arXiv:2512.15416v1 [math.SP] 17 Dec 2025

扭曲积的 Steklov 特征值上界

JADE BRISSON、BRUNO COLBOIS、ALEXANDRE GIROUARD 和 KATIE GITTINS

摘要。我们为扭曲积 $\Omega \times_h \Sigma$ 的 Steklov 特征值建立上界，其中 Ω 是带边界的紧黎曼流形，Σ 是闭黎曼流形。这些上界涉及 Ω 和 $\partial\Omega$ 的体积、纤维 Σ 上的拉普拉斯算子的特征值，以及扭曲函数 h 的 L^p- 范数。根据纤维 Σ 的维数 n 以及 p 的取值，上界会有很大差异。在某些情形下，我们得到最优上界和稳定性估计。

1. 引言

设 (Ω, g_Ω) 是一个维数为 $d \geq 1$、带有光滑边界 $\partial\Omega$ 的紧致连通黎曼流形，并设 (Σ, g_Σ) 是一个维数为 $n \geq 1$ 的闭连通黎曼流形。给定一个光滑正函数 $0 < h \in C^\infty(\Omega)$，考虑扭曲积 $M_h := \Omega \times_h \Sigma$。也就是说，乘积流形 $M = \Omega \times \Sigma$ 配备由 g_h 定义的黎曼度量

$$g_h(x, q) := g_\Omega(x) + h^2(x) g_\Sigma(q).$$

如果存在一个非零函数 $u \in C^\infty(M)$，满足以下条件，那么数 $\sigma \in \mathbb{R}$ 就是 M_h 上的 Steklov特征值：

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } M_h, \\ \partial_\nu u = \sigma u & \text{on } \partial M_h. \end{cases}$$

这里，$\Delta = \Delta_{g_h}$ 是与扭曲度量g_h 相关联的拉普拉斯算子，而 $\partial_\nu u$ 是函数u沿外法线方向的法向导数。Steklov特征值构成一个离散且无界的序列

$$0 = \sigma_0(M_h) < \sigma_1(M_h) \leq \sigma_2(M_h) \leq \cdots \nearrow +\infty.$$

日期：2025年12月18日。2020 数学主题分类。35P15, 58C40。关键词和短语。Steklov特征值、上界、扭曲积、谱几何。

关于斯捷克洛夫问题的介绍，参见 [13] ； 关于该问题谱几何最新文献的综述（包括Steklov特征值的上界），参见 [11, 6] 。

为了获得黎曼流形的 Steklov特征值上界，必须施加几何约束（见[4, 3]）。例如，在 [2, 5, 7, 14, 15] 中，研究者在假设度量属于旋转型的条件下得到了上界。类似地，扭曲积似乎是下一个值得考虑的自然类别。相关论文包括 [8, 9] ，还有 [12, 16, 17], ，后者与本项目的关系更为密切。

本项目最初的问题是：对于每个固定的指标 k，在所有满足边界 $\partial\Omega$上 $h \equiv 1$的扭曲函数 $h \in C^\infty(\Omega)$中， $\sigma_k(M_h)$能有多大？我们成功地彻底解决了纤维维数为 $n \geq 2$的扭曲积这一情形。纤维 Σ 上的拉普拉斯算子的特征值起着重要作用。我们将它们列为

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \to +\infty.$$

以下结果是本文主要结果的一个特例。

定理 1.1。 设 $M_h = \Omega \times_h \Sigma$ 是如上所述的扭曲积，其纤维 Σ 的维数为 $n \geq 2$。那么，

$$\sup\{\sigma_k(M_h) : h = 1 \text{ on } \partial\Omega\} = \begin{cases} \frac{\lambda_k|\Omega|}{|\partial\Omega|} & \text{if } n = 2, \\ +\infty & \text{if } n \geq 3. \end{cases}$$

这可以与 [4, 3] 的结果进行比较；该文研究了关于共形扰动的类似问题。$n = 2$ 的上界将根据涉及纤维 Σ维数 n 以及扭曲函数 h 的 L^p-范数的各种约束，由 $\sigma_k(M_h)$ 的上界推出。极限行为则更为微妙。这取决于与圆柱模型的比较，在这些模型中，扭曲函数 h 趋于 $+\infty$。遗憾的是，我们尚未能解决纤维维数为 $n = 1$的情形。相关讨论见第 1.2 节。

1.1. 主要结果。 我们的第一个主要结果给出了 $\sigma_k(M_h)$ 的尖锐上界。它涉及扭曲空间 $M_C = \Omega \times_C \Sigma$，其中扭曲函数 $h = C \geq 1$ 为常数。

定理 1.2。 设 $M_h = \Omega \times_h \Sigma$ 是上述扭曲积，其纤维 Σ 的维数为 $n \geq 2$。设 $C \geq 1$。那么，

(i) 对于每个指标 $k \geq 1$，以及每个 $0 < h \in C^\infty(\Omega)$，

$$\sigma_k(M_h) < \lambda_k \frac{\int_\Omega h^{n-2}\, dV_\Omega}{\int_{\partial\Omega} h^n\, dA_{\partial\Omega}}. \tag{1}$$

(ii) 此外，若 $h \leq C$ 在 Ω 上，且 $h = 1$ 在 $\partial\Omega$上，则对每个指标$k \geq 1$,

$$\sigma_k(M_h) < C^n \sigma_k(M_C) < C^{n-2} \frac{\lambda_k |\Omega|}{|\partial\Omega|}. \tag{2}$$

(iii) 不等式 (2) 在以下意义下是尖锐的：

$$\sup\{\sigma_k(M_h) : h \leq C, h = 1 \text{ on } \partial\Omega\} = C^n \sigma_k(M_C), \tag{3}$$

and

$$\lim_{C\to\infty} C^2 \sigma_k(M_C) = \frac{\lambda_k |\Omega|}{|\partial\Omega|}. \tag{4}$$

定理 1.1 是不等式 (2) 以及 (3) 和 (4) 中给出的渐近行为的直接推论。定理 1.2 的证明采用变量分离法，由此将 M_h 的 Steklov特征值分解为 Ω 上扩散算子的辅助 Steklov 问题的谱的并集。得到这一分解后，(i) 部分上界的证明便是对特征值变分刻画的直接应用。然而，主要难点在于证明 (iii) 部分的饱和结果。

我们单独记录情形 $n = 2$，因为它将发挥特殊作用。

推论1.3。设 $M_h = \Omega \times_h \Sigma$ 是如上所述的扭曲积，其纤维 Σ 的维数为 $n = 2$。设 $C \geq 1$。若在 Ω 上有 $h \leq C$，且在$\partial\Omega$上有 $h = 1$，则对每个 $k \geq 1$,

$$\sigma_k(M_h) < C^2 \sigma_k(M_C) < \frac{\lambda_k |\Omega|}{|\partial\Omega|}, \tag{5}$$

and

$$\sup\{\sigma_k(M_h), h = 1 \text{ on } \partial\Omega\} = \frac{\lambda_k |\Omega|}{|\partial\Omega|}. \tag{6}$$

在我们的构造中，(6) 是由一列在 Ω 内部变得非常大的扭曲函数达到的。下面的结果表明，要逼近最优界，这一条件实际上是必需的。事实上，通过使用更精确的试探函数，我们得到了对 (5) 的如下定量稳定性改进。

定理 1.4。设 $n = 2$。对于每个指标 $k \geq 1$，若 h_ε 是一族扭曲函数，使得 $h_\varepsilon \equiv 1$ 在 $\partial\Omega$ 上成立，并且若

$$\sigma_k(M_{h_\varepsilon}) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \frac{\lambda_k|\Omega|}{|\partial\Omega|},$$

那么，对每个子区域 $D \subset\Omega$，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_D h_\varepsilon^2\, dV_\Omega = +\infty. \tag{7}$$

更确切地说，对于任意扭曲函数 h，使得 $h \equiv 1$ 在 $\partial\Omega$上，令$\delta(h)$: $= {}^{\lambda_k|}_{\Omega|\partial}{}^{|}_{\Omega|} - \sigma_k(M_h) > 0$。若 $q \in \Omega$ 且 $B(q,r) \subset \Omega$ 是半径为 r 、中心为 q 的球，则有以下定量估计：

$$\int_{B(q,r)} h^2 dV_\Omega \geq \frac{\lambda_k r^2}{4\delta(h)}\frac{|B(q,\frac{r}{2})|}{|\partial\Omega|} - \lambda_k r^2|B(q,r)|.$$

注 1.5. 鉴于定理 *1.4*，研究任意维数 n的纤维 Σ是否也存在类似的定量稳定性改进，将会很有意义。

对于 $h = 1$ 在 $\partial\Omega$上，不等式 **(1)** 给出了一个以 h 的 L^{n-2}-范数表示的上界，而假设 $h \leq C$ 是一个 L^∞-范数约束。由霍尔德不等式可立即得到以下推论。

推论 1.6. 设 $M_h = \Omega\times_h\Sigma$如上，纤维 Σ的维数为$n \geq 3$。假设在 $\partial\Omega$ 上有 $h = 1$ 。若 $1 \leq n-2 \leq p < \infty$ ，则对每个指标 $k \geq 1$,

$$\sigma_k(M_h) < \frac{\lambda_k|\Omega|^{\frac{p-(n-2)}{p}}}{|\partial\Omega|}\|h\|_{L^p}^{n-2}. \tag{8}$$

注 1.7. L^p 界的一个优点是，即使 L^∞-范数趋于无穷大，它仍可能保持有界。

注 1.8. 由于 $h = 1$ 在 $\partial\Omega$上，对 $p = n-2$，我们看到不等式(8)是不等式(1)的一个特例。另一方面，在(8) 中令 $p \to \infty$ ，得到

$$\sigma_k(M_h) \leq \frac{\lambda_k|\Omega|}{|\partial\Omega|}\|h\|_{L^\infty}^{n-2},$$

这是不等式(2)的非严格版本。

这自然引出了一个问题：对于 $1 \leq p <n-2$，会发生什么?

定理 1.9。 设 $M_h = \Omega \times_h \Sigma$ 如上所述，其纤维 Σ 的维数为$n \geq 3$。假设 h 在 $\partial\Omega$上取值 1 。若 $1 \leq p < n-2$ 且 $\partial\Omega$ 连通，则对每个正常数 $C > 0$,

$$\sup\{\sigma_k(M_h) : \int_\Omega h^p dV_\Omega \leq C; h = 1 \ on \ \partial\Omega\} = +\infty. \tag{9}$$

在定理 1.9 的证明中，边界的连通性起着重要作用。我们认为，当底空间 Ω 的维数 d 至少为 2 时，对于一般的边界，上确界 (9) 仍为无穷大。

相反，如果底空间的维数为 $d = 1$，那么对于所有 $p \geq 1$，相应的上确界都有界，尽管区间 Ω 的边界 $\partial\Omega = \{0, L\}$ 并不连通。

定理 1.10. 设 $M_h = [0, L] \times_h \Sigma$，纤维 Σ 的维数为 $n \geq 2$。设 $p \geq 1$。假设 $h(0) = h(L) = 1$。那么，对于 $k \geq 1$,

$$\sigma_k(M_h) \leq \frac{3^{n-2}}{4} \|h\|_{L^p}^{n-2} L^{\frac{p-(n-2)}{p}} \lambda_k. \tag{10}$$

此外，对于 $k = 1$ ，我们还有

$$\sigma_1(M_h) \leq \frac{4 \cdot 3^n \|h\|_{L^p}^n}{L^{\frac{n+p}{p}}}. \tag{11}$$

注1.11. 引入归一化测度 $d\tau = dt/L$ 后，不等式 (10)可改述如下:

$$\sigma_k(M_h) \leq \frac{3^{n-2}}{4} \|h\|_{L^p(d\tau)}^{n-2} L \lambda_k. \tag{12}$$

而对于 $k = 1$ 不等式(11) 则变为

$$\sigma_1(M_h) \leq \frac{4 \cdot 3^n \|h\|_{L^p(d\tau)}^n}{L}. \tag{13}$$

这些不等式可直接应用于常数扭曲函数$h = C$，从而得到

$$\lim_{L \to 0} \sigma_k(M_C) = 0 \qquad for \ each \ k$$

以及

$$\lim_{L \to \infty} \sigma_1(M_C) = 0.$$

这概括了圆柱体的常见情形（例如，参见 [6,例 2。2]。）

1.2. 一维纤维。 尽管我们竭尽全力，仍未能解决最初提出的关于纤维维数为 Σ $n = 1$ 的扭曲积的问题。在这种情形下，不等式 (1) 仍然成立；当$h = 1$ 作用于 $\partial\Omega$ 上时，它可写为：

$$\sigma_k(M_h) < \lambda_k \frac{\int_\Omega h^{-1}\, dV_\Omega}{|\partial\Omega|}.$$

当$n \geq 2$ 时，我们用来构造较大特征值的策略在 $n = 1$时会适得其反。事实上，对于 $n = 1$，如果 $h \to +\infty$位于 Ω 的内部，那么 $\sigma_k(M_h)$ $\to 0$。一旦介绍了扭曲积的变量分离以及辅助分离问题的极小极大刻画，问题的难度便会显而易见。参见相应的瑞利商 (16)，并注意，对于 $n = 1$，扭曲因子 h 同时以正指数和负指数出现。

注 1.12. 即使在 $d = 1$ 和 $n = 1$都成立的情况下，这个问题也相当复杂。考虑配备扭曲度量 $dr^2 + h(r)^2 d\theta^2$ 的圆柱 $[0, L] \times S^1$。未知的变量替换 $r = r(t)$ 导致度量 $r'(t)^2 dt^2 + h(r)^2 d\theta^2$。为了得到一个与乘积度量 $dr^2 + d\theta^2$ 共形的度量，我们求解 $r'(t) = h(r)$。对于$r \in [0, L]$, 令

$$t(r) := \int_0^r \frac{1}{h(s)}\, ds.$$

变量替换 $t \mapsto r(t)$ 是该函数的逆函数。因此， $[0, L] \times_h S^1$ 与配备了共形黎曼度量 $h(r(t))^2(dt^2 + d\theta^2)$的 $[0, t(L)] \times S^1$ 等距。由于共形因子在边界上限制为 $h = 1$ ，由共形不变性可知

$$\sigma_k([0, L] \times_h S^1) = \sigma_k([0, t(L)] \times S^1) \qquad for\ each\ k.$$

因此，在所有满足 $h(0) = h(L) = 1$ 的扭曲函数 h 中， $\sigma_k([0, L] \times_h S^1)$ 的上确界等于

$$\sup\{\sigma_k([0, T] \times S^1) : T > 0\}.$$

Fan、*Tam* 和 *Yu* 在他们的论文 [10] 中研究了这个最后的问题。特别是，他们论文中的定理 *1.1* 对这一最大化问题给出了完整的答案。也欢迎感兴趣的读者参阅 [6,第 5 节。7]。

论文计划

在第 2 节中，我们通过回顾扭曲积上的变量分离，考察特定情形 M_C 的谱，介绍一些技术引理，并回顾有关拟等距的一些事实，为主要定理的证明奠定基础。我们将定理 1.2、1.4、1.9、1.10 和推论 1.6 的证明留到第 3 节。

致谢

J.B 和 B.C 感谢 SNSF 项目“几何谱理论”的支持，项目编号为 200021-19689。K.G. 感谢英国皇家学会研究基金的支持，该基金项目名为“*Steklov* 特征值、比值和间隙的上界”。A.G. 感谢加拿大自然科学与工程研究理事会（NSERC）的支持，特别是通过发现基金“等周与谱几何”（RGPIN-2022-04247）获得的支持，同时也感谢魁北克研究基金（FRQ）通过团队研究项目“拉普拉斯与 *Steklov* 问题的谱间隙几何”提供的支持。

2. 预备材料

本节首先回顾扭曲积上的变量分离，并列出其一些推论。随后，我们介绍一些技术引理，并回顾一些关于拟等距的事实，这些内容将在定理 1.2 的证明中使用。最后，我们针对 $M_C = \Omega \times_C \Sigma$ 的例子得到谱的一些性质，这些性质同样有助于定理 1.2 的证明。

2.1. 扭曲积上的变量分离。 扭曲积结构使得变量分离成为可能。这可以通过底空间上扩散算子$L_h : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$的辅助 Steklov 问题来表述，该算子定义为

$$L_h a = -\Delta a - \frac{n}{h}\langle \nabla h, \nabla a \rangle.$$

对于每个 $\lambda \geq 0$，考虑以下辅助 Steklov 问题：

$$\begin{cases} L_h a + \lambda h^{-2} a = 0 & \text{in } \Omega, \\ \partial_\nu a = \sigma a & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{14}$$

如果底空间 Ω 的维数为 $d \geq 2$，那么对于每个 $\lambda \geq 0$，该问题具有离散且无界的谱：

$$0 \leq \sigma_{\lambda,0}(h) \leq \sigma_{\lambda,1}(h) \leq \sigma_{\lambda,2}(h) \leq \ldots \nearrow +\infty.$$

对应的特征函数 $(a_{\lambda,\,l})_{l\geq 0}$ 构成一个完备正交集，我们将其按 $\int_{\partial\Omega} a_{\lambda,\,l}^2 h^n \, dA = 1$ 归一化。不过，如果底空间是一维的，那么每个 λ 只有两个特征值：

$$\{\sigma_{\lambda,0}(h) \leq \sigma_{\lambda,1}(h)\}.$$

命题 2.1。 设纤维 Σ 上的拉普拉斯算子的特征值为 $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \nearrow +\infty$。$M_h = \Omega \times_h \Sigma$ 的 *Steklov* 谱由以下多重集给出

$$\{\sigma_k(M_h)\}_{k\geq 0} = \{\sigma_{\lambda_j,l}(h) \,:\, j,l \geq 0\}. \tag{15}$$

证明是标准的：考虑如下形式的函数的乘积即可得出

$$u_{\lambda_j,l}(x,p) = a_{\lambda_j,l}(x)\phi_j(p),$$

其中，函数 $a_{j,\,l} \in C^\infty(\Omega)$ 是上述辅助 Steklov 问题（14）的特征函数，定义在 $\lambda = \lambda_j$ 上；函数 $\phi_j \in C^\infty(\Sigma)$ 是拉普拉斯特征函数，构成 $L^2(\Sigma)$ 的标准正交基。这些函数构成 M_h 上 Steklov 特征函数的完备集。详情请参见 [12]。我们特别关注的是，特征值 $\sigma_{\lambda,\,l}$ 具有熟知的变分刻画，可用以下 $a \in W^{1,\,2}(\Omega)$ 的瑞利商表示：

$$R_{\lambda,h}(a) = \frac{\int_\Omega (|da|^2 h^n + \lambda a^2 h^{n-2})\, dV_\Omega}{\int_{\partial\Omega} a^2 h^n \, dA_{\partial\Omega}}. \tag{16}$$

我们将广泛使用以下关于 $\sigma_{\lambda,0}$ 的刻画：

$$\sigma_{\lambda,0}(h) = \min\left\{ R_{\lambda,h}(a) : a \in W^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\} \right\} = R_{\lambda,h}(a_{\lambda,0}), \tag{17}$$

当且仅当 a 是相应的特征函数时，等号成立。

注意，对于每个 $k \geq 0$，

$$\sigma_k(M_h) \leq \sigma_{\lambda_k,0}(h). \tag{18}$$

这可直接由表示式（15）得出，因为根据定义，标记的特征值 $\sigma_k(M_h)$ 按递增顺序排列。在（17）中取常函数 $a \equiv 1$ 作为试探函数，可得

$$\sigma_k(M_h) \leq \sigma_{\lambda_k,0}(h) \leq \lambda_k \frac{\int_\Omega h^{n-2}\, dV_\Omega}{\int_{\partial\Omega} h^n \, dA_{\partial\Omega}}. \tag{19}$$

对于任意的 $\lambda \geq 0$ 和指标 $l \geq 1$，我们还将使用如下刻画

$$\sigma_{\lambda,l}(h) = \min_{E \subset W^{1,2}(\Omega), \dim(E)=l+1} \max\{R_{\lambda,h}(u) : u \in E\}. \tag{20}$$

2.2. 的 Steklov 谱 M_C。回顾一下，对于 $C > 0$,

$$M_C = \Omega \times_C \Sigma = (\Omega, g_\Omega) \times (\Sigma, C^2 g_\Sigma).$$

本节将研究当 C 较大时 M_C 的谱。这将有助于定理 1.2 的证明。具体而言，我们很快就会得到不等式 (4)。

对于 $h = C > 0$，问题 (14) 简化为

$$\begin{cases} -\Delta a + \frac{\lambda}{C^2} a = 0 & \text{in } \Omega, \\ \partial_\nu a = \sigma a & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{21}$$

这是能量为 $-\mu = -\lambda/C^2$的亥姆霍兹方程的斯捷克洛夫问题。该方程的最小特征值为

$$\sigma_{\mu,0} = \min \left\{ \int_\Omega \left(|\nabla f|^2 + \mu f^2 \right) dV_\Omega \, : \, f : \Omega \to \mathbb{R}, \int_{\partial\Omega} f^2 \, dA_{\partial\Omega} = 1 \right\}.$$

由于 $\sigma_{\mu,\,0}$ 是最小特征值，因此它是单重的。令 f_μ 为对应的特征函数。然后我们可以计算关于 μ的导数,

$$\sigma'_{\mu,0} = 2 \int_\Omega \left(\nabla f_\mu \cdot \nabla f'_\mu + \mu f_\mu f'_\mu \right) dV_\Omega + \int_\Omega f_\mu^2 \, dV_\Omega.$$

我们断言右侧的第一个积分为零。事实上，函数 f_μ 满足与 (21) 对应的弱方程:

$$\int_\Omega \left(\nabla f_\mu \cdot \nabla v + \mu f_\mu v \right) dV_\Omega = \sigma \int_{\partial\Omega} f_\mu v \, dA_{\partial\Omega} \qquad \forall v \in C^\infty(\Omega).$$

以 $v = f'_\mu$ 作为检验函数，得到

$$\int_\Omega \left(\nabla f_\mu \cdot \nabla f'_\mu + \mu f_\mu f'_\mu \right) dV_\Omega = \sigma \int_{\partial\Omega} f_\mu f'_\mu \, dA_{\partial\Omega}.$$

现在，对归一化式 $\int_{\partial\Omega} f_\mu^2 = 1$ 关于 μ求导，得到 $\int_{\partial\Omega} f_\mu f'_\mu \, dA_{\partial\Omega} = 0$, 从而证明了该结论。因此

$$\sigma'_{\mu,0} = \int_\Omega f_\mu^2 \, dV_\Omega = \frac{\int_\Omega f_\mu^2 \, dV_\Omega}{\int_{\partial\Omega} f_\mu^2 \, dA_\Omega}.$$

特别地，若在 $\mu = 0$处计算导数，并利用 f_0 为常数这一事实，可得

$$\frac{d}{d\mu}\sigma_{\mu,0}\Big|_{\mu=0} = \frac{|\Omega|}{|\partial\Omega|}.$$

现在，为了证明定理 1.2 的 (4)，我们计算：

$$\lim_{C\to\infty} C^2\sigma_{\lambda_k/C^2,0} = \lim_{C\to\infty} \lambda_k \frac{\sigma_{\lambda_k/C^2,0} - \sigma_{0,0}}{\lambda_k/C^2} = \lambda_k\sigma'_{0,0} = \lambda_k|\Omega|/|\partial\Omega|.$$

最后注意，对于 $\lambda = \lambda_k$ 且满足 $k \geq 1$的情形，取常函数 $a = 1$ 作为试探函数可得

$$\sigma_{\lambda_k,0}(C) \leq \frac{\lambda_k|\Omega|}{C^2|\partial\Omega|}. \tag{22}$$

另一方面，$\sigma_{\lambda_k,\ 1}(C) \geq \sigma_{0,\ 1}(C) = \sigma_1(\Omega)$。由此可知，若 C 足够大，则 M_C 的前 $k+1$ 个特征值恰好为 $\sigma_{\lambda_j,\ 0}(M_C)$、$j = 0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ k$。特别地，$\lim_{C\to\infty} C^2\sigma_k(M_C) = \lim_{C\to\infty} C^2\sigma_{\lambda_k/C^2,\ 0}$，这就完成了定理 1.2 的 (4) 的证明。

2.3. **近乎正交**。设 N 为一个闭黎曼流形。给定一个光滑函数 $f \in C^\infty([0,\varepsilon]\times N)$，对每个 $t \in [0,\varepsilon]$ 我们定义

$$f_t := f|_{\{t\}\times N}.$$

若函数序列 $(f_j) \in C^\infty([0,\varepsilon]\times N)$ 满足 $(f_j)_0$ 在 $L^2(N\times\{0\})$ 中构成一个标准正交族，则接下来的两个引理将用于证明 $(f_j)_t$ 近似标准正交，其偏差由这些函数的狄利克雷能量控制。这些结果将用于不等式 (3) 的证明，也将用于定理 1.9 的证明。

引理 2.2。设 N 是一个闭黎曼流形。令 $f \in C^\infty([0,\varepsilon]\times N)$。对于 $t \in [0,\varepsilon]$，定义 $f_t := f|_{\{t\}\times N}$。对所有$t \in [0,\varepsilon]$，下式成立：

$$\left|\|f_\varepsilon\|_{L^2(N)} - \|f_t\|_{L^2(N)}\right|^2 \leq (\varepsilon - t)\int_{[t,\varepsilon]\times N} |df|^2\, dV_N.$$

证明。由微积分基本定理和柯西–施瓦茨不等式可得

$$(f_\varepsilon(x) - f_t(x))^2 = \left(\int_t^\varepsilon \frac{\partial f}{\partial s}(s,x)ds\right)^2 \leq (\varepsilon - t)\int_t^\varepsilon \left|\frac{\partial f}{\partial s}(s,x)\right|^2 ds.$$

对 N 积分可得

$$\|f_\varepsilon - f_t\|^2_{L^2(N)} \leq (\varepsilon - t)\int_{[t,\varepsilon]\times N} \left|\frac{\partial f}{\partial s}\right|^2 \leq (\varepsilon - t)\int_{[t,\varepsilon]\times N} |df(s,x)|^2. \tag{23}$$

利用三角不等式即可完成证明：

$$\left|\|f_\varepsilon\|_{L^2(N)} - \|f_t\|_{L^2(N)}\right|^2 \le (\varepsilon - t)\int_{[t,\varepsilon]\times N} |df(s,x)|^2.$$

□

对于两个函数的乘积，也有一个类似的结果。

引理 2.3。设 N 是一个闭黎曼流形。设 $f, f \in C^\infty([0,\varepsilon]\times N)$。对于 $t \in [0,\varepsilon]$，定义 $f_t := f|_{\{t\}\times N}$ 和 $f_t := f|_{\{t\}\times N}$。那么对于 $t < \varepsilon$，

$$\begin{aligned}\left|\int_N f_\varepsilon(x)\tilde{f}_\varepsilon(x)dx - \int_N f_t(x)\tilde{f}_t(x)dx\right| \\ \le |\varepsilon - t|^{1/2}\left(\left(\int_{[t,\varepsilon]\times N}|df|^2\right)^{1/2}\left(\int_N \tilde{f}_\varepsilon^2\right)^{1/2}\right. \\ \left. + \left(\int_{[t,\varepsilon]\times N}|d\tilde{f}|^2\right)^{1/2}\left(\int_N f_t^2\right)^{1/2}\right).\end{aligned}$$

证明。我们有

$$f_\varepsilon(x)\tilde{f}_\varepsilon(x) - f_t(x)\tilde{f}_t(x) = (f_\varepsilon(x) - f_t(x))\tilde{f}_\varepsilon(x) + (\tilde{f}_\varepsilon(x) - \tilde{f}_t(x))f_t(x).$$

与引理 2.2 的证明一样，我们可知

$$|f_\varepsilon(x) - f_t(x)| \le |\varepsilon - t|^{1/2}\left(\int_t^\varepsilon \left|\frac{\partial f}{\partial s}(s,x)\right|^2 ds\right)^{1/2},$$

$$|\tilde{f}_\varepsilon(x) - \tilde{f}_t(x)| \le |\varepsilon - t|^{1/2}\left(\int_t^\varepsilon \left|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial s}(s,x)\right|^2 ds\right)^{1/2}.$$

对 N 积分，我们得到

$$\begin{aligned}\int_N |(f_\varepsilon(x) - f_t(x))\tilde{f}_\varepsilon(x)| \\ \le \left(\int_N |f_\varepsilon(x) - f_t(x)|^2\right)^{1/2}\left(\int_N \tilde{f}_\varepsilon^2(x)\right)^{1/2} \\ \le |\varepsilon - t|^{1/2}\left(\int_N\int_t^\varepsilon \left|\frac{\partial f}{\partial s}(s,x)\right|^2\right)^{1/2}\left(\int_N \tilde{f}_\varepsilon^2(x)\right)^{1/2} \\ \le |\varepsilon - t|^{1/2}\left(\int_{[t,\varepsilon]\times N}|df|^2\right)^{1/2}\left(\int_N \tilde{f}_\varepsilon^2(x)\right)^{1/2},\end{aligned}$$

同理

$$\int_N |(\tilde{f}_\varepsilon(x) - \tilde{f}_t(x)) f_t(x)| \leq |\varepsilon - t|^{1/2} \left(\int_{[t,\varepsilon]\times N} |d\tilde{f}|^2 \right)^{1/2} \left(\int_N f_t^2(x) \right)^{1/2}.$$

□

2.4. **Steklov特征值与拟等距**。 本节回顾拟等距的定义，以及拟等距下 Steklov 特征值的相关结果，因为这些概念将在证明 (3) 和 (9) 时发挥作用。这些结果与 [1] 中的结果完全相同。

定义 2.4。 流形 M 上的两个黎曼度量 g_1 和 g_2 若满足以下条件，则称为比率为 $K \geq 1$ 的拟等距度量：对所有 $q \in M$ 以及所有非零 $v \in T_qM$，

$$\frac{1}{K} \leq \frac{g_1(v,v)}{g_2(v,v)} \leq K.$$

更一般地，两个黎曼流形之间的微分同胚 $\phi : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ 若 $\phi^\star g_2$ 与 g_1 比率为 K 地拟等距，则称其为比率为 K 的拟等距。

以下结果是 [1, 命题 2.4]。

命题 2.5。 设 M 是一个维数为 m 的黎曼流形。若 g_1 和 g_2 是 M 上的两个黎曼度量，且它们以比例 K 拟等距，则相对于 g_1 和 g_2 的 *Steklov*特征值满足

$$\frac{1}{K^{m+1/2}} \leq \frac{\sigma_k(M, g_1)}{\sigma_k(M, g_2)} \leq K^{m+1/2}.$$

下面的引理将使我们能够在接下来的 (3) 和 (9) 的证明中使用引理 2.2 和引理 2.3。

引理 2.6。 给定 $\rho > 0$，经典方法可在Ω上构造一个新的黎曼度量 g_ρ，使其具有以下性质：

- $g_\rho = g_\Omega$ 在 $\partial\Omega$上，
- g_ρ 与初始度量 g_Ω 拟等距，比例为 $1 + \rho$，
- 存在 $\delta = \delta(\rho) \to 0$，使得对于 $\rho \to 0$，在邻域 $T_\delta = \{q \in \Omega : d_{g_\Omega}(q, \partial\Omega) < \delta\}$ 中，(T_δ, g_ρ) 与乘积 $(\partial\Omega\ g_\rho) \times [0, \delta]$ 等距。

该引理可通过利用 [1, 命题 2.2]使边界 $\partial\Omega$ 的一个邻域等距于一个乘积，并随后完全按照 [4] 中第 2822–23 页定理 1.1 的证明，将度量延拓至 Ω 得出。

3. 定理的证明

本节将证明主要定理。

3.1. 定理 1.2 的证明。 粗略地说，定理 1.2 的证明思路如下：通常，求出特征值的上界很容易，但要证明这些上界是锐的（如果确实如此）却很困难。

不等式 *(1)* 的证明。 在 (19) 中，我们已经得到

$$\sigma_k(M_h) \leq \lambda_k \frac{\int_\Omega h^{n-2}\, dV_\Omega}{\int_{\partial\Omega} h^n\, dA_{\partial\Omega}}.$$

这个不等式必须是严格的。事实上，如果 $\sigma_{\lambda_k,0}(h) = \lambda_k \frac{\int_\Omega h^{n-2}\, dV_\Omega}{\int_{\partial\Omega} h^n\, dA_{\partial\Omega}}$，那么$a \equiv 1$ 必定是对应于 $\sigma_{\lambda_k,0}(h)$ 的特征函数。然而，特征值方程的强形式给出： $0 = L_h a + \lambda_k h^{-2} a = \lambda_k h^{-2} a$. 由此可知 $\lambda_k = 0$，这与假设矛盾。 □

不等式 (2)。 注意，由不等式 (1)，利用 $h \leq C$ 在 Ω 上以及 $h = 1$ 在 $\partial\Omega$ 上，可得

$$\sigma_k(M_h) < C^{n-2} \frac{\lambda_k |\Omega|}{|\partial\Omega|}.$$

为证明不等式 (2)，对于 $a \in W^{1,\,2}(\Omega)$ 和固定的 $\lambda > 0$，由于 $h = 1$ 在 $\partial\Omega$ 上，我们有

$$\begin{aligned} R_{\lambda,h}(a) &= \frac{\int_\Omega (|da|^2 h^n + \lambda a^2 h^{n-2})\, dV_\Omega}{\int_{\partial\Omega} a^2\, dA_{\partial\Omega}} \\ &\leq \frac{\int_\Omega (|da|^2 C^n + \lambda a^2 C^{n-2})\, dV_\Omega}{\int_{\partial\Omega} a^2\, dA_{\partial\Omega}} = C^n \frac{\int_\Omega (|da|^2 + \frac{\lambda}{C^2} a^2)\, dV_\Omega}{\int_{\partial\Omega} a^2\, dA_{\partial\Omega}}, \end{aligned}$$

以及表达式

$$\frac{\int_\Omega (|da|^2 + \frac{\lambda}{C^2} a^2)\, dV_\Omega}{\int_{\partial\Omega} a^2\, dA_{\partial\Omega}}$$

是乘积度量 $g_C = g_\Omega \oplus C^2 g_\Sigma$ 的瑞利商。若 λ_k 是 $(\Sigma,\ g_\Sigma)$ 的第 k 个特征值，我们注意到 $\frac{\lambda_k}{C^2}$ 是 $(\Sigma,\ C^2 g_\Sigma)$ 的第 k 个特征值。因此，由 (18) 得，

$$\sigma_k(M_h) \leq \sigma_{\lambda_k,0}(h)$$

$$
\begin{aligned}
&= \min\left\{ R_{\lambda_k,h}(a) : a \in W^{1,2}(\Omega)\setminus\{0\} \right\} \\
&\le \min\left\{ C^n \frac{\int_\Omega (|da|^2 + \frac{\lambda_k}{C^2}a^2)\, dV_\Omega}{\int_{\partial\Omega} a^2\, dA_{\partial\Omega}} : a \in W^{1,2}(\Omega)\setminus\{0\} \right\} \qquad (24)\\
&= C^n \sigma_k(M_C).
\end{aligned}
$$

该不等式必须是严格的：在相等的情形下，存在一个特征函数 a，满足

$$
\frac{\int_\Omega (|da|^2 h^n + \lambda_k a^2 h^{n-2})\, dV_\Omega}{\int_{\partial\Omega} a^2\, dA_{\partial\Omega}} = \frac{\int_\Omega (|da|^2 C^n + \lambda_k a^2 C^{n-2})\, dV_\Omega}{\int_{\partial\Omega} a^2\, dA_{\partial\Omega}},
$$

so

$$
|da|^2(h^n - C^n) + \lambda_k a^2 (h^{n-2} - C^{n-2}) = 0 \text{ almost everywhere.}
$$

由于 $h < C$ 在 $\partial\Omega$ 的一个邻域内，a 必须在该邻域内等于 0，这不可能。

将 $a = 1$ 作为检验函数代入 (24)，得到

$$
C^n \sigma_k(M_C) \le C^{n-2} \frac{\lambda_k |\Omega|}{|\partial\Omega|}.
$$

不等式必须是严格不等式这一事实，可用证明不等式 (1) 中的相同论证得出。□

命题 *(3)* 的证明。 根据不等式 (2)，我们已经有

$$
\sup\{\sigma_k(M_h), h \le C, h = 1 \text{ on } \partial\Omega\} \le C^n \sigma_k(M_C).
$$

但要证明上确界等于 $C^n\sigma_k(M_C)$ 则更加困难。

证明这一事实的思路本身很简单：我们构造一个度量族 $g(h_t) = g_\Omega \oplus h_t^2 g_\Sigma$, $0 < t < 1$，其中 h_t 在 $\partial\Omega$上取值为 1，而在 $\partial\Omega$外宽度为 t 的小邻域之外取值为 C。我们可以期望，当 $t \to 0$时，$g(h_t)$的谱将收敛到 $C^n\sigma_k(M_C)$。困难在于，特征值 $\sigma_k(M_{h_t})$依赖于 t，这使得比较变得更加微妙。

我们分三步进行构造：

(i) 首先，我们将 Ω 上的度量 g_Ω 替换为一个新度量 g_ρ，该度量与 g_Ω 非常接近，并且在 Ω 的邻域 ∂ 内与乘积 $\partial\Omega \times I$ 拟等距，其中 I 是一个小区间。(ii) 接下来，我们引入一个严格包含于 Ω 内的区域 Ω_δ，它与 (Ω g_ρ) 拟等距。

(iii) 随后，我们构造一族扭曲函数，它们在 $\partial\Omega$ 上取值 1，在 Ω_δ 上取值 C。借助引理 2.3，我们可以据此比较特征值 $\sigma_k(M_h)$ 与特征值 $C^n\sigma_k(M_C)$。

首先，引理 2.6 给出 (i)。接下来，为了实现 (ii)，我们引入区域 $\Omega_\delta \subset\Omega$，其中

$$\Omega_\delta = \{p \in \Omega : d_{g_\rho}(p, \partial\Omega) \geq \delta^2\}.$$

黎曼流形 $(\Omega_\delta,\ g_\rho)$ 与 $(\Omega\ g_\rho)$ 拟等距，比例为 $1+\delta$。事实上，这是因为区间 $[\delta^2, \delta]$和 $[0, \delta]$ 拟等距，比例为 $1+\delta$。

至此，我们有三个黎曼流形，它们彼此拟等距，比例接近 1：$(\Omega\ g_\Omega)$、$(\Omega\ g_\rho)$ 和 $(\Omega_\delta,\ g_\rho)$。

为了实现 (iii)，我们接着考虑 $(\Omega\ g_\rho) \times(\Sigma,\ g_\Sigma)$，它与 $(\Omega\ g_\Omega) \times(\Sigma,\ g_\Sigma)$ 拟等距，比例接近 1。这意味着，对于任意 h，两个扭曲积度量 $g_\Omega \oplus h^2 g_\Sigma$和 $g_\rho \oplus h^2 g_\Sigma$ 也拟等距，比例接近 1。对于 $(\Omega\ g_\rho) \times(\Sigma,\ g_\Sigma)$，同样的性质也成立；它与 $(\Omega_\delta,\ g_\rho) \times(\Sigma,\ g_\Sigma)$ 拟等距。

现在，我们可以在 Ω 上构造一族扭曲函数 h_δ：它们在 $\partial\Omega$ 上取值为 1，在 Ω_δ 上取值为 C，并且在 $\Omega \setminus \Omega_\delta$ 上满足$1 \leq h_\delta \leq C$。特别地，由于 $h = C$在 Ω_δ 上，我们注意到 $(\Omega\ g_\rho) \times_C(\Sigma,\ g_\Sigma)$ 与 $(\Omega_\delta,\ g_\rho) \times_C(\Sigma,\ g_\Sigma)$ 拟等距。

我们固定 Σ 的一个特征值 λ，并比较 $\sigma_{\lambda,\ i}((\Omega\ g_\rho) \times_{h_\delta} \Sigma)\tilde{}$ 与 $\sigma_{\lambda,\ l}((\Omega_\delta,\ g_\rho) \times_{h_\delta} \Sigma)$。令 f，f 和 $\sigma_{\lambda,\ j}$ 分别为 $\sigma_{\lambda,\ i}((\Omega\ g_\rho) \times_{h_\delta} \Sigma)$、$g_\rho$，$g_\rho$ $((\Omega\ g_\rho) \times_{h_\delta} \Sigma)$ 的归一化特征函数，使得

$$\int_{\partial\Omega} f\tilde{f} = \delta_{ij}$$

$\tilde{}$ $\tilde{}$并考虑 f, f在 Ω_δ 上的限制。由于 $T_\delta = \{p \in\Omega :\ d_{g_\Omega}(p, \partial\Omega) < \delta\}$，我们有 (T_δ, g_ρ) 与乘积 $(\partial\Omega\ g_\rho) \times [0, \delta]$ 等距。在邻域 T_δ 中，我们可以对 $t = 0$ 和 $\varepsilon = \delta$ 应用引理 2.3，从而得到

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\partial\Omega_\delta} f_\delta(x)\tilde{f}_\delta(x)dx - \int_{\partial\Omega} f(x)\tilde{f}(x)dx \right| \\
&\qquad \leq |\delta|^{1/2} \left(\left(\int_{[0,\delta]\times\partial\Omega} |df|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\partial\Omega} \tilde{f}_\delta^2 \right)^{1/2} \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \left(\int_{[0,\delta]\times\partial\Omega} |d\tilde{f}|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\partial\Omega} f^2 \right)^{1/2} \right)
\end{aligned}$$

$$\leq |\delta|^{1/2}\left(\sigma_{\lambda,i}((\Omega,g_\rho)\times_{h_\delta}\Sigma)^{1/2}\left(\int_{\partial\Omega}\tilde{f}_\delta^2\right)^{1/2}\right.$$
$$\left.+\left(\sigma_{\lambda,j}((\Omega,g_\rho)\times_{h_\delta}\Sigma)\right)^{1/2}\left(\int_{\partial\Omega}f^2\right)^{1/2}\right).$$

现在 $\int_{\partial\Omega}f^2=1$，并且根据引理 2.2,

$$\left|\|\tilde{f}_\delta\|_{L^2(\partial\Omega)}-\|\tilde{f}\|_{L^2(\partial\Omega)}\right|\leq\delta^{1/2}\left(\int_{[0,\delta]\times\partial\Omega}|df|^2\,dV\right)^{1/2},$$

˜ ˜因此 $\|f_\delta\|_{L^2(\partial\Omega)}\to\|f\|_{L^2(\partial\Omega)}$ </style}如 $\rho\to 0$。因此

$$\int_{\partial\Omega_\delta}f_\delta\tilde{f}_\delta=\delta_{ij}+o(1),$$

如 $\rho\to 0$。

此外

$$\int_{\Omega_\delta}(|df|^2h_\delta^n+\lambda f^2h_\delta^{n-2})dV_\Omega<\int_{\Omega}(|df|^2h_\delta^n+\lambda f^2h_\delta^{n-2})dV_\Omega$$

˜对于 f，同样成立。

因此，根据极小极大刻画，我们可推得，对于固定的k 以及 $l\leq k$,

$$\sigma_{\lambda,l}((\Omega_\delta,g_\rho)\times_{h_\delta}\Sigma)\leq\sigma_{\lambda,l}((\Omega,g_\rho)\times_{h_\delta}\Sigma)+o(1)$$

如 $\rho\to 0$。

由于 $(\Omega_\delta,\ g_\rho)\times_{h_\delta}\Sigma=(\Omega_\delta,\ g_\rho)\times_C\Sigma$ 和 $(\Omega_\delta,\ g_\rho)\times_C\Sigma$ 与 $(\Omega\ g_\rho)\ \times_C\Sigma$ 拟等距，且比率接近 1，因此得到结论。□

恒等式 (4) 已在第 2.2 节中证明。

3.2. **定理 1.4 的证明**。本节将对不等式 (1) 作定量改进，由此可推出定理 1.4。

命题 3.1. </style}令 Ω 为一个子区域，并考虑一个连续函数 f，其支撑于 D，且处处满足 $f\geq 0$，并在 D的内部满足 $f>0$。于是,

$$\sigma_k(M_h)\leq-\frac{\lambda_k^2(\int_D fh^{n-2}\,dV_\Omega)^2}{\int_D(|df|^2h^n+\lambda_kf^2h^{n-2})\,dV_\Omega}\left(\int_{\partial\Omega}h^n\,dA_{\partial\Omega}\right)^{-1}+\lambda_k\frac{\int_\Omega h^{n-2}\,dV_\Omega}{\int_{\partial\Omega}h^n\,dA_{\partial\Omega}}.$$

证明。 对于 $t \in \mathbb{R}$，我们有

$$R_{\lambda_k,h}(1-tf) = \frac{\int_\Omega (t^2|df|^2h^n + \lambda_k(1-tf)^2h^{n-2})\,dV_\Omega}{\int_{\partial\Omega} h^n\,dA_{\partial\Omega}}$$

$$= \frac{t^2(\int_D (|df|^2h^n + \lambda_k f^2h^{n-2})\,dV_\Omega) - 2\lambda_k t\int_D fh^{n-2}\,dV_\Omega}{\int_{\partial\Omega} h^n\,dA_{\partial\Omega}} + \lambda_k\frac{\int_\Omega h^{n-2}\,dV_\Omega}{\int_{\partial\Omega} h^n\,dA_{\partial\Omega}},$$

这里我们用到了 $f=0$ 在 $\partial\Omega$ 上。该表达式关于 t是二次的，其最小值在下列条件下取得

$$t = t_0 := \frac{\lambda_k\int_D fh^{n-2}\,dV_\Omega}{\int_D (|df|^2h^n + \lambda_k f^2h^{n-2})\,dV_\Omega}.$$

因此，$R_{\lambda_k,h}(1-tf)$ 的最小值带来了对不等式 (1) 的如下改进:

$$\sigma_k(M_h) \le \sigma_{\lambda_k,0}(h) \le R_{\lambda_k,h}(1-t_0f)$$

$$= -\frac{\lambda_k^2(\int_D fh^{n-2}\,dV_\Omega)^2}{\int_D (|df|^2h^n + \lambda_k f^2h^{n-2})\,dV_\Omega}\left(\int_{\partial\Omega} h^n\,dA_{\partial\Omega}\right)^{-1} + \lambda_k\frac{\int_\Omega h^{n-2}\,dV_\Omega}{\int_{\partial\Omega} h^n\,dA_{\partial\Omega}}.$$

□

为证明定理 1.4，我们考虑 $h\equiv 1$ 在 $\partial\Omega$ 上且纤维维数为 $n=2$的情形:

$$\sigma_k(M_h) \le \frac{-\lambda_k^2(\int_D f\,dV_\Omega)^2}{|\partial\Omega|\int_D (|df|^2h^2 + \lambda_k f^2)\,dV_\Omega} + \lambda_k\frac{|\Omega|}{|\partial\Omega|}. \tag{25}$$

设 $\delta := \frac{\lambda_k|\Omega|}{|\partial\Omega|} - \sigma_k(M_h) > 0$。若 D 是一个球 $B(q,r)\subset\Omega$，则令f: $D\to\mathbb{R}$ 由 $f(x) = d(x,\partial D)$ 定义。于是我们可以计算$|df|=1$ 和 $f\le r$，以及 $f\ge r/2$在 $B(q,\frac{r}{2})$ 上的值，从而得到

$$\sigma_k(M_h) \le \frac{-\lambda_k^2r^2|B(q,\frac{r}{2})|}{4|\partial\Omega|(\int_D h^2 + \lambda_k r^2|D|)} + \lambda_k\frac{|\Omega|}{|\partial\Omega|}.$$

由此可得

$$\frac{\lambda_k^2r^2|B(q,\frac{r}{2})|}{4|\partial\Omega|(\int_D h^2 + \lambda_k r^2|D|)} \le \delta,$$

and

$$\int_D h^2dV_\Omega \ge \frac{\lambda_k r^2}{4\delta}\frac{|B(q,\frac{r}{2})|}{|\partial\Omega|} - \lambda_k r^2|D|$$

如所要求。
由此可得（7），从而完成定理 1.4 的证明。

3.3. **关于 L^p-范数的上界。** 本节将证明推论 1.6、定理 1.9 和定理 1.10，它们都有一个共同约束： h的 L^p-范数有界。

推论 *1.6* 的证明。 由于在 Ω 上 $h = 1$ ，不等式 (1) 变为

$$\sigma_k(M_h) < \frac{\lambda_k}{|\partial\Omega|}\int_\Omega h^{n-2}dV_\Omega.$$

利用 $p \geq n-2 \geq 1$ 和 $|\Omega| < \infty$，再应用共轭指数为 $\frac{p}{n-2}$ 和 $\frac{p}{p-n+2}$ 的 Hölder 不等式，可得—

$$\int_\Omega h^{n-2}dV_\Omega \leq \|h\|_{L^p}^{n-2}|\Omega|^{(p-(n-2))/p}.$$

因此

$$\sigma_k(M_h) < \frac{\lambda_k\|h\|_{L^p}^{n-2}|\Omega|^{(p-(n-2))/p}}{|\partial\Omega|}.$$

□

接下来，我们证明定理 1.9。

定理 *1.9* 的证明。 根据引理 2.6，经过拟等距变换后，当 ε充分小时，我们可以假设该邻域

$$\{p \in \Omega : d(p, \partial\Omega) \leq 2\epsilon\}$$

等距于 $\partial\Omega \times [0, 2\epsilon]$。我们有 $|\partial\Omega \times [\varepsilon, 2\varepsilon]| = \varepsilon|\partial\Omega|$.

我们选择 $h_\varepsilon = \left(\frac{C}{2\varepsilon|\partial\Omega|}\right)$ 于 $[\varepsilon, 2\varepsilon]$ 上，使得 $\int_{\partial\Omega\times[\varepsilon,2\varepsilon]} h_\varepsilon^p = \frac{C}{2}$，并对 h_ε 进行延拓，使其满足：(i) $\int_\Omega h_\varepsilon^p \leq C$，以及 (ii) $h_\varepsilon \geq D$ 于 $[0, 2\varepsilon]$ 上。这里， D 只是一个正常数：我们必须避免 $h_\varepsilon \to 0$ 落在区间$[0, 2\varepsilon]$内。

第一特征值 $\sigma_1(M_{h_\varepsilon})$ 是 $\sigma_{0,\ 1}(h_\varepsilon)$ 和 $\sigma_{\lambda_1,\ 0}(h_\varepsilon)$ 中的较小者。我们分别考虑这两种情形，并旨在证明在每种情形下， $\sigma_1(M_{h_\varepsilon}) \to \infty$ 当 $\varepsilon \to 0$ 时成立。

，$_0$ 情形。令 a 为对应于 $\sigma_{\lambda_1,\ 0}$ 的特征函数，使得 $\int_{\partial\Omega} a^2 = 1$。我们将此函数 a 视为定义在 $\partial\Omega \times [\varepsilon, 2\varepsilon]$ 上的函数。

第一种情况： 如果对每个 $t \in [\varepsilon, 2\varepsilon]$, $\int_{\partial\Omega\times\{t\}} a^2(x,t) \geq \frac{1}{2}$，那么，由于$n-2 > p$ 且 $\lambda_1(\Sigma) > 0$，我们有

$$\int_{\partial\Omega\times[\varepsilon,2\varepsilon]} \lambda_1(\Sigma)a^2h^{n-2} \geq \lambda_1(\Sigma)\frac{1}{2}\varepsilon h_\varepsilon^{n-2}$$

$$= \frac{\lambda_1(\Sigma)}{2}\left(\frac{C}{2|\partial\Omega|}\right)^{(n-2)/p}\varepsilon^{(p-n+2)/p} \to \infty$$

如 $\varepsilon \to 0$。

第二种情况： 在这种情况下，存在 $t \in [\varepsilon, 2\varepsilon]$ 使得 $\int_{\partial\Omega\times\{t\}} a^2(x,t) < 1$ 2。我们使用引理 2.2 的证明中的 (23)，取 $f = a$，得到：

$$\left|\int_{\partial\Omega} a^2(x,t)dA_{\partial\Omega} - \int_{\partial\Omega} a^2(x,0)dA_{\partial\Omega}\right| \le |t|^{1/2}\left(\int_{\partial\Omega\times[0,t]} |da(x,s)|^2 dV_\Omega\right)^{1/2},$$

并且，由于 $\int_{\partial\Omega} a^2(x,0)dA_{\partial\Omega} = 1$，这意味着

$$\int_{\partial\Omega\times[0,t]} |da(x,s)|^2 dV_\Omega \ge \frac{1}{8\varepsilon}$$

so

$$\int_{\partial\Omega\times[0,t]} |da(x,s)|^2 h_\varepsilon^n dV_\Omega \ge \frac{D^n}{8\varepsilon}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时，它趋于 ∞。

情形 $\sigma_{0,1}$。设 a是对应于 $\sigma_{0,1}$的特征函数。我们注意到，特征函数 a 必须与 $\partial\Omega$ 上对应于 $\sigma_{0,0}$的特征函数正交，也就是常函数。因此，我们有

$$\int_{\partial\Omega} a^2(x,0)dA_{\partial\Omega} = 1, \quad \int_{\partial\Omega} a(x,0)dA_{\partial\Omega} = 0.$$

我们考虑乘积 $\partial\Omega \times [\varepsilon, 2\varepsilon]$中的函数 a。

第一种情况： 假设 $\int_{\partial\Omega\times[\varepsilon,2\varepsilon]} |da|^2 dV_\Omega \le 1$。那么，与前面一样，

$$\int_{\partial\Omega\times[\varepsilon,2\varepsilon]} |da|^2 h_\varepsilon^n dV_\Omega \ge \left(\frac{C}{2\varepsilon|\partial\Omega|}\right)^{n/p} \to \infty$$

如 $\varepsilon \to 0$。

第二种情况： 假设 $\int_{\partial\Omega\times[\varepsilon,2\varepsilon]} |da|^2 dV_\Omega \le 1$。

如果 $\int_{\partial\Omega\times[0,\varepsilon]} |da|^2 dV_\Omega \ge \frac{1}{\varepsilon^{1/2}}$，那么，由于 $h_\epsilon \ge D$ 在 $[0,\varepsilon]$ 上，我们将有

$$\sigma_{0,1}(M, h_\varepsilon) \ge \int_{\partial\Omega\times[0,\varepsilon]} |da|^2 h_\varepsilon^n dV_\Omega \ge \frac{D^n}{\varepsilon^{1/2}} \to \infty$$

如 $\varepsilon \to 0$。

因此，剩下的情形是考虑 $\int_{\partial\Omega\times[0,\varepsilon]} |da|^2 dV_\Omega \le \frac{1}{\varepsilon^{1/2}}$。对于每个 $t \in [\varepsilon, 2\varepsilon]$，由引理 2.2 可得

$$\left|\|a(\cdot,t)\|_{L^2(\partial\Omega)} - \|a(\cdot,0)\|_{L^2(\partial\Omega)}\right|^2 \le t\int_{[0,t]\times\partial\Omega} |da|^2 dV_\Omega$$

$$\leq 2\varepsilon \int_{[0,2\varepsilon]\times\partial\Omega} |da|^2 \, dV_\Omega$$
$$\leq 2\varepsilon^{1/2}(1+\varepsilon^{1/2}).$$

因此，$\int_{\partial\Omega} a^2(x,t) dA_{\partial\Omega} = 1 + o(1)$，因为 $\varepsilon \to 0$。此外，由引理 2.3，结合 $f = a$ 和 $f = 1$，可得

$$\left| \int_{\partial\Omega} a(x,t) dA_{\partial\Omega} - \int_{\partial\Omega} a(x,0) dA_{\partial\Omega} \right| \leq t^{1/2} |\partial\Omega|^{1/2} \left(\int_{[0,t]\times\partial\Omega} |da|^2 dV_\Omega \right)^{1/2}$$
$$\leq (2\varepsilon)^{1/2} |\partial\Omega|^{1/2} \left(\int_{[0,2\varepsilon]\times\partial\Omega} |da|^2 dV_\Omega \right)^{1/2}$$
$$\leq |\partial\Omega|^{1/2} (2\varepsilon^{1/2}(1+2\varepsilon^{1/2}))^{1/2}.$$

因此 $\int_{\partial\Omega} a(x,t) dA_{\partial\Omega} = o(1)$，当 $\varepsilon \to 0$ 时。
由此我们推出 $\int_{\partial\Omega\times\{t\}} |da|^2 dA_{\partial\Omega} \geq (\lambda_1(\partial\Omega) + o(1)) \int_{\partial\Omega\times\{t\}} a^2(x,t) dA_{\partial\Omega}$ 并且

$$\int_{\partial\Omega\times[\varepsilon,2\varepsilon]} |da|^2 dV_\Omega \geq (\lambda_1(\partial\Omega) + o(1)) \int_{\partial\Omega\times[\varepsilon,2\varepsilon]} a^2(x,t) dV_\Omega = O(\varepsilon).$$

由于 $\partial\Omega$ 是连通的，我们有 $\lambda_1(\partial\Omega) > 0$，这意味着

$$\int_{\partial\Omega\times[\varepsilon,2\varepsilon]} |da|^2 h_\varepsilon^n dV_\Omega \to \infty$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时。 □

注 3.2. 通过调整上述证明，将 $h_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^{(n-1)/(n-2)}}$ 改为 $[\varepsilon, 2\varepsilon]$，~~可得~~：若 $n \geq 3$ 且 $\partial\Omega$ 连通，则存在一列函数 $(h_\varepsilon)_\varepsilon$，它们在 Ω 的边界附近趋于无穷大，并且 $\sigma_k(M_{h_\varepsilon}) \to \infty$ 当 $\varepsilon \to 0$ 时。

最后，我们证明定理 1.10。

定理 *1.10* 的证明。 函数 h 在区间 $[0, L]$ 上一致连续，并且存在 $\delta > 0$，使得 $|x - y| \leq \delta$ 蕴含 $|h(x) - h(y)| \leq (C/L)^{1/p}$.

令偶整数 N 满足 $\frac{L}{N} \leq \delta \leq \frac{L}{N-1}$。我们引入~~区间~~ $[0, L]$ 的如下划分：$0 < \frac{L}{N} < \ldots < \frac{kL}{N} < \frac{(k+1)L}{N} < \ldots < \frac{NL}{N} = L$。~~根据假设，若~~ $\frac{kL}{N} \leq x, y \leq \frac{(k+1)L}{N}$，$|h(x) - h(y)| \leq (C/L)^{1/p}$。~~由此~~可得，对于 $\frac{kL}{N} \leq x, y \leq \frac{(k+1)L}{N}$，若 $h(x) \geq 3(C/L)^{1/p}$，~~则~~ $h(y) \geq 2(C/L)^{1/p}$。

设 M 为包含满足 $h(x) \geq 3(C/L)^{1/p}$ ~~的点~~ x 的区间数 $[\frac{kL}{N}, \frac{(k+1)L}{N}]$。在这些区间中，对所有点 y，有

$h(y) \geq 2(C/L)^{1/p}$。因此，由于 $p \geq 1$， $2^p \geq 2$ ，我们得到

$$\int_{\frac{kL}{N}}^{\frac{(k+1)L}{N}} h^p \geq \frac{2C}{N}.$$

如果我们有 M 个这样的区间，那么

$$\int_0^L h^p \geq \frac{2CM}{N}.$$

由于 $\int_0^L h^p \leq C$，我们推得 $M \leq \frac{N}{2}$。

现在考虑检验函数 a，其中 $a(0) = -1$且 $a(L) = 1$ 的定义如下：我们选取 $N/2$ 个满足 $h \leq 3(C/L)^{1/p}$ 的区间。该检验函数仅在这些区间上变化，以斜率 $\frac{4}{L}$ 递增；为保证连续，在其余所有区间上保持常数。在每个选定的区间内， $a'(x) = \frac{4}{L}$ 且 $h \leq 3(C/L)^{1/p}$ ，因此

$$\int_0^L a'(x)^2 h^n(x) \leq \frac{16}{L^2}\frac{L}{2}(3(C/L)^{1/p})^n = \frac{8 \cdot 3^n C^{n/p}}{L^{\frac{n+p}{p}}},$$

由此可得

$$\sigma_1(M_L) \leq \frac{4 \cdot 3^n C^{n/p}}{L^{\frac{n+p}{p}}}.$$

对于 $k \geq 1$，利用 (18)，并在 $\sigma_{\lambda_k,0}(h)$ 的变分刻画中取 $a = 1$ 作为检验函数，我们得到

$$\sigma_k(M_L) \leq \sigma_{\lambda_k,0}(h) \leq \frac{1}{2}\int_0^L \lambda_k h^{n-2} \leq \frac{3^{n-2}C^{(n-2)/p}}{4L^{\frac{n-2-p}{p}}}\lambda_k.$$

□

参考文献

[1]Jade Brisson. 管状挖除与Steklov特征值。*J. Geom. Anal.*, 32(5):第166号论文，24页，2022年。[2] Jade Brisson、Bruno Colbois和Katie Gittins. 旋转型度量球的Steklov特征值谱比与间隙。*Canadian Mathematical Bulletin*, 68(2):492–511，2025年。[3] Donato Cianci和Alexandre Girouard. 体积约束及局部共形变形下Steklov特征值的宽谱隙。全球分析与几何年刊, 54(4):529–539，2018年。[4] Bruno Colbois、Ahmad El Soufi和Alexandre Girouard. 固定边界且具有较大Steklov特征值的紧致流形。美国数学会会刊, 147(9):3813–3827，2019年。[5] Bruno Colbois、Alexandre Girouard和Katie Gittins. 欧几里得空间中具有指定边界的子流形的Steklov特征值。*J. Geom. Anal.*, 29(2):1811–1834，2019年。

[6] Bruno Colbois、Alexandre Girouard、Carolyn Gordon和David S her. Steklov特征值问题的若干最新进展。*Rev. Mat. Complut.*, 37(1):1–161，2024年。[7] Bruno Colbois和Sheela Verma. 旋转子流形的Steklov尖锐上界。*J. Geom. Anal.*, 31(11):11214–11225，2021年。[8] Thierry Daudé、Bernard Helffer和François Nicoleau. 扭曲积流形上Steklov特征函数的指数局部化：大象身上的跳蚤现象。*Ann. Math. Qué.*, 47(2):295–330，2023年。[9] Thierry Daudé、Niky Kamran和François Nicoleau. 扭曲积黎曼流形上Steklov反问题的稳定性。*J. Geom. Anal.*, 31(2):1821–1854，2021年。[10] Xu-Qian Fan、Luen-Fai Tam和Chengjie Yu. 环带上的Steklov特征值极值问题。*Calc. Var. Partial Differential Equations*, 54(1):1043–1059，2015年。[11] Alexandre Girouard和Iosif Polterovich. 斯捷克洛夫问题的谱几何（综述文章）。*J. Spectr. Theory*, 7(2):321–359，2017年。[12] Alexandre Girouard和Panagiotis Polymerakis. 体积约束下较大的Steklov特征值。*J. Geom. Anal.*, 34(10):第316号论文，2024年。[13] Michael Levitin、Dan Mangoubi和Iosif Polterovich.谱几何专题，Graduate Studies in Mathematics第237卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州， [2023]©2023。[14] Denis Seliutskii. 旋转超曲面Steklov特征值的上界。*Russ. J. Math. Phys.*, 32(2):399–407，2025年。[15] Léonard Tschanz. 欧几里得空间中具有两个边界分支的旋转超曲面Steklov特征值的尖锐上界。*Ann. Math.Qué.*, 48(2):489–518，2024年。[16] Changwei Xiong. 扭曲积流形上Steklov特征值间隙和谱比的最优估计。*Int. Math. Res. Not. IMRN*, (22):16938–16962，2021年。[17]Changwei Xiong. 扭曲积流形上三个Steklov特征值问题的谱。*J. Geom. Anal.*, 32(5):第153号论文，35页，2022年。Marianopolis College. 魁北克Westmount，Westmount Avenue 4873号

H3Y 1X9，加拿大电子邮箱地址：jade_brissongg@hotmail.com 数学研究所，纳沙泰尔大学，Rue Emile- Argand 11，2000 纳沙泰尔，瑞士电子邮箱地址：bruno.colbois@unine.ch 数学与统计系，Pavillon Alexandre

Vachon，拉瓦尔大学，魁北克省魁北克市，G1V 0A6，加拿大电子邮箱地址：alexandre.girouard@mat.ulaval.ca 数学科学系，杜伦大学，数学与计算机科学大楼，上蒙乔伊校区，斯托克顿路，杜伦，DH1 3LE，英国。电子邮箱地址：katie.gittins@durham.ac.uk