4。我们将 $F_{\mathscr{C}} : \mathscr{K}_{\mathscr{C}} \to \mathscr{C}$ 称为与带状范畴$C$相关联的 Kerler–Lyubashenko–Reshetikhin–Turaev 函子$\mathscr{C}$。

4.3. 2**-维形变不变量：由 Bobtcheva–Messia 元和 Hennings 形式构造的**4**维**2**把手体**。设$\mathscr{C}$ 是一个幺模带状范畴。

**命题 4.4.** 若从一个$\mathscr{C}$标记的 *Kirby* 链环 $L = L_1 \cup L_2 \subset [0,1]^{\times 3}$ 中移除由$\mathscr{E}$ 的 *Bobtcheva–Messia* 元素和$\mathscr{E}$上的相容 *Hennings* 形式分别标记的 $L_1$ 和 $L_2$ 这对消去分支后，得到$\mathscr{C}$标记的 *Kirby* 链环 $L' = L'_1 \cup L'_2 \subset [0,1]^{\times 3}$，则

$$F_{\mathscr{C}}(L) = F_{\mathscr{C}}(L').$$

由于命题4.4 的证明思路与命题4.3的证明非常相似，我们将其推迟至附录A.5。

**命题 4.5.** 如果一个$\mathscr{C}$-标记 *Kirby* 链环 $L' = L_1' \cup L_2' \subset [0,1]^{\times 3}$ 由另一个$\mathscr{C}$-标记 *Kirby* 链环 $L = L_1 \cup L_2 \subset [0,1]^{\times 3}$ 经由带带无结形式在$\mathscr{E}$ 上标记的 $L_2$的一个分支滑过由$\mathscr{E}$上的相容 *Hennings* 形式标记的 $L_2$ 的另一个分支而得到，那么

$$F_{\mathscr{C}}(L) = F_{\mathscr{C}}(L').$$

同样，命题 4.5 的证明推迟到附录A.6。给定一个 Kirby 链环 $L = L_1 \cup L_2 \subset [0,1]^{\times 3}$、E 的一个 Bobtcheva–Messia 元素 $w$ 以及 E 上一个相容的 Hennings 形式 $\varphi$，我们用 $L_{w,\varphi} = L_{1,w} \cup L_{2,\varphi}$ 表示如下得到的 C-标记 Kirby 链环：将 $L_1$ 的每个分支标记为 $w$，并将 $L_2$ 的每个分支标记为 $\varphi$。

**定理 4.6**。 设 $w$ 是$\mathscr{E}$ 的一个 *Bobtcheva–Messia* 元素， $\varphi$ 是$\mathscr{E}$上的相容 *Hennings* 形式。若 $W = W(L)$ 是一个4维2把手体，则

$$J_{\mathscr{C}}(W) := F_{\mathscr{C}}(L_{w,\varphi})$$

是 $W$ 在2等价意义下的不变量。

定理4.6 的证明直接由命题 4.4 和 4.5得出。我们称 $J_{\mathscr{C}}$ 为与 4维 2把手体相关的 *Bobtcheva–Messia* 不变量， $w$ 和 $\varphi$。事实上，当 $\mathscr{C} = H$-模 来自幺模带状 Hopf 代数 $H$时， $J_{\mathscr{C}}$ 与 [BM02定理 214]中的不变量一致。

**命题 4.7**。 每个幺模带状子范畴$\mathscr{C}' \subset \mathscr{C}$ 都会诱导一个 *Hopf* 满同态 $\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$，其位于$\mathscr{C}$中。若 $\Lambda$ 是$\mathscr{E}$ 的双侧积分元，且 $\lambda'$是$\mathscr{E}'$上的双侧积分形式，则 $\pi \circ \Lambda$ 是$\mathscr{E}'$的双侧积分元，而 $\lambda' \circ \pi$ 是$\mathscr{E}$上的 *Hennings* 形式。

证明。端 E $\in$ C 的结构态射族 $i_X : \mathrm{E} \to X \otimes X^*$ 限制为一个以.....为目标的二自然变换

$$\begin{aligned}(\_ \otimes \_^*) : \mathscr{C}' \times (\mathscr{C}')^{\mathrm{op}} &\to \mathscr{C} \\ (X', Y') &\mapsto X' \otimes (Y')^*.\end{aligned}$$

特别是，若

$$\mathscr{E}' := \int_{X' \in \mathscr{C}'} X' \otimes (X')^*$$

对于每个 $X' \in \mathrm{C}'$，其结构态射为 $i_{X'} : \mathrm{E} \to X' \otimes X^*$，则 E′ 满足的泛性质意味着存在唯一的态射$\pi : \mathrm{E} \to \mathrm{E}'$ C，使得

$$i_{X'} = i'_{X'} \circ \pi$$

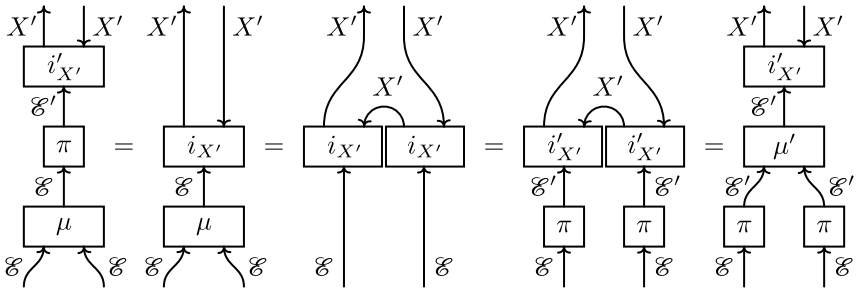
对于每个 $X' \in$C′。

首先， $\pi$ 是一个满态射。事实上，这是将四引理应用于具有正合行的交换图后立即得到的结论

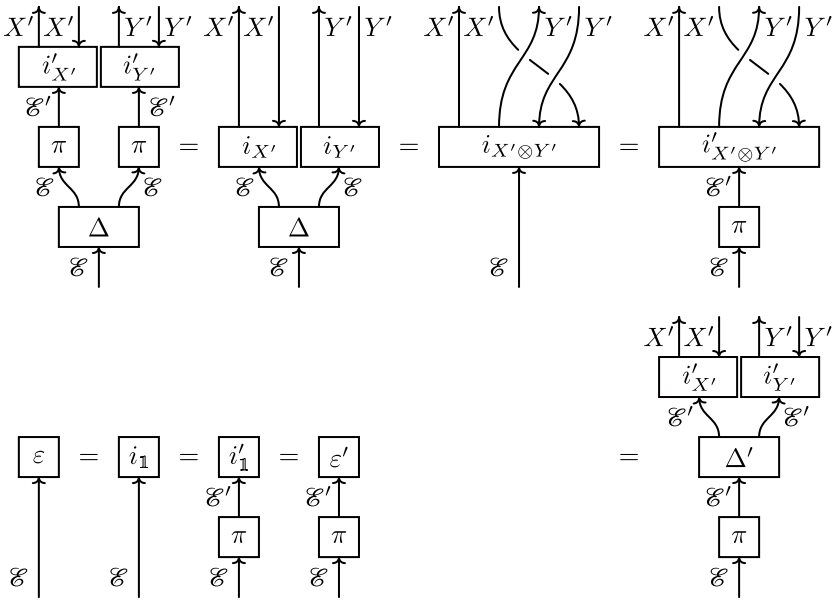
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{E} \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\pi"] & \bigoplus_{P \in \mathscr{P}_{\mathscr{C}}} P \otimes P^* \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, two heads, "\pi_{\mathscr{P}_{\mathscr{C}'}}"] & \bigoplus_{f \in \mathscr{B}} T(f) \otimes S(f)^* \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & \mathscr{E}' \arrow[r, hook, "\iota'"] & \bigoplus_{P' \in \mathscr{P}_{\mathscr{C}'}} P' \otimes (P')^* \arrow[r, "\delta'"] & \bigoplus_{f \in \mathscr{B}} T(f) \otimes S(f)^*
\end{tikzcd}$$

其中我们考虑以下集合：$\mathscr{P}_{\mathscr{C}'} \subset \mathscr{P}_{\mathscr{C}}$，它们分别是$\mathscr{C}' \subset \mathscr{C}$中不可分解投射对象的同构类的代表元集合，其中 $\mathscr{B}$ 和$\mathscr{B}'$ 由方程（42）定义，其中 $\iota$， $\delta$， $\iota'$，以及 $\delta'$ 由（43）定义，并且其中$\pi_{\mathscr{P}_{\mathscr{C}'}}$ 表示投影态射。

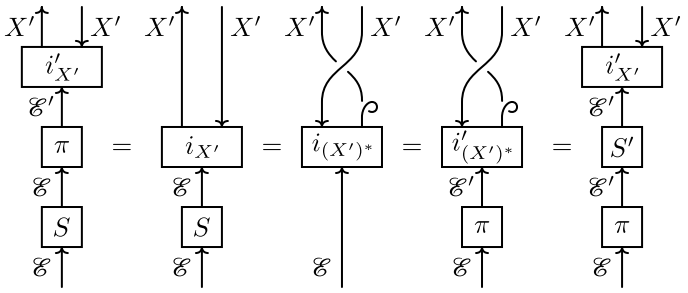
接下来， $\pi$ 是一个霍普夫代数态射。事实上，它是一个代数态射，因为



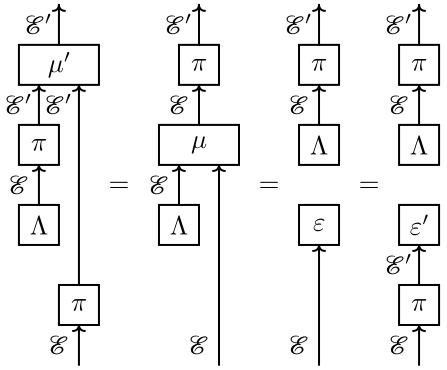

由于它是一个余代数态射，



并且它保持反 antipode，因为

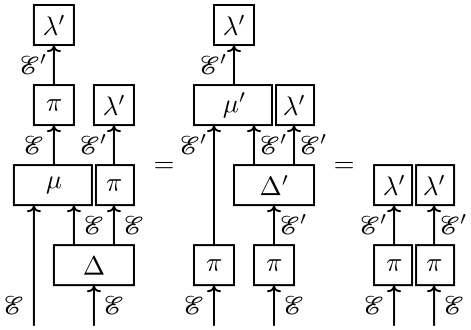


此外， $\pi \circ \Lambda$ 是 E′的一个积分元，因为



且 $\pi$ 是一个满态射。

最后， $\lambda' \circ \pi$ 是 E 上的一个 Hennings 形式，因为



□

根据命题 4.7，若 $\mathscr{C}' \subset \mathscr{C}$ 是一个幺模带状子范畴，且$\Lambda$ 是$\mathscr{E}$的一个双侧积分元，则存在一个$\lambda'$ 定义在 $\mathscr{E}'$ 上的双侧积分形式，使得 $\lambda' \circ \pi$ 与 $\Lambda$相容。

设 $\mathsf{C}' \subset \mathsf{C}$ 是半单有限带状范畴，且 $\mathsf{S}_{\mathscr{C}'} \subset \mathsf{S}_{\mathscr{C}}$ 是 $\mathsf{C}' \subset \mathsf{C}$ 的简单对象同构类的代表元集合。若 $\mathsf{D}$，$\mathsf{D}' \in \Bbbk$满足

$$(\mathscr{D})^2 = \sum_{X \in \mathcal{S}_{\mathscr{C}}} \dim_{\mathscr{C}}(X)^2, \qquad (\mathscr{D}')^2 = \sum_{X' \in \mathcal{S}_{\mathscr{C}'}} \dim_{\mathscr{C}}(X')^2,$$

那么 [EGNO15，定理 7.21.12] 表明$\mathscr{D}\mathscr{D}' \neq 0$。于是，双侧积分元

$$\Lambda = (\mathscr{D}'\delta_{\mathbb{1},X} \overleftarrow{\mathrm{coev}}_X)_{X \in \mathcal{S}_{\mathscr{C}}}$$

E 的双侧积分形式

$$\lambda' = ((\mathscr{D}')^{-1}\dim_{\mathscr{C}}(X')\overrightarrow{\mathrm{ev}}_{X'})_{X'\in\mathcal{S}_{\mathscr{C}'}},$$

在 E′ 上满足

$$\lambda'\circ\pi\circ\Lambda = \mathrm{id}_{\mathbb{1}},$$

这意味着 E 的 Bobtcheva–Messia 元素 $\Lambda$ 与 E 上的 Hennings 形式$\lambda'\circ\pi$ 相容。此外，

$$\lambda'\circ\pi\circ\eta = \mathscr{D}'\mathrm{id}_{\mathbb{1}} \neq 0. \tag{54}$$

特别地，不变量 $J_{\mathscr{C}}$与 $\Lambda$和 $\lambda'\circ\pi$相关联，可重新归一化为$\hat{}$ $\hat{}$闭 4-流形 $W = W(L)$ 的不变量，该不变量恢复了 Broda– Petit 的二色 Broda– Petit 不变量 $I_+$，其定义于 [Br95] 和 [Pe08]，如 [LY23，定理 2 中所表述的那样。18], 至少当 $\mathscr{C}$ 可因子化时，通过令

$$J_{\mathscr{C}}(\hat{W}) := \frac{F_{\mathscr{C}}(L_{\Lambda,\lambda'\circ\pi})}{\mathscr{D}^{\sigma_0(L)}},$$

其中 $\sigma_0(L)$ 是 $L$的链接矩阵的核的维数。注意，这两个归一化方式不同，因为

$$J_{\mathscr{C}}(\hat{W}) = (\mathscr{D}')^{1-\chi(\hat{W})}\mathscr{D}^{\sigma_+(\hat{W})}I_+(\hat{W}),$$

其中 $\chi(\hat{}W)$ 是 $\hat{}W$的欧拉示性数，而 $\sigma_+(\hat{}W)$ 是 $\hat{}$ $H_2(W)$ 上交叉配对的正惯性指标。

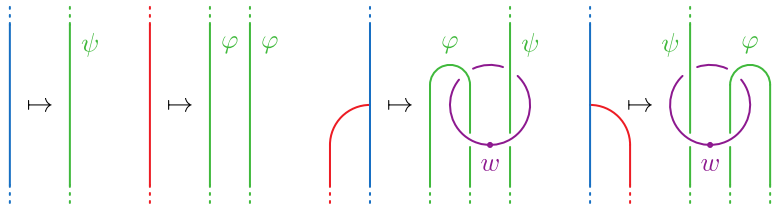
4.4. 1**-同痕不变量：由带状无结形式得到的带状曲面**。令 $\mathscr{C}$ 为一个幺模带状范畴。

**命题 4.8**。 若$\mathscr{C}$-标记 *Kirby* 链环 $L' = L'_1 \cup L'_2 \subset [0,1]^{\times 3}$ 可由$\mathscr{C}$-标记 *Kirby* 链环 $L = L_1 \cup L_2 \subset [0,1]^{\times 3}$ 移除一对链对分支 $L_1$ 和 $L_2$ 得到，其中这两个分支分别以$\mathscr{C}$ 上的 *Bobtcheva–Messia* 元素和$\mathscr{C}$上的相容带状无结形式为标记，且以 $L_2$的一个分支为基准，该分支以$\mathscr{C}$上的同一带状无结形式为标记，那么

$$F_{\mathscr{C}}(L) = F_{\mathscr{C}}(L').$$

命题4.8的证明再次推迟至附录A.7。

给定一个带状无结 $U \cup B \subset [0,1]^{\times 3}$、一个E上的带状无结形式 $\psi$、一个E上的相容 Bobtcheva–Messia 元素 $w$ 以及一个E上的相容 Hennings 形式 $\varphi$，我们用 $L'_{\psi,w,\varphi}(U, B) = L'_{1,w}\cup L'_{2,\psi,\varphi}$表示如图所示得到的 C-标记 Kirby 链环。



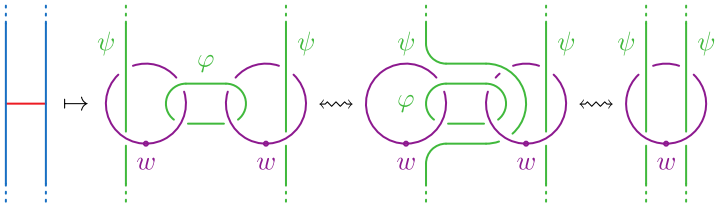

请注意，$L'_{\psi,w,\varphi}(U, B)$ 的定义涉及沿框架将带的集合 $B$ 加倍这一操作。

**定理 4.9. </style}设 是E上的带状无结形式，** $w$ 是$\mathscr{C}$的相容 *Bob- tcheva–Messia* 元素，且 $\varphi$ 是$\mathscr{C}$上的相容的 *Hennings* 形式。若$W = W(L)$ 是一个4维2柄体，且 $\Sigma = \Sigma(U, B) \subset W$是一个带状曲面，则

$$J_{\mathscr{C}}(W,\Sigma) := F_{\mathscr{C}}(L_{w,\varphi}\cup L'_{w,\varphi,\psi}(U, B))$$

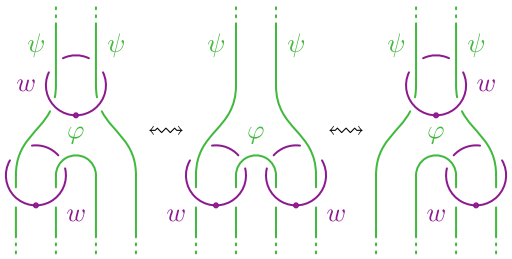
是关于该对 $(W, \Sigma)$ 在 1-同痕下的不变量。

证明。首先，以下计算是由$F_{\mathscr{C}}$ 在将绿色 $\psi$标记的分支滑动越过绿色 $\varphi$标记的分支时的不变性推出的，该不变性已在命题4.5中确立；此外，它还源于移除绿色 $\varphi$标记的分支与紫色 $w$标记的子午线所构成的消去对时的不变性，该不变性已在命题4.4中确立。



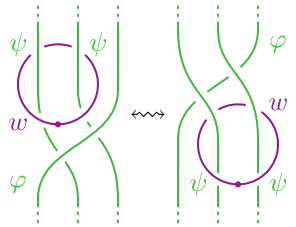

关于 $J_{\mathscr{C}}$ 在杯移动下的不变性，是以下不变性的推论： $F_{\mathscr{C}}$ 在生成／消去由 $w$标记的带点分量和 $\psi$标记的无点分量构成的链对时的不变性，这已在命题4.8中得到证明。

关于 $J_{\mathscr{C}}$ 在带滑动越过其他带时的不变性，是以下不变性的推论： $F_{\mathscr{C}}$ 在紫色 $w$标记分量滑动越过其他紫色 $w$标记分量时的不变性；而这又是命题4.4 和4.5的推论，如下所示。




关于 $J_{\mathscr{C}}$ 在生成／消去点标记分支和无点分量的消去对，以及在无点分量上滑动时的不变性，源于以下不变性：在生成／消去由 $F_{\mathscr{C}}$ $w$标记的带点分量和 $\varphi$ 标记的无点分量构成的消去对时的不变性（已在命题4.4中证明）；以及 $\varphi$标记的无点分量滑动越过其他 $\varphi$标记的无点分量时的不变性（已在命题4.5中证明）。

在 $J_{\mathscr{C}}$ 穿带游动下的不变性，是 $F_{\mathscr{C}}$ 在滑动绿色 $\varphi$标记分支穿过紫色 $w$标记分支时不变性的结果，而后者由命题 4.4 和 4.5所示。

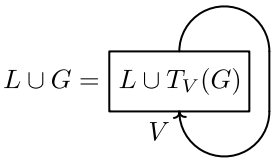



□

4.5. 由迹得到的 4 维 2 把手体边界上可容许 Kirby 图的 2 变形不变量。设 C 是一个幺模带状范畴。若 I $\subset$C 是一个理想，则称闭合的 C 标记 Kirby 图$L \cup G \in \mathrm{End}_{\mathscr{H}_{\mathscr{C}}}(\varnothing)$ 是 I 可容许的，当且仅当 $G$ 具有一条边，其标记是 I 中的一个对象。

注意，当 C 是半单的时，C 中的每个理想都与 C 本身重合，因此每个闭合的 C 标记 Kirby 图 $L \cup G$ 都是 C-可容许的，只要 $G \neq \varnothing$。

如果 $L\cup G$ 是一个 I-可容许的 C 标记 Kirby 图，且 $V$ 是 I 中的一个对象，我们称 $\mathrm{K}_{\mathscr{C}}$ 中 $(+,V)$ 的自同态 $L\cup T_V(G)$ 为 $L\cup G$的切割表示，如果




**命题 4.10**。 设 $\mathscr{I}\subset\mathscr{C}$ 是一个理想，且 t 是定义在 $\mathscr{I}$上的迹。如果 $L\cup G$ 是一个 $\mathscr{I}$-可容许的$\mathscr{C}$-带标记的*Kirby*图，且 $L\cup T_V(G)$ 是$L\cup G$的一个切割表示，则

$$F'_{\mathscr{C}}(L\cup G):=\mathrm{t}_V(F_{\mathscr{C}}(L\cup T_V(G)))$$

是 $L\cup G$ 的一个同痕不变量。

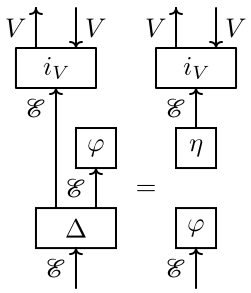
证明。 如果 $L\cup T_V(G)$ 和 $L\cup T_W(G)$ 是 $L\cup G$ 的两个不同切割表示，我们可以找到一个自同态 $L\cup T_{V,W}(G)$，其定义域和值域均为 $((+,V),(+,W))$，使得

$$\mathrm{ptr}_{\mathrm{R}}(L\cup T_{V,W}(G))=L\cup T_V(G),\qquad \mathrm{ptr}_{\mathrm{L}}(L\cup T_{V,W}(G))=L\cup T_W(G).$$

粗略地说，如果 $L\cup T_V(G)$ 和 $L\cup T_W(G)$ 是通过切割 $L\cup G$ 的两条不同边得到的，那么 $L\cup T_{V,W}(G)$ 就是通过切割两条边得到的。于是，迹 t 的性质意味着

$$\mathrm{t}_V(F_{\mathscr{C}}(L\cup T_V(G)))=\mathrm{t}_{V\otimes W}(F_{\mathscr{C}}(L\cup T_{V,W}(G)))=\mathrm{t}_W(F_{\mathscr{C}}(L\cup T_W(G))).\qquad\square$$

我们称 $F'_{\mathscr{C}}$ 为 $\mathscr{I}$-可容许的$\mathscr{C}$-带标记*Kirby*图的重整化不变量。一个对象 $V\in\mathscr{C}$ 和定义在 $\varphi$ 上的$\mathscr{E}$ Hennings 形式 相容，如果




(55)

注意，C 中的每个对象都与双侧积分形式 $\lambda$ 相容，而 $\lambda$ 是 E 上的 Hennings 形式。

**命题 4.11**。 若一个$\mathscr{C}$标记的 *Kirby* 图 $L\cup G'=L_1\cup L_2\cup G'$ 可由$\mathscr{C}$标记的 *Kirby* 图 $L\cup G=L_1\cup L_2\cup G$ 通过将 $G$ 中由$\mathscr{C}$ 中的某个对象标记的一条边滑过 $L_2$ 中由 $E$ 上的相容 *Hennings* 形式标记的一个分支而得到，则

$$F_{\mathscr{C}}(L\cup G)=F_{\mathscr{C}}(L\cup G').$$

再一次，命题 4.11的证明推迟到附录 A.8。若 $\varphi$ 是 $\mathscr{E}$上的 Hennings 形式，则一个 $\mathscr{C}$标记的 Kirby 图 $L\cup G$ 是 $\varphi$-相容的，当且仅当 $G$ 的边上的所有标签都与 $\varphi$相容。

**定理 4.12**。 设 $w$ 是$\mathscr{E}$的一个 *Bobtcheva–Messia* 元素， $\varphi$ 是$\mathscr{E}$上的一个相容 *Hennings* 形式，且t 是理想$\mathscr{I}\subset\mathscr{C}$上的一个迹。若 $W=W(L)$ 是一个4维2柄体，且 $G\subset\partial W$ 是一个$\mathscr{I}$-可容许、 $\varphi$相容的$\mathscr{C}$标记 *Kirby* 图，则

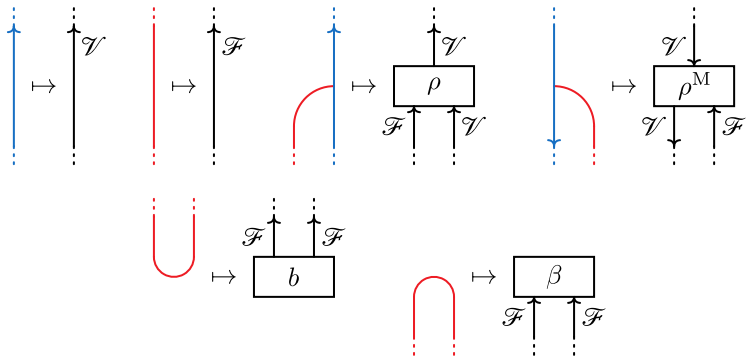
$$J'_{\mathscr{C}}(W,G):=F'_{\mathscr{C}}(L_{w,\varphi}\cup G)$$

是关于这一对 $(W,G)$ 在 2-等价下的不变量。

定理 4.12的证明可由引理 3.10、定理 4.6和命题 4.11直接推出。我们称 $J'_{\mathscr{C}}$ 为 *4*维 *2*把手体中可容许 *Kirby* 图的重整化 *Kerler–Lyubashenko* 不变量。当$\mathscr{C}$ 可因子化时， $J'_{\mathscr{C}}$ 与 [DGGPR19第 4 节中的不变量相同。3]。

如果 $G \subset \partial W$ 是一个与 $\varphi$相容的 I-可容许的 C 标记定向带框链环，那么$J'_{\mathscr{C}}(W,G)$ 是一对 $(W,G)$ 的 2- 变形不变量。然而请注意，如果$G$ 不与 $\varphi$ 相容，那么 $J'_{\mathscr{C}}(W,G)$ 通常并不在 $W = W(L)$ 中任意同痕下保持不变，因为它不具有在$G$ 的分支上方滑动无点分量 $L$所得的同痕不变性。特别地， [LY23 中定理 4.3] 所定义的不变量通常不是同痕不变量。例如，在 [LY23 第 5]节末尾讨论的例子中，它就不是同痕不变量。

4.6. 来自带框无结模块的带状曲面的 **1-同痕不变量**。设 C 是一个幺模带状范畴 C。若 V $\in$C 是一个带状 Frobenius 代数 F $\in$C 的带框无结模块，则定向带化无链环 $U \cup B$ 的每个正则图都确定一个 C 标记的带状图 $G_{\mathscr{V},\mathscr{F}}(U,\ B)$，其构造如下所示。




**定理 4.13**。 设 $w$ 是$\mathscr{E}$的一个 *Bobtcheva–Messia* 元素， $\varphi$ 是$\mathscr{E}$上的一个相容的 *Hennings* 形式，t 是理想$\mathscr{I}$ $\subset \mathscr{C}$上的一个迹，且$\mathscr{V}$ $\in \mathscr{I}$ 是一个带状无结模块，对应于一个 $\varphi$-相容的带状 *Frobenius* 代数$\mathscr{F}$ $\in \mathscr{C}$。若 $W = W(L)$ 是一个4维2-柄体，且 $\Sigma = \Sigma(U,B)$ $\subset W$ 是一个有向带状曲面，那么

$$J'_{\mathscr{C}}(W,\Sigma) := J'_{\mathscr{C}}(L_{w,\varphi} \cup G_{\mathscr{V},\mathscr{F}}(U,B))$$

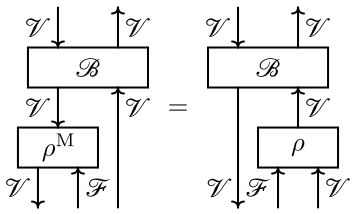
是二元组$(W,\Sigma)$ 在1-同痕意义下的不变量。

证明。 $J'_{\mathscr{C}}$ 在 $[0,1]^{\times 2}$ 中的同痕下保持不变，这是因为 V 是一个刚性左 F-模。

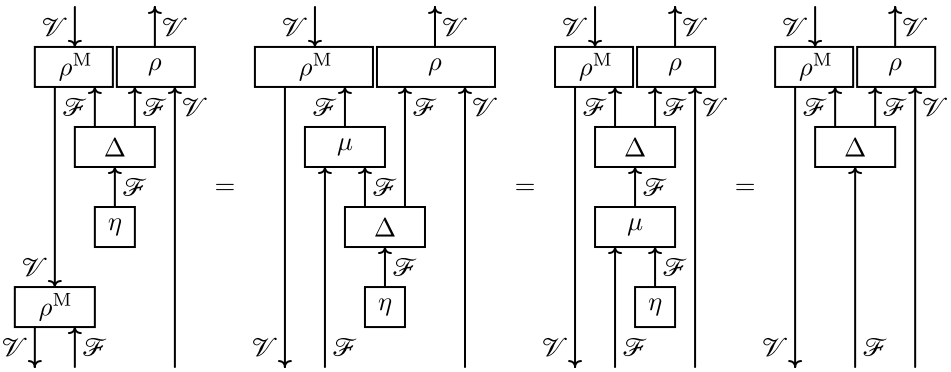
$J'_{\mathscr{C}}$ 在正则 Reidemeister 变换下保持不变，这是因为 F 是一个带状 Frobenius 代数。

$J'_{\mathscr{C}}$ 在杯移动下保持不变，这是因为带态射 B 满足偏迹性质。

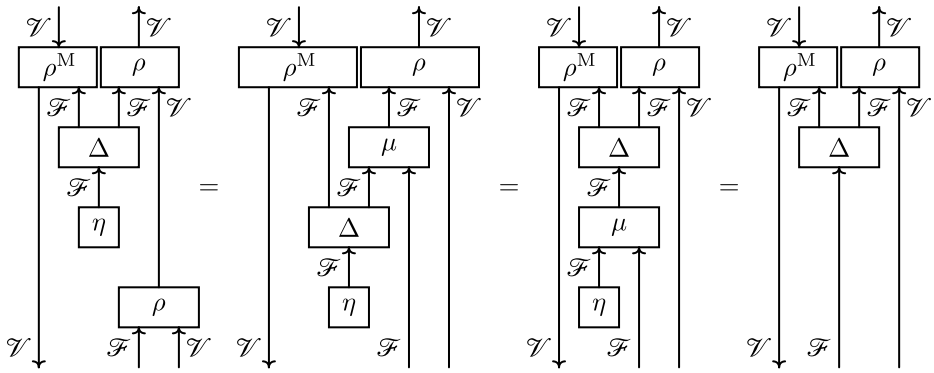
$J'_{\mathscr{C}}$ 在其他带上进行带滑动的不变性，可通过证明



一方面，我们有



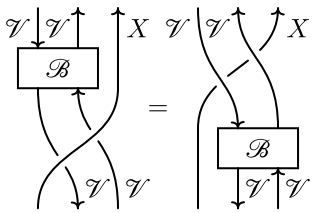
另一方面，我们有



在 $J'_{\mathscr{C}}$ 关于带点分量与无点分量的消去对的创建/消去以及在无点分量上的滑动下的不变量性，源于 $F_{\mathscr{C}}$ 关于消去对的创建/消去 $\Lambda$标记的带点分 $\lambda$量和 4.4中所建立的标记无点分量下的不变量性，以及在 $\lambda$标记的无点分量上的滑动下的不变量性；后者在命题 4.11中得到证明。

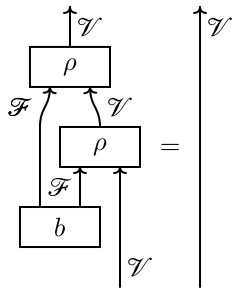
关于 $J'_{\mathscr{C}}$ 在无点分量上的滑动以及带有点标记子午线的无点分量消去对的创建/消去下的不变量性，源于 $F_{\mathscr{C}}$的同一性质，该性质已在定理 4.12中得到证明。

在带间穿带游动下， $J'_{\mathscr{C}}$ 的不变量性源于 B 的透明性，这意味着



对于每个 $X \in$C。 □

在附加假设下




这保证了在帽移动下的不变性，$J'_{\mathscr{C}}$ 可以扩展为闭曲面 $\Sigma = \Sigma(B,U)$ 的一个不变量。若 C′ ⊂ C 是半单有限带状范畴，若 $\Lambda$ 是 E 中的双侧积分元，且若 $\lambda' \circ \pi$ 是由 E′上的双侧积分形式 $\lambda'$ 诱导的相容 Hennings 形式，那么与 $\Lambda$、$\lambda' \circ \pi$以及一个对称 Frobenius 代数 F 相关联的不变量 $J'_{\mathscr{C}}$，将恢复 [的 Lee–Yetter 不变量 LY23，定理 3.3]„ 至少在 C 可因子化时如此。

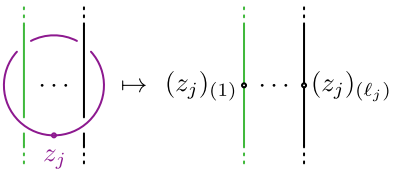
## 5. 计算与示例

本节将说明如何在幺模带状 Hopf 代数的有限维表示范畴中计算我们的不变量，并讨论幺模带状范畴中 Frobenius 代数上的一些带状无结模块示例；这些模块可导出有向带状曲面在 1-同痕下的不变量。

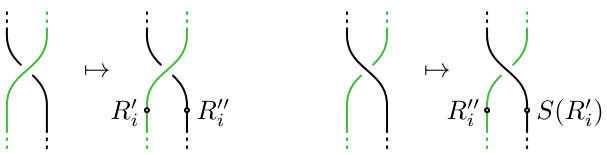
### 5.1. 在 $H$-模范畴中的计算算法。

若 $H$ 是域 $\Bbbk$上的幺模带状 Hopf 代数，那么下面说明如何计算命题 $F_{\mathscr{C}}$ 所定义的函子：$\mathscr{H}_{\mathscr{C}} \to \mathscr{C}$，该命题为 4.3，函子取值于 $\mathscr{C} = H$-模范畴。

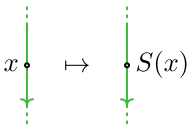
设 $L = L_1 \cup L_2 \subset [0,1]^{\times 3}$ 为一个 C-标记 Kirby 链环，$G \subset [0,1]^{\times 3}$ 为一个与之不相交的 C 标记带状图，其从 $(\varepsilon, V)$ 到 $(\varepsilon', V')$。设 $k$ 和 $k'$ 分别为 $L_1$ 和 $L_2$的分支数，并设 $\ell_1, \dots, \ell_k$ 为 $L_2 \cup G$ 与一族 Seifert 圆盘之间的几何交点数，这族圆盘对应于 $L_1$的各分支。首先，任意选取 $L_2$每个分支的定向。接着，如图所示，对于每个 $1 \leqslant j \leqslant k$，将 $L_1$ 中第 $j$个带点分量$L_{1,j}$ 替换为若干珠子，其标记为该分量标签 $z_j$的迭代余乘积 $\Delta^{(\ell_j)}(z_j)$ 的各分支。




注意，与 $L_1$ 的 Seifert 圆盘相交的 $L_2 \cup G$ 的股可以是绿色或黑色，且所有配置都有可能出现，因此这幅图仅展示了一个示例。接下来，如图所示，我们在交叉处插入标有 R-矩阵 $R$ 分支的珠子。



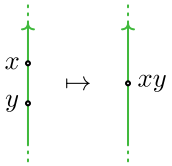
同样，交叉处可以同时出现绿色和黑色股，且所有配置都有可能出现，因此这幅图仅展示了一个示例。接下来，如图所示，我们对每个位于向下定向股线上的珠子的标签应用反 antipode $S$。



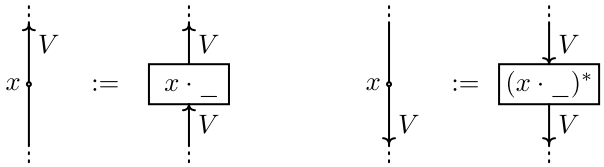

请注意，这幅图展示了沿向下定向的绿色股线进行的操作，但同样适用于向下定向的黑色股线。接下来，如图所示，我们在向右定向的极值点周围插入标记为枢轴元 $g$ 及其逆元 $g^{-1}$ 的珠子。




同样，这幅图展示了围绕向右定向的绿色极值点进行的操作，但同样适用于向右定向的黑色极值点。接下来，我们将位于 $L_2$ 同一分支上的所有珠子，沿股滑动并保持其顺序不变，将它们集中到一个朝上定向的位置，然后按照以下规则将所有元素相乘。




此时，对于每个 $1 \leqslant j \leqslant k'$，在 $L_2$的第 $j$个分支$L_{2,\,j}$ 上只剩下一个标记为 $y_j$ 的珠子，其标签为 $\varphi_j$；我们将由 $G$通过把每个珠子解释为相应的券而得到的 $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$-标记带状图记作 $B(G)$，如图所示。



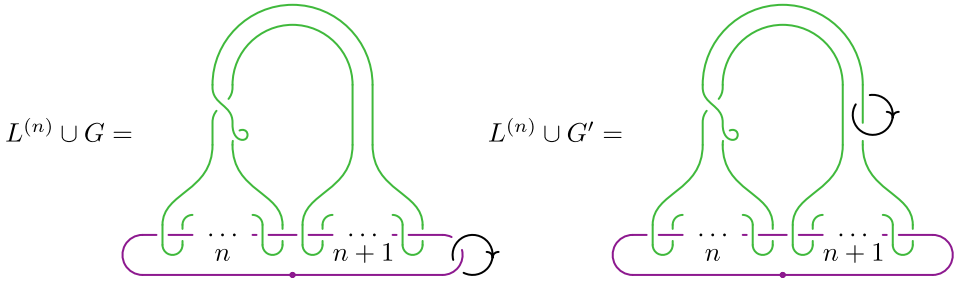

注意， $B(G)$ 不是 C 标记的带状图，因为珠子并不由 $H$-交织算子标记；通常它们只由线性自同态标记。

**命题5.1**。 $H$-交织算子 $F_{\mathscr{C}}(L \cup G)\colon F_{\mathscr{C}}(\varepsilon, V) \to F_{\mathscr{C}}(\varepsilon', V')$ 满足

$$F_{\mathscr{C}}(L \cup G) = \left( \prod_{j=1}^{k'} \varphi_j(g^{-1} y_j) \right) F_{\mathrm{Vect}_{\Bbbk}}(B(G))$$

由于命题 5.1 的证明同样相当技术性，我们将其推迟到附录 A.9。

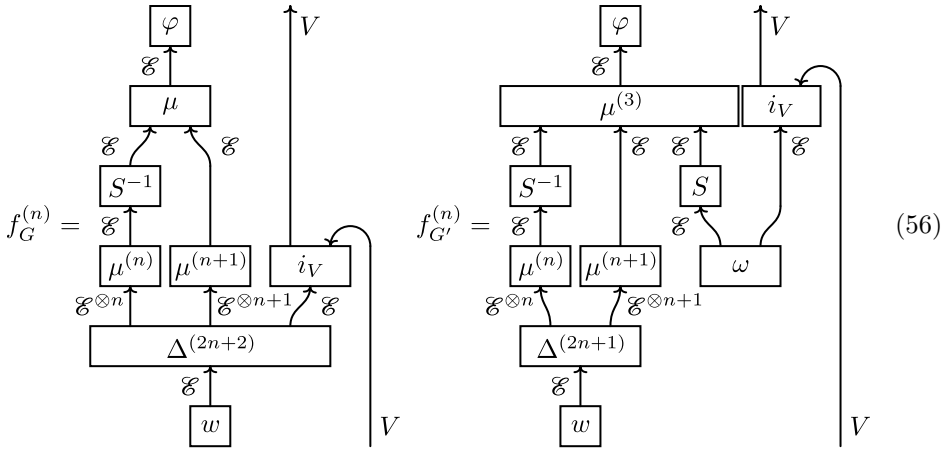
5.2. **异 exotic 带框结与带状曲面**。对于 $n \geqslant 1$，这两个 Kirby 图示




表示一个 Akbulut 塞，它是一个四维 2-手柄体 $W^{(n)} = W(L^{(n)})$，带有定向带框结 $G$，$G' \subset W^{(n)}$，使得存在一个同胚 $f\colon W(n) \to W(n)$ 满足 $f(G) = G'$，但不存在这样的微分同胚 [AY08]。如果 $w$ 是 E 的一个 Bobtcheva–Messia 元素，如果 $\varphi$ 是 E 上的一个相容的 Hennings 形式，如果 t 是理想 I $\subset$C 上的一个迹，并且如果 $G_V$ 和 $G'_V$ 分别是通过选择一个 $\varphi$-相容标记 $V \in$I，由 $G$ 和 $G'$得到的 C 标记定向带框结，那么这些不变量

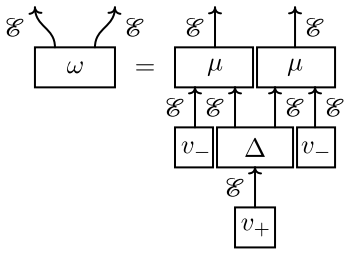
$$J'_{\mathscr{C}}(W^{(n)}, G) = F'_{\mathscr{C}}(L^{(n)}_{w,\varphi} \cup G_V) = \mathrm{t}_V(f^{(n)}_G),$$
$$J'_{\mathscr{C}}(W^{(n)}, G') = F'_{\mathscr{C}}(L^{(n)}_{w,\varphi} \cup G'_V) = \mathrm{t}_V(f^{(n)}_{G'})$$

由定理 4.12 定义，等于 $V \in \mathscr{I}$所定义的自同态的迹

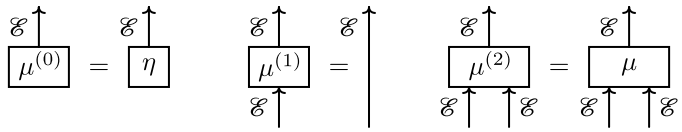


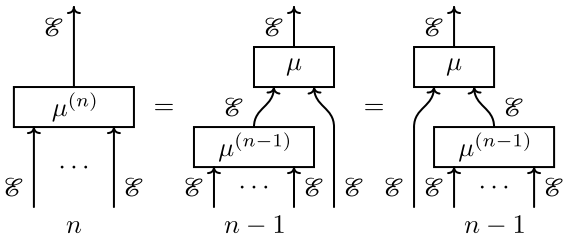

(56)

分别地，其中 $\omega : \to$ E 𝕜E 是由以下定义的 Hopf 余配对

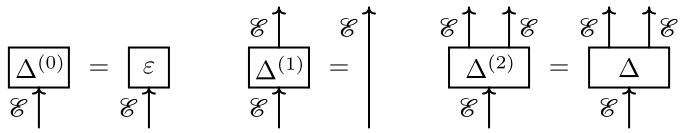


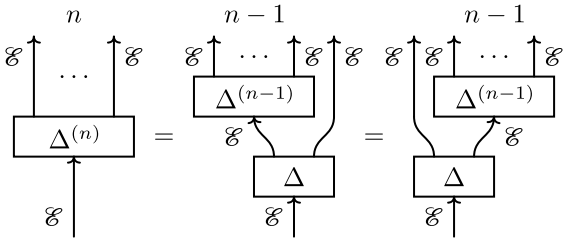
并且其中 $\mu^{(n)}:\mathrm{E}^{\otimes n}\to\mathrm{E}$ 是递归定义的迭代乘积





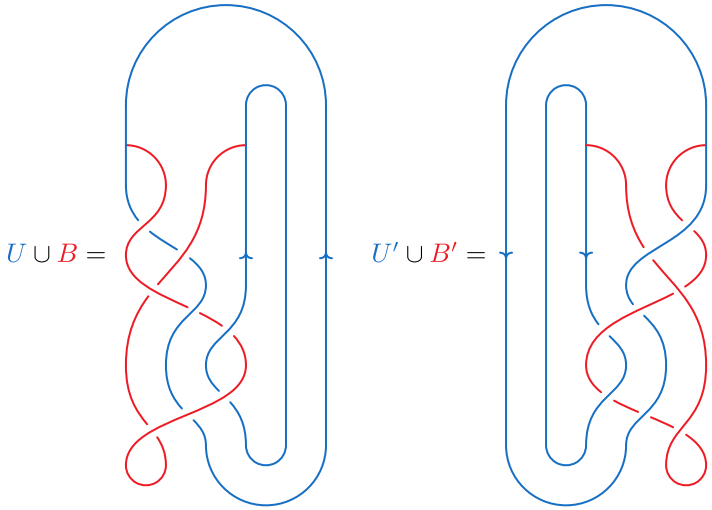
对于所有 $n\geqslant 3$ 和 $\Delta^{(n)}:\ \mathrm{E}\ \to\mathrm{E}^{\otimes n}$ 是递归定义的迭代余乘积，其定义如下





对于所有 $n\geqslant 3$。注意， [LY23第 5] 节声称构造了一个半单不变量 $I_+$，该不变量可以区分 $(W^{(n)},\ G)$ 和 $(W_{(n)}\,G')$，但关键在于， $I_+$ 不是同痕不变量。

我们再来讨论另一个例子。这两个带带的平凡链环图

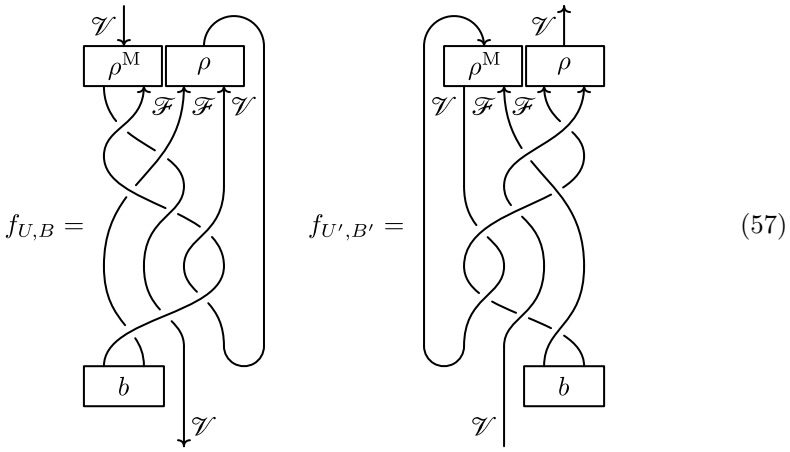



表示奇异缎带圆盘 $\Sigma=\Sigma(U,\ B)$ $\Sigma'=\Sigma(U',\ B')\subset D^4$，它们出现在[HS21的图 1]中。事实上，存在一个同胚 $f:\ D^4\to D^4$ 满足$f(\Sigma)=\Sigma'$，但不存在这样的微分同胚。如果 $w$ 是 $\mathscr{E}$ 中的 Bobtcheva–Messia 元素，

若 $\varphi$ 是 E 上相容的 Hennings 形式，若 t 是理想 I $\subset$ C 上的迹，且若 V $\in$ I 是一个 $\varphi$-相容 Frobenius 代数 F $\in$C 的带状无结模块，则不变量

$$J'_{\mathscr{C}}(D^4,\Sigma) = F'_{\mathscr{C}}(G_{\mathscr{V},\mathscr{F}}(U,B)) = \mathrm{t}_V(f_{U,B}),$$
$$J'_{\mathscr{C}}(D^4,\Sigma') = F'_{\mathscr{C}}(G_{\mathscr{V},\mathscr{F}}(U',B')) = \mathrm{t}_V(f_{U',B'})$$

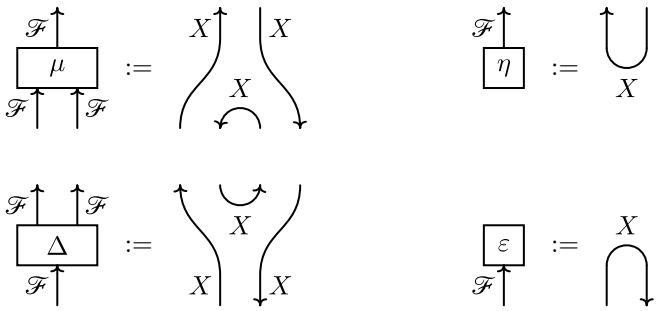
由定理 4.13 定义的，由 $\mathscr{V}$ $\in\mathscr{I}$的自同态的迹给出，定义为



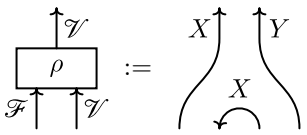

(57)

目前，我们尚未找到任何能够区分由方程（56）定义的态射的 Hennings 形式和 Bobtcheva–Messia 元素，也未找到任何能够区分由方程（57）定义的态射的带状无结模块，参见第 5.3–5.5 节。不过，在第 5.6 节中，我们讨论了应对这一问题的可能策略，这将是未来研究的主题。

5.3. **由边界 Frobenius 代数构造的带框无结模块**。设 C 是一个幺模带状范畴 C。每个对象 $X$ $\in$C 都会导出一个带状 Frobenius 代数 F $= X \otimes X^* \in$ C，称为 的边界 *Frobenius* 代数，其

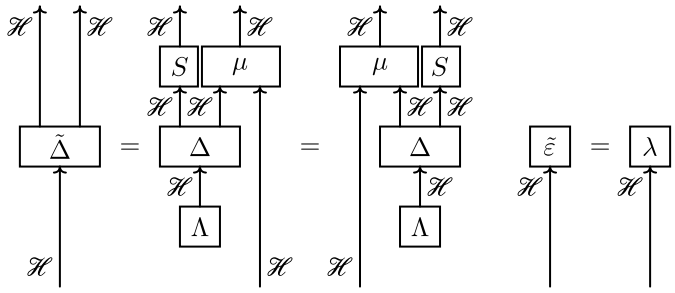



每个对象 $Y$ $\in$ C 都确定一个左 F-模 V $= X \otimes Y$，其左作用$\rho$ : F $\otimes$V $\to$ V 定义为

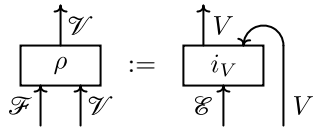



如果 $Y$ 是透明的，且 $\dim_{\mathscr{C}}(Y) = 1$，那么 V 是一个带状无结模块。例如，若 t 是理想 I $\subset$C 上的迹，且 $X$ $\in$C 和 $Y$ = ，那么由定理 4.12 定义的不变量 $J'_{\mathscr{C}}(W,$ $\Sigma)$ 与 $J'_{\mathscr{C}}(W,\partial\Sigma_X)$ 一致，其中$\partial\Sigma_X$ 表示由 $X$ 标记的 $\Sigma$ 的边界。

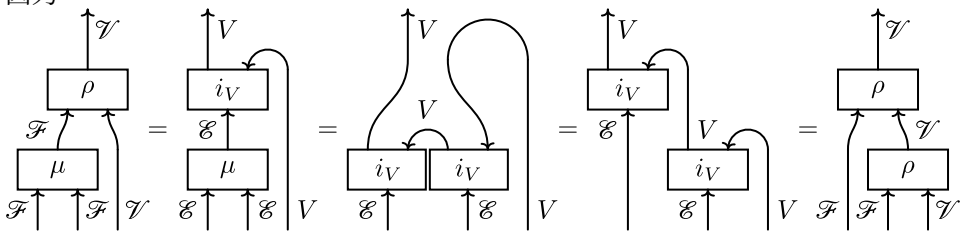
5.4. **由基本 Frobenius 代数得到的带状无结模块。** 设$\mathscr{C}$是一个幺模带状范畴 $\mathscr{C}$。如 [FS10，附录 A2], 所述，一个霍普夫代数$\mathscr{H}$ $\in \mathscr{C}$ 若具有归一化双侧积分元 $\Lambda$ 和双侧积分形式 $\lambda$，则可赋予其 Frobenius 代数结构；该结构保留了代数结构，并将余代数结构替换为

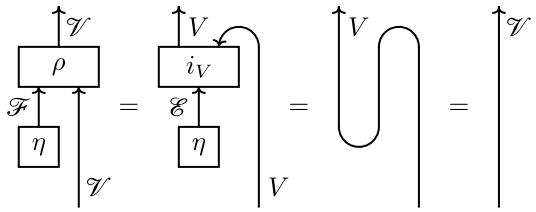



那么，每个对象 $V \in \mathsf{C}$ 都确定一个左 F-模 $\mathsf{V} = V$，对应于带状 Frobenius 代数 $\mathsf{F} = \mathsf{E}$，称为 C 的基本 *Frobenius* 代数，其左作用 $\rho : \mathsf{F} \otimes \mathsf{V} \to \mathsf{V}$ 定义为

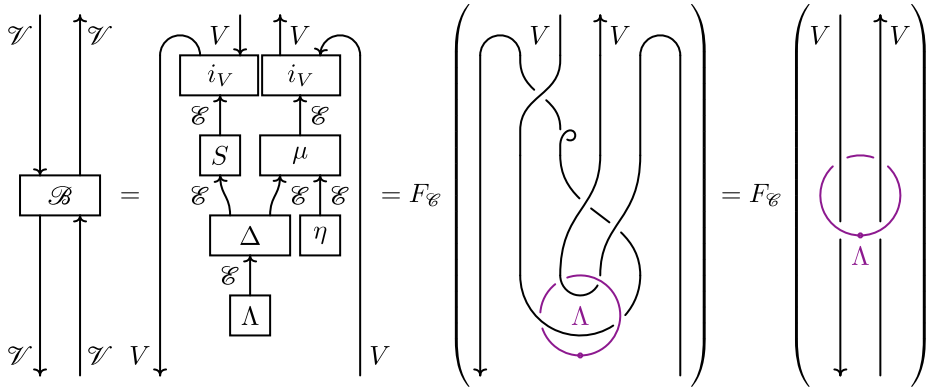



因为




带态射 $\mathsf{B} : \mathsf{V}^* \otimes \mathsf{V} \to \mathsf{V}^* \otimes \mathsf{V}$ 定义为



特别地，B 始终是一个透明态射。当 C 是可因子化的时，简单对象 $V = V$ 的带态射 $B : V^* \otimes V \to V^* \otimes V$ 是 $\overrightarrow{\text{coev}}_V \circ \overleftarrow{\text{ev}}_V$ 的一个标量倍数。因此，在这种情况下，若 t 是理想 $I \subset C$ 上的迹，且 $V \in I$ 是 E 上的带状无结模块，那么它也是 $V \otimes V^*$ 上的带状无结模块，并且由定理 4.12 定义的两个相应不变量相同。一般而言，对象 $V = V$ 是 $F = E$ 的带状无结模块，当且仅当 $\text{ptr}_L(B) = \text{id}_V$。事实证明，这一条件相当严格。例如，若 $C = H$-mod 来自一个幺模带状 Hopf 代数 $H$，那么左 $H$-模 $V = V$ 是伴随表示 $F = H$ 的带状无结模块，当且仅当

$$\text{tr}_V(gS(\Lambda_{(1)}))\Lambda_{(2)} \cdot v = v$$

对每个 $v \in V$。由于 $\text{tr}_V(g\_) \in Q(H)$ 是左量子特征，我们可以考虑 $z_V := \text{tr}_V(gS(\Lambda_{(1)}))\Lambda_{(2)} \in Z(H)$，它是满足 $\lambda(z_V\_) = \text{tr}_V(g\_)$ 的唯一中心元，并且 $V$ 是 $H$ 的带状无结模块，当且仅当

$$z_V \cdot v = v$$

对所有 $v \in V$。例如，对于正则表示 $\mathscr{V} = H$，由于 [Ra12，定理 10.4。1] 给出

$$\text{tr}_H(gx) = \lambda(S(\Lambda_{(1)})\Lambda_{(2)}x)$$

对于每个 $x \in H$，条件变为

$$S(\Lambda_{(1)})\Lambda_{(2)} = 1.$$

由于 $S(\Lambda_{(1)})\Lambda_{(2)} = \varepsilon(\Lambda)1$，这意味着 $H$ 是 $H$ 的带状无结模块，当且仅当 $H$ 是半单的。

5.5. **来自量子群的带状无结形式。** 如 [BD21第9节所述。1], 对于每个简单复李代数 $\mathfrak{g}$，小量子群 $\mathfrak{u}_q\mathfrak{g}$ 在 $q = e^{\frac{2\pi i}{r}}$ 处，若 $r \in \mathbb{N}$ 大于 $\mathfrak{g}$ 的简单根的最大长度，则它是幺模带状 Hopf 代数，因此 $\mathscr{C} = \mathfrak{u}_q\mathfrak{g}$-模 是幺模带状范畴。

当 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ 时，已证明，与归一化双侧积分元 $\Lambda \in \mathfrak{u}_q\mathfrak{sl}_2$ 和左积分形式 $\lambda \in \mathfrak{u}_q\mathfrak{sl}_2^*$ 相对应的不变量 $J_{\mathscr{C}}(W)$ 仅取决于 $\partial W$ 的拓扑和 $W$ 的同调，对 $r \in \mathbb{N}$ 的所有取值均如此。特别地，当 $r \not\equiv 0$ （模 4）时，带状范畴 C 是可因子化的，因此 [BD21, 定理 1.2] 蕴含 $J_{\mathscr{C}}(W)$ 仅取决于边界 $\partial W$、$W$ 的符号 $\sigma(W)$，以及 $W$ 的欧拉示性数 $\chi(W)$。当 $r \equiv 0$（模 4）时，带状范畴 C 不可因子化，但 [BD22, 命题 7.1 和定理 8.1] 蕴含 $J_{\mathscr{C}}(W)$ 可写成一组不变量之和，这些不变量取决于 $H^2(W, \partial W; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 中的一个上同调类；当 $r \equiv 0$ （模 8）时，该上同调类可解释为 $\partial W$ 上的自旋结构。这种分解类似于将 WRT（Witten–Reshetikhin–Turaev）不变量分解的公式；此类公式可追溯至 Turaev [Tu91, 第 4] 节以及 Kirby–Melvin [KM91, 定理 8.27 和 8.32]。

Bobtcheva–Messia 元素的完整列表 $w \in \mathfrak{u}_q\mathfrak{sl}_2$ 以及相容的 Hennings 元素 $z \in \mathfrak{u}_q\mathfrak{sl}_2$ （对应素数值） $r$ 见 [BM02第 8 节。13]这些元素至多有四个，且都显示可给出 Hennings 不变量、WRT 不变量，或（可能是）两者的组合。

当 $r$ 为奇数时，产生带状曲面不变量的 $\mathfrak{u}_q\mathfrak{sl}_2$ 一组中心幂等元可见 [Ke94，引理 14], 以及 [DM20，第 4 节。6] 它们在左积分形式上的作用 $\lambda \in \mathfrak{u}_q\mathfrak{sl}_2^*$ 可用作用于简单模和不可分解投射 $\mathfrak{u}_q\mathfrak{sl}_2$-模的量子迹与量子伪迹来表示。特别地， [DM20，引理 4.2 和 4.3] 表明，唯一满足以下条件的不可分解投射 $\mathfrak{u}_q\mathfrak{sl}_2$-模 $P$ 是

$$\text{tr}_P(gS(\Lambda_{(1)}))\Lambda_{(2)} \cdot v = v$$

对每个 $v \in P$ 都是 Steinberg 表示，它是 $\mathfrak{u}_q\mathfrak{sl}_2$-模的唯一简单射影表示，记作 $X_{r-1}$，见 [DM20，第 4 节。4]。

还应注意，当 $w = \Lambda$ 且 $\varphi = \lambda$时，针对 $r \leqslant 16$ 的数值计算无法区分由方程（56）定义的两个态射，对任意$V \in \mathscr{C}$均如此。

5.6. **更多示例的来源。** 正如 Azat Gainutdinov 指出，正合模范畴应是我们构造的丰富示例来源，因为它们会产生模结构易于理解的 Frobenius 代数。以这种方式寻找带状无结模块将是未来工作的主题，因此本节从简。更多详情见 [Sh19]。

设 C 是一个幺模带状范畴。一个左 C-模范畴 是一个范畴 M，配备了一个作用 $\triangleright : \mathsf{C} \times \mathsf{M} \to \mathsf{M}$，以及分支的自然同构

$$(X \otimes Y) \triangleright M \to X \triangleright (Y \triangleright M), \qquad \mathbb{1} \triangleright M \to M$$

对所有 $X, Y \in \mathscr{C}$ 和 $M \in \mathscr{M}$均成立；这些同构满足一系列公理，见[EGNO15，定义 7.1。1]。由于 $\mathscr{C}$ 是有限的，对每个对象 $M \in \mathscr{M}$，函子 $\_ \triangleright M : \mathscr{C} \to \mathscr{M}$ 有一个右伴随，记作 $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{M}}(M, \_) : \mathscr{M} \to \mathscr{C}$。这可以扩展为一个函子

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{M}} : \mathscr{M}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{M} \to \mathscr{C}$$

并且根据定义，存在一个分支之间的自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{M}}(M, N)) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{M}}(X \triangleright M, N)$$

对所有 $X \in \mathsf{C}$ 和 $N \in \mathsf{M}$ 都成立。特别地，

$$\underline{\mathrm{End}}_{\mathscr{M}}(M) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{M}}(M, M) \in \mathscr{C}$$

对于每个 $M \in \mathscr{M}$，它自然是一个代数，有时还是 Frobenius 代数，例如参见 [Sh19，定理 3。14]。该伴随代数

$$\mathscr{A} = \int_{M \in \mathscr{M}} \underline{\mathrm{End}}_{\mathscr{M}}(M)$$

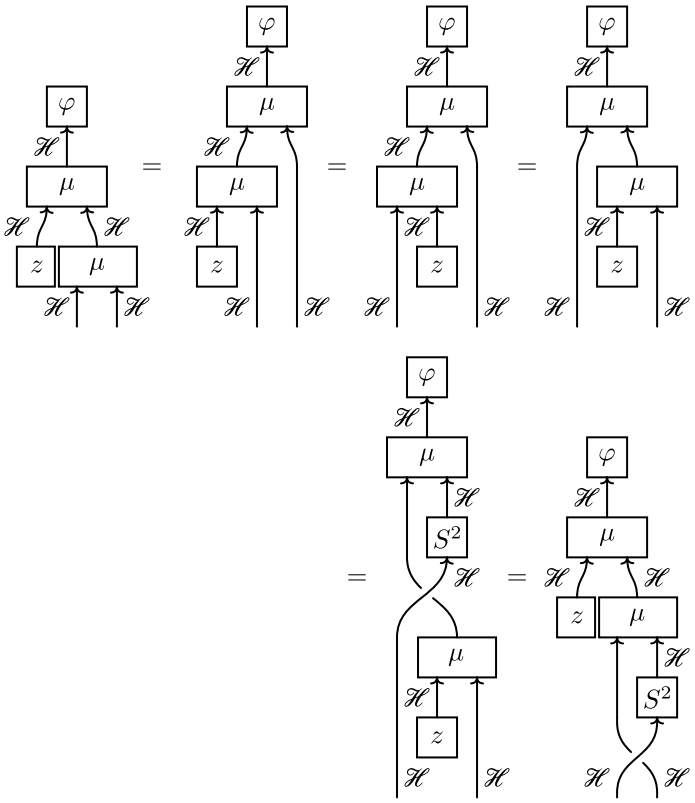
有时也可能是 Frobenius 代数。例如，当幺模范畴 C 作用于自身时，伴随代数 A 是 C 的 Drinfeld 中心 Z(C) 中的一个 Frobenius 代数，参见 [Sh14，推论 5.10]。此外，若 M 是尖点的，且 $G$ 是 M 的射影生成元，则 C 中右 EndEndEndEndEndEndEndEndEndEndEndEndEndEndEnd$_{\mathscr{M}}(G)$-模的范畴与 M 本身作为左 C-模范畴等价，参见 [Sh19，推论 3.16]。这一结果可用于更好地理解左 EndEndEndEndEndEndEndEndEndEndEndEndEndEndEnd$_{\mathscr{M}}(G)$-模，并从中寻找带框无结模块。伴随代数也有类似结果：Z(C) 中右 A-模的范畴与 M 的 C-线性自函子范畴等价。

构造模范畴的一种高效方法，是在有限维霍普夫代数 $H$ 的有限维左 $H$-余模范畴 $H$-comod 中寻找一个代数 $A$。随后，有限维左 $H$- 模范畴 $\mathsf{C} := H$-mod 按照 [Sh19 第 4.2] 节中的说明作用于有限维左 $A$-模范畴 $\mathsf{M} := A$-mod。为了找到这样的代数 $A$，例如可以考虑 $H$ 的一个余理想以及 $H$ 的余乘法的变形，如 [Wi23 第 4.1] 节所示。另一种可能是考虑阿贝尔群 $G$上的霍普夫 $G$-余代数$H$，并令 $A$ 为 $H$ 的零次部分。于是，$A$ 自然是 $H$-comod 中的一个代数。例如，可以考虑阿贝尔˜群 $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 以及 [BD22 第 5] 节中的幺模带状霍普夫 $G$-余代数 $H = U_q\mathfrak{sl}_2$。在这种情况下，$\mathsf{C} := H$-mod 是一个幺模带状范畴，而每个左 $A$-模 $M \in \mathsf{M} := A$-mod 都会导出一个 Frobenius 代数 EndEndEndEndEndEndEndEndEndEndEndEndEndEndEnd$_{\mathscr{M}}(M) \in \mathsf{C}$。

# 附录 A. 证明

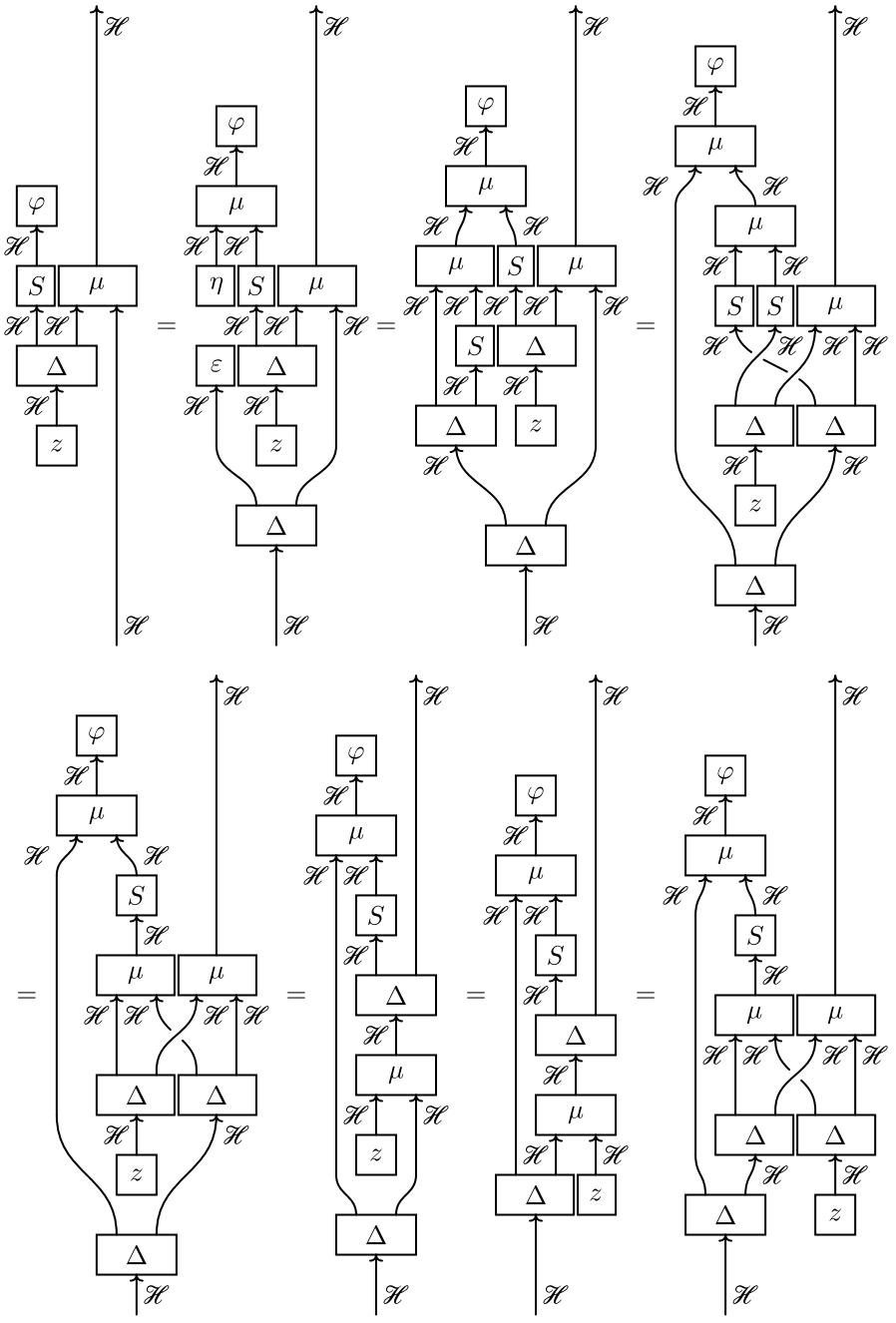
## A.1. **命题 3.3 的证明。**

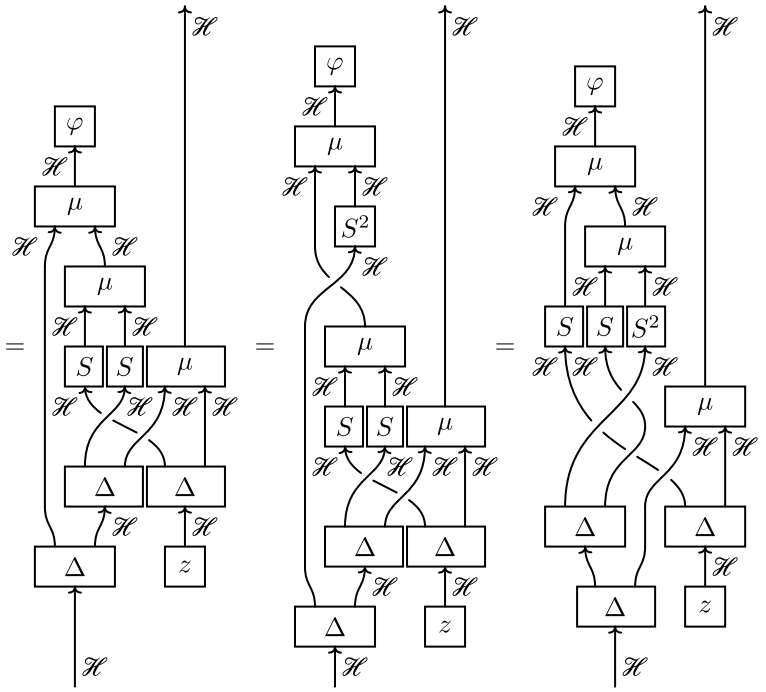
命题的证明 *3.3*。 一方面，若 $z$ 是$\mathscr{H}$的一个中心元，那么 $\Phi_\varphi(z)$是$\mathscr{H}$上的左量子特征。事实上，如下所示即可证明。

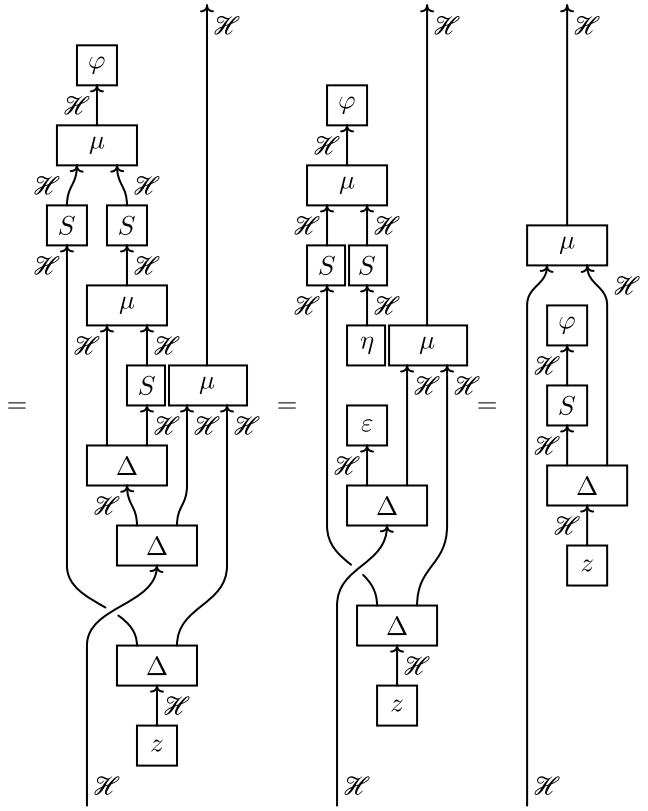



另一方面，若 $\varphi$ 是$\mathscr{H}$上的左量子特征，则 $\Psi_z(\varphi)$ 是$\mathscr{H}$的中心元。事实上，可利用 [BBDP23，表 3.1.3，证明这一点。

方程 (s4) 和 (s7)] 如图所示。



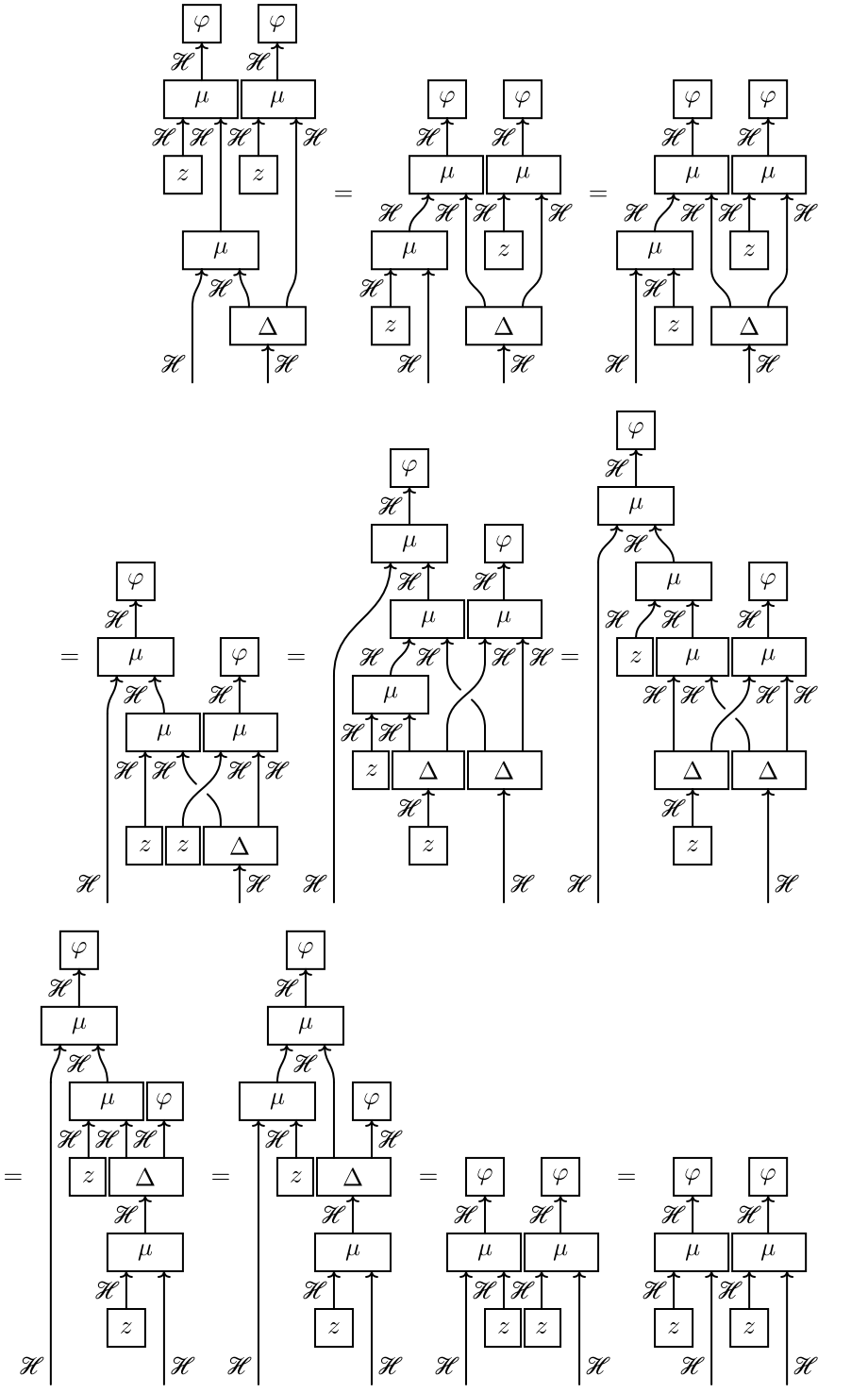

$\mathcal{H}$
$\varphi$
$\mu$
$S$
$S^2$
$\Delta$
$z$
=


$\mathcal{H}$
$\varphi$
$\mu$
$S$
$\eta$
$\varepsilon$
$\Delta$
$z$
=

□

A.2. **命题的证明3.8**。

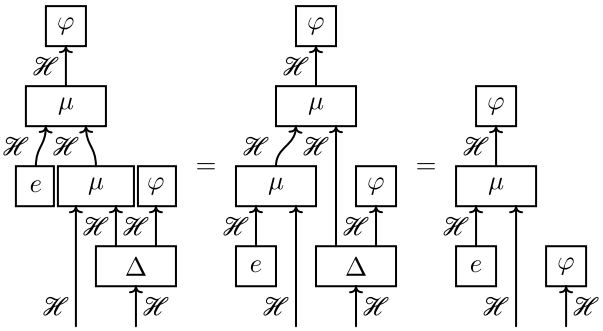
命题的证明 *3.8*。 如果 $z$ 是$\mathscr{H}$的 Hennings 元，那么 $\Phi_\varphi(z)$ 是$\mathscr{H}$上的 Hennings 形式。事实上，如下所示，这可以利用方程（24）证明。



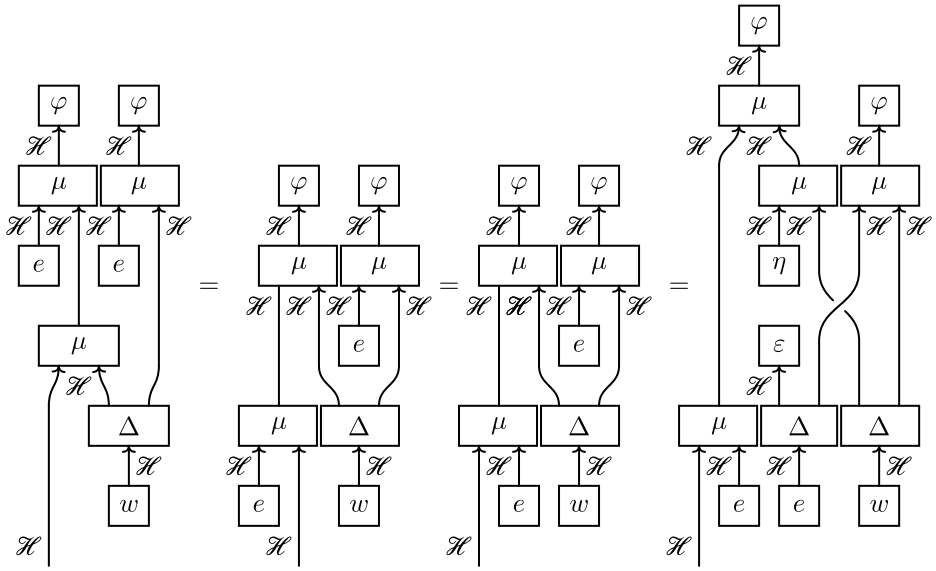
□

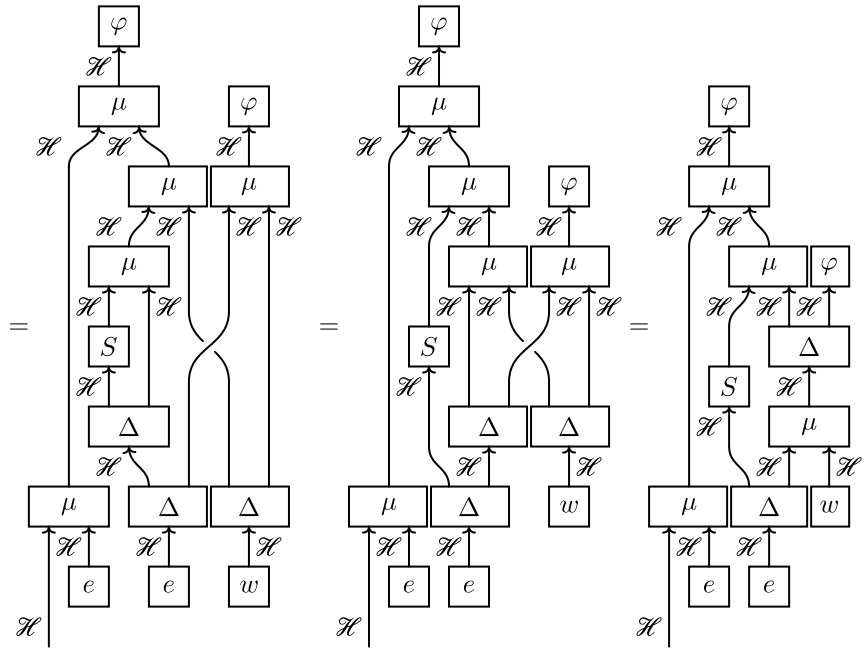
A.3. **命题 3.12 的证明。**

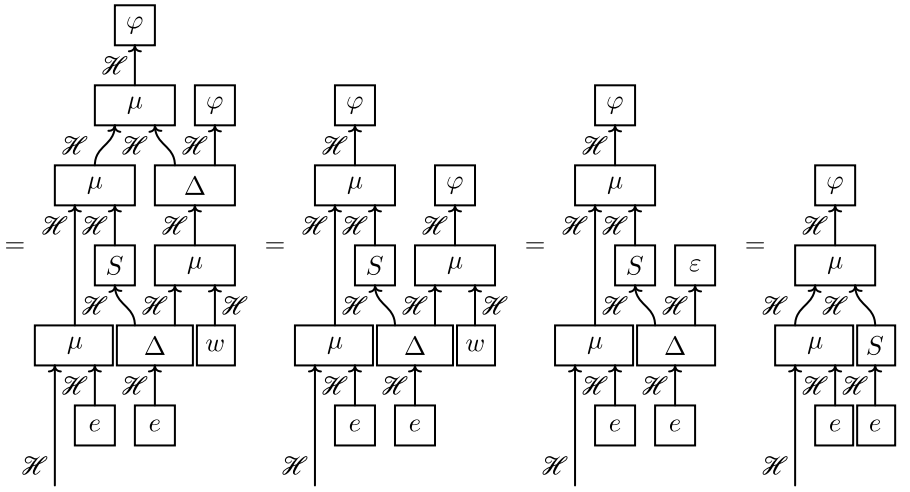
命题的证明*3.12*。 如果 $e$ 是$\mathscr{H}$的反 antipode 不变中心幂等元，那么 $\Phi_\varphi(e)$ 是 $\mathscr{H}$ 上的带状无结形式，它与 $w$ （$\mathscr{H}$ 的 Bobtcheva–Messia 元）以及 $\varphi$ （$\mathscr{H}$上的 Hennings 形式）相容。事实上，这由下式推出：

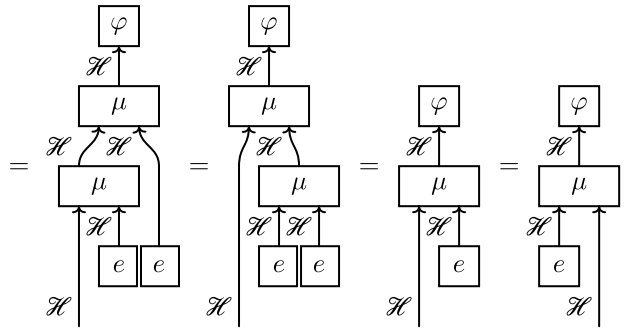



并且由





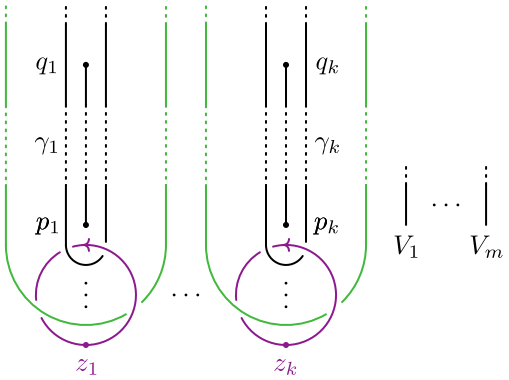




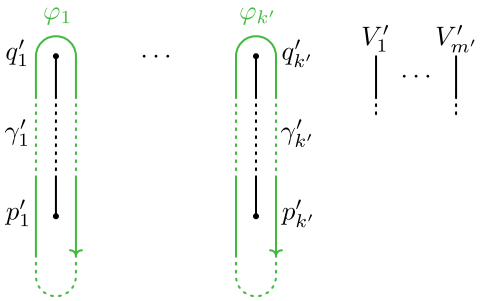
□

A.4. **命题 4.3的证明。**

命题 4.3 的证明。在证明 $F_{\mathscr{C}} : \mathsf{K}_{\mathscr{C}} \to \mathsf{C}$ 是一个定义良好的函子之前，我们先证明每个 C 标记的 Kirby 图 $L \cup G$ 都有一个˜ ˜底顶表示 $L \cup G$。为定义该表示，令 $p_1, \dots, p_k$ 表示一族均匀分布在 $G$ 的入边界左侧、位于 $[0,1] \times \{(\frac{1}{2}, 0)\} \subset [0,1]^{\times 3}$ 上的点；令 $q'_1, \dots, q'_{k'}$ 表示一族均匀分布在 $G$ 的出边界左侧、位于 $[0,1] \times \{(\frac{1}{2}, 1)\} \subset [0,1]^{\times 3}$ 上的点，两族点均从左到右排列。我们为 $L_1$ 的各分支（从 $L_{1,}$1 到 $L_{1,k}$）以及 $L_2$ 的各分支（从 $L_{2,}$1 到 $L_{2,k'}$）选定编号；对每个整数 $1 \leqslant j \leqslant k$，为 $L_1$ 的第 $j$ 个分支 $L_{1,j}$ 选定定向，并将其 Seifert 圆盘的中心记为 $q_j$；对每个整数 $1 \leqslant j \leqslant k'$，为 $L_2$ 的第 $j$ 个分支 $L_{2,j}$ 选定定向和基点 $p'_j$。接着，考虑一族两两不相交的带框弧 $\gamma$ $\gamma_j$，对每个整数 $1 \leqslant j \leqslant k$，它们连接 $p_j$ 和 $q_j$；再考虑一族 $\gamma'$ 两两不相交的带框弧 $\gamma'_j$，对每个整数˜ ˜$1 \leqslant j \leqslant k'$，它们连接 $p'_j$ 和 $q'_j$，且其内部与 $L \cup G$ 不相交。我们将绿色缠结 $L$ 与 C 标记的带状图 $G$ 的并记为 $L \cup G$；该带状图由 $L \cup G$ 经同痕得到：对每个 $1 \leqslant j \leqslant k$，先沿着 $\gamma_j$ 并在 $p_j$ 下方对 $L_{1,j}$ 进行同痕，如图所示



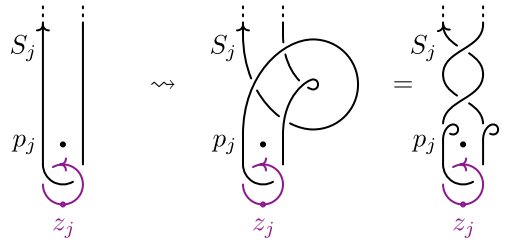

然后，对于每个 $1 \leqslant j \leqslant k'$，如图所示，将$L_{2,\ j}$ 沿着 $\gamma_j$ 并从 $q'_j$ 上方拉过



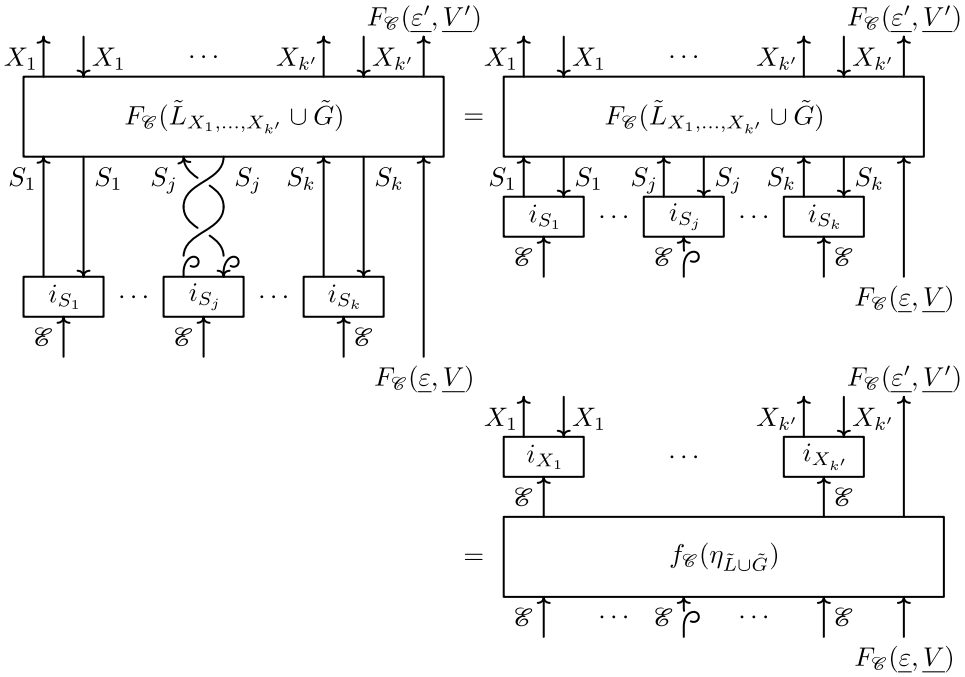

˜ ˜那么，根据构造，$L \cup G$ 是 $L \cup G$的底顶表示。为了证明 $F_{\mathscr{C}}$ 定义良好，我们需要证明它与所有选择无关：带框架路径族 $\gamma$ 和 $\gamma'$，以及 $L$各分支的编号、定向和基点。

框架的独立性。首先，我们声称 $F_{\mathscr{C}}$ 与 $\gamma$的框架选择无关。为证明这一点，只需证明对于每个整数 $1 \leqslant j \leqslant k$，我们都可以在任意带框架路径 $\gamma_j$ 上插入一个正扭结。相差一个

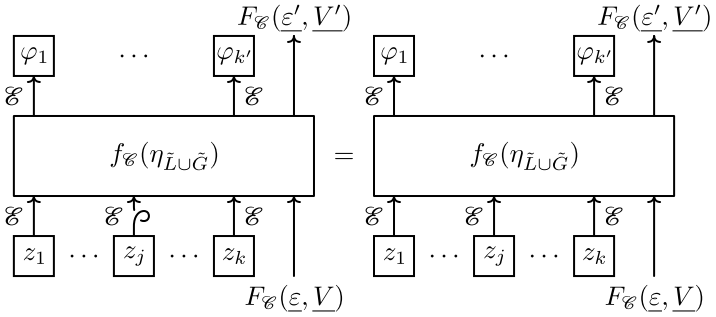
同痕后，沿 $\gamma_j$ 进行的扭结插入可由下图表示。




这意味着



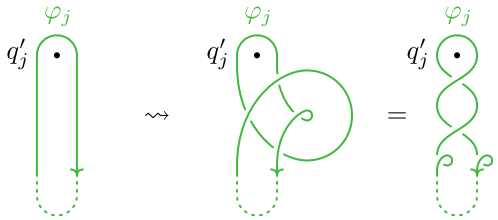

那么，由于 $z_j$ 是 E 的一个元素，这一结论便得以推出



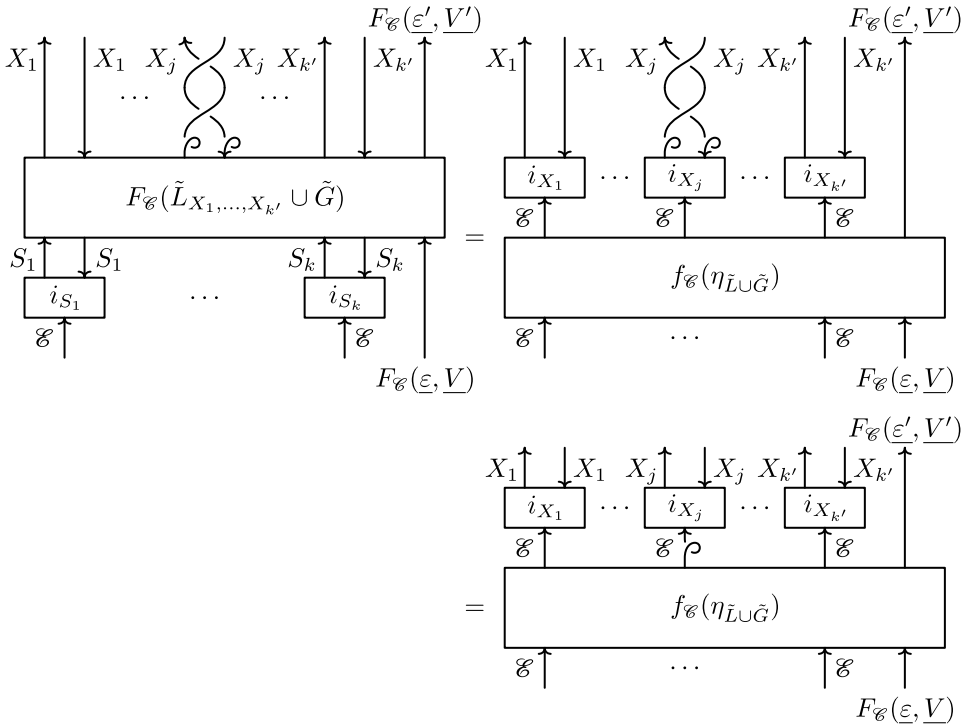

(58)

类似地，我们声称 $F_{\mathscr{C}}$ 与 $\gamma$'的框架选择无关。为了证明这一点，只需证明对于每个整数 $1 \leqslant j \leqslant k'$，我们都可以在任意带框架路径 $\gamma'_j$ 上插入一个正扭结。在同痕意义下，沿着

$\gamma'_j$ 由下图表示。



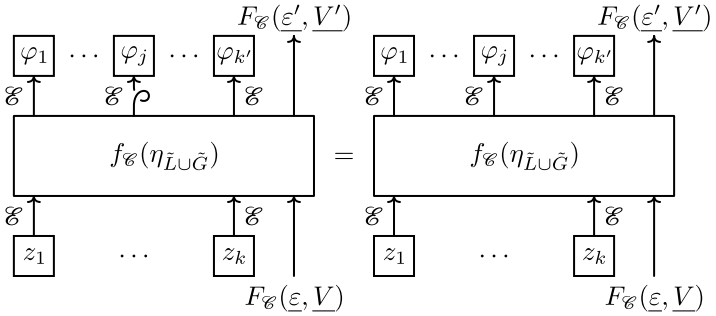

这意味着







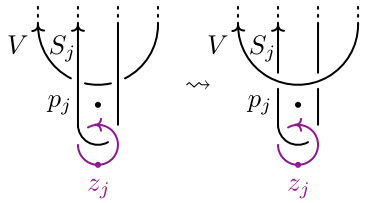
然后，该断言由以下事实得出： $\varphi_j$ 是 E 上的形式，这意味着



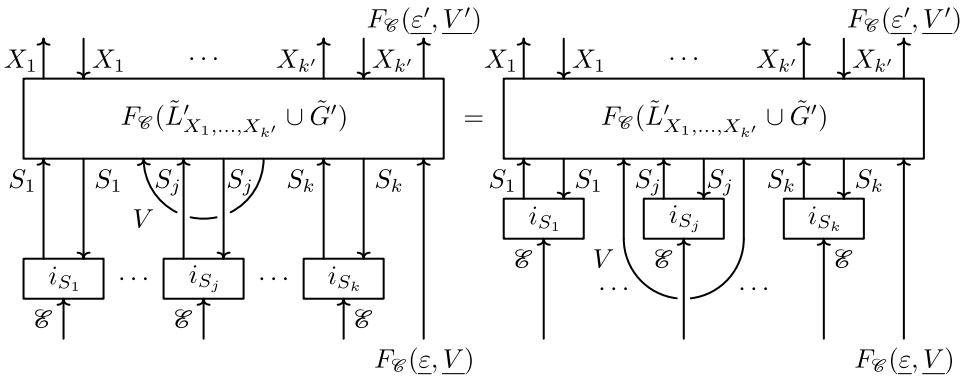

(59)

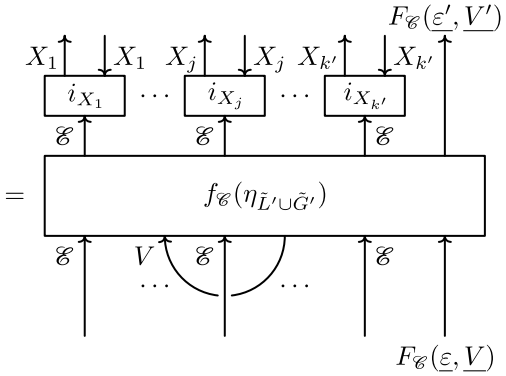
路径无关性。接下来，我们声称 $F_{\mathscr{C}}$ 与路径 $\gamma$的选择无关。为证明这一点，只需证明对于每个整数$1 \leqslant j \leqslant k$， $\gamma_j$与 $L \cup G$其余部分的每个上交叉˜ ˜都可以换成下交叉。通过将所需的双重点同痕变形到底部的图示中， $\gamma_j$ 与标记为 $V$ 的黑边的交叉交换可由下图表示；与绿色

边。

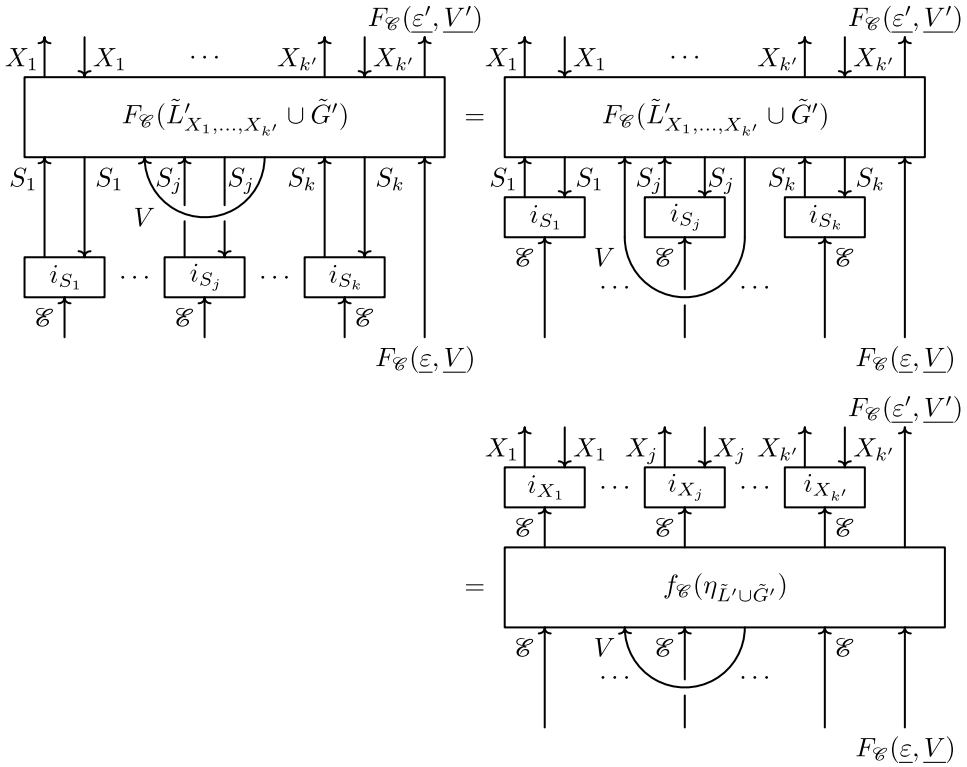

V
$S_j$
$p_j$
$z_j$
V
$S_j$
$p_j$
$z_j$

这意味着，一方面，

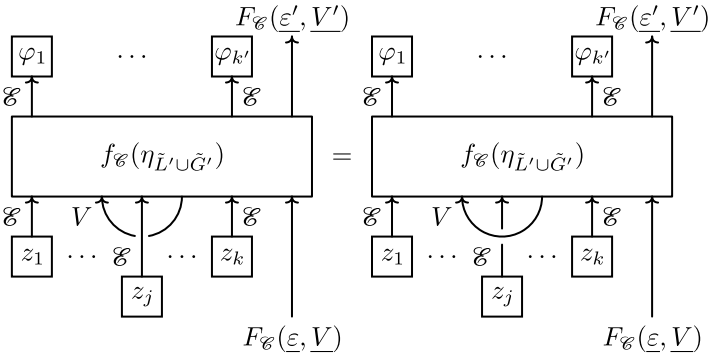

$F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon}', \underline{V}')$
$X_1$ $X_1$ $\cdots$ $X_{k'}$ $X_{k'}$
$F_{\mathscr{C}}(\tilde{L}'_{X_1,\ldots,X_{k'}} \cup \tilde{G}')$
$S_1$ $S_1$ $S_j$ $S_j$ $S_k$ $S_k$
V
$i_{S_1}$ $i_{S_j}$ $i_{S_k}$
$\mathscr{C}$
$F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon}, \underline{V})$
=
$F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon}', \underline{V}')$
$X_1$ $X_1$ $\cdots$ $X_{k'}$ $X_{k'}$
$F_{\mathscr{C}}(\tilde{L}'_{X_1,\ldots,X_{k'}} \cup \tilde{G}')$
$S_1$ $S_1$ $S_j$ $S_j$ $S_k$ $S_k$
$i_{S_1}$ $i_{S_j}$ $i_{S_k}$
V
$\mathscr{C}$
$F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon}, \underline{V})$


$F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon}', \underline{V}')$
$X_1$ $X_1$ $X_j$ $X_j$ $X_{k'}$ $X_{k'}$
$i_{X_1}$ $i_{X_j}$ $i_{X_{k'}}$
$\mathscr{C}$
=
$f_{\mathscr{C}}(\eta_{\tilde{L}' \cup \tilde{G}'})$
V
$\mathscr{C}$
$F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon}, \underline{V})$

而另一方面，

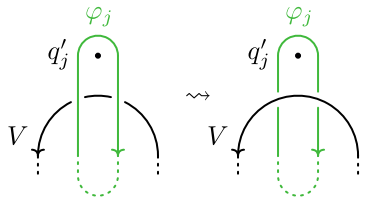


那么，由于 $z_j$ 是 E 的一个元素，该结论即可得出

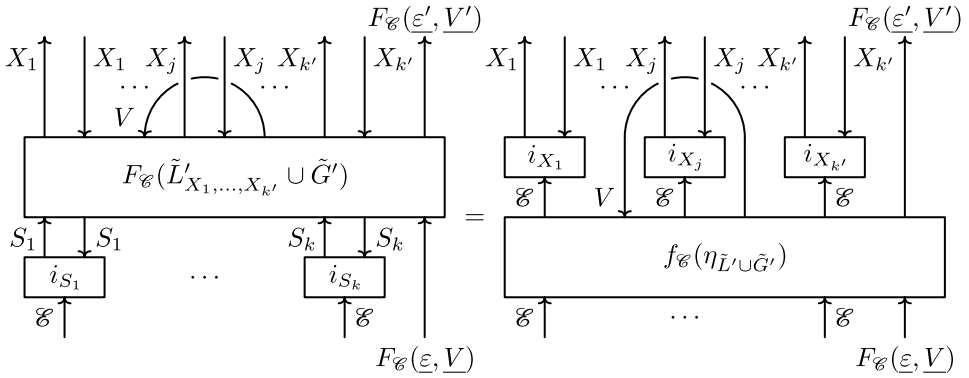


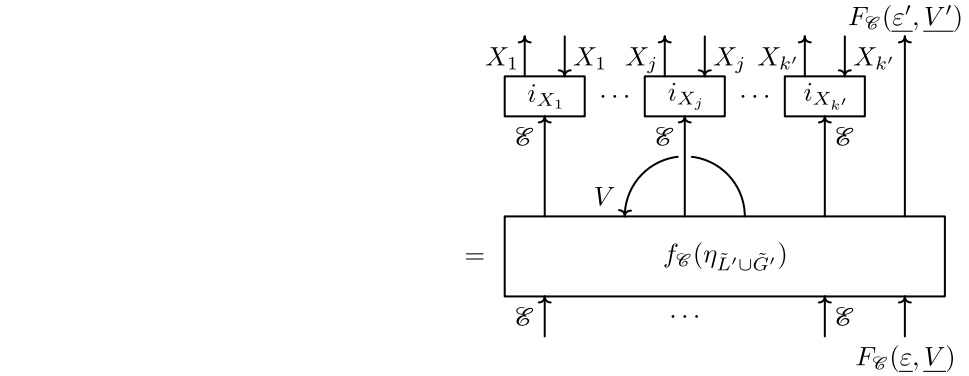
(60)

同理，我们声称 $F_{\mathscr{C}}$ 与路径 $\gamma'$ 的选择无关。为证明这一点，只需证明，对于每个整数 $1 \leqslant j \leqslant k'$，$\gamma'_j$ 与其余 $\sim L \cup G$ 的每个上交叉都可以替换为下交叉。将所需的双重点同痕变形至图示顶部后，$\gamma'_j$ 与标记为 $V$ 的黑边的交叉交换如下图所示；与绿边交叉的交换也同理。

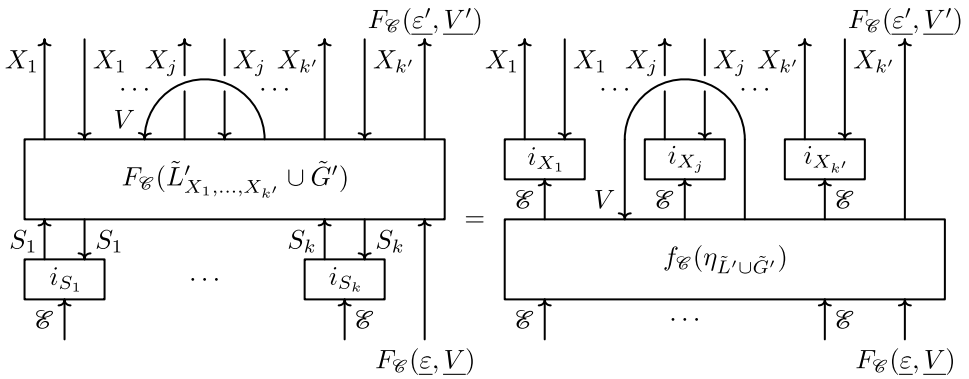


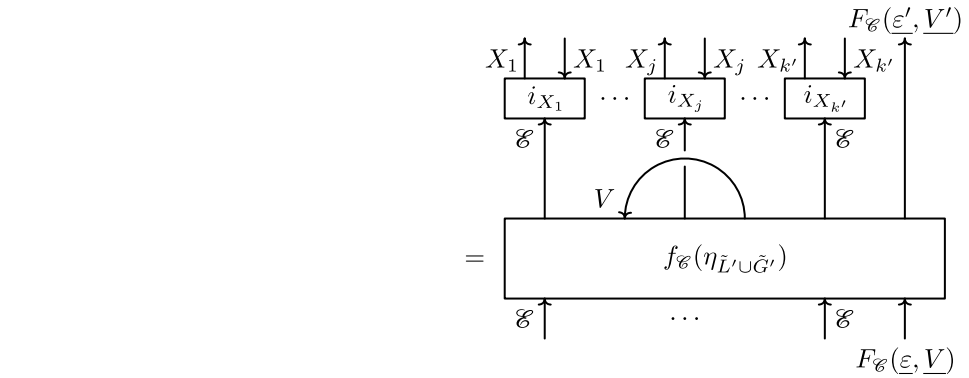
这意味着 ，一方面 ，



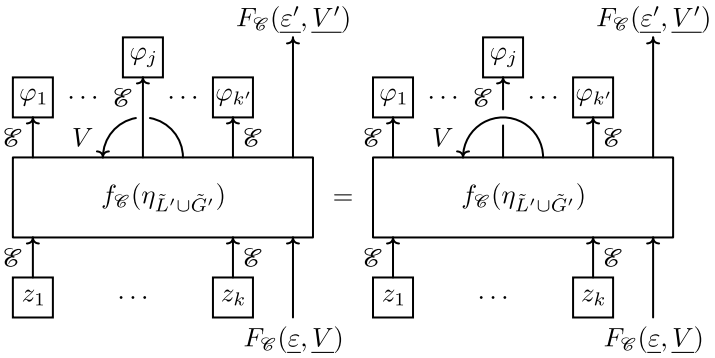




而 ，另一方面 ，



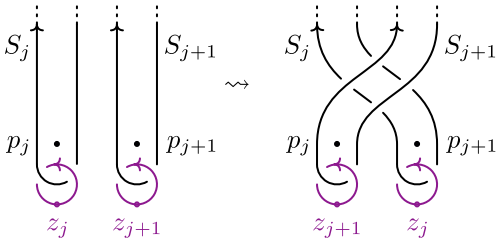



那么，结论可由以下事实得出： $\varphi_j$ 是 E 上的一个形式，这意味着

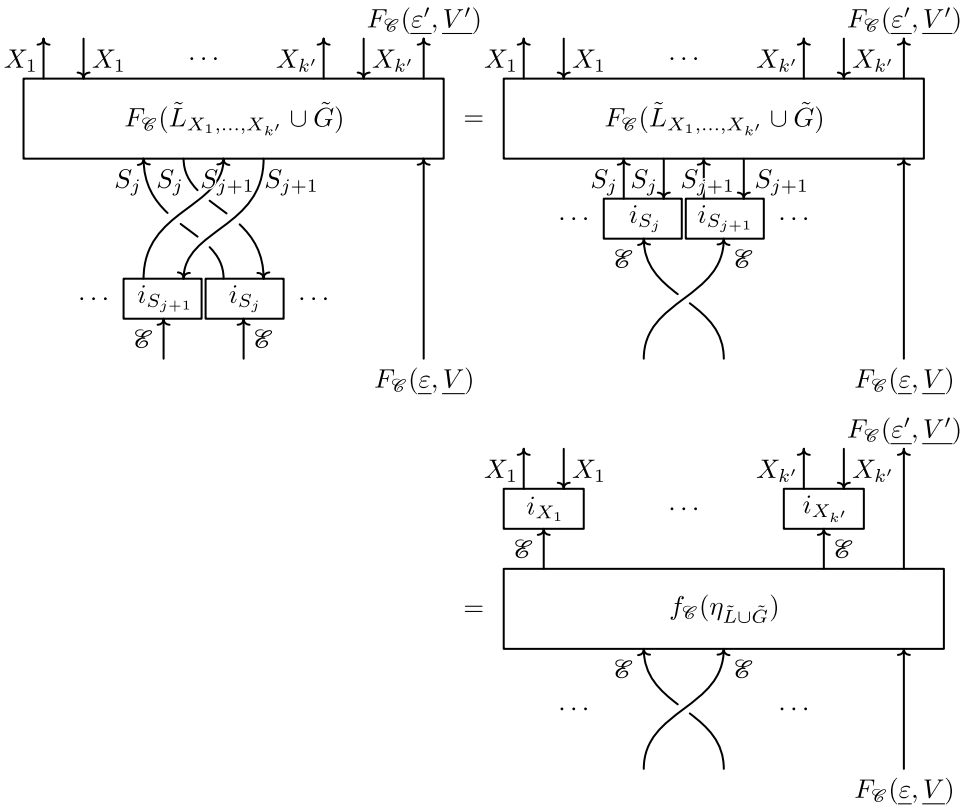



(61)

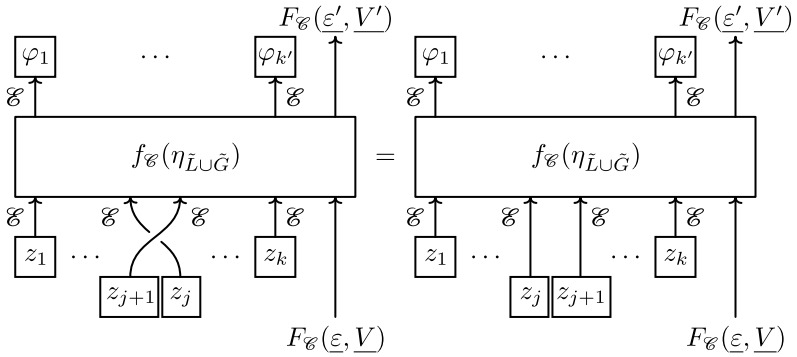
编号无关性。 接下来，我们声称 $F_{\mathscr{C}}$ 与 $L_1$的分支编号选择无关。为证明这一点，只需证明对于每个整数1 $\leqslant j < k$，分支$L_{1,j}$ 和$L_{1,j+1}$ 都可以换位。此操作可由下图表示。




这意味着

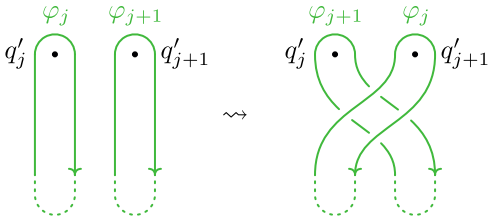


那么，由于 $z_j$ 和 $z_{j+1}$ 都是 E 的元素，这一结论便得以证明

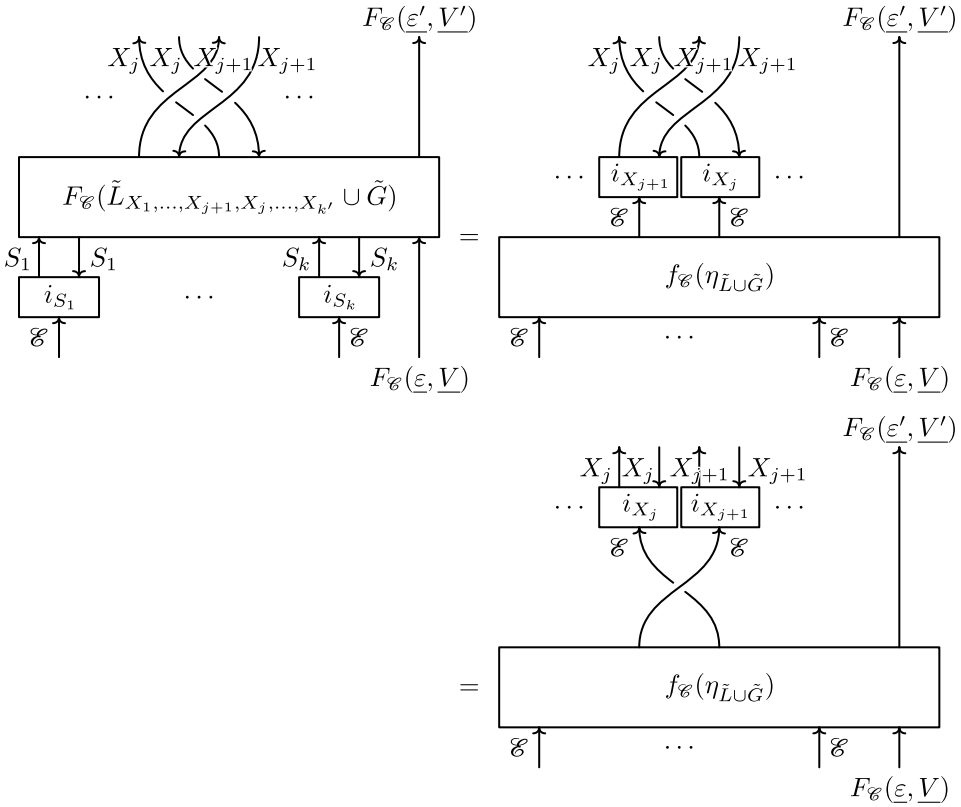



(62)

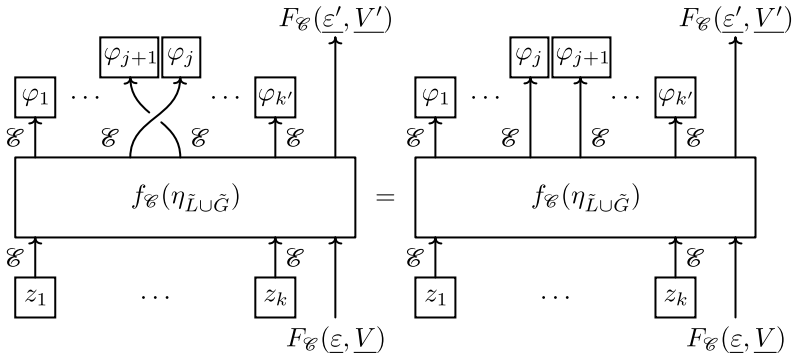
同样，我们声称， $F_{\mathscr{C}}$ 与 $L_2$各分支的编号选择无关。为了证明这一点，只需证明对每个整数 $1 \leqslant j < k'$，分支$L_{2,j}$ 和$L_{2,j+1}$ 都可以换位。此操作由下图表示。




这意味着

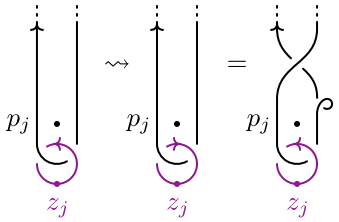


接着，该断言可由以下事实推出： $\varphi_j$ 和 $\varphi_{j+1}$ 是 E 上的形式，这意味着

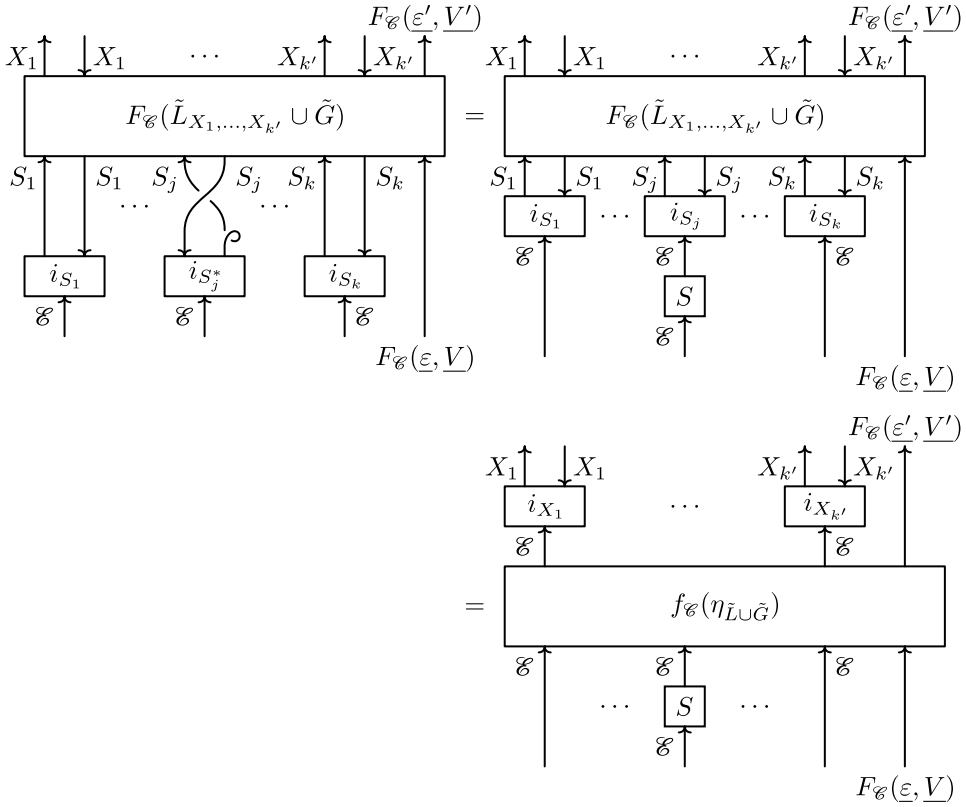



(63)

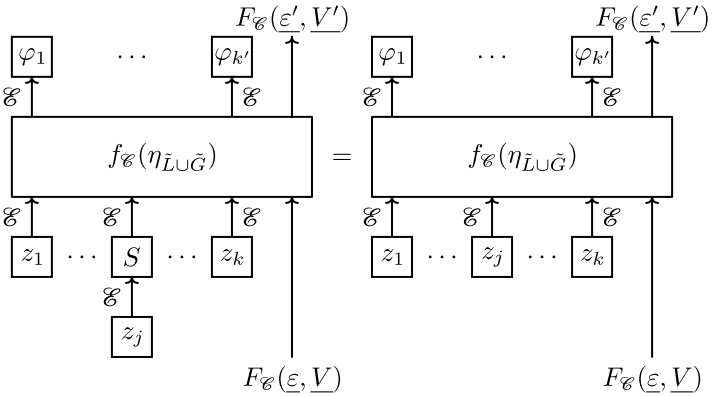
定向独立性。 接下来，我们声称，对于每个整数 $1 \leqslant j \leqslant k$， $F_{\mathscr{C}}$ 与 $L_{1,j}$ 的定向选择无关。事实上，$L_{1,j}$ 上的定向反转可由下图表示。




这意味着

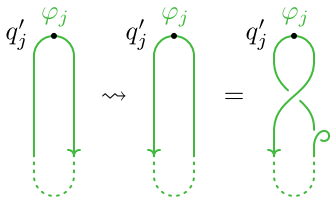


接下来，该断言可由以下事实推出： $z_j$ 是 E 中的反 antipode 不变元，这意味着

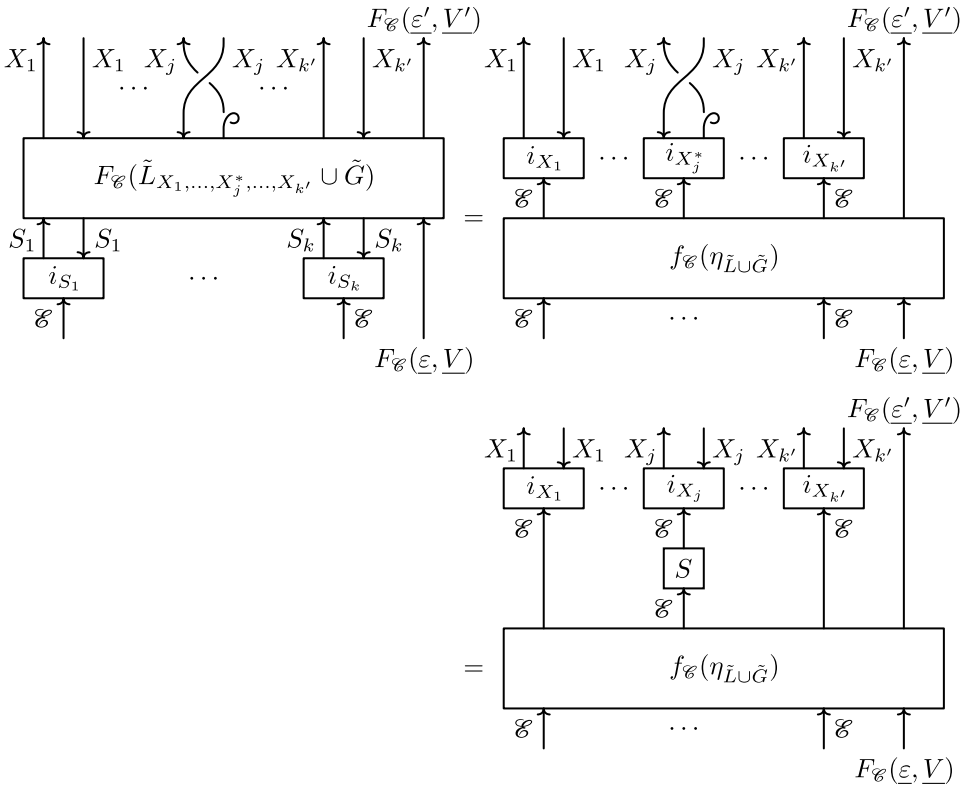



(64)

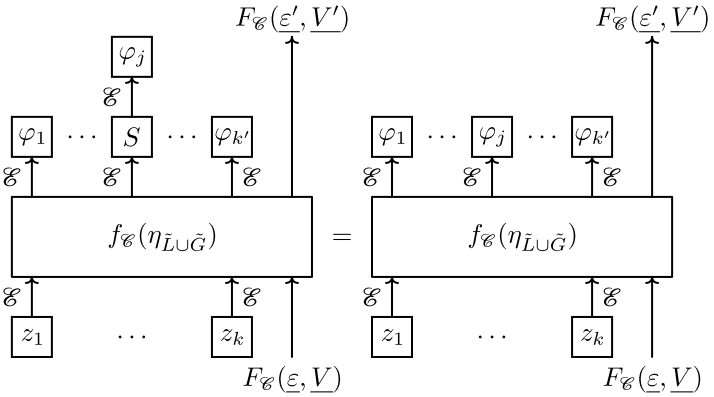
类似地，我们断言，对于每个整数 $1 \leqslant j \leqslant k'$， $F_{\mathscr{C}}$ 与$L_{2,j}$的定向选择无关。事实上，$L_{2,j}$ 上的定向反转可由下图表示。




这意味着

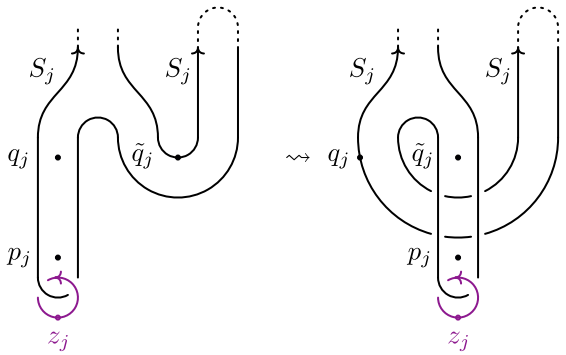


接下来，该断言可由以下事实得出： $\varphi_j$ 是 E 上的反 antipode 不变形式，这意味着

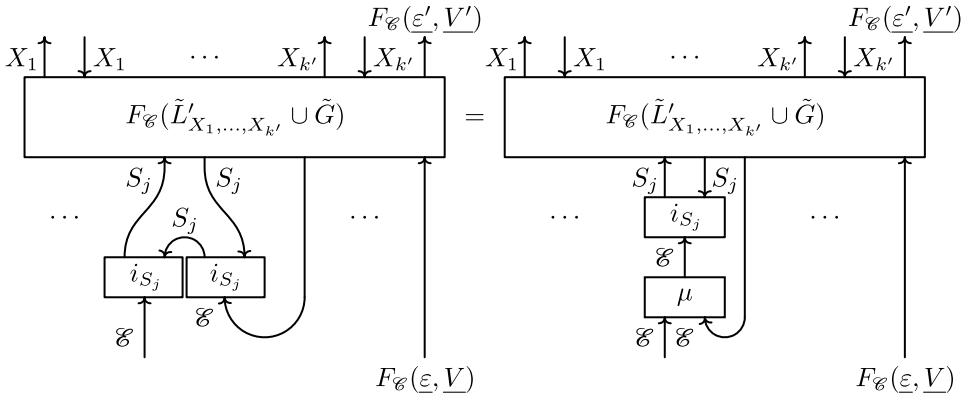


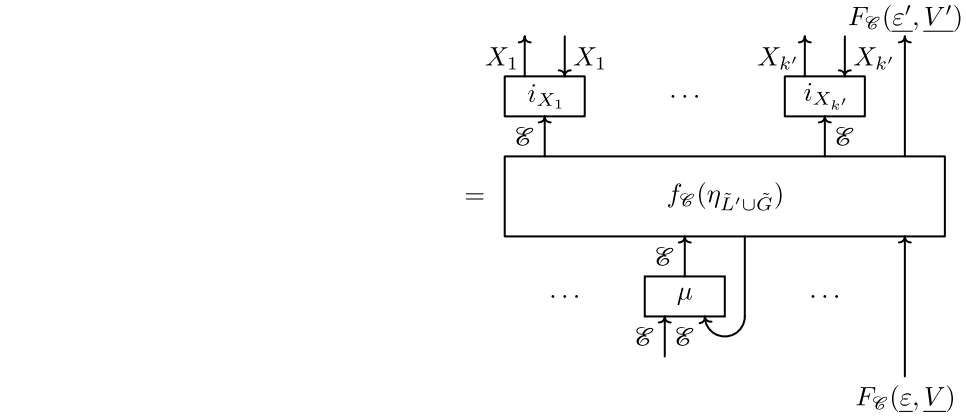

(65)

基点的独立性。接下来，我们声称，对于每个整数 $1 \leqslant j \leqslant k$， $F_{\mathscr{C}}$ 与 $L_{1,j}$ 的位置无关，因此也与其 Seifert 圆盘的中心 $q_j$ 无关。事实上，将 $L_{1,j}$ 同痕变形到另一个位置，并用 $\tilde{q}_j$ 表示相应 Seifert 圆盘的中心。将 $L_{1,j} \cup L_2 \cup G$ 中包含 $q_j$ 和 $\tilde{q}_j$ 的部分同痕变形至图示底部，同时确保包含 $\tilde{q}_j$ 的部分嵌套在包含 $q_j$ 的部分内，且二者定向相反；这一操作可由下图表示。

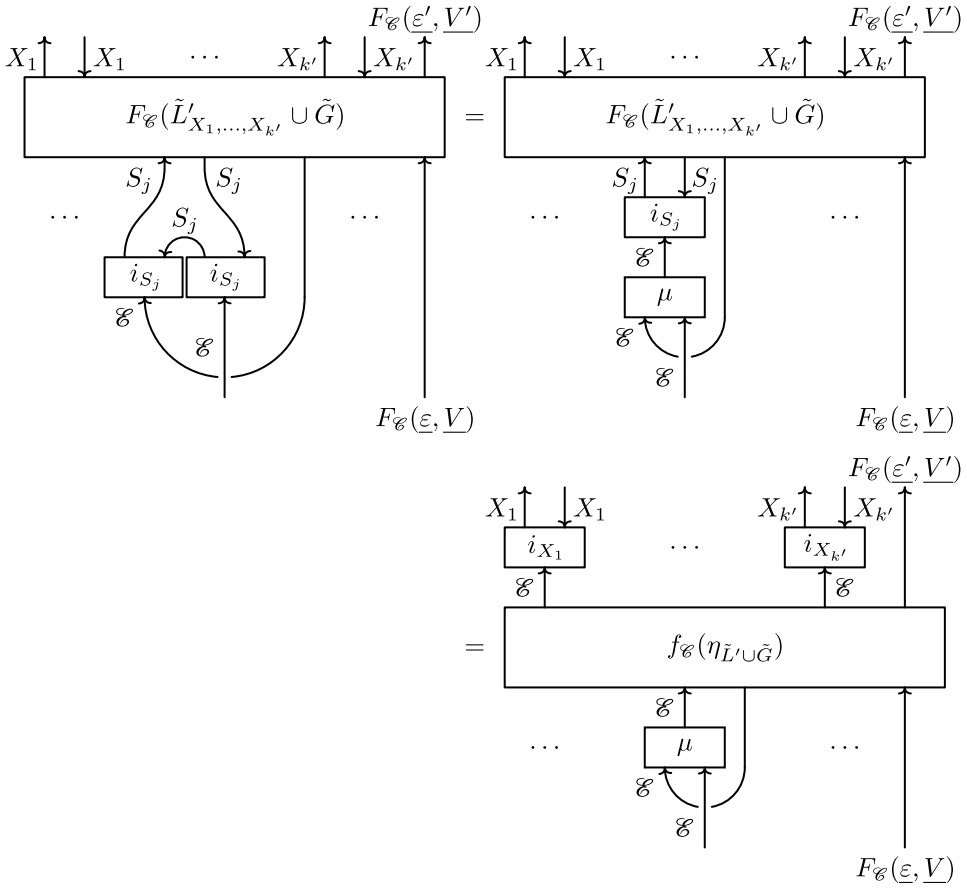


这意味着 ，一方面 ，

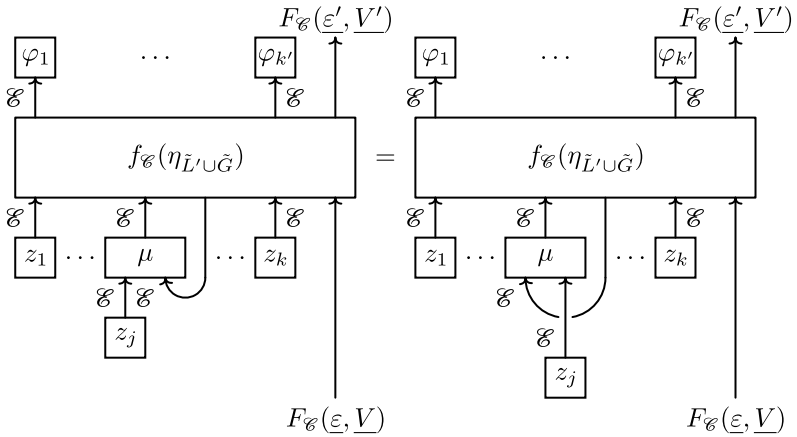

$F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon}', \underline{V}')$
$X_1$ $X_1$ $\cdots$ $X_{k'}$ $X_{k'}$
$F_{\mathscr{C}}(\tilde{L}'_{X_1,\ldots,X_{k'}} \cup \tilde{G})$
$S_j$ $S_j$ $S_j$
$i_{S_j}$ $i_{S_j}$
$\mathscr{C}$ $\mathscr{C}$
$F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon}, \underline{V})$
=
$F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon}', \underline{V}')$
$X_1$ $X_1$ $\cdots$ $X_{k'}$ $X_{k'}$
$F_{\mathscr{C}}(\tilde{L}'_{X_1,\ldots,X_{k'}} \cup \tilde{G})$
$S_j$ $S_j$
$i_{S_j}$
$\mathscr{C}$
$\mu$
$\mathscr{C}$ $\mathscr{C}$
$F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon}, \underline{V})$


$F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon}', \underline{V}')$
$X_1$ $X_1$ $X_{k'}$ $X_{k'}$
$i_{X_1}$ $i_{X_{k'}}$
$\mathscr{C}$ $\mathscr{C}$
=
$f_{\mathscr{C}}(\eta_{\tilde{L}' \cup \tilde{G}})$
$\mathscr{C}$
$\mu$
$\mathscr{C}$ $\mathscr{C}$
$F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon}, \underline{V})$

而另一方面，



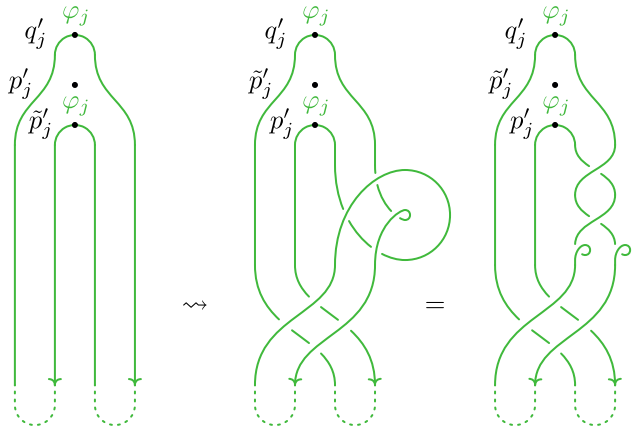

那么，该断言可由 $z_j$ 是 E 的一个中心元这一事实推出，这意味着



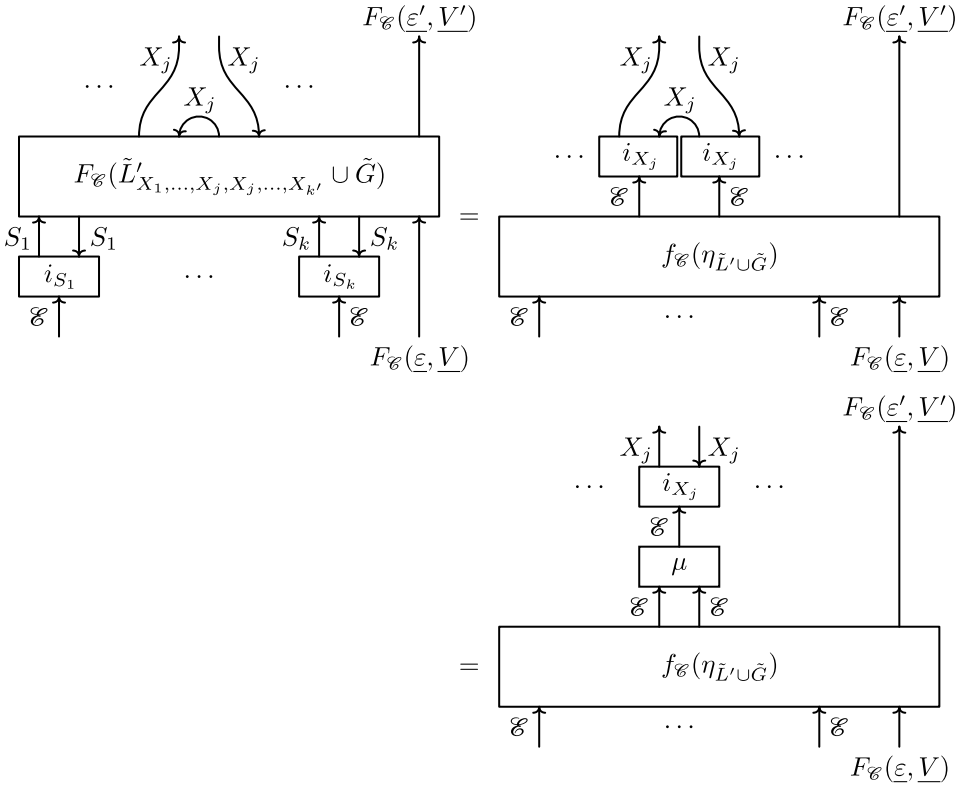

(66)

类似地，我们声称，对于每个整数 $1 \leqslant j \leqslant k'$， $F_{\mathscr{C}}$ 与基点 $p'_j$ 的选择无关。事实上，设 $\tilde{p}'_j$ 是另一个可能的选择。通过将包含 $p'_j$ 和 $\tilde{p}'_j$ 的 $L_{2,\,j}$ 部分同痕变形至图示顶部，并确保包含 $\tilde{p}'_j$ 的部分嵌套在包含 $p'_j$ 的部分内且定向相反，

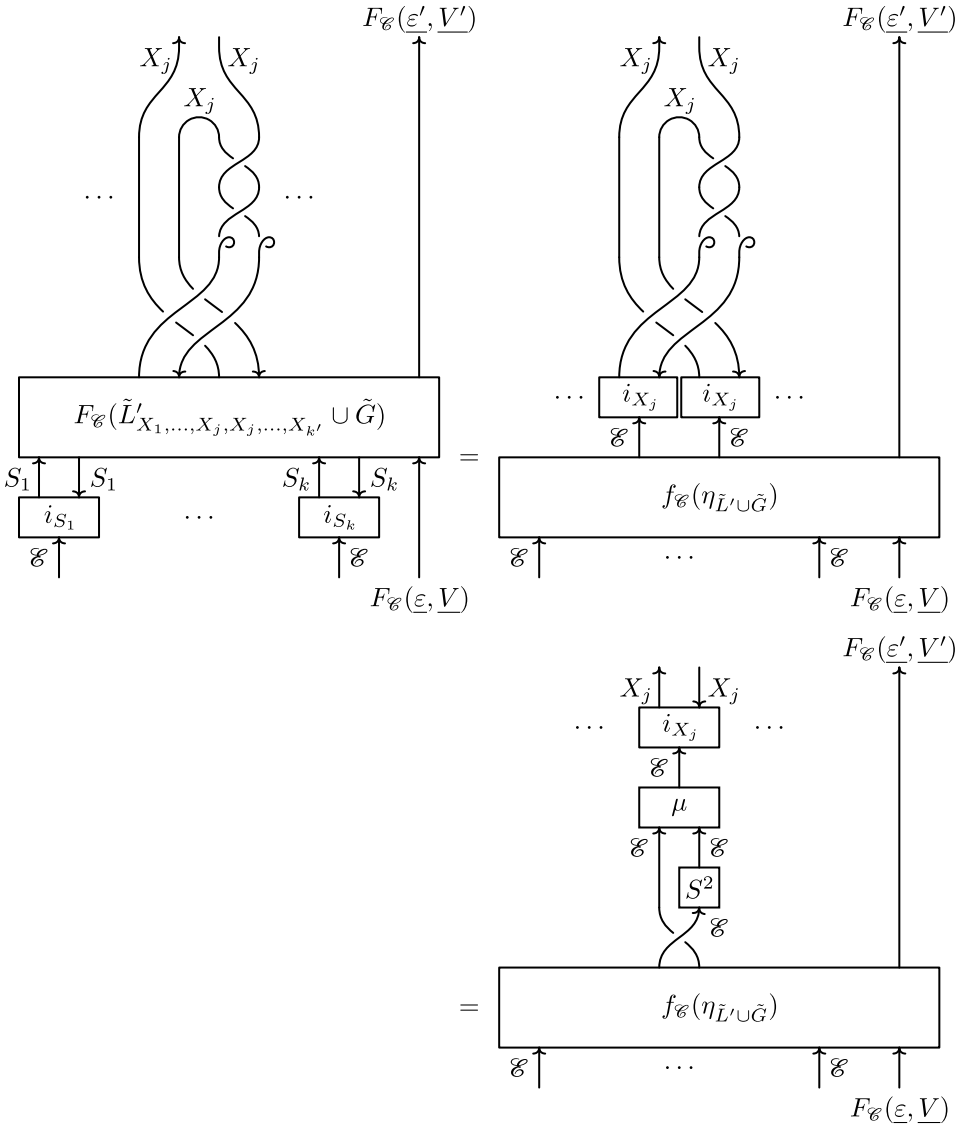
这一操作可由下图表示。



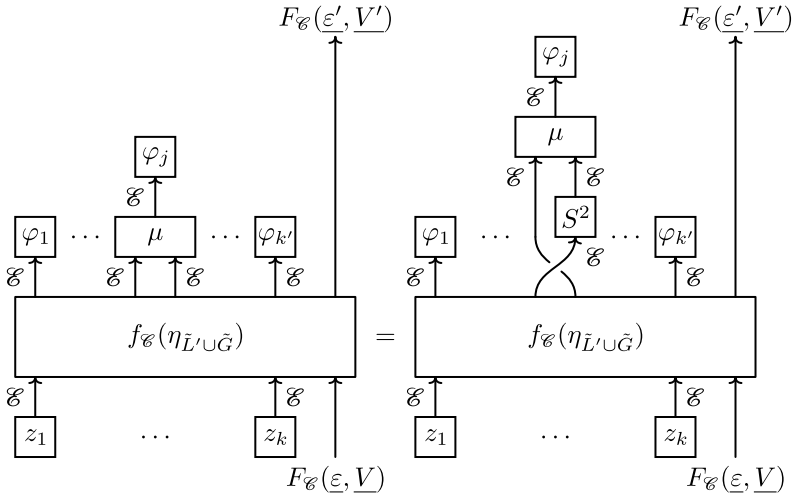

这意味着，一方面，



而另一方面,


$F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon}', \underline{V}')$
$X_j$
$X_j$
$X_j$
$\cdots$
$\cdots$
$F_{\mathscr{C}}(\tilde{L}'_{X_1,\ldots,X_j,X_j,\ldots,X_{k'}} \cup \tilde{G})$
$S_1$
$S_1$
$S_k$
$S_k$
$i_{S_1}$
$\cdots$
$i_{S_k}$
$\mathscr{C}$
$\mathscr{C}$
$F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon}, \underline{V})$
=
$F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon}', \underline{V}')$
$X_j$
$X_j$
$X_j$
$\cdots$
$i_{X_j}$
$i_{X_j}$
$\cdots$
$\mathscr{C}$
$\mathscr{C}$
$f_{\mathscr{C}}(\eta_{\tilde{L}' \cup \tilde{G}})$
$\mathscr{C}$
$\cdots$
$\mathscr{C}$
$F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon}, \underline{V})$
$F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon}', \underline{V}')$
$X_j$
$X_j$
$\cdots$
$i_{X_j}$
$\cdots$
$\mathscr{C}$
$\mu$
$\mathscr{C}$
$\mathscr{C}$
$S^2$
$\mathscr{C}$
=
$f_{\mathscr{C}}(\eta_{\tilde{L}' \cup \tilde{G}})$
$\mathscr{C}$
$\cdots$
$\mathscr{C}$
$F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon}, \underline{V})$

那么，由于 $\varphi_j$ 是 $\mathbf{E}$ 上的量子特征，因此可得

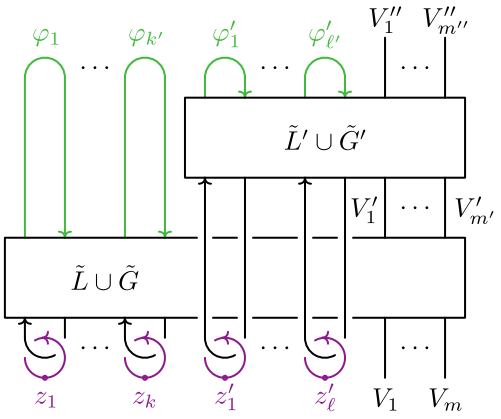



(67)

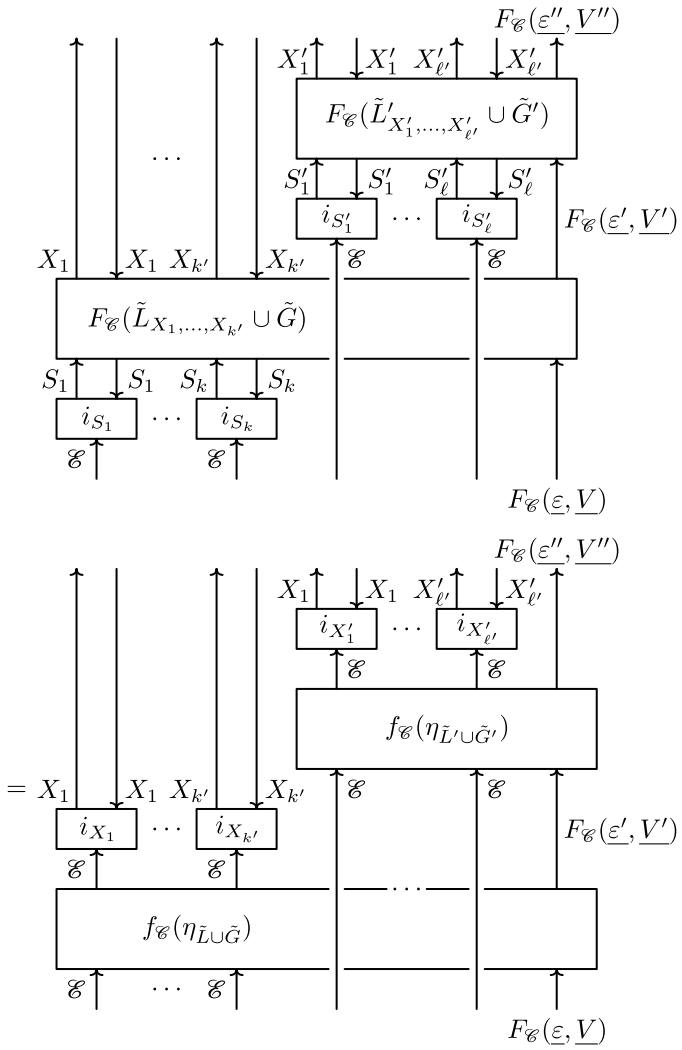
函子性。 若 $(\varepsilon, V)$ 是 $\mathbf{K}_{\mathscr{C}}$ 的一个对象，那么显然有

$$F_{\mathscr{C}}(\mathrm{id}_{(\underline{\varepsilon}, \underline{V})}) = \mathrm{id}_{F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon}, \underline{V})}.$$

若 $L \cup G \colon (\varepsilon, V) \to (\varepsilon', V')$ 和 $L' \cup G' \colon (\varepsilon', V') \to (\varepsilon'', V'')$ 是 $\mathbf{K}_{\mathscr{C}}$ 中的态射，若 $L \cup G$ 是 $L \cup G$ 的底顶表示，且若 $L' \cup G'$ 是 $L' \cup G'$ 的底顶表示，那么 $(L' \cup G') \circ (L \cup G)$ 的底顶表示可由下图表示。

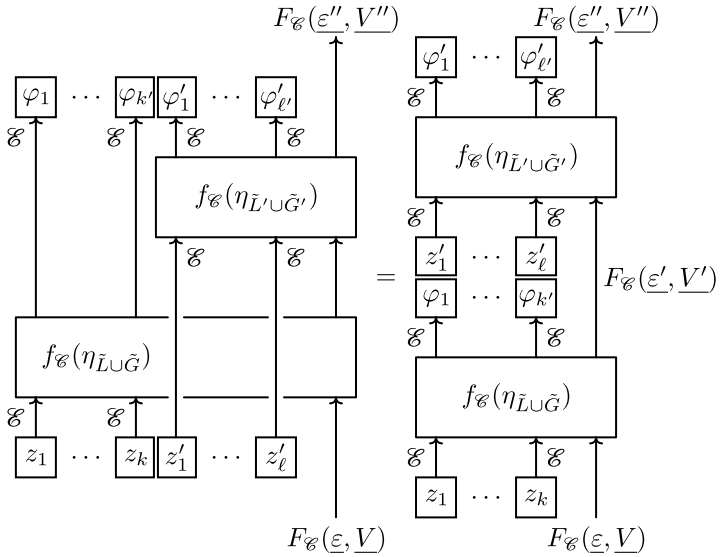


这意味着]


$F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon''}, \underline{V''})$
$X'_1$ $X'_1$ $X'_{\ell'}$ $X'_{\ell'}$
$F_{\mathscr{C}}(\tilde{L}'_{X'_1,\dots,X'_{\ell'}} \cup \tilde{G}')$
$S'_1$ $S'_1$ $S'_\ell$ $S'_\ell$
$i_{S'_1}$ $\cdots$ $i_{S'_\ell}$
$F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon'}, \underline{V'})$
$X_1$ $X_1$ $X_{k'}$ $X_{k'}$
$\mathscr{C}$ $\mathscr{C}$
$F_{\mathscr{C}}(\tilde{L}_{X_1,\dots,X_{k'}} \cup \tilde{G})$
$S_1$ $S_1$ $S_k$ $S_k$
$i_{S_1}$ $\cdots$ $i_{S_k}$
$\mathscr{C}$ $\mathscr{C}$
$F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon}, \underline{V})$


$F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon''}, \underline{V''})$
$X_1$ $X_1$ $X'_{\ell'}$ $X'_{\ell'}$
$i_{X'_1}$ $\cdots$ $i_{X'_{\ell'}}$
$\mathscr{C}$ $\mathscr{C}$
$f_{\mathscr{C}}(\eta_{\tilde{L}' \cup \tilde{G}'})$
$= X_1$ $X_1$ $X_{k'}$ $X_{k'}$
$\mathscr{C}$ $\mathscr{C}$
$i_{X_1}$ $\cdots$ $i_{X_{k'}}$
$F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon'}, \underline{V'})$
$\mathscr{C}$ $\mathscr{C}$
$\cdots$
$f_{\mathscr{C}}(\eta_{\tilde{L} \cup \tilde{G}})$
$\mathscr{C}$ $\cdots$ $\mathscr{C}$
$F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon}, \underline{V})$

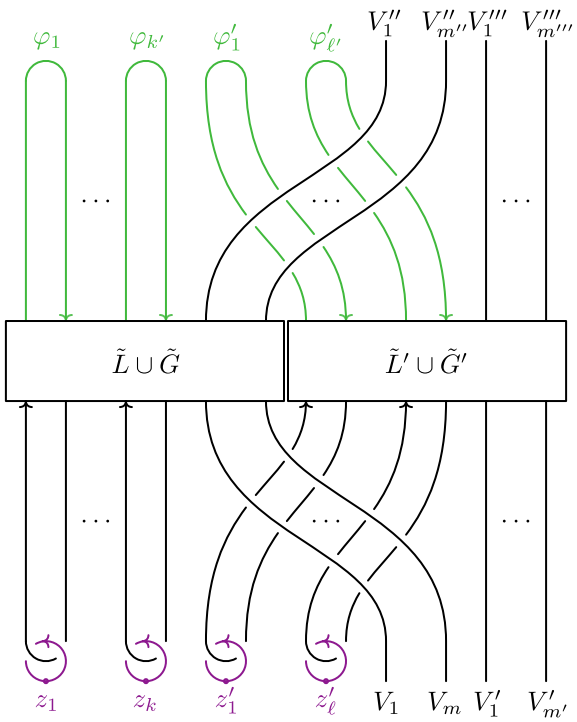
于是，由于 $\varphi_1$、……、$\varphi_{k'}$，$\varphi'_1$、……、$\varphi'_{\ell'}$ 是 E 上的形式，且 $z_1$、……、$z_k$，$z'_1$、……、$z'_\ell$ 是 E 的元，因此结论成立



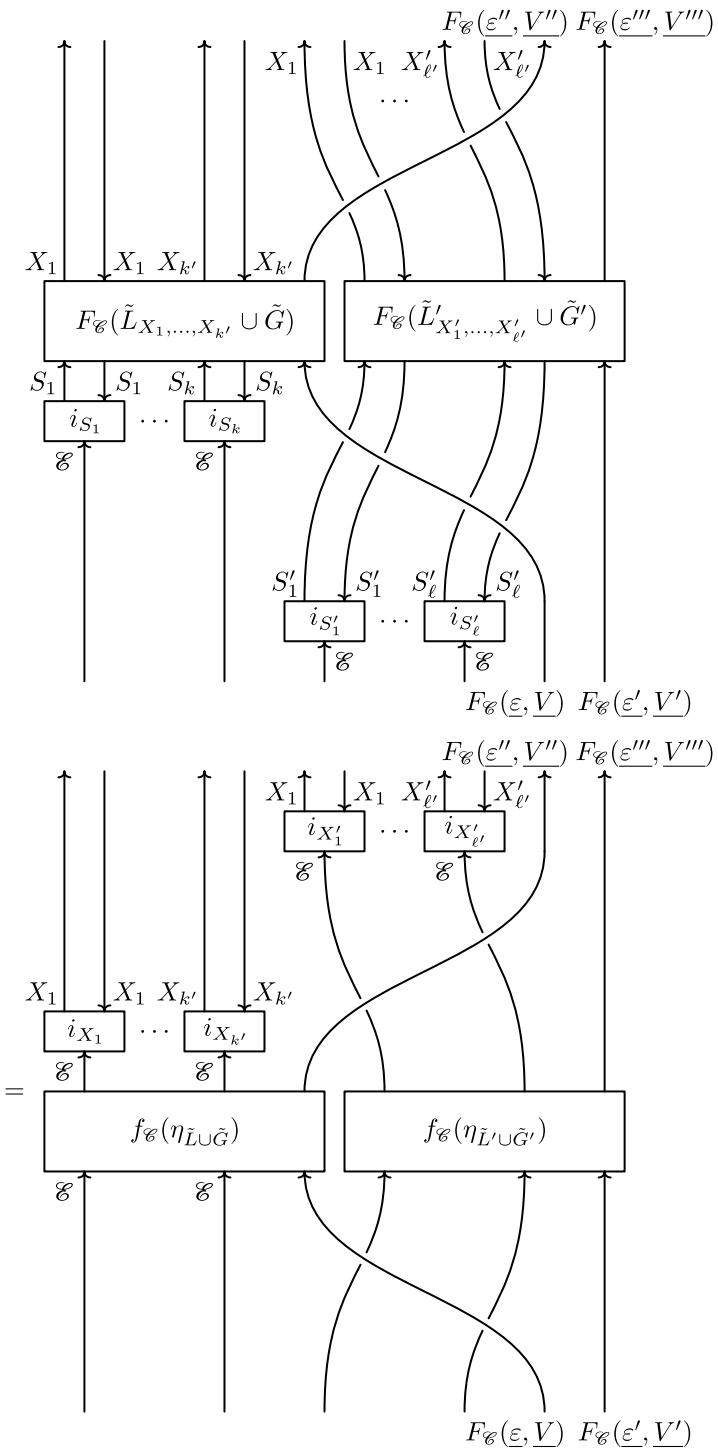

幺半性。若 $(\varepsilon,\ \underline{V})$ 和 $(\varepsilon',\ \underline{V'})$ 是 $\mathrm{K}_{\mathscr{C}}$ 的对象，则显然有

$$F_{\mathscr{C}}((\underline{\varepsilon},\underline{V})\otimes(\underline{\varepsilon'},\underline{V'}))=F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon},\underline{V})\otimes F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon'},\underline{V'}).$$

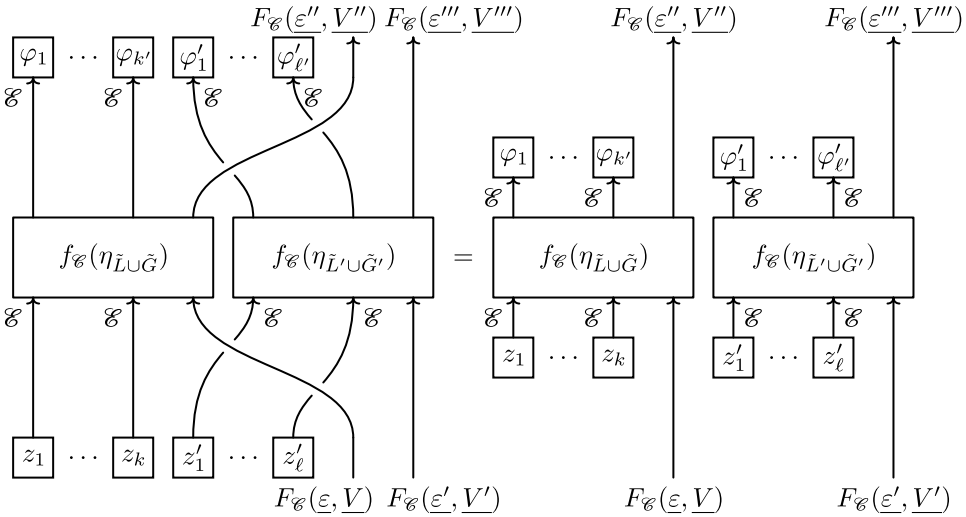
如果 $L\cup G:(\varepsilon,\ V)\to(\varepsilon'',\ V'')$ 和 $L'\cup G':(\varepsilon',\ V')\to(\varepsilon''',\ V''')$ 是 $\mathrm{K}_{\mathscr{C}}$ 的态射，如果 $L\cup G$ 是 $L\cup G$ 的底顶表示，并且 $L'\cup G'$ 是 $L'\cup G'$ 的底顶表示，那么 $(L\cup G)\otimes(L'\cup G')$ 的底顶表示可由下图表示。



这意味着


$F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon''},\underline{V''})$ $F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon'''},\underline{V'''})$
$X_1$ $X_1$ $X'_{\ell'}$ $X'_{\ell'}$
$X_1$ $X_1$ $X_{k'}$ $X_{k'}$
$F_{\mathscr{C}}(\tilde{L}_{X_1,\dots,X_{k'}} \cup \tilde{G})$
$F_{\mathscr{C}}(\tilde{L}'_{X'_1,\dots,X'_{\ell'}} \cup \tilde{G}')$
$S_1$ $S_1$ $S_k$ $S_k$
$i_{S_1}$ $i_{S_k}$
$\mathscr{C}$
$S'_1$ $S'_1$ $S'_\ell$ $S'_\ell$
$i_{S'_1}$ $i_{S'_\ell}$
$F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon},\underline{V})$ $F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon'},\underline{V'})$
$=$
$i_{X'_1}$ $i_{X'_{\ell'}}$
$i_{X_1}$ $i_{X_{k'}}$
$f_{\mathscr{C}}(\eta_{\tilde{L}\cup\tilde{G}})$
$f_{\mathscr{C}}(\eta_{\tilde{L}'\cup\tilde{G}'})$

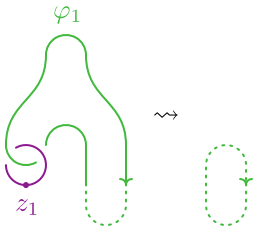
于是，由于 $\varphi_1,\dots,\varphi_{k'},\varphi'_1,\dots,\varphi'_{\ell'}$ 是 E 上的形式，而 $z_1,\dots,z_k,z'_1,\dots,z'_\ell$ 是 E 的元素，因此可得



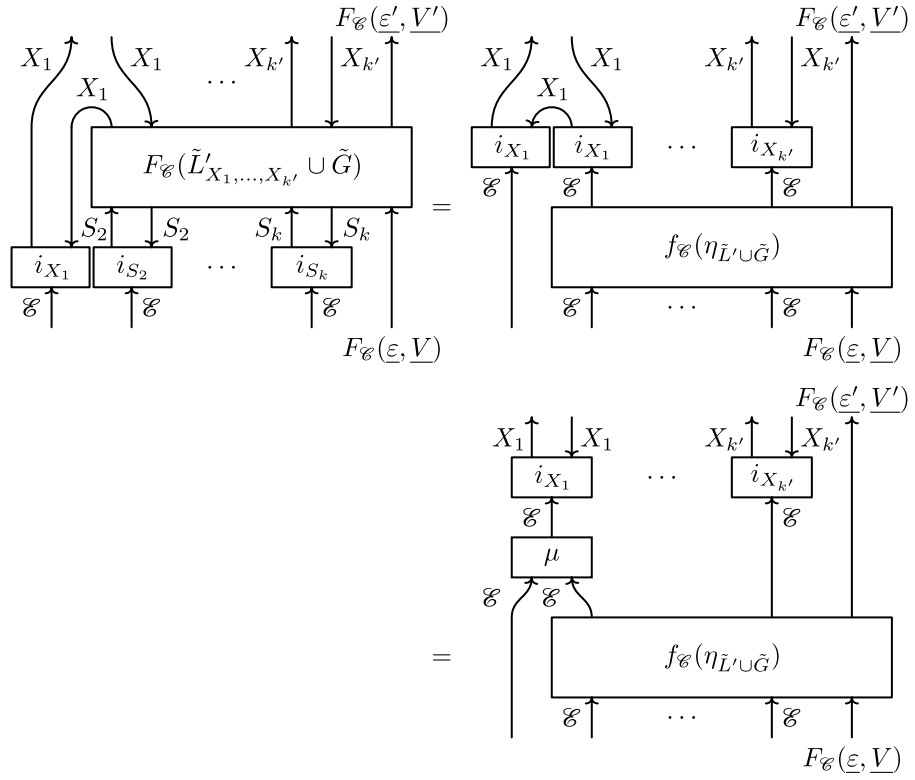

**编织与扭结。** 由于 $\mathbf{K}_{\mathscr{C}}$ 的带状结构与 $\mathbf{R}_{\mathscr{C}}$的带状结构一致，且 $F_{\mathscr{C}}$ 在 $\mathbf{R}_{\mathscr{C}}$ 上的限制是一个带状函子，因此 $F_{\mathscr{C}}$ 也是一个带状函子。□

## A.5. **命题 4.4的证明。**

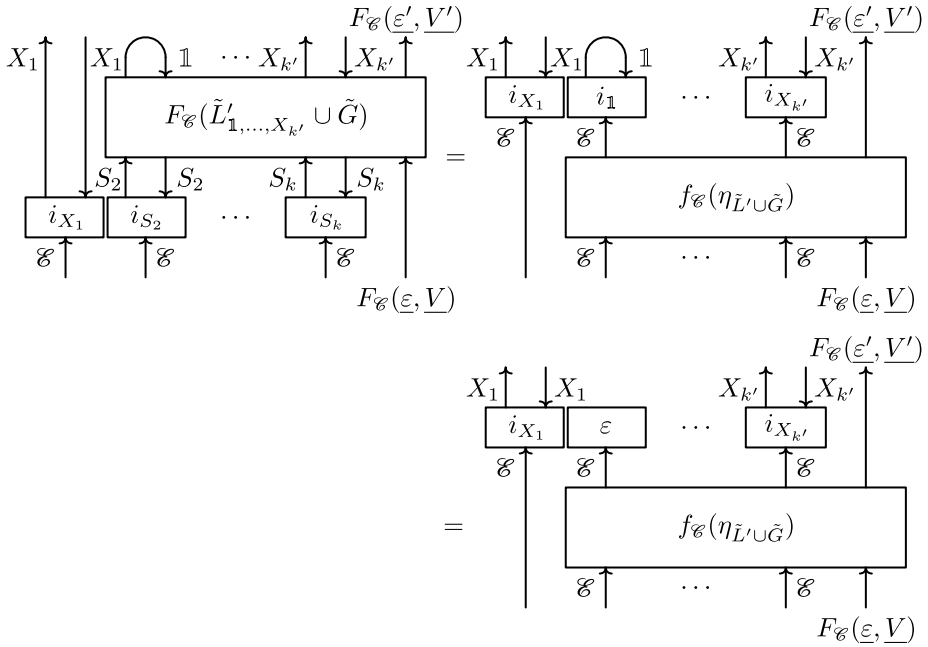
命题 *4.4* 的证明。 如果 $L_{1,\,1}$ 和 $L_{2,\,1}$ 构成一个消去对，那么移除 $L_{1,\,1}\cup L_{2,\,1}$ 的操作可由下图表示。



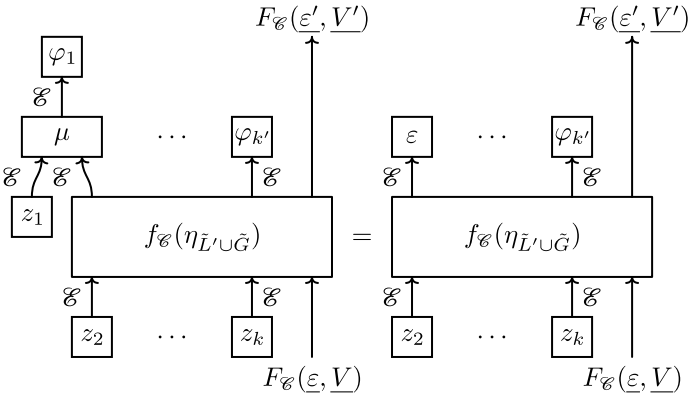
这意味着，一方面，




而 ，另一方面 ，



若 $z_1$ 是 E 的 Bobtcheva–Messia 元素，且 $\varphi_1$ 是 E 上相容的 Hennings 形式，则有

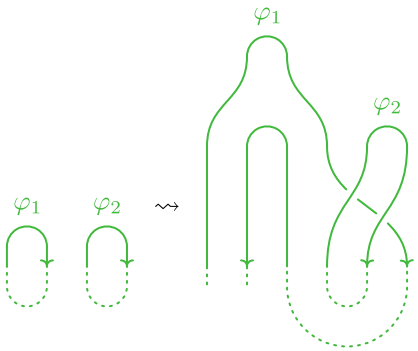



(68)

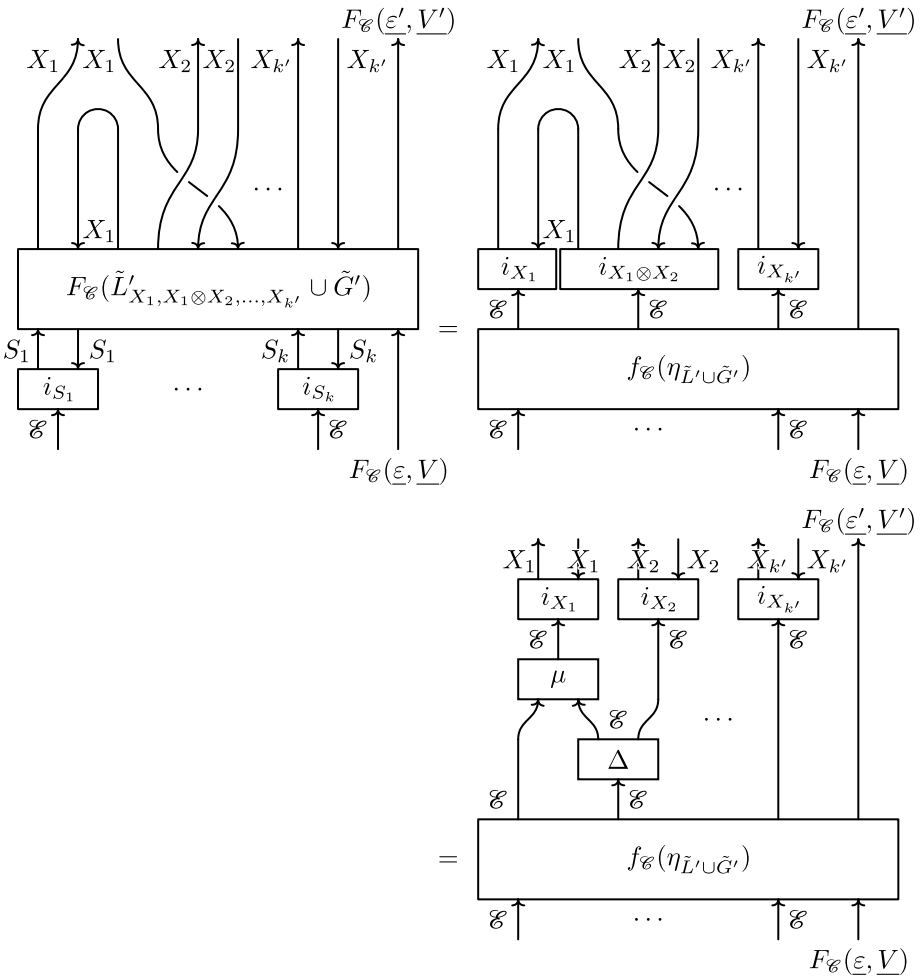
□

A.6. **命题 4.5 的证明。**

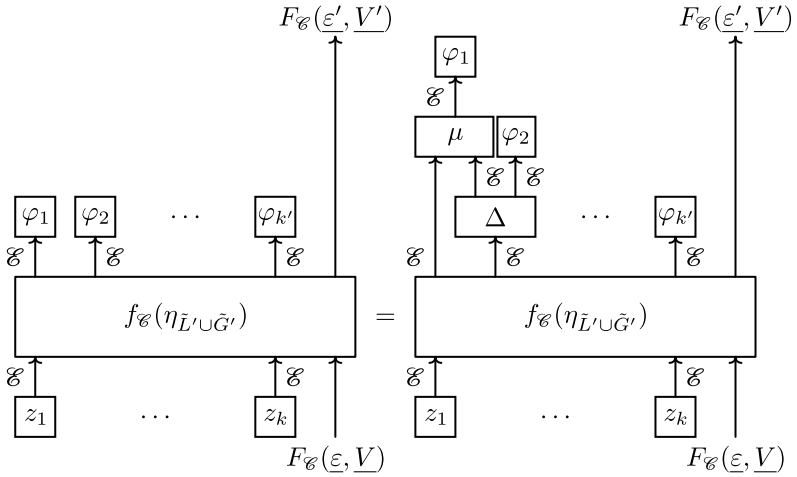
命题的证明*4.5*。 将$L_{2,1}$ 滑过$L_{2,2}$ 的操作由下图表示。



这意味着




若 $\varphi_1$ 是 E 上的带状无结形式，且 $\varphi_2$ 是 E 上相容的 Hennings 形式，则有

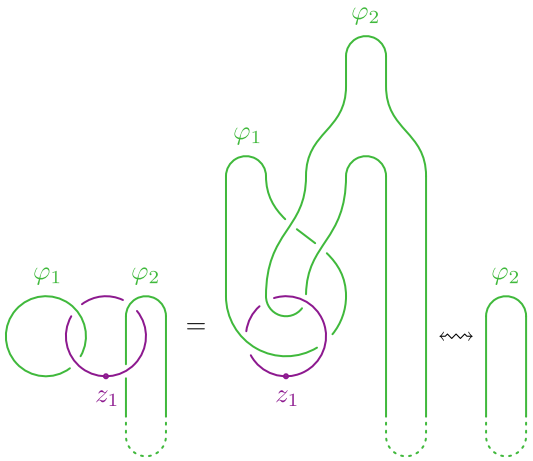



(69)

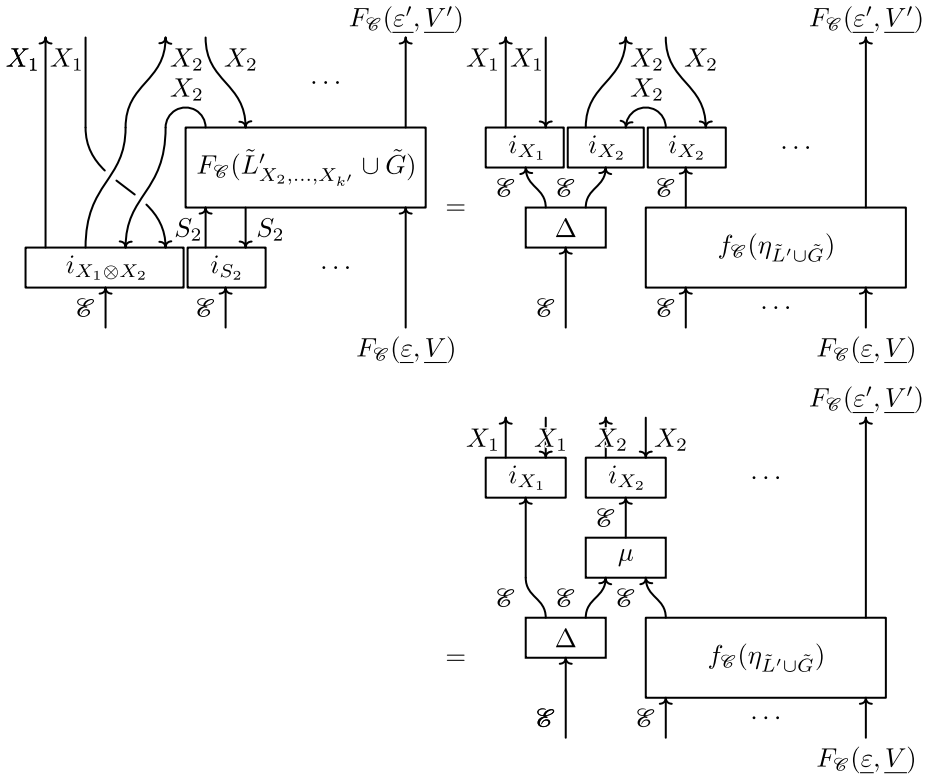
□

## A.7. 命题 4.8 的证明。

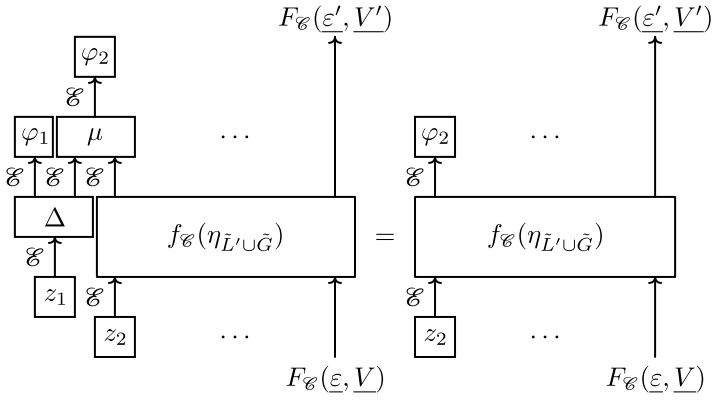
命题 *4.8* 的证明。 如果 $L_{1,\ 1}$ 和 $L_{2,\ 1}$ 构成一个以 $L_{2,\ 2}$ 为基点的链对，那么移除 $L_{1,\ 1} \cup L_{2,\ 1}$ 这一操作可由下图表示。




这意味着



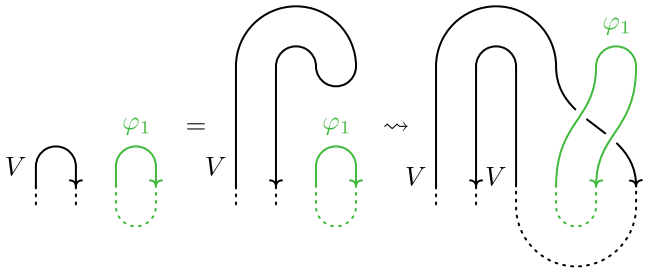
如果 $z_1$ 是 E 的 Bobtcheva–Messia 元素，并且与 E 上的带状无结形式 $\varphi_1 = \varphi_2$ 相容，那么我们有



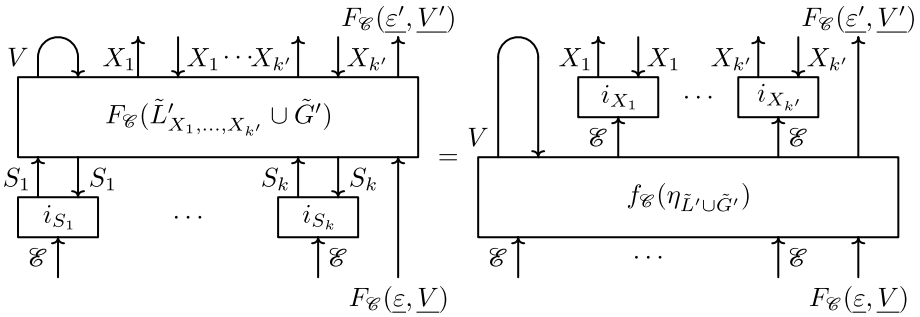

□

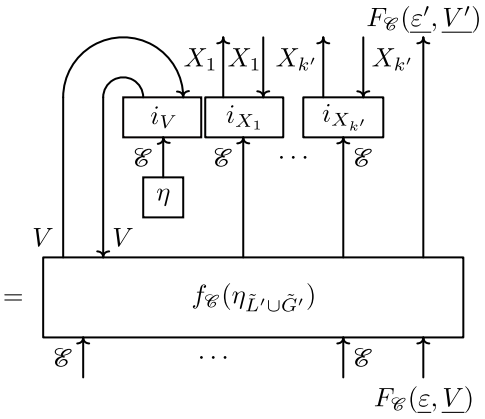
A.8. **命题 4.11的证明。**

命题 *4.11*的证明。 将 $G$ 的一个标记为 $V$ 的边滑过 $L_{2,\ 1}$可由下图表示。

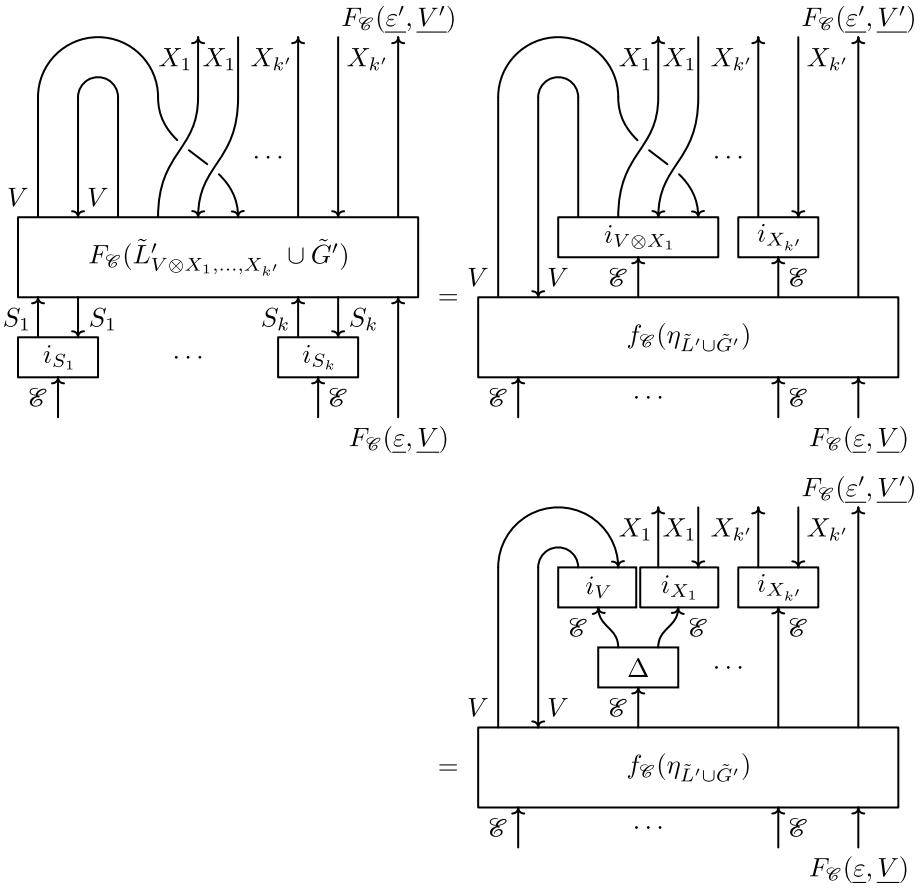


这意味着 , 一方面 ,

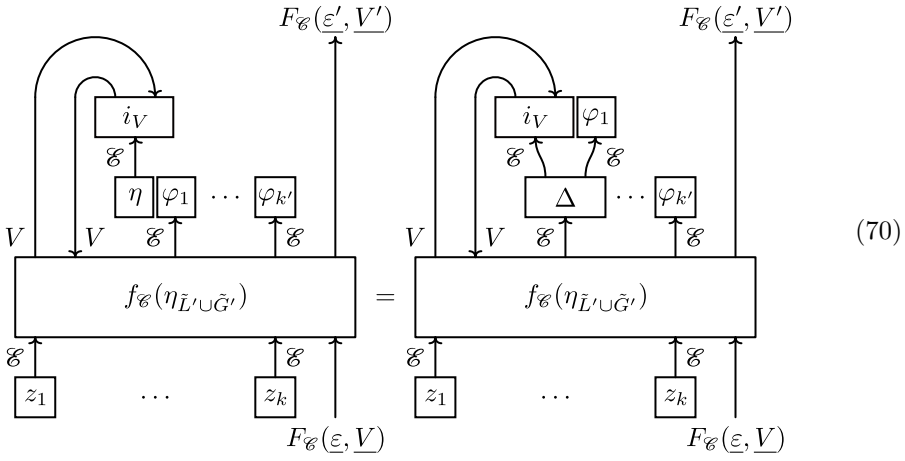

$F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon}', \underline{V'})$
$V$
$X_1$
$X_1 \cdots X_{k'}$
$X_{k'}$
$F_{\mathscr{C}}(\tilde{L}'_{X_1,\ldots,X_{k'}} \cup \tilde{G}')$
$S_1$
$S_1$
$S_k$
$S_k$
$i_{S_1}$
$\cdots$
$i_{S_k}$
$\mathscr{C}$
$\mathscr{C}$
$F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon}, \underline{V})$
$=$
$F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon}', \underline{V'})$
$X_1$
$X_1$
$X_{k'}$
$X_{k'}$
$i_{X_1}$
$\cdots$
$i_{X_{k'}}$
$V$
$\mathscr{C}$
$\mathscr{C}$
$f_{\mathscr{C}}(\eta_{\tilde{L}' \cup \tilde{G}'})$
$\mathscr{C}$
$\cdots$
$\mathscr{C}$
$F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon}, \underline{V})$


$F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon}', \underline{V'})$
$X_1$
$X_1$
$X_{k'}$
$X_{k'}$
$i_V$
$i_{X_1}$
$i_{X_{k'}}$
$\mathscr{C}$
$\mathscr{C}$
$\cdots$
$\mathscr{C}$
$\eta$
$V$
$V$
$=$
$f_{\mathscr{C}}(\eta_{\tilde{L}' \cup \tilde{G}'})$
$\mathscr{C}$
$\cdots$
$\mathscr{C}$
$F_{\mathscr{C}}(\underline{\varepsilon}, \underline{V})$

而另一方面，




如果 $V$ 与 E 上的 Hennigs形式 $\varphi_1$ 相容，那么我们有



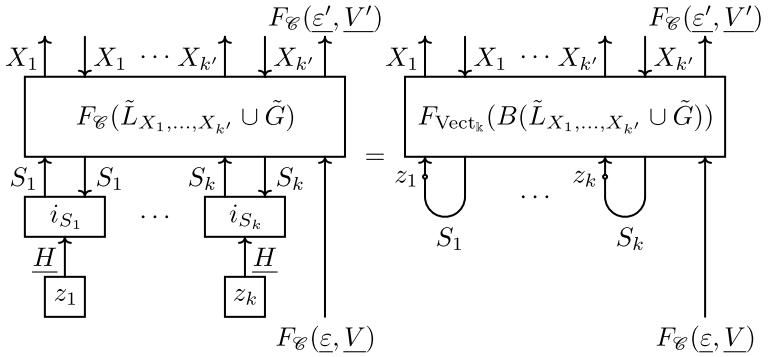

(70)

□

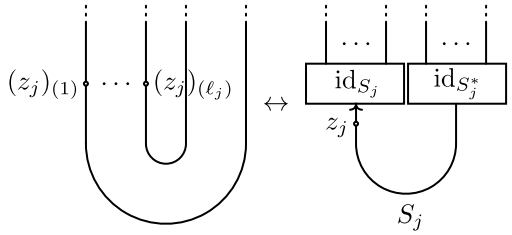
A.9. **命题 5.1的证明。**

命题 *5.1* 的证明。 对每个整数 $1 \leqslant j \leqslant k$，我们称 $j$ 个分支 $L_{1,\ j}$ 中 Seifert 圆盘的中心为 $q_j$；并称每个整数 $1 \leqslant j \leqslant k'$ 对应的 $j$ 个分支$L_{2,\ j}$ 上所有珠子的聚点为 $p'_j$。固定 C 标记的 Kirby 图的一种底顶表示 $L\cup G$

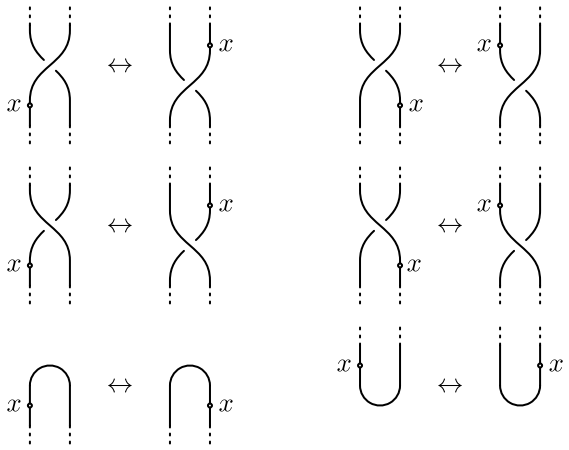
$L \cup G$，它由选取一族两两不相交、 $\gamma_j$ 到达 $q_j$ （对每个整数 $1 \leqslant j \leqslant k$）的带框弧，以及一族两两不相交、 $\gamma'_j$从 $p'_j$出发（对每个整数 $1 \leqslant j \leqslant k'$）的带框弧，并按照 $L \cup G$命题˜ ˜4.3的证明中的做法展开 $L_{X_1,\dots,X_{k'}} \cup G$ 得到。令 $X_1, \dots, X_{k'}$ 对应的 C 标记带状图为 $L_{X_1,\dots,X_{k'}} \cup G$ ，其中 $\in \mathsf{C}^{\times k'}$，如 $F_{\mathscr{C}}(L \cup G)$ 的定义所示。若将算法˜ ˜应用于 $L_{X_1,\dots,X_{k'}} \cup G$，由于其中已不再含有紫色和绿色分量，我们得到˜ ˜一个 $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$ 标记的带状图 $B(L_{X_1,\dots,X_{k'}} \cup G)$，满足




注意，右侧图示的左下部分可以按图示方式展开而不改变结果，前提是我们按照定向对产生的珠子应用算法，即计算反 antipode 并添加逆枢轴元。

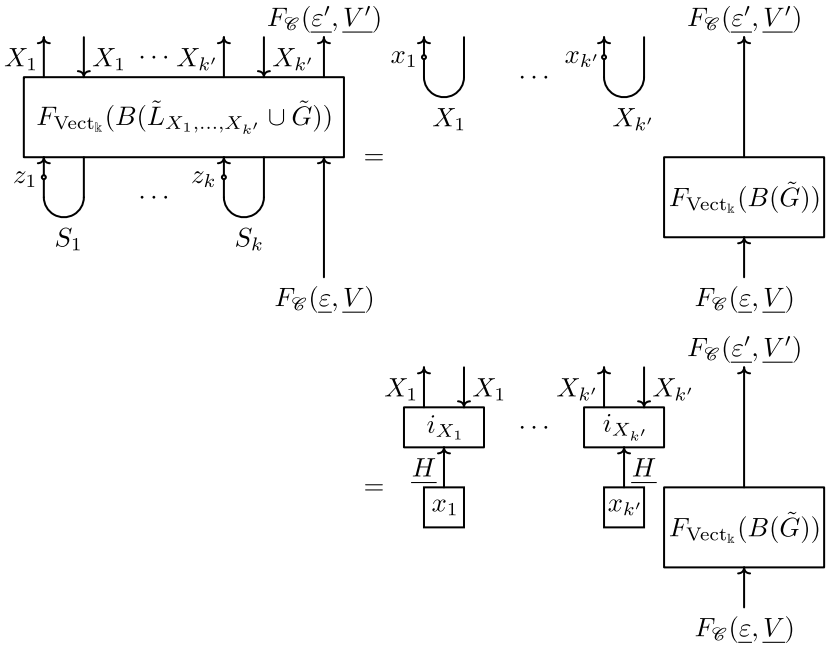



现在，位于同一圈上的所有珠子都可以滑到图示的左上部分，经过交叉和极值点而不改变结果，如图所示。

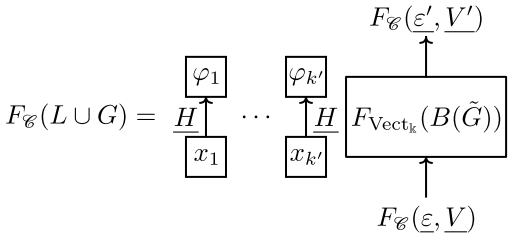



此时，每个圈都可以同伦变形为左余评价而不改变结果，因为 $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$ 的带状结构是平凡的。然后，通过将

所有珠子相乘，我们得到满足条件的标签 $x_1, \ldots, x_{k'} \in H$

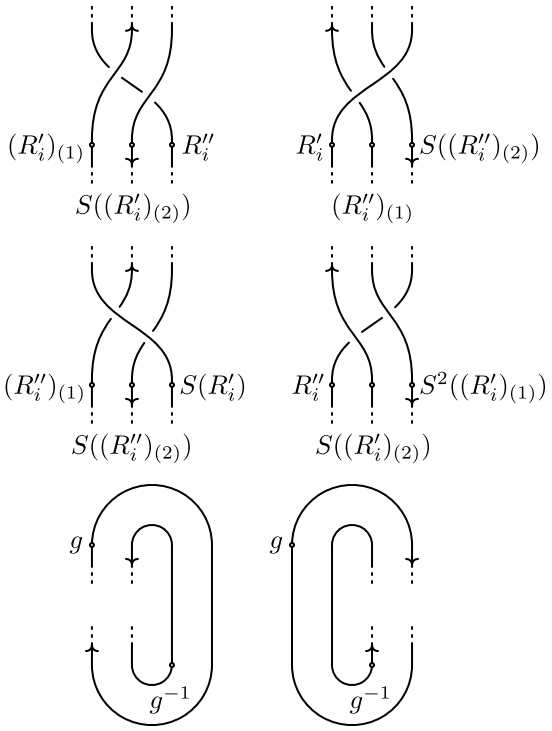



这意味着




现在我们可以指出，由带框架路径 $\gamma_j$ 和 $\gamma_j'$引入的所有珠子都可以化简。事实上，设 $\gamma$ 是一条表示为长结的路径，它由一条辫的部分闭合得到。假设沿着 $\gamma$行进时，我们收集到的珠子乘积为 $a$，同时将标签为 $b_1, \ldots, b_n$的珠子分散到图示的其余部分。那么， $\gamma$ 的两个定向相反的平行复制分别引入乘积为 $a_{(1)}$ 和 $S(a_{(2)})$的珠子，同时仍将标签为 $b_1, \ldots, b_n$的珠子分散到图示的其余部分，如下图所示

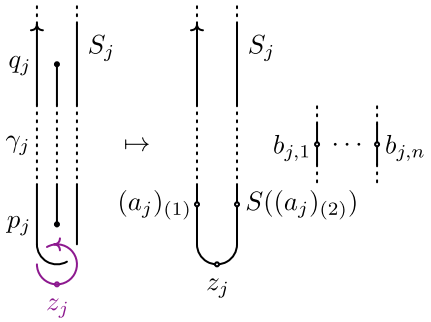
。




注意到 $a_j, b_{j,1}, \ldots, b_{j,n}$ 是由 R 矩阵的分支及枢轴元的幂相乘得到的，它们满足

$$\varepsilon(R_i')R_i'' = 1 = \varepsilon(R_i'')R_i', \qquad \varepsilon(g) = 1.$$

那么，假设我们沿着 $\gamma_j$前进时，收集到的珠子的乘积为 $a_j$，同时将标签为 $b_{j,1}, \ldots, b_{j,n}$ 的珠子分散到图示的其余部分。这意味着

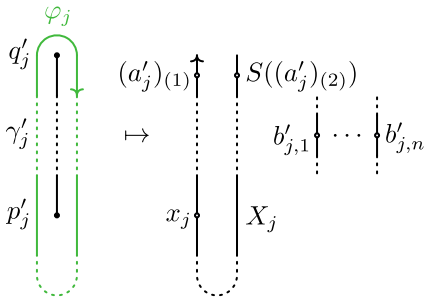



那么，若 $\underline{b_j} = b_{j,1} \otimes \ldots \otimes b_{j,n}$，则有

$$\begin{aligned}(a_j)_{(1)} z_j S((a_j)_{(2)}) \otimes \underline{b_j} &= (a_j \triangleright z_j) \otimes \underline{b_j} \\ &= \varepsilon(a_j)(z_j \otimes \underline{b_j}) \\ &= z_j \otimes 1^{\otimes n},\end{aligned}$$

因为 $z_j$ 是 $H$的中心元。同样，假设沿着$\gamma_j'$行进时，我们收集乘积为 $a_j'$ 的珠子，同时将标签为

$b'_{j,1}$，……，$b'_{j,n}$ 的珠子散布到图示的其余部分。这意味着




那么，若 $\underline{b'_j} = b'_{j,1} \otimes \ldots \otimes b'_{j,n}$，则有

$$\begin{aligned}\varphi_j((a'_j)_{(1)} x_j S((a'_j)_{(2)}))\underline{b'_j} &= \varphi_j(x_j S((a'_j)_{(2)}) S^2((a'_j)_{(1)}))\underline{b'_j} \\ &= \varphi_j(x_j S(S((a'_j)_{(1)})(a'_j)_{(2)}))\underline{b'_j} \\ &= \varepsilon(a'_j)\varphi_j(x_j S(1))\underline{b'_j} \\ &= \varphi_j(x_j) 1^{\otimes n},\end{aligned}$$

因为 $\varphi_j$ 是 $H$ 上的量子特征。

现在，结论可由以下观察得出：对于每个 $1 \leqslant j \leqslant k'$，$x_j = g^{-1} y_j \tilde{} \quad \tilde{}$，因为要从 $L \cup G$ 得到 $L_{2,j}$，我们需要添加一个右求值，这意味着 $y_j = g x_j$。□

## 参考文献

[Ak09] S. Akbulut，《Cappell–Shaneson 同伦球是标准的》，Ann. of Math. (2) 171 (2010)，第 3 期，2171–2175；arXiv:0907.0136 [math.GT]。[AY08] S. Akbulut、K. Yasui，《软木塞、塞子与奇异结构》，J. Gökova Geom. Topol. GGT 2 (2008)，40–82；arXiv:0806.3010 [math.GT]。[BBDP23] A. Beliakova、I. Bobtcheva、M. De Renzi、R. Piergallini，《四维 2-手柄体与三维协边的代数表示》，arXiv:2312.15986 [math.GT]。[BD21] A. Beliakova、M. De Renzi，《四维 2-手柄体上的 Kerler–Lyubashenko 函子》，Int. Math. Res. Not. IMRN

**2024** 2024 13, 10005 10080 2105 02789 ( )，第 – [ ] 期；arXiv: . math.GT . [BD22] A. Beliakova、M. De Renzi，《四维 2-手柄体的精细 Bobtcheva–Messia 不变量》，《几何论文集》，387–432，IRMA Lect. Math. Theor. Phys. 34，Eur. Math. Soc.，苏黎世，2023；arXiv:2205.11385 [math.GT]。[BM02] I. Bobtcheva、M. Messia，《二维 CW 复形的四维增厚体的 HKR 型不变量》，Algebr. Geom. Topol. 3 (2003)，第 1 期，33–87；arXiv:math/0206307 [math.QA]。[BP11] I. Bobtcheva、R. Piergallini，《关于四维 2-手柄体与三维流形》，J. Knot Theory Ramifications 21 (2012)，第 12 期，1250110，230 页；arXiv:1108.2717 [math.GT]。[BKLT97] Y. Bespalov、T. Kerler、V. Lyubashenko、V. Turaev，《编织 Hopf 代数的积分》，J. Pure Appl. Algebra 148 (2000)，第 2 期，113–164；arXiv:q-alg/9709020。[Br95] B. Broda，《三维与四维流形不变量的规范场方法》，载于《辛奇点与规范场几何》（华沙，1995），201–209，Banach Center Publ. 39，波兰科学院数学研究所，华沙，1997；arXiv:q-alg/9511010。[BW05] A. Beliakova、S. Wehrli，《彩色 Jones 多项式的范畴化与链环的 Rasmussen 不变量》，Canad. J. Math.

**60** 2008 6, 1240 1266 0510382 ( )，第 – [ ] 期；arXiv:math/ math.QA 。[DGP17] M. De Renzi、N. Geer、B. Patureau-Mirand，《重整化 Hennings 不变量与 $2+1$-TQFT》，Comm. Math. Phys. 362 (2018)，第 3 期，855–907；arXiv:1707.08044 [math.GT]。[DGGPR19] M. De Renzi、A. Gainutdinov、N. Geer、B. Patureau-Mirand、I. Runkel，《由非半单模范畴构造的三维拓扑量子场论》，Selecta Math. (N.S.) 28 (2022)，42；arXiv:1912.02063 [math.GT]。[DM20] M. De Renzi、J. Murakami，《由 Kauffman 括号导出的非半单三维流形不变量》，Quantum Topol. 13 (2022)，第 2 期，255–333；arXiv:2007.10831 [math.GT]。[EGNO15] P. Etingof、S. Gelaki、D. Nikshych、V. Ostrik，《张量范畴》，Math. Surveys Monogr. 205，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2015。

[FGMW09] M. Freedman、R. Gompf、S. Morrison、K. Walker，《人类与机器对光滑四维庞加莱猜想的思考》，Quantum Topol. 1 (2010)，第 2 期，171–208；arXiv:0906.5177 [math.GT]。[FS10] J. Fuchs、C. Schweigert，《共形场论中的 Hopf 代数与有限张量范畴》，Rev. Un. Mat. Argentina 51 (2010)，第 2 期，43–90；arXiv:1004.3405 hep-th。[GK12] D. Gay、R. Kirby，《四维流形三分解》，Geom. Topol. 20 (2016)，第 6 期，3097–3132；arXiv:1205.1565 [math.GT]。[GKP10] N. Geer、J. Kujawa、B. Patureau-Mirand，《带状范畴上的广义迹与修正维数函数》，Selecta Math.

**17** 2011 2, 435 504 1001 0985 ( ), [ ] 第 – 期；arXiv: . math.RT . [Gl62] H. Gluck，《二维球面在四维球面中的嵌入》，Trans. Amer. Math. Soc. 104 (1962)，第 2 期，308–333。[GKP11] N. Geer、J. Kujawa、B. Patureau-Mirand，《非半单范畴中的双侧对象与迹函数》，Proc. Amer. Math. Soc. 141 (2013)，第 9 期，2963–2978；arXiv: 1106.4477 [math.RT]。[GR17] A. Gainutdinov、I. Runkel，《可分解有限张量范畴中的投射对象与修正迹》，Compos. Math.

**156** 2020 4, 770 821 1703 00150 ( ), [ ] 第 – 期；arXiv: . math.QA 。[Go91] R. Gompf，《消去 Akbulut–Kirby四维球面：兼论 Andrews–Curtis 猜想与 Schoenflies问题》，Topology 30 (1991)，第 1 期，97–115。[GS99] R. Gompf、A. Stipsicz，《四维流形与 Kirby演算》，Grad. Stud. Math. 20，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1999。[He96] M. Hennings，《由 Hopf 代数得到的链环与三维流形不变量》，J. Lond. Math. Soc. (2) 54 (1996)，第 3 期，594–624。[HKM18] M. Hughes、S. Kim、M. Miller，《通过带带的平凡链环图研究四维流形中曲面的同痕》，Geom. Topol. 24 (2020)，第 3 期，1519–1569；arXiv:1804.09169 [math.GT]。[HS21] K. Hayden、I. Sundberg，《Khovanov同调与四维球中的异乎寻常的曲面》，J. Reine Angew. Math 2024 (2024)，第 809 期，217–246；arXiv:2108.04810 [math.GT]。[Ka95] C. Kassel，《量子群》，Grad. Texts in Math. 155，Springer-Verlag，纽约，1995。[Ke94] T. Kerler，《量子双上的映射类群作用》，Commun. Math. Phys. 168 (1995)，第 2 期，353–388；arXiv:hep-th/9402017。[KL01] T. Kerler、V. Lyubashenko，《带角流形上的非半单三维拓扑量子场论》，Lecture Notes in Math. 1765，Springer-Verlag，柏林，2001。[KM91] R. Kirby、P. Melvin，《Witten 与 Reshetikhin–Turaev 对 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的三维流形不变量》，Invent. Math. 105 (1991)，第 3 期，473–545。[Lo97] M. Lorenz，《有限维 Hopf代数的表示》。J. Algebra 188 (1997)，第 2 期，476–505。[LP72] F. Laudenbach、V. Poénaru，《关于四维把手体的一则注记》，Bull. Soc. Math. France 100 (1972)，337–344。[LY23] I. Lee、D. Yetter，《通过 Broda–Petit构造得到的嵌入曲面不变量》，J. Knot Theory Ramifications 34 (2025)，第 5 期，2550015；arXiv:2303.11380 [math.QA]。[ML71] S. Mac Lane，《工作数学家的范畴论》，Grad. Texts in Math. 5，Springer-Verlag，纽约—柏林，1971。[Pe08] J. Petit，《光滑四维流形的二色不变量》，Global J. Pure Appl. Math. 4 (2008)，第 3 期，1–16。[Ra05]

**182** 2010 2, J. 419 447 Rasmussen，《Khovanov同调与切片亏格》，Invent. Math. ( )，第 – 期；arXiv:math/0510382 [math.QA]。[Ra12] D. Radford，《Hopf代数》，Ser. Knots Everything 49，World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.，新泽西州哈肯萨克，2012。[Re20] D. Reutter，《半单四维拓扑量子场论无法检测奇异的光滑结构》，J. Topol. 16，第 2 期，542–566；arXiv:2001.02288 [math.GT]。[Sh14] K. Shimizu，《关于幺模有限张量范畴》，Int. Math. Res. Not. IMRN 2017 (2017)，第 1 期，277–322；arXiv:1402.3482 [math.QA]。[Sh16] K. Shimizu，《编织有限张量范畴的非退化条件》，Adv. Math. 355 (2019)，106778；arXiv:1602.06534 [math.QA]。[Sh19] K. Shimizu，《余模代数的相对Serre函子》，J. Algebra 634 (2023)，237–305；arXiv:1904.00376 [math.QA]。[Tu91] V. Turaev，《低维拓扑中的态和模型》，《国际数学家大会论文集》，第 I 卷（京都，1990），689–698，日本数学会，东京，1991。[Tu94] V. Turaev，《纽结与三维流形的量子不变量》，De Gruyter Stud. Math. 18，Walter de Gruyter & Co.，柏林，1994。

[Wi23] J. Willprecht，有限张量范畴上的模范畴变形，博士论文，汉堡大学（2023）。数学研究所，苏黎世大学，温特图尔大街190号，CH-8057 苏黎世，瑞士电子邮箱： anna@math.uzh.chIMAG，蒙彼利埃大学，欧仁·巴塔永广场，34090 蒙彼利埃，法国电子邮箱：marco.de-renzi@umontpellier.fr数学与物理研究所，鲁汶天主教大学，回旋加速器路2号，1348 新鲁汶，比利时电子邮箱： quentin.faes@uclouvain.be