arXiv:2512.15438v1 [math.AG] 17 Dec 2025

由固定半径的圆所形成的圆柱面围成的区域及其形状的自然图表示

NAOKI KITAZAWA

Abstract. 我们研究由固定半径的圆所形成的圆柱面围成的区域，并研究将这些圆柱面的自然投影所表示的函数的每个水平集压缩至一维直线后得到的图。我们证明，通过简单方式从所谓的平衡树得到的一些特定树，可以实现为此类图。多位研究者介绍了关于欧几里得平面中由实代数曲线围成的区域的相关研究。其中，Bodin、Popescu-Pampu 和 Sorea 于 2022–3 开展的一项开创性研究，是一项基础性且令人惊讶的新颖研究。作者一直关注相关研究，并致力于构造映到此类区域上的自然且显式的实代数映射，以推广单位球面的典范投影。文中还讨论了这类实代数几何研究；它们不同于上世纪主要由 Nash 和 Tognoli 研究的存在性理论。

1. Introduction.

实仿射空间 $\mathbb{R}^k$ 中的区域被超曲面包围，是基本的几何与组合对象。我们关注它们的形状。我们通过图来理解这些形状：这些图是在保持典范投影的前提下，将区域压缩得到的。该图是区域的 Poincar´e-Reeb 图。更准确地说，它是将投影限制在该区域上后，把各个水平集的连通分支收缩为单点所得到的空间。

相关研究似乎具有基础性、自然性，而且近年来的发展令人惊讶。开创性研究之一是 [3]。其中研究了平面内由实代数曲线包围的区域，以及前文所述的图。通过用多项式零点集逼近曲线，可以将一个一般位置嵌入平面的图实现为某个适当构造的区域之图。受此启发，作者（基本上独自一人）为相关研究的发展作出了贡献。更准确地说，作者一直关注实代数几何中的构造与实例，这不同于主要由 Nash 和 Tognoli 开创的存在性与逼近研究。关于相关的存在性理论，请参见 [25, 30, 38]。

[12] 是关于该构造的一项相关开创性研究。这项研究的动机来自 [3]。作者由此想到，可以将其视为某一类优美光滑映射的像；这类映射推广了单位球面的典范投影，称为特殊广义映射。关于特殊广义映射，另请参阅 [32]。与此相关的

Key words and phrases. （非奇异）实代数流形与实代数映射。光滑映射。图。树。有根树。平衡有根树。里布图。庞加莱-里布图。2020 *Mathematics Subject Classification*: 05C05, 05C10, 14P05, 14P10, 14P25, 57R45, 58C05。

是，作者一直在研究莫尔斯函数的高维版本以及流形微分拓扑的应用，也就是所谓的全局奇点理论及其在流形微分拓扑中的应用。关于特殊广义映射的相关研究，参见 [24] ；另一类情形是圆形折叠映射，它通过保留映射的所有奇点构成的集合的像，推广了单位球面的典范投影，参见 [7, 8, 9], 。圆形折叠映射是全局奇点理论中的另一主题，具有微分拓扑方面的应用。作者在这一实代数情形下，给出了特殊广义映射的显式实代数构造。另请参阅 [17], ，其中包含一些补充说明。我们还补充介绍 [12]。光滑函数的 Reeb 图是一个空间，可表示为定义域流形的商空间。它与庞加莱-Reeb 图一样，是通过考察所有水平集的所有连通分支，并将每个连通分支收缩为一个点而得到的。请注意，这一概念早已在 [31] 中出现，是一个经典概念，远早于庞加莱-Reeb 图的概念。庞加莱-Reeb 图这一概念是近来才出现的，而 [3, 36, 37] 则是相关的开创性研究。Reeb 图一直是莫尔斯函数理论及相关微分拓扑中的重要而有力的工具；近来，它也应用于数学的多个领域，例如可视化。在 [12], 中，作者还研究了由该映射与到一维直线的典范投影复合而成的函数的 Reeb 图。这项研究同样受到如下问题的启发：如何在闭流形上重构具有指定 Reeb 图和水平集的优美光滑函数；相关研究主要始于 [35], ，随后有 [27, 28], ，之后还有 [10, 11]。相关研究例如参见 [13, 14, 15, 16, 21, 22] 。

与作者构造非正余维数的实代数映射有关，作者一直对平面中由圆和曲线围成的区域，以及一般实仿射空间中由超曲面围成的区域感兴趣。这项研究最初由 [20] with [18, 19], 开启，其中只研究了平面内曲线的情形。近期的 [23] 与此密切相关。文中讨论并研究了实仿射平面中由实代数曲线（主要是固定半径的圆）围成的区域，以及它们的（精细化）庞加莱-Reeb 图。

在本文中，我们首先定义一般实仿射空间中由超曲面围成的区域及其庞加莱-Reeb 图。这并不太困难。我们的主定理如下。稍后我们将严谨地说明图的具体类别。

主定理 0. 设 G 是如下有限图：构造一棵平衡树，其根为 v_0，深度为 $d \geq 1$，且同一深度上每个顶点的子节点数 $0 \leq i \leq d-1$ 始终为 $n_{c,\ i+1} \geq 2$。向这棵平衡树添加一条连接 v_0 与另一个新顶点 v_1 的新边。在这种情况下， G 可实现为某个实仿射空间中由有限个圆柱面副本围成的区域的庞加莱-Reeb 图，其中这些圆柱面的圆具有经过适当选择的固定半径。

本文的组织结构如下。下一节为预备知识，我们将更严谨地介绍或回顾有关拓扑空间、光滑流形或实代数流形（曲线和超曲面）、流形之间的映射以及（有向）图的基本概念与记号。我们还将阐释 Reeb 图、Reeb有向图和 Reeb V-有向图，并引入 RA 区域的概念。RA 区域是实仿射空间中由有限个以横截方式相交的实代数超曲面所围成的区域。作者在若干研究中探讨了维数大于 2 的这类区域，例如 [13, 14, 15, 16, 21], 。我们还定义其 Poincar´e-Reeb V-有向图，这项工作首次在本文中完成。

第三节中，我们将以更严谨、完善的方式再次陈述主要结果并予以证明。第四节中，我们还将介绍相关研究，例如作者关于将实代数映射重构到某个区域上的研究，以及作者此前关于由实代数超曲面围成的区域及其 Poincar´e-Reeb 图的结果。

利益冲突。
作者也是大阪中央先进数学研究所（OCAMI）的研究人员，受文部科学省特色联合研究中心推进计划 JPMXP0723833165 资助。他并未受雇于该研究所。本文研究工作由此计划支持，我们也对此表示感谢。

数据可用性。
本文没有附带其他数据。

2. Preliminaries.

2.1. 基本术语与记号。

2.1.1. 拓扑空间、光滑流形与映射。令 $\emptyset$ 表示空 y set.

对于拓扑空间 X 及其子空间 Y，令$\overline{Y}^X$ 表示 Y在X中的闭包。对于具有胞腔复形结构且胞腔维数有界的拓扑空间 X，其维数 $\dim X$ 被唯一地定义为一个非负整数，因此构成一个拓扑不变量。众所周知，拓扑流形具有 CW复形结构。光滑流形具有多面体结构，而某种多面体的结构众所周知是 PL流形。维数至多为 2 的拓扑空间具有唯一的多面体结构。根据 [29]，维数至多为 3 的拓扑流形也具有这一性质。此后，Int X表示（拓扑）流形 X 的内部，而 $\partial X := X$ –Int X 表示其边界。

k维欧几里得空间 $\mathbb{R}^k$ 是最简单的光滑流形，也是配备所谓标准欧几里得度量的黎曼流形，其中$\mathbb{R}:=\mathbb{R}^1$。对于每个点 $x \in \mathbb{R}^k$， $||x|| \geq 0$ 是在该度量下 x 与原点$0 \in \mathbb{R}^k$ 之间的距离。 k维单位球面 $S^k := \{x \in \mathbb{R}^{k+1} \mid ||x|| =1\}$ 是 $\mathbb{R}^{k+1}$ 的一个没有边界的 k维光滑紧子流形；当 $k \geq 1$ 时它是连通的，而当 $k = 0$时它是由两个离散点组成的集合。它也是实多项式 $||x||^2 - 1 = \Sigma_{j=1}^{k+1} {x_j}^2 - 1$ 的零点集，其中 $x := (x_1, \cdots, x_{k+1})$。 k维单位圆盘 $D^k := \{x \in \mathbb{R}^k \mid ||x|| \leq 1\}$ 是 $\mathbb{R}^k$ 的一个 k维光滑、紧致且连通的子流形，并且容易得到 $\partial D^k = S^{k-1}$。

对于 1 维光滑流形，我们也使用“曲线”一词。对于 $X \supset Y$ 中维数为 $m - 1$ 的 m 维流形的子流形 Y，我们也使用“超曲面”一词。

对于可微流形 X， $x \in X$ 处的切向量空间 T_xX 也定义为维数为 $\dim X$ 的实向量空间。设 $c : X \to Y$ 是从可微流形 X 到另一个流形 Y 的可微映射。 c 在 $x \in X$ 处的微分 $dc_x : T_xX \to T_{c(x)}Y$ 是一个线性映射。若 dc_x 的秩小于 $\dim X$ 和 $\dim Y$ 中的较小者，则称 x 为 c 的奇点，其中 $c(x)$ 是 c 的奇异值。令 $S(c)$ 表示

c 的所有奇点（奇异集）。对于实值函数 $c\colon X \to \mathbb{R}$，我们也用“临界”代替“奇异”。下文中，可微映射均指光滑映射，或属于 C^∞ 类的映射。微分同胚是没有临界点的同胚，由此可以定义微分同胚流形的概念，或等价地，定义一个流形与另一个流形微分同胚的概念。欧几里得空间 $\mathbb{R}^k$ 到 $\mathbb{R}^{k_1}$ 的典范投影为 $\pi_{k,\ k_1}\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k_1}$，其中 $\pi_{k,\ k_1}(x) = x_1$，且 $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2} = \mathbb{R}^k$，其中 k_1、$k_2 > 0$ 和 $k = k_1 + k_2$。单位球面 S^{k-1} 的典范投影是其限制。

2.1.2. 实代数对象。实代数流形是实多项式映射的零点集的若干连通分支的并，且是一个非奇异集合：它由该实多项式映射的隐函数定理定义。空间 $\mathbb{R}^k$（也称为 k 维实仿射空间）以及$S^{k-1} \subset \mathbb{R}^k$ 是最简单的例子。实代数映射是先嵌入到实仿射空间（以典范方式定义），再与典范投影$\pi_{k,\ k_1}$复合得到的。

圆是指 S^1，或以$(x_{0,1}, x_{0,2}) \in \mathbb{R}^2$ 为中心、半径为 $r > 0$ 的圆$\mathbb{R}^2$：换句话说，它是如下形式的零点集：$\{(x_1, x_2) \mid (x_1 - x_{0,1})^2 + (x_2 - x_{0,2})^2 - r = 0\}$，其中$(x_{0,1}, x_{0,2}) \in \mathbb{R}^2$ 且 $r > 0$。

实代数流形 $C \subset \mathbb{R}^{k_1}$ 在 $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}$ 中的圆柱面，是形如 $C \times \mathbb{R}^{k_2} \subset \mathbb{R}^k$的实代数流形。超平面 $\{0\} \times \mathbb{R}^{k_2} = \mathbb{R}^{k_2+1} = \mathbb{R}^k$（其中 $k_1 = 1$）是 $\mathbb{R}$中单个点的圆柱面，而该点是一个 1 度实多项式的零点集。对某个子集进行有限次变换所得的集合，其中每次变换都是平移、绕某点旋转或关于超平面 $\{0\} \times \mathbb{R}^{k_2} \subset \mathbb{R}^{k_2+1} = \mathbb{R}^k$反射，也是一个维数为 $\dim\ C + k_2$的实代数流形。如果 C 是 $\mathbb{R}^{k_1}$中某类 $\mathcal{C}_{\mathrm{R.A}}$实代数流形，那么这些实代数流形称为该类 $\mathcal{C}_{\mathrm{R.A}}$的圆柱面。例如，若 $\mathcal{C}_{\mathrm{R.A}}$ 是 $\mathbb{R}$中单个点构成的类，那么所得实代数流形就是 $\mathbb{R}^{k_2+1}$ 中的实代数超曲面，称为单点的圆柱面。在这种情况下，可得到实代数超平面，即 1 度实多项式函数的零点集。另一种情况是，若 $\mathcal{C}_{\mathrm{R.A}}$ 是圆的类，那么所得实代数超曲面称为圆的圆柱面，它们是具有某种简单形式的 2 度实多项式函数的零点集。

我们的主要结果主要考虑圆和圆的圆柱面。通过考虑以 $\partial D_C = C$ 为圆的圆盘 $D_C \subset \mathbb{R}^2$，我们可以定义圆盘的圆柱面，其边界是圆的圆柱面（C）。补集是圆盘补集的圆柱面。我们在主定理 1 和 2 中考虑这些概念。

2.1.3. 图、有向图、V-有向图和 Reeb（V-有向）图。图 G 是指一维有限连通胞腔（CW）复形，且每个 1-胞腔的闭包都同胚于 D^1。图的顶点（边）是一个 0-胞腔（分别为 1-胞腔），图中所有顶点（分别为边）的集合称为图的顶点集（分别为边集）。

同构图的概念，或者等价地说，一个图与另一个图同构的概念，是通过存在一个将一个图的顶点集映射到另一个图的顶点集的同胚来定义的。

顶点 v G 的度 $\deg(v)$ 是与 v关联的边 e 的数量，或者$e \ni v$。

非平凡图是指不同构于恰好只有一个顶点的图。树是贝蒂数为 0 的非平凡图。

有向图 $\overrightarrow{G}$ 是指每条边都有方向的图。我们可以用同样的方式为图定义这些概念。顶点 v 在图 $\overrightarrow{G}$ 中的入度（出度）$\deg_{\text{in}}(v)$（分别为 $\deg_{\text{out}}(v)$）是进入（分别为从其出发的）顶点 v的边 e 的数量。如果顶点 $v \in \overrightarrow{G}$ 满足 $\deg_{\text{in}}(v) = 0$ （分别为 $\deg_{\text{out}}(v) = 0$），则称其为源点（汇点）。

命题1. 树 G 具有如下有向图结构。

- 我们可以选择一个顶点 $v_0 \in G$。
- 我们可以在 G 上定义有向图结构 $\overrightarrow{G}$，使得恰好在 $v_{1,\,j}$这些标记为整数 $1 \le j \le l$ 的顶点处，$\deg_{\text{out}}(v_{1,\,j}) = 0$且 $\deg_{\text{in}}(v_{1,\,j}) = 1$；而在除 $v_{1,\,j}$之外的各个顶点 $l > 0$ 处，$\deg_{\text{out}}(v) \ge \deg_{\text{in}}(v) = 1$；并且特别地，$v_0$ 是 $\overrightarrow{G}$的唯一源点。

定义1. 在命题1的情形下，三元组（$\overrightarrow{G}$、v_0、$\{v_{1,j}\}_{j=1}^{l}$）称为一棵有根树，其中 $\{v_{1,j}\}_{j=1}^{l}$ 是所有顶点$v_{1,\,j}$ 满足 $\deg_{\text{in}}(v_{1,\,j}) = 1 >\deg_{\text{out}}(v_{1,\,j}) = 0$ 且为该有向图的所有汇点的向量族。此外，顶点 v_0 称为该有根树的根，而每个顶点 $v_{1.j}$ 称为该有根树的叶节点。

（1）在这种情况下，对于除 $\{v_{1,j}\}_{j=1}^{l}$的顶点之外的顶点 v，$\deg_{\text{out}}(v)$ 也称为 v 的子节点数（在有根树中）。（2）对于每个顶点 v，我们可以得到从根 v_0 沿直线唯一到达 v 所经过的所有边的向量族 $\overrightarrow{G}$。v （在有根树中）的深度定义为这些边的数量，是一个正整数：v_0 的深度为0，而有根树中的其余顶点 $v \neq v_0$ 的深度v 为正数。（3）假设对于每个顶点$v_{1,\,j}$，深度$v_{1,\,j}$ 始终为 $d > 0$。另假设深度为 $1 \le i < d$ 的顶点 v 的子节点数始终为$n_{c,\,i+1} \ge 1$，且根 v_0 的子节点数为$n_{c,\,1}$，则该有根树称为类型为（$\{n_{c,i}\}_{i=1}^{d}$、d）的平衡树：d 定义为该有根树的深度。作为一个特例，$n_{c,\,i} = 1$ 时的$1 \le i \le d$ 是一个恰好含有 $d+1$ 个顶点的所谓路径有向图。

V-有向图 $\overrightarrow{G_g}$ 是由图 G 和底层图 G 上的连续函数 $g\colon G \to \mathbb{R}$构成的有序对；该函数在每条边上均为单射，并根据 G各顶点处 g 的值的顺序，以规范方式导出有向图 $\overrightarrow{G_g}$ 的结构。

对于闭流形上的光滑函数 $c\colon X \to \mathbb{R}$，我们可以定义如下等价关系 $\sim_c$：当且仅当 X中的两个点属于某个水平集 $c^{-1}(q)$ 的同一个连通分支时，二者等价。我们得到商空间 R_c 及商映射 $q_c\colon X \to R_c$，以及满足关系 $c = \bar{c} \circ q_c$的唯一连续函数 $\bar{c}\colon R_c \to \mathbb{R}$。若 $c(S(c))$ 是有限集，则 R_c是一个图，其顶点集由以下各点组成：这些点分别对应于 c 的水平集连通分支，且这些分支包含 c的奇异集 $S(c)$ 中的某些点。这就是 c的 Reeb 图。我们可以赋予其 V-有向图结构 $\overrightarrow{R_{c\bar{c}}}$。这就是 c 的 Reeb（V-）有向图。这些概念并未直接出现在我们的主要结果中。然而，它们对于我们的一个重要概念——由实

代数超曲面包围的区域（RA 区域）的 Poincar{v25}e-Reeb V-有向图——十分重要。Reeb V-有向图这一概念会在第四节再次出现。

2.2. RA 区域及其庞加莱–Reeb V-有向图。我们定义 RA 区域这一概念。它是实仿射空间 $\mathbb{R}^k$ 中由实代数超曲面围成的区域，这些超曲面在该区域的闭包中以横截方式相交。

定义2. 设 $D \subset \mathbb{R}^k$ 是 $\mathbb{R}^k$ 的一个非空、连通且开集。设 $\{S_j\}_{j=1}^l$ 是 $\mathbb{R}^k$ 中非奇异实代数超曲面的一个向量族，使得 S_j 是实多项式 f_j 的零点集的若干连通分支的并，并且

$S_j \bigcap \overline{D}^{\mathbb{R}^k} \neq \emptyset$ 对所有整数 $1 \leq j \leq l$ 均成立。我们还作如下假设。

(1) 存在 $\overline{D}^{\mathbb{R}^k}$ 的一个小开邻域 U_D，使得 $D = U_D \bigcap \bigcap_{j=1}^l \{x \mid f_j(x) > 0\}$ 和 $U_D \bigcap S_j = U_D \bigcap \{f_j(x) = 0\}$ 均成立。(2)（关于横截性）对于正整数序列 $\{j\}_{j=1}^l$ 的任意递增子序列 $\{i_j\}_{j=1}^{l'}$ 以及任意点 $p \in \bigcap_{j=1}^{l'} S_{i_j} \bigcap \overline{D}^{\mathbb{R}^k}$，关系 dim $\bigcap_{j=1}^{l'} T_p S_{i_j} = k - l'$ 成立。

有序对 $(D, \{S_j\}_{j=1}^l)$ 称为 $\mathbb{R}^k$ 的实代数区域或 RA 区域。

对于限制映射 $\pi_{k,\ 1}|_{\overline{D}^{\mathbb{R}^k}}$，我们可以定义商空间 $PR_{(D,\{S_j\}_{j=1}^l)}$ 和商映射 $q_{(D,\{S_j\}_{j=1}^l)}$: $\overline{D}^{\mathbb{R}^k} \to PR_{(D,\{S_j\}_{j=1}^l)}$，并且可以得到唯一的连续函数 $\pi_{(D,\{S_j\}_{j=1}^l)}$: $PR_{(D,\{S_j\}_{j=1}^l)} \to \mathbb{R}$，满足 $\pi_{k,\ 1}|_{\overline{D}^{\mathbb{R}^k}} = \pi_{(D,\{S_j\}_{j=1}^l)} \circ q_{(D,\{S_j\}_{j=1}^l)}$，正如我们在定义闭流形上光滑函数的 Reeb V-有向图时所做的那样。

我们定义 RA 区域 $\pi_{(D,\{S_j\}_{j=1}^l)}$ 的奇点概念。点 $p \in \overline{D}^{\mathbb{R}^k}$ 是奇点，当且仅当以下两种情况之一成立。

- 点 p 恰好位于 $l' < k$ 个超曲面 S_{i_j} 中。我们定义集合 $S_{i_j,\ 1 \leq j \leq l'}$，它由 $\overline{D}^{\mathbb{R}^k}$ 中位于这些 l' 个超曲面 S_{i_j} 内且不位于任何其他超曲面 S_j 内的所有点组成；可以看出，该集合是一个无边界的 $(k - l')$ 维流形。点 p 也是限制映射 $\pi_{k,\ 1}|_{S_{i_j},\ 1 \leq j \leq l'}$ 的临界点。

- 点 p 满足 $p \in \bigcap_{j=1}^{l'} S_{i_j}$，其中 $l' = k$。

这是对 [18, 19] 中所述论证的推广，例如，其中讨论了 $k = 2$ 的情形。下文假设 $\overline{D}^{\mathbb{R}^k}$ 是紧致的。在 $PR_{(D,\{S_j\}_{j=1}^l)}$ 中与 RA 区域内不含奇点的某个连通分支相对应的点 p 附近，商映射可视为定义在 $PR_{(D,\{S_j\}_{j=1}^l)}$ 中 p 的小邻域上的积丛投影。这归因于所谓的 Ehresmann 纤维化定理的相对版本，或者更一般地说，所谓的分层莫尔斯理论。关于分层莫尔斯理论，请参见 [26]，另请参见[6]。由于实代数情形所具有的某种有限性，我们可以在 $PR_{(D,\{S_j\}_{j=1}^l)}$ 上定义图结构，其顶点集由所有与 $(D, \{S_j\}_{j=1}^l)$ 中含有奇点的连通分支相对应的点组成。这就是 $(D, \{S_j\}_{j=1}^l)$ 的庞加莱-瑞布图。我们还有 $(D, \{S_j\}_{j=1}^l)$ 的庞加莱-瑞布（V-）有向图 $\overrightarrow{PR_{(D,\{S_j\}_{j=1}^l}}^{\pi_{(D,\{S_j\}_{j=1}^l)}}$。

我们也可以从一般定理 [33, 定理 3.1] 和 [34, 定理 2.1] 以及相关论证来理解这些论证。

3. Main Theorems and their proof.

以更精细的方式重新审视主定理 0。

主定理1。设 $d>0$ 是一个整数。设 $\{t_j\}_{j=1}^{d+2}$ 是一个实数递增序列: $t_j<t_{j+1}$，其中 $1\le j\le d+1$。设 $\{n_{c,i}\}_{i=1}^{d}$ 是一个大于 1 的整数序列。设 $\overrightarrow{G}$ 是按以下方式构造的有向图。

- 选择一个类型为（$\{n_{c,i}\}_{i=1}^{d}, d$）的平衡树。
- 添加一个新顶点和一条新边，使其指向上述平衡树的根。

然后，可以选择一个 RA 区域（$D,\{S_j\}_{j=1}^{l}$）:=($D,\{S_j\}^{\Sigma_{i=1}^{d}(\quad n_{c\ i}+1\ +2\ ,)}_{j=1}$），它被半径为任意实数$R$ （大于某个充分大的正数 R_0 ）的圆柱S_j 所围绕，并且可以使得庞加莱-里布有向图 $\overrightarrow{PR_{(D,\{S_j\}_{j=1}^{l}\ _____}}^{\pi_{(D,\{S_j\}_{j=1}^{l})}}$ 与 $\overrightarrow{G}$ 同构，且其顶点集在映射$\pi_{(D,\{S_j\}_{j=1}^{l})}: PR_{(D,\{S_j\}_{j=1}^{l})}\to\mathbb{R}$ 下的像为$\{t_j\}_{j=1}^{d+2}$。

证明。一个关键步骤是以适当方式选取圆 $C_R:=\{x=(x_1,x_2)\ \ ||x||=R\}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中的圆柱，其半径为 $R>R_0$ （对于充分大的实数$R_0>0$）。设 $D_R\subset\mathbb{R}^2$ 为一个满足 $\partial D_R=C_R$的圆盘。当然，我们有$D_R:=\{x=(x_1,x_2)\ |\ ||x||\le R\}$。我们可以作如下选取。

- 图1所示为 C_R 的前两个圆柱 S_1 和 S_2。我们可以取圆盘 D_R 的一个圆柱 D_{S_i}，使其满足 $\partial D_{S_i}=S_i$ ($i=1$,2)。交集 $D_{S_1}\bigcap D_{S_2}$ 所表示的区域也一并展示。

- 图2所示为圆的其余圆柱 S_j ($j\ge 3$)。这些圆柱是针对有根树顶点的每个深度 $1\le i\le d$ 定义的。对于每个 i，图中展示了 $\{(x_1,x_{i+2})\ |\ (x_1,x_{i+2})\in\mathbb{R}^2\}$，所选圆柱的数量为 $n_{c,i}+1$；图示的圆柱位于平面 $\{(x_1,x_{i+2})\ |\ (x_1,x_{i+2})\in\mathbb{R}^2\}$上，其中圆的半径为 R。对于圆的每个圆柱 C_R S_j ($j\ge 3$)，我们都可以取圆盘 D_R 的一个圆柱 D_{S_j}，使其满足 $\partial D_{S_j}=S_j$。在这种情况下，取圆盘 D_R 的补集的圆柱 E_{S_j}，使其满足 $\partial E_{S_j}=S_j$，而不取圆盘 D_R 的圆柱 $\partial D_{S_j}=S_j$。交集 $\bigcap^{\Sigma_{i=1}^{d}(n_{c,i}+1)}_{j=1}\quad E_{S_{j+2}}$ 所表示的区域在图2中以隐含方式呈现。

我们可以将由这些圆柱围绕的有界连通开区域 D 定义为 $D:=D_{S_1}\bigcap D_{S_2}\bigcap\bigcap^{\Sigma_{i=1}^{d}(n_{c,\ i}+1)}_{j=1}\quad E_{S_{j+2}}$。我们验证有序对 $(D,\{S_j\}^{\Sigma_{i=1}^{d}(\quad n_{c\ i}+1\ +2\ ,\ )}_{j=1})$ 满足定义2。通过一个初等论证，可知条件（1）成立。我们

检验条件（2）。为此，如 [14, 15, 16]，对于 $\overline{D}^{\mathbb{R}^k}-D$，我们考虑经过 $\mathbb{R}^k$ 中 p 处的每个超曲面 S_j 的一个法向量，并检验这些法向量是否相互独立。以下令 e_j 表示一个k维实向量，其第 j 个分量的值为 1，其余分量的值均为 0。在点 $p\in S_j$ 处超曲面S_j 的法向量族可取为如下形式。

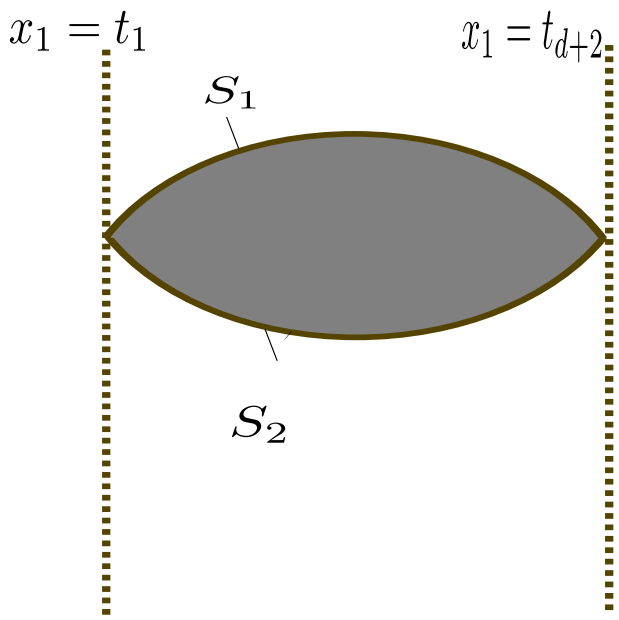


FIGURE 1. 前两个圆柱面 S_1 和 S_2 属于 C_R，以黑色表示；而区域 $D_{S_1} \bigcap D_{S_2}$ 具有 $\partial D_{S_i} = S_i$，在 $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \ | (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$中以灰色表示，其中 D_{S_i} 是一个圆盘的圆柱面 D_R，具有 $\partial D_R = C_R$。

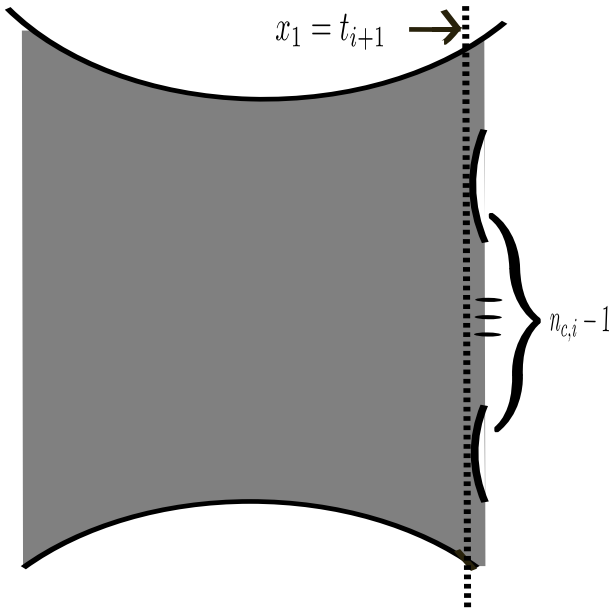


FIGURE 2. 对于有根树的顶点的每个深度 $1 \leq i \leq d$，为圆 C_R 定义的其余圆柱面 S_j $(j \geq 3)$。表示为交集 $\bigcap_{j=1}^{\sum_{i=1}^{d}(n_{c,\ i}+1)} E_{S_{j+2}}$ 的区域以灰色表示。

• 如果 p 属于 S_1 或 S_2之一，那么该向量族恰好包含一个形如 $t_1e_1+t_2e_2$、满足 $t_1\neq 0$ 且 $t_2\neq 0$的向量。如果 p 同时属于 S_1 和 S_2，那么该向量族包含一个形如 $t_1e_1+t_{2,\ 1}e_2$ 的向量，以及恰好一个形如 $t_1e_1+t_{2,\ 2}e_2$、满足 $t_{2,\ 1}>0$、$t_{2,\ 2}<0$ 且 $t_1>0$的向量。如果 p 两者皆不满足，则该向量族不包含此类形式的法向量。

• 如果 p 属于为有根树顶点的深度 $1\leq i\leq d$ 所选取的某个 S_{i_j}，那么根据我们的选择，p 恰好属于以圆 C_R 为基础的此类圆柱面 S_{i_j} 之一，并且该向量族包含一个形如 $t_1e_1+t_ie_{i+2}$ 的向量，且 $(t_1,t_i)\neq(0,0)$。如果 p 不属于为有根树顶点的深度 $1\leq i\leq d$ 所选取的任何 S_{i_j}，则不包含这样的向量。此外，根据我们的选择，此处形如 t_1e_1的向量至多有一个。

我们可以看到，S_j 处的法向量向量族 p 彼此不同。根据这一构造，证明得以完成。□

主定理 2 是一类附加定理。

主定理 2。设 $d_1>0$ 和 $d_2>0$为整数。设 $\{t_j\}_{j=1}^{d_1+d_2+1}$ 为实数的递增序列：$t_j<t_{j+1}$，其中 $1\leq j\leq d_1+d_2+1$。设$\{n_{c,1,i}\}_{i=1}^{d_1}$ 和 $\{n_{c,2,i}\}_{i=1}^{d_2}$ 为大于 1 的整数序列。设 $\overrightarrow{G}$ 为按以下方式得到的有向图。

• 选择一个类型为（$\{n_{c,1,i}\}_{i=1}^{d_1}$，$d_1$）的平衡树，令其根为$v_{0,\ 1}$，并反转定向。

• 选择另一个类型为（$\{n_{c,2,i}\}_{i=1}^{d_2}$，$d_2$）的平衡树，并将$v_{0,\ 1}$ 与该类型为（$\{n_{c,2,i}\}_{i=1}^{d_2}$，$d_2$）的平衡树的根$v_{0,\ 2}$ 识别为同一点。

于是，可以选择一个 RA 区域 $(D,\{S_j\}_{j=1}^{l}):=(D,\{S_j\}^{\Sigma_{i=1}^{d_1}(n_{c\ 1\ i}+1}_{j=1}$ $n_{c\ 2\ i}+1\ +2_{,,})+\Sigma_{i=1}^{d_2}(,,))$，它被半径任意取为大于某个充分大的正数 R 的圆柱 S_j 所包围，该圆柱由圆 $C_R:=\{x=(x_1,x_2)\mid ||x||=R\}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中生成，使得其 Poincar´e-Reeb 有向图 $\overrightarrow{PR_{(D,\{S_j\}_{j=1}^{l}}}^{\pi_{(D,\{S_j\}_{j=1}^{l})}}$ 与之同构并且其顶点集在映射 $\pi_{(D,\{S_j\}_{j=1}^{l})}:PR_{(D,\{S_j\}_{j=1}^{l})}\to\mathbb{R}$ ~~下的像为~~ $\{t_j\}_{j=1}^{d_1+d_2+1}$。

证明。我们采用图3、图4和图5中的方式，而不是主定理1及其证明中的情形。类似地可以证明。□

注1。我们去掉$n_{c,\ 1,\ 1}>1$ 关于类型为（$\{n_{c,1,i}\}_{i=1}^{d_1}$，$d_1$）的平衡树的条件，并令 $d_1=1$、$d_2=d$ 和$n_{c,\ 1,\ 1}=1$。这就是主定理1。

4. Some remark on Main Theorems.

4.1. 一些实代数映射。在定义2中，令 $d(j)>0$ 为对每个整数 $1\leq j\leq l$定义的正整数。我们可以定义集合$M_{(D,\{f_j\}_{j=1}^{l})}=\{(x,y)=(x,\{y_j\}_{j=1}^{l}\in\mathbb{R}^k\times\prod_{j=1}^{l}\mathbb{R}^{d(j)+1}=\mathbb{R}^{l+k+\Sigma_{i=1}^{l}d\ (j)}\mid f_j(x)-||y_j||^2=0、\ 1\leq j\leq l\}$。根据 [12, 主定理 1]，，该集合被视为实多项式映射的零点集的一个连通分支（我们可以自然地定义该映射），也是一个实代数流形。将$\pi_{l+k+\Sigma_{j=1}^{l}d\ (j)\ k}$ 限制到$M_{(D,\{f_j\}_{j=1}^{l})}$，便定义了一个实代数映射。从奇点理论的观点来看，该映射在其附近

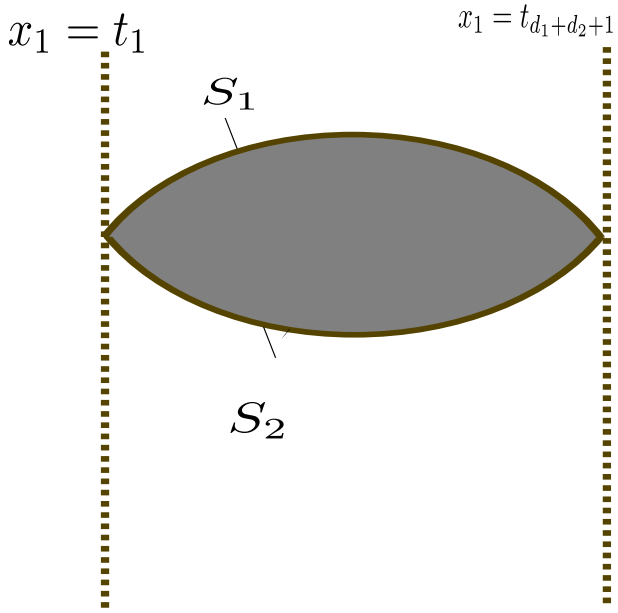


FIGURE 3. 圆柱面 S_1 和 S_2 的 C_R。

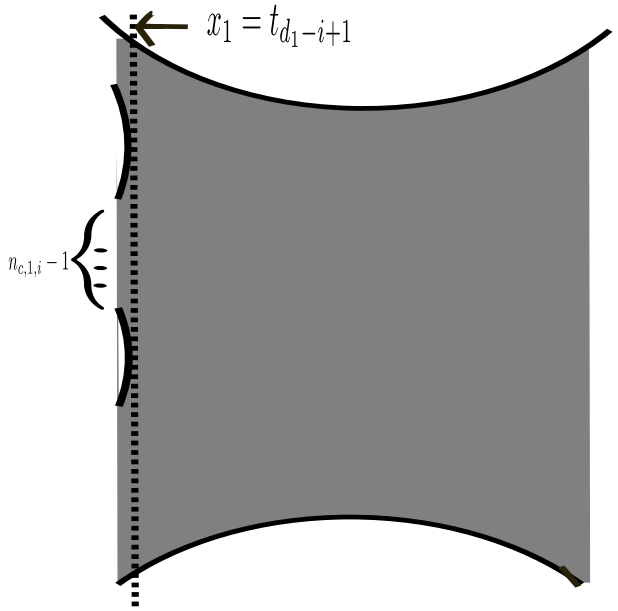


FIGURE 4. 圆的其余圆柱面 $S_j\,(3 \leq j \leq 2 + \Sigma_{i=1}^{d_1}(n_{c,1,i}+1))$，为定向反转的类型为 $(\{n_{c,1,i}\}_{i=1}^{d_1}, d_1)$ 的平衡树所定义。

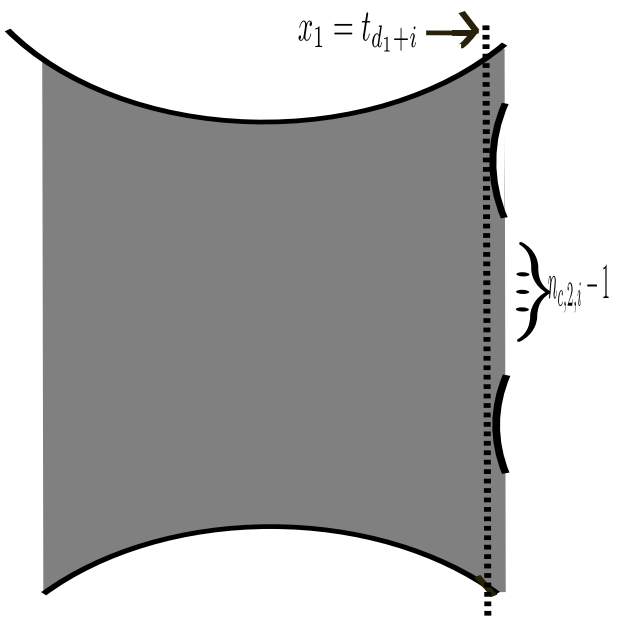


FIGURE 5. 余下的圆柱面 $S_j\,(j \geq 3 + \Sigma_{i=1}^{d_2}(n_{c,\ 1,\ i} + 1))$ 是为类型为 $(\{n_{c,2,i}\}_{i=1}^{d_2}, d_2)$ 的平衡树定义的圆 C_R 。

它的每个奇点在局部上都类似于所谓的矩映射。矩映射是所谓的环面辛流形几何中的基础且重要的概念，参见教材 [2]，另请参见 [5]。

我们还可以取函数 $\pi_{l+k+\Sigma_{i=1}^{l} d(i),\ 1}$，并且在 [12] 中证明它是所谓的莫尔斯-博特函数。莫尔斯-博特函数是莫尔斯函数的推广：参见教材 [1]，另请参见 [4]。

我们还可以得到这样的事实：Reeb有向图 $\overrightarrow{R_{f\bar{f}}}$ 与 $(D, \{S_j\}_{j=1}^{l})$ 的 Poincar´e-Reeb 有向图同构。

此处的论证可以像原始预印本中那样在一定程度上推广。为简洁起见，我们以一种特定的方式进行介绍。

4.2. 与主要结果相关的一些情形。在 [15]，中，我们得到了主要定理的一个明确变体，适用于双曲线 $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 - 1 = 0\}$ 的连通分支 $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 - 1 = 0, x_2 > 0 (x_2 < 0)\}$ 的圆柱。该结果旨在构造一个如上一小节所述的实代数函数，使其 Reeb有向图是具有 $d + 1$ 个顶点的路径有向图，并且该函数满足关于每条边内部各点的水平集是否紧致的任意预设条件。此结果承接了 [14] 中针对这一明确情形给出的首个解答。关于这一点，另请参见 [11]，：其中研究了可微（光滑）情形，这项研究促使作者探讨实代数版本。另请参见 [23]，以及 [22]；后者是关于构造 Reeb 有向图或 Poincar´e-Reeb 有向图（它们也都是树）的早期研究。

最后，对于 S_j 是圆的圆柱面的情形，另请参见 [16]。这给出了非平面的实代数函数的 Reeb 图示例。

References

[1] A. Banyaga 和 D. Hurtubise, *Lectures on Morse Homology*, 《数学科学中的 Kluwer 丛书》, 第 29 卷。Kluwer Academic Publishers Groups, 多德雷赫特（2004）。[2] V. M. Buchstaber 和 T. E. Panov, *Toric topology*, 《数学调查与专著》, 第 204 卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2015。[3] A. Bodin、P. Popescu-Pampu 和 M. S. Sorea, *Poincaré-Reeb graphs of real algebraic domains* 10 1007 13163 , 《Revista Matematica Complutense》, https://link.springer.com/article/ . /s - 023-00469-y, 2023, arXiv:2207.06871v2。[4] R. Bott, *Nondegenerate critical manifolds*, 《数学年刊》60（1954）, 248–261。[5] T. Delzant, *Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment*, 《法国数学会通报》116（1988）, 第 3 期, 315–339。[6] Helmut A. Hamm, *On stratified Morse theory*: *from topology to constructible sheaves*, 《奇异空间的几何与拓扑》会议录, CIRM, 2012, 《奇点杂志》第 13 卷（2015）, 141–158。[7] N. Kitazawa, *On round fold maps* （日文）, RIMS讲义录别册 B38（2013）, 45–59。[8] N. Kitazawa, *On manifolds admitting fold maps with singular value sets of concentric spheres*, 博士学位论文, 东京工业大学（2014）。[9] N. Kitazawa, *Constructions of round fold maps on smooth bundles*, 《东京数学杂志》第 37 卷, 第 2 期, 385–403, arXiv:1305.1708。[10] N. Kitazawa, *On Reeb graphs induced from smooth functions on 3-dimensional closed orientable manifolds with finitely many singular values* , 《非线性分析中的拓扑方法》第 59 卷第 2B 期, 897–912, arXiv:1902.08841。[11] N. Kitazawa, *On Reeb graphs induced from smooth functions on closed or open surfaces* 28 2 2022 127 143, , 《泛函分析与拓扑方法》第 卷第 期 ( ), , arXiv:1908.04340。[12] N. Kitazawa, *Real algebraic functions on closed manifolds whose Reeb graphs are given graphs* 28 4 2022 302 308, , 《泛函分析与拓扑方法》第 卷第 期 ( ), – arXiv:2302.02339, 2023。[13] N. Kitazawa, *Reconstructing real algebraic maps locally like moment maps with prescribed images and compositions with the canonical projections to the* 1*-dimensional real affine space*, arXiv:2303.10723。[14] N. Kitazawa, *Explicit smooth real algebraic functions which may have both compact and non-compact preimages on smooth real algebraic manifolds* 2304 02372 , arXiv: . . [15] N. Kitazawa, *On real algebraic maps whose images are domains surrounded by the products of hyperbolas and real affine spaces* 2304 07540 , arXiv: . . [16] N. Kitazawa, *Notes on Reeb graphs of real algebraic functions which may not be planar*, arXiv:2307.07122。[17] N. Kitazawa, *Some remark on real algebraic maps which are topologically special generic maps and generalize the canonical projections of the unit spheres* 2312 10646 , arXiv: . . [18] N. Kitazawa., *Arrangements of small circles for Morse-Bott functions and regions surrounded by them* 2412 20626 3 , arXiv: . v . [19] N. Kitazawa, *Arrangements of circles supported by small chords and compatible with natural real algebraic functions* 2501 11819 , arXiv: . . [20] N. Kitazawa, *Realizations of planar graphs as Poincaré-Reeb graphs of refined algebraic domains* 2501 17425, 2025 , arXiv: . . [21] N. Kitazawa, *Moment-like maps and real algebraic functions with prescribed preimages*, arXiv:2506.17791, 2025。[22] N. Kitazawa, *Graphs with nice decompositions of small graphs and realizing them as the Reeb graphs of real algebraic functions* 2508 00729 , arXiv: . . [23] N. Kitazawa, *Regions surrounded by circles whose Poincaré-Reeb graphs are trees*, arXiv:2511.06342, 2025。[24] N. Kitazawa, *A note on cohomological structures of special generic maps*, 在向经同行评审的期刊第三次投稿后, 根据审稿人和编辑的积极意见提交了修订版。[25] J. Koll´ar, *Nash's work in algebraic geometry*, 《美国数学会通报》（新系列）54（2）, 2017, 307–324。

[26] D B. Massey,
Stratified Morse theory past and present 2 4, 2, : ,《纯粹
2006, 1053 1084,
与应用数学季刊》. 第 – 部分[27] Y. Masumoto 和 O. Saeki,
A smooth function on a manifold with given Reeb graph,《九州数学杂志》65 (2011), 75–84. [28] L. P.
Michalak, *Realization of a graph as the Reeb graph of a Morse function on a manifold*.《非线性分析
中的拓扑方法》52 (2) (2018), 749–762, arXiv:1805.06727. [29] E. E. Moise,
Affine Structures in 3-Manifold V. The Triangulation Theorem and Hauptver- : ,《数学
mutung 56, 1 1952 96 114
年刊》, 第二辑, 第 卷第 号 ( ), – . [30] J. Nash, *Real algebraic manifolds*,《数学年刊》(2) 56 (1952), 405–
421. [31] G. Reeb, *Sur les points singuliers d´une forme de Pfaff complétement intègrable ou d´une
fonction numérique*,《法国科学院周报》222 (1946), 847–849. [32] O. Saeki,
Topology of special generic maps of manifolds into Euclidean spaces,《拓扑学及其应用》49
(1993), 265–293. [33] O. Saeki, *Reeb spaces of smooth functions on manifolds*,《国际数学研
究通知》, maa301, 第 2022 卷第 11 期, 2022年6月, 3740–3768, https://doi.org/10.1093/i
mrn/maa301, arXiv:2006.01689. [34] O. Saeki, *Reeb spaces of smooth functions on manifolds II*,《数学
科学研究》11, 文章编号 24 (2024), 11–24. [35] V. Sharko,
About Kronrod-Reeb graph of a function on a manifold,《泛函分析与拓扑方法》12 (2006), 389–396.
[36] M. S. Sorea, *The shapes of level curves of real polynomials near strict local maxima*, 博士论文, 巴
黎第七大学´e de [37] M. S. Sorea, *Measuring the local non-convexity of real algebraic curves*,《符号计算
杂志》109 (2022), 482–509. [38] A. Tognoli, *Su una congettura di Nash*,《比萨高等师范学院年刊》(3)
27 (1973), 167–185.

Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University, 744 Motooka,
Nishi-kuFukuoka 819-0395, Japan, TEL (Office): +81-92-802-4402,
FAX (Office): +81-92-802-4405,*Email address*: naokikitazawa.formath@gmail.com
Webpage: https://naokikitazawa.github.io/NaokiKitazawa.html