arXiv:2512.15490v1 [math.LO] 17 Dec 2025

米勒模型中的普遍瘦集及类似集合

VALENTIN HABERL、PIOTR SZEWCZAK 和 LYUBOMYR ZDOMSKYY

Abstract. 我们研究实数集。我们证明，在米勒模型以及由 Goldstern–Judah–Shelah 构造的模型中，所有普遍瘦集的基数都至多为 ω_1。这些模型中的一些组合覆盖性质之间的关系，使我们能够对不含康托尔集同胚副本的 Rothberger 空间和 Hurewicz 空间的基数得到相同的限制。由我们的结果可知，存在一个基数为 ω_2 的强零测集，并不意味着存在一个基数为 ω_2 的 Rothberger 空间。我们还证明，在米勒模型中，所有强零测集的基数都至多为 ω_1。

1. Introduction

定义 1.1 ([40])**：** 若子空间 $X \subseteq 2^\omega$ 的每个博雷尔同构像在 2^ω 中都是瘦集，则称其为**普遍瘦**。

普遍瘦子空间的定义由 Zakrzewski 引入 [40]，并由他证明 [40] 它等价于 Grzegorek 早先研究过的绝对第一范畴集的概念 [16, 17, 18]。后来 Zakrzewski 也研究了普遍瘦子空间，并在 [41] 中证明了若干对我们至关重要的刻画（见引理 3.1）。在集合论的某些模型中，普遍瘦子空间的大小受到限制。例如，在 Cohen 模型中（该模型是基于连续统假设的基模型，通过对长度为 ω_2的 Cohen 强迫进行有限支撑迭代（等价地，乘积）所得的强迫扩张），所有普遍瘦子空间的大小至多为 ω_1；更多细节见问题 6.5 后的讨论。在本文中，我们考察米勒模型（该模型是基于广义连续统假设的基模型，通过对长度为 ω_2的强迫进行可数支撑迭代得到的强迫扩张，由 Miller [28]引入）以及 Goldstern–Judah–Shelah [13, 在定理 0.16]的证明中构造的模型中的这些限制。

2020 数学主题分类。主要分类：03E35, 54D20, 54A35。次要分类：03E75。关键词与短语。米勒强迫、Rothberger 空间、普遍瘦空间、强零测集、Hurewicz 空间。第一位和第三位作者的研究全部由奥地利科学基金（FWF） [10.55776/I5930 和 10.55776/PAT5730424] 资助。第二位作者的研究由波兰国家科学中心通过 Weave计划中的 Weave-UNISONO 项目资助：拓扑选择的集合论方面，2021/03/Y/ST1/00122。

定理 1.2。 在米勒模型和 Goldstern–Judah–Shelah 模型中，每个普遍瘦子空间的大小至多为 ω_1。

定理 1.2 的证明基于这样一个事实：其中涉及的强迫概念满足在 [32] 中引入的性质（†）。事实证明，Cohen 强迫也具有性质（†）。上文提到的结果涉及普遍瘦子空间，但我们研究的起源与拓扑空间的其他性质有关，而定理 1.2 有助于解决更多问题。

若集合 $X \subseteq 2^\omega$ 满足以下条件，则称其为强零测（简称强零测，SMZ）：对于任意正实数序列 $\langle \epsilon_n \colon n \in \omega \rangle$，都存在一个“中心”序列 $\langle a_n \colon n \in \omega \rangle$，使得族 $\{\mathrm{B}(a_n,\ \epsilon_n) \colon n \in \omega\}$ 覆盖 X；其中 $\mathrm{B}(a,\ \epsilon) := \{x \in 2^\omega \colon \rho(x,\ a) < \epsilon\}$，而 ρ 是在 2^ω 上生成标准拓扑的任意度量。这个概念由博雷尔提出，他猜想只有可数集具有这一性质。1928年，Sierpi´nski [36] 一致地否定了博雷尔猜想；1976年，Laver [25], 证明它与公理系统相容。此后，这一猜想也出现在不同背景中，并成为实数集论中类似猜想的蓝本，参见例如 [14]。

Rothberger 注意到， [33], 强零测集未必是拓扑性质，因此他将其修改为如下拓扑覆盖性质。空间 指与康托尔立方体 2^ω 的某个子空间同胚的拓扑空间。空间 X 称为 $Rothberger$ 空间，若对于其任意序列$\langle \mathscr{U}_n \colon n \in \omega \rangle$ 开覆盖，都存在集合 $U_n \in \mathscr{U}_n$（对 $n \in \omega$），使得族 $\{U_n \colon n \in \omega\}$ 覆盖 X。容易看出， 2^ω 的每个 Rothberger 子集都具有强零测性质。

本文最初的灵感源自我们关于集中空间和 γ-空间的工作 [19] 。若对于包含 D 的任意开集 $U \subseteq X$，集合 $X \setminus U$ 都是可数的，则称空间 X 集中于可数集 $D \subseteq X$。若空间 X 不可数，且集中于其某个可数子集，则称其为集中 空间。Bartoszy´nski–Halbeisen 猜想 [2, 命题 3.2]: 在 Miller 模型中存在一个大小为 ω_2 的集中空间。该猜想已被推翻 [19], ；我们还证明，在 Miller 模型中，任何 γ-空间的大小至多为 ω_1 （ [12] 见 γ- 空间的定义）。由于 2^ω 的所有 Rothberger 空间都包含所有集中空间和 γ-空间， [12], 我们在先前的工作 [19], 中提出了以下问题。

问题 1.3 ([19, 问题 4.2])。 在米勒模型中，每个 Rothberger 空间的基数都不超过 ω_1 吗?

我们得到以下结果，它也解决了问题 1.3。

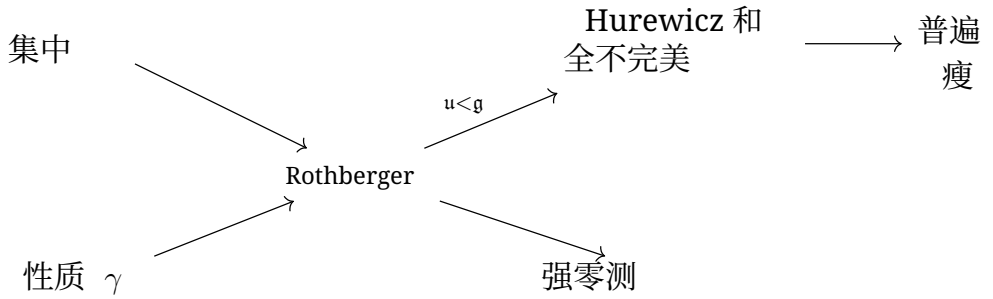
定理 1.4。 在米勒模型和 Goldstern–Judah–Shelah 模型中，每个 Rothberger 空间的基数都不超过 ω_1。

现在我们说明定理 1.2 如何推出上述结果。为此，我们需要引入一个辅助概念：$Hurewicz$ 空间 [20]。我们不会直接研究 Hurewicz 空间，而是引用其已知性质，因此请读者参阅 Tsaban 的一篇著作 [37] ，以了解有关

这类空间的更多信息。关于下文所用的连续统的基数特征的定义和性质，请读者参阅 Blass 的一篇著作 [7]。证明定理 1.4 分为四个主要步骤。

- 不等式 $\mathfrak{u} < \mathfrak{g}$ 在米勒模型和 Goldstern– Judah–Shelah 模型中成立。
- 在 $\mathfrak{u} < \mathfrak{g}$ 的模型中，每个 Rothberger 空间都是 Hurewicz 且全不完美的，即不包含 2^ω 在 [42] 中的同胚副本；
- 2^ω 的每个 Hurewicz 全不完美子空间都是普遍瘦的 [40]。
- 应用定理 1.2。

下面的图展示了这里讨论的 2^ω 子空间性质之间的关系（只有一个蕴含需要 ZFC 之外的一些额外假设；例如，当 $\mathfrak{u} < \mathfrak{g}$ 时该蕴含成立）。



Goldstern–Judah–Shelah 模型的一些其他性质使我们能够证明，在该模型中，一个空间是 Rothberger 空间，当且仅当它是 Hurewicz 且全不完美（见定理 4.12）。

在上述模型中，我们有 $\omega_2 = \mathfrak{c} = \mathfrak{d} > \mathfrak{b}$，并且少于$\mathfrak{c}$ 个强零测集的任意并仍是强零测集（特别是，每个基数小于 $\mathfrak{c}$的集合都是强零测集）。若 $\mathfrak{c} = \mathfrak{d}$ 且每个基数小于 $\mathfrak{c}$ 的集合都是强零测集，则存在一个基数为 $\mathfrak{c}$的强零测集；Goldstern–Judah–Shelah 模型中正是如此。结合定理 1.4，我们证明，存在一个基数为 ω_2 的强零测集，并不意味着存在一个基数为 ω_2的 Rothberger 空间。这可以与 Miller 的一个结果相比较：[30, 命题 8] 指出，在 ω_1的情形下，这样的推论成立。

定理 1.5。在 Goldstern–Judah–Shelah 模型中，存在一个基数为 $\omega_2 = \mathfrak{c}$ 的强零测集，但每个 Rothberger 空间的基数至多为 ω_1。

定理 1.5 可以与 Judah 的结果 [21, 定理 1.3] 相比较。该结果表明，存在大小为 $\mathfrak{c}$ 的强零测集（在该处可使其为 ω_2），并不意味着存在某些特定的、大小为 $\mathfrak{c}$ 的 Rothberger 空间，即广义 Luzin 集。然而，很容易看出，在模型中，基模型实数构成一个大小为 $\mathfrak{c}$ 的 Rothberger 空间

，它是在 [21, 定理 1.3] 的证明中构造的。因此，定理 1.5 中的 Goldstern–Judah–Shelah 模型不能替换为 [21, 定理 1.3] 中的 Judah 模型，而该 Goldstern–Judah–Shelah 模型来自 [13, 定理 0.16] 。

弱博雷尔猜想 指出，不存在大小为 $\mathfrak{c}$ 的强零测集。在 [13, 推论 3.6], 中证明，使用可数支撑迭代构造的模型满足弱博雷尔猜想；该迭代由适当的、强 ω^ω-有界且在每个中间模型中都保持连续统假设的强迫概念组成。在 [5] Bartoszyński 和 Shelah 证明，Laver 模型和米勒模型满足弱对偶博雷尔猜想。他们致力于寻找一个同时满足博雷尔猜想和对偶 Borel 猜想的模型，并最终在 [15]中找到了这样的模型。然而，Laver 模型是否已经是这两个猜想同时成立的一个例子，仍是一个未解问题。在 [39] 中有人指出，米勒模型是否满足弱博雷尔猜想仍是一个开放问题。我们将在第 5 节讨论这个问题，并给出如下答案。

定理 1.6。 在米勒模型中，每个强零测集的基数至多为 ω_1，也就是说，弱博雷尔猜想成立。

子空间 $X \subseteq 2^\omega$ 是完全贫乏的，当且仅当对任意完美集 $P \subseteq 2^\omega$，集合 $X \cap P$在 P上的相对拓扑中是瘦集。定理 1.6 的证明采用了 [22] 中的一个思想，从而能够证明在米勒模型中，每个强零测集都是完全贫乏的。根据 Bartoszyński [1, 定理 9 和 11],定理，在米勒模型中，每个完全贫乏子空间都是普遍瘦的。鉴于上述结果，定理 1.6 是定理 1.2 的推论。

2. 性质 (†)

以下概念引入于 [32]。我们考虑的所有偏序集都是分离的。

定义 2.1。 若一个强迫 $\mathbb{P}$ 满足性质（†），则意味着：对于每个可数初等子模型 $M \ni \mathbb{P}$ of $H(\theta)$、充分大的 θ、条件 $p \in \mathbb{P} \cap M$ 以及函数 φ_i: $\mathbb{P} \cap M \to \mathbb{P} \cap M$ for all $i \in \omega$，使得 $\varphi_i(p) \leq p$ for all$p \in \mathbb{P} \cap M$and $i \in \omega$，存在一个（M， P）-泛型条件 $q \leq p$ forcing

$$(1) \qquad \text{“}\Gamma_{\mathbb{P}} \cap \{\varphi_i(p) : p \in \mathbb{P} \cap M\} \text{ is infinite for all } i \in \omega\text{”},$$

其中 $\Gamma_{\mathbb{P}}$ 是 $\mathbb{P}$-泛型滤子的标准 $\mathbb{P}$-名称。

使用上文的记号，任意满足$\varphi(p) \leq p$ for all $p \in \mathbb{P} \cap M$ 的函数 φ: $\mathbb{P} \cap M \to \mathbb{P} \cap M$ 都称为回归的。

在本文中，我们将需要以下直接结果所给出的（†）的一个等价表述。

引理 2.2。 强迫 $\mathbb{P}$ 的性质 (†)，等价于将陈述 (1) 替换为以下形式上较弱的陈述后得到的版本：

$$\text{“}\Gamma_{\mathbb{P}} \cap \{\varphi_i(p) : p \in \mathbb{P} \cap M\} \neq \emptyset \text{ for all } i \in \omega\text{”}.$$

证明。只需证明，如果 $\mathbb{P}$ 满足引理中的条件，那么它就满足 (†)。利用 $\mathbb{P}$ 的分离性，对于每个 $i \in \omega$，都存在一个序列 $\langle \varphi^i_j : j \in \omega \rangle$，其中包含从 $M \cap \mathbb{P}$ 到 $M \cap \mathbb{P}$ 的回归函数，使得

$$\varphi_i(p) > \varphi^i_0(p) \geq \varphi_i(\varphi^i_0(p)) > \varphi^i_1(p) \geq \varphi_i(\varphi^i_1(p)) >$$
$$> \varphi^i_2(p) \geq \varphi_i(\varphi^i_2(p)) > \cdots > \varphi^i_j(p) \geq \varphi_i(\varphi^i_j(p)) > \varphi^i_{j+1}(p) \geq \cdots$$

对所有 $p \in \mathbb{P} \cap M$ 和 $i,\ j \in \omega$。因此，我们得到：对于每个 $p \in \mathbb{P} \cap M$ 和 $i,\ j \in \omega$ 集合

$$Q^i_j(p) := \{ r \in \varphi_i[M \cap \mathbb{P}] : \varphi^i_j(p) \leq r \}$$

的大小至少为 $j+1$。于是存在一个 $(M,\ \mathbb{P})$-泛型条件 $q \leq p$，它强迫

$$\text{“}\Gamma_{\mathbb{P}} \cap \{\varphi^i_j(p) : p \in \mathbb{P} \cap M\} \neq \emptyset \text{ for all } i, j \in \omega\text{”}.$$

设 G 是 V 上的一个 $\mathbb{P}$-泛型滤子，且满足 $q \in G$。在 $V[G]$ 中，固定 $p^i_j \in \mathbb{P} \cap M$，使得对所有 $i,\ j$，都有 $\varphi^i_j(p^i_j) \in G$。对于每个 i，由上文可知，并集 $\bigcup_{j \in \omega} Q^i_j(p^i_j)$ 是 $\varphi_i[M \cap \mathbb{P}] \cap G$ 的一个无限子集。□

注 2.3。我们将函数 s 的值域记作 $\mathrm{rng}(s)$。对于有限序列 t，我们将 $t(\mathrm{end}) := t(|t|-1)$ 记作，即 t 在其最后一个元素处的取值。对于元组 $\langle a,\ b \rangle$，我们分别用 $\mathrm{dom}(\langle a,\ b \rangle) = a$ 和 $\mathrm{rng}(\langle a,\ b \rangle) = b$ 表示。对于迭代强迫构造 $\langle \mathbb{P}_\alpha,\ \dot{\mathbb{Q}}_\alpha : \alpha < \delta \rangle$，我们分别用较简短的记号 Γ_α 和 $\Gamma_{[\alpha,\beta)}$ 表示 $\Gamma_{\mathbb{P}_\alpha}$ 和 $\Gamma_{\mathbb{P}_{[\alpha,\beta)^\circ}}$ □

引理 2.4. 设 $\mathbb{P}$ 是具有性质（†）的强迫，并设 $\dot{\mathbb{Q}}$ 是一个强迫的名称，使得

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \text{“}\dot{\mathbb{Q}} \text{ satisfies } (\dagger)\text{“}.$$

那么 $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ 满足（†）。

证明。取一个可数初等子模型 $M \ni \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$，使其为 $H(\theta)$ 的初等子模型，其中 θ 足够大。设 $\langle \varphi_n : n \in \omega \rangle$ 是从 $M \cap (\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}})$ 到 $M \cap (\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}})$ 的回归函数序列。假设 $\langle p_0, \dot{q}_0 \rangle \in M \cap (\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}})$。对每个 $n \in \omega$ 以及满足 $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \text{“}\dot{q} \in \dot{\mathbb{Q}}\text{“}$ 的 $\dot{q} \in M$，定义 $\psi_{n,\dot{q}} : M \cap \mathbb{P} \to M \cap \mathbb{P}$，令 $\psi_{n,\dot{q}}(p) := \mathrm{dom}(\varphi_n(\langle p, \dot{q} \rangle))$ 对所有 $p \in M \cap \mathbb{P}$ 均成立。显然，对于所有 p，我们都有 $\psi_{n,\dot{q}}(p) \leq p$，且 $\psi_{n,\dot{q}}$ 只有可数多个。因此，由性质（†），存在一个 $(M, \mathbb{P})$-泛型条件 $r \leq p_0$，使得对于上述每个 $n \in \omega$ 和 $\dot{q}$，都有

$$r \Vdash \text{“}\exists p_{n,\dot{q}} \in \mathbb{P} \cap M \ \ (\psi_{n,\dot{q}}(p_{n,\dot{q}}) \in \Gamma_{\mathbb{P}})\text{“}.$$

设 G 是 V 上具有 $r \in G$ 的一个 $\mathbb{P}$-泛型滤子。在 $V[G]$ 中，对于每个 n 和 $\dot{q}$，选取 $p_{n,\ \dot{q}}$，使得 $\psi_{n,\ \dot{q}}(p_{n,\ \dot{q}}) = \mathrm{dom}(\varphi_n(\langle p_{n,\ \dot{q}},\ \dot{q} \rangle)) \in G_\circ$ 定义回归函数 η_n：对所有 $n \in \omega$，$M[G] \cap \dot{\mathbb{Q}}^G \to M[G] \cap \dot{\mathbb{Q}}^G$，如下所示：对于 $b \in M[G] \cap \dot{\mathbb{Q}}^G$，选取 $\dot{q}_b \in M$，使得 $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \text{“}\dot{q}_b \in \dot{\mathbb{Q}}\text{“}$ 且 $\dot{q}_b^G = b_\circ$ 令

$$\eta_n(b) = \mathrm{rng}(\varphi_n(\langle p_{n,\dot{q}_b}, \dot{q}_b \rangle))^G.$$

根据性质 (†)，存在一个 $(M[G], \dot{\mathbb{Q}}^G)$-泛型条件 $w \leq \dot{q}_0{}^G$，使得

$$w \Vdash \text{“}\exists b_n \in M[G] \cap \dot{\mathbb{Q}}^G \ \ (\eta_n(b_n) \in \Gamma_{\dot{\mathbb{Q}}^G})\text{“}$$

对所有 $n \in \omega$。令 H 为关于 $V[G]$ 的 $\dot{\mathbb{Q}}^G$-泛型滤子，且满足 $w \in H$。在 $V[G*H]$ 中，对每个 $n \in \omega$，都存在 $b_n \in M[G] \cap \dot{\mathbb{Q}}^G$，使得 $\mathrm{rng}(\varphi_n(\langle p_{n,\dot{q}_{b_n}}, \dot{q}_{b_n}\rangle))^G \in H$。根据 $p_{n,\dot{q}_{b_n}}$ 的定义，我们还有 $\mathrm{dom}(\varphi_n(p_{n,\dot{q}_{b_n}}, \dot{q}_{b_n}\rangle) \in G$。

由极大性原理，存在一个 $\mathbb{P}$-名称 $\dot{w}$，适用于 w，并且对每个 $n \in \omega$，都有一个（$\mathbb{P} * \mathbb{Q}$）-名称 $\dot{u}_n \in M$，使得 $\mathbb{1}_{\mathbb{P}*\dot{\mathbb{Q}}} \Vdash$ " $\dot{u}_n \in \mathbb{P} * \mathbb{Q}$" 且

$$\langle r, \dot{w}\rangle \Vdash \text{"}\mathrm{dom}(\varphi_n(\dot{u}_n)) \in \Gamma_{\mathbb{P}} \text{ and } \mathrm{rng}(\varphi_n(\dot{u}_n)) \in \Gamma_{\dot{\mathbb{Q}}}\text{"},$$

这意味着

$$\langle r, \dot{w}\rangle \Vdash \text{"}\varphi_n(\dot{u}_n) \in \Gamma_{\mathbb{P}*\dot{\mathbb{Q}}}\text{"}.$$

注意到 $\langle r, \dot{w}\rangle$ 是一个（$M, \mathbb{P} * \mathbb{Q}$）-泛型条件，且位于 $\langle p_0, \dot{q}_0\rangle$之下。因此，$\mathbb{P} * \mathbb{Q}$ 满足（†）。□

定理 2.5. 设 $\langle \mathbb{P}_\alpha, \mathbb{Q}_\alpha : \alpha < \delta\rangle$ 是一个强迫的可数支撑迭代，且各强迫满足性质（†），其极限为 $\mathbb{P}_\delta$。那么 $\mathbb{P}_\delta$ 满足（†）。

证明。我们将假设 (†) 在任意长度为$< \delta$ 且采用可数支撑的迭代下都得以保持。固定一个可数初等子模型 $M \ni \delta$，$\mathbb{P}_\delta$，$\langle \mathbb{P}_\alpha$，$\mathbb{Q}_\alpha : \alpha < \delta\rangle$，它属于 $H(\theta)$，其中 θ 足够大；并令 $\langle \alpha_n : n \in \omega\rangle \in (M \cap \mathrm{Ord})^\omega$ 为 $M \cap \delta$ 中严格递增且共尾的序列。令$\langle D_n : n \in \omega\rangle$ 为 $\mathbb{P}_\delta$ 的所有开稠密子集的一个枚举，这些子集都属于M。假设 $\{\varphi_n : n \in \omega\}$ 是一族如 (†) 定义中所述的函数，并选取某个 $p_0 \in \mathbb{P}_\delta \cap M$。不失一般性，我们可以假设对所有 $n \in \omega$，都有 $\varphi_n[M \cap \mathbb{P}_\delta] \subseteq D_n$。

通过对 n 归纳，我们选取 $q_n \in \mathbb{P}_{\alpha_n}$ 和一个名称 $\dot{p}_n \in V^{\mathbb{P}_{\alpha_n}}$，使得

(i) $q_n \in \mathbb{P}_{\alpha_n}$ is $(M, \mathbb{P}_{\alpha_n})$-generic, $q_n \restriction \alpha_{n-1} = q_{n-1}$ for all $n \geq 1$;
(ii) $\dot{p}_0 = \check{p}$ and $q_n \Vdash_{\mathbb{P}_{\alpha_n}}$
  (a) $\dot{p}_n \in \mathbb{P}_\delta \cap M$,
  (b) $\varphi_n(\dot{p}_n) \restriction \alpha_n \in \Gamma_{\alpha_n}$,
  (c) $\dot{p}_n \restriction [\alpha_{n-1}, \delta) = \varphi_{n-1}(\dot{p}_{n-1}) \restriction [\alpha_{n-1}, \delta)$ if[1] $n \geq 1$, and
  (d) $\forall u \in \mathbb{P}_{[\alpha_n,\delta)} \cap M \; \forall i \in \omega \; \exists s = s^n(u, i) \in \mathbb{P}_{\alpha_n} \cap M$
    $\big(\varphi_i(s^\frown u) \restriction \alpha_n \in \Gamma_{\alpha_n}\big)$.

首先，我们构造 q_0，使得对于 $n = 0$，(i) 和 (ii) 均成立。对于每个$r \in \mathbb{P}_{\alpha_0} \cap M$ 和 $u \in \mathbb{P}_{[\alpha_0,\delta)} \cap M$ 集合 $\varphi^0_{i,u}(r) = \varphi_i(r^\frown u) \restriction \alpha_0$，并注意到$\varphi^0_{i,u}$: $\mathbb{P}_{\alpha_0} \cap M \to \mathbb{P}_{\alpha_0} \cap M$ 是一个回归函数。由于 $\mathbb{P}_{\alpha_0}$ 满足 (†)，因此存在一个 $(M, \mathbb{P}_{\alpha_0})$-泛型条件 $q_0 \leq \varphi_0(p_0) \restriction \alpha_0$，使得

$$(2) \qquad q_0 \Vdash \text{"}\forall i \in \omega \; \forall u \in \mathbb{P}_{[\alpha_0,\delta)} \cap M \;\; \big(\Gamma_{\alpha_0} \cap \varphi^0_{i,u}[M \cap \mathbb{P}_{\alpha_0}] \neq \emptyset\big)\text{"}.$$

因此，q_0 和 $\dot{p}_0$ 满足 (i) 和 (ii)；当然，其中某些条件的部分对于 $n = 0$是空泛成立的。

假设对于某个 $n \in \omega$ 以及所有 $k \leq n$，我们构造了 $\dot{p}_k$，q_k满足 (i) 和 (ii)。固定一个包含 q_n 的 $\mathbb{P}_{\alpha_n}$-泛型滤子 G，其位于 V 上，并在 $V[G]$ 中工作一段时间。由 $(ii)(d)$，我们可以为每个 $r \in$

[1]这里通过构造还能得到更多，即 $\dot{p}_n \restriction [\alpha_{n-1}, \delta)$ 和$\varphi_{n-1}(\dot{p}_{n-1}) \restriction [\alpha_{n-1}, \delta)$ 被 q_n 强迫为相等的地模型对象。

$\mathbb{P}_{[\alpha_n,\alpha_{n+1})}\cap M$, $u\in\mathbb{P}_{[\alpha_{n+1},\delta)}\cap M$ 以及 $i\in\omega$ 一个条件 $s=s^n(r,\ u,\ i)\in\mathbb{P}_{\alpha_n}$ 使得

$$\varphi_i(s^\frown r^\frown u)\restriction\alpha_n\in G. \tag{3}$$

更准确地说，我们用 $s^n(r,\ u,\ i)$（或者，如果 $n,\ r,\ u,\ i$ 在上下文中已明确，则简称为 s）表示由 $(ii)(d)$ 给出的条件 $s^n(r\hat{\mathrm{U}}u,\ i)$。由此可得

$$p_{n+1}:=s^n\big(\varphi_n(p_n)\restriction\big[\alpha_n,\alpha_{n+1}\big),\ \varphi_n(p_n)\restriction\big[\alpha_{n+1},\delta\big),\ n+1\big)\hat{\mathrm{U}}\varphi_n(p_n)\restriction[\alpha_n,\delta)$$

对 $n+1$ 满足 $(ii)(c)$。

注意到 (3) 允许我们按如下方式定义一个回归映射 $\varphi_{i\,u}^{n+1}$，从 $\mathbb{P}^G_{[\alpha_n,\alpha_{n+1})}\cap M$ 到[2] $\mathbb{P}^G_{[\alpha_n,\alpha_{n+1})}\cap M$，对所有如上所述的 $i,\ u$ 均成立：

$$\varphi^{n+1}_{i,u}(r)=\varphi_i\big(s^n(r,u,i)^\frown r^\frown u\big)\restriction[\alpha_n,\alpha_{n+1}). \tag{4}$$

由于 $\mathbb{P}^G_{[\alpha_n,\alpha_{n+1})}$ 满足 (†)，因此存在一个 $(M[G],\mathbb{P}^G_{[\alpha_n,\alpha_{n+1})})$-泛型条件 w_n，使得

$$w_n\le\varphi_n(p_n)\restriction[\alpha_n,\alpha_{n+1})=p_{n+1}\restriction[\alpha_n,\alpha_{n+1})$$

and

$$w_n\Vdash_{V[G]}\text{“}\forall i\in\omega\,\forall u\in\mathbb{P}^G_{[\alpha_{n+1},\delta)}\cap M\,\big(\Gamma^G_{[\alpha_n,\alpha_{n+1})}\cap\varphi_{i\ u}^{n+1}\ [M\cap\mathbb{P}^G_{[\alpha_n,\alpha_{n+1})}\ ]\neq\emptyset\big)\text{“}. \tag{5}$$

因此，如果 $H\ni w_n$ 是 $V[G]$上的一个 $\mathbb{P}^G_{[\alpha_n,\alpha_{n+1})}$-泛型滤子，那么在 $V[G*H]$中，根据 (5) 可得，对于每个 $u\in\mathbb{P}^{G*H}_{[\alpha_{n+1},\delta)}\cap M$ 和 $i\in\omega$，都存在 $r(u,i)\in\mathbb{P}^{G*H}_{[\alpha_n,\alpha_{n+1})}\cap M$，使得 $\varphi_{i\ u}^{n+1}\ \big(r(u,i)\big)\in H$，即，

$$\varphi_i\big(s^n\big(r(u,i),u,i\big)^\frown r(u,i)^\frown u\big)\restriction[\alpha_n,\alpha_{n+1})\in H. \tag{6}$$

现在我们再次在 V 中工作。多次使用极大性原理，我们可以找到以下对象：

- 一个 $\mathbb{P}_{\alpha_n}$-名称 $\dot w_n$，它被 q_n 强制为 $(M[\Gamma_{\alpha_n}],\mathbb{P}^{\Gamma_{\alpha_n}}_{[\alpha_n,\alpha_{n+1})})$-泛型；
- 对于每个 $u\in\mathbb{P}_{[\alpha_{n+1},\delta)}\cap M$，以及一个 $\mathbb{P}_{\alpha_{n+1}}$-名称 $r(u,i)$，它对应于 $\mathbb{P}_{[\alpha_n,\alpha_{n+1})}$ 中的一个条件，且满足 $q_{n+1}:=q_n\hat{\mathrm{U}}\,\dot w_n\in\mathbb{P}_{\alpha_{n+1}}$ 强制

$$\varphi_i\big(s^n\big(r(u,i),u,i\big)^\frown r(u,i)^\frown u\big)\restriction\alpha_n\in\Gamma_{\alpha_n}\ \wedge \tag{7}$$

$$\varphi_i\big(s^n\big(r(u,i),u,i\big)^\frown r(u,i)^\frown u\big)\restriction[\alpha_n,\alpha_{n+1})\in\Gamma_{[\alpha_n,\alpha_{n+1})}, \tag{8}$$

(7) 是 (3) 的推论。由 (7) 和 (8) 可得，q_{n+1}上文定义的对象连同这些 $\mathbb{P}_{\alpha_{n+1}}$-名称

$$s^{n+1}(u,i)=s^n\big(r(u,i),u,i\big)^\frown r(u,i),$$

满足 $n+1$ 的（i）和（ii），由此完成了我们对满足（i）和（ii）的对象进行的递归构造。

[2]注意，$\mathbb{P}^G_{[\alpha_n,\alpha_{n+1})}$ 的底集属于 V，且不依赖于 G；例如，参见 [6], 第 23 页开头的讨论。其中，预序关系依赖于 G。因此，$\mathbb{P}^G_{[\alpha_n,\alpha_{n+1})}\cap M=\mathbb{P}^G_{[\alpha_n,\alpha_{n+1})}\cap M[G]$.

我们声称，$q := \bigcup_{n\in\omega} q_n$ 是一个见证（†）的（M，$\mathbb{P}_\delta$）-泛型条件。由于 φ_n 的值域是 D_n 的子集，只需证明对于所有 $n \in \omega$，q 强制 φ_n（$\dot{p}_n$）$\in \Gamma_\delta$。通过归纳，我们证明对于所有 $k \in \omega$

$$q \Vdash \text{“}\forall n \leq k\ \ \varphi_n(\dot{p}_n) \restriction \alpha_k \in \Gamma_{\alpha_k}\text{“}. \tag{9}$$

对于 $k = 0$，由 $(ii)(b)$ 可知这一点。假设 (9) 对于 k成立。取$n \leq k+1$。情形 $n = k+1$ 由 $(ii)(b)$ 得出。现在假设 $n \leq k$。我们有 $q \Vdash$ ”$\varphi_n(\dot{p}_n) \restriction \alpha_k \in \Gamma_{\alpha_k}$“。此外，根据 $(ii)(b)$ 及归纳假设，我们有

$$q \Vdash \text{“}\forall j \in [n, k+1]\ \ (\varphi_j(\dot{p}_j) \restriction \alpha_k \in \Gamma_{\alpha_k})\text{“}.$$

因此，对于 $k+1$，k，$k-1$，.....，$n+1$ 使用 $(ii)(c)$ 代替 n，可得

$$\begin{aligned} q \Vdash \text{“}\varphi_{k+1}(\dot{p}_{k+1}) \restriction [\alpha_k, \alpha_{k+1}) &\leq \dot{p}_{k+1} \restriction [\alpha_k, \alpha_{k+1}) = \varphi_k(\dot{p}_k) \restriction [\alpha_k, \alpha_{k+1}) \leq \\ &\leq \dot{p}_k \restriction [\alpha_k, \alpha_{k+1}) = \cdots = \varphi_{n+1}(\dot{p}_{n+1}) \restriction [\alpha_k, \alpha_{k+1}) \leq \\ &\leq \dot{p}_{n+1} \restriction [\alpha_k, \alpha_{k+1}) = \varphi_n(\dot{p}_n) \restriction [\alpha_k, \alpha_{k+1})\text{“}. \end{aligned}$$

由于 $q \Vdash$ ”$\varphi_{k+1}(\dot{p}_{k+1}) \restriction [\alpha_k, \alpha_{k+1}) \in \Gamma_{[\alpha_k, \alpha_{k+1})}$“，我们得到 $q \Vdash$ ”$\varphi_n(\dot{p}_n) \restriction [\alpha_k, \alpha_{k+1}) \in \Gamma_{[\alpha_k, \alpha_{k+1})}$“。因此，

$$q \Vdash \text{“}\varphi_n(\dot{p}_n) \restriction \alpha_{k+1} \in \Gamma_{\alpha_{k+1}}\text{“},$$

至此，证明完成。 □

3. Property(†) and universally meager subspaces

Zakrzewski 在 [40, 41] 中证明了普遍瘦子空间的许多刻画。对我们而言，将以下刻画普遍瘦子空间的性质（见 [41, 定理 1.1]）作为定义会很方便。

引理 3.1 (Zakrzewski [41, 定理 1.1])。集合 $X \subseteq 2^\omega$ 是普遍瘦的，当且仅当对于每个波兰空间 Y 以及连续非恒定映射 $f\colon Y \to 2^\omega$，其原像 $f^{-1}[X]$ 在 Y中是瘦集。

下面的引理相当标准。

引理 3.2。假设基模型中连续统假设成立 V 且令$\langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\alpha : \alpha < \omega_2 \rangle$ 为适当强迫的可数支撑迭代，使得$\dot{\mathbb{1}}_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash$”$|\dot{\mathbb{Q}}_\alpha| \leq \omega_1$“ 对所有 $\alpha < \omega_2$均成立。再令 G_{ω_2} 为关于 V的 $\mathbb{P}_{\omega_2}$-泛型滤子，且 $X \in V[G]$ 为 2^ω的普遍瘦子空间。那么存在一个由序数 $\alpha < \omega_2$ 组成的 ω_1-俱乐部集 C，满足以下性质：

- $X \cap V[G_\alpha] \in V[G_\alpha]$;
- 若 Y是一个波兰空间，$f\colon Y \to 2^\omega$ 是一个连续非恒定映射，且二者都在 $V[G_\alpha]$中编码，那么 $f^{-1}[X]$ 包含于一个在 $V[G_\alpha]$中编码的 Y 瘦子集中；
- 如果 Y 是一个波兰空间，$f\colon Y \to 2^\omega$ 是一个连续映射，且二者均在 $V[G_\alpha]$中编码；如果 R 是 Y的一个 G_δ-子集，编码于 $V[G_\alpha]$，并且$f[R] \cap V[G_\alpha] \cap X = \emptyset$，那么 $f[R] \cap X = \emptyset$。

由前两项可知，对于所有 $\alpha \in C$，$X \cap V[G_\alpha]$ 在 $V[G_\alpha]$ 中都是普遍瘦的。

证明是标准的，留作读者练习。

定理 3.3. 设 $\langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\alpha : \alpha < \omega_2 \rangle$ 如引理 3.2 中所述，且 $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash$ "$\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ 对所有 $\alpha < \omega_2$都满足（†）"。那么在 $V^{\mathbb{P}_{\omega_2}}$ 中，所有普遍瘦子空间的大小至多为 ω_1。

证明。设 $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\omega_2}$ 和 G 是 V 上的一个 $\mathbb{P}$-泛型滤子。设 $X \subseteq 2^\omega$ 是 $V[G]$ 中的一个普遍瘦子空间，X 是集合 X 的一个名称，即 $\dot{X}^G = X$。让我们在引理 3.2 给出的 ω_1-CLUB 中选取 $\alpha < \omega_2$ 。反设，存在一个实数的名称 τ，使得对于某个条件 $r \in G$，有 $r \Vdash$"$\tau \in X \setminus V[G_\alpha]$"。下文不失一般性地假设 $V = V[G_\alpha]$ ，并将 $G_{[\alpha,\omega_2)}$ 与 G 等同。

除非另有说明，我们都在 V 中工作。对于每个 $n \in \omega$，令 $D_n \subseteq \mathbb{P}$ 为 r 以下决定 $\tau \restriction n$ 的稠密开集。假设 M 是 $H(\theta)$ 的一个可数初等子模型，其中 θ 足够大，使得 r，$\mathbb{P}$，τ，X，$D_n \in M$。赋予 $D_n \cap M$ 离散拓扑，并考虑一个子空间 $Y \subseteq \Pi_{n\in\omega}(D_n \cap M)$，使得

$$Y := \Big\{ \langle p_n : n \in \omega \rangle \in \Pi_{n\in\omega}(D_n \cap M) : p_{n+1} \leq p_n \text{ for all } n \in \omega \Big\}.$$

由于 Y 是零维波兰空间 $\Pi_{n\in\omega}(D_n \cap M)$ 的一个处处非局部紧闭子空间，空间 Y 与 ω^ω 同胚。

对于 $y \in Y$ 和 $n \in \omega$，条件 $y(n)$ 决定 $\tau \restriction n$，因此存在 $t_n \in 2^{<\omega}$ 使得

$$y(n) \Vdash \text{"}\tau \restriction n = t_n\text{"}.$$

那么，由 $f(y)$ 定义的函数 $f\colon Y \to 2^\omega \to = \bigcup_{n\in\omega} t_n$ 是一个连续函数。由于 τ 被迫不属于 V，函数 f 处处不恒定。集合 $X \cap V$ 在 V 中是普遍瘦的，因此集合

$$f^{-1}[(X \cap V) \cap f[Y]]$$

在 $Y \cap V$ 中是瘦集。令 $\langle O_n\colon n \in \omega \rangle$ 为 Y 中一个递减的稠密开集序列，使得

$$\bigcap_{n\in\omega} O_n \cap f^{-1}[(X \cap V) \cap f[Y]] = \emptyset.$$

若对于某个 $y' \in Y$ 和 $k \in \omega$，有 $t = y' \restriction k$，则 $[t] := \{ y \in Y\colon y \restriction k = t \}$ 是 Y 中的一个基本开集。令

$$C_n := \{ t \in \bigcup_{k\in\omega} Y \restriction k : [t] \subseteq O_n \}$$

对所有 $n \in \omega$ 均成立。则集合 $C := \bigcup_{n\in\omega} C_n$ 是可数的。

现在我们将定义一族回归函数，以应用性质（†）。

定义 $\varphi^0\colon\ M \cap \mathbb{P} \to M \cap \mathbb{P}$ 如下：固定 $p \in M \cap \mathbb{P}$。假设 p与 r相容。由于开集 O_0 稠密，存在 $s_{p,\,0} \in C_0$ 使得 $s_{p,\,0}(0) \leq p$ 且 $[s_{p,0}] \subseteq O_0$。令

$$\varphi^0(p) := \begin{cases} s_{p,0}(\text{end}), & \text{if } p \text{ is compatible with } r, \\ p, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

固定 $n \in \omega$ 和 $t \in C_n$。定义 φ_t^{n+1}: $M \cap \mathbb{P} \to M \cap \mathbb{P}$ 如下：固定 $p \in P$。假设 p 与 t(end)相容。由于开集 O_{n+1} 稠密，存在一个由条件组成的有限非空序列$s_{p,\ n,\ t}$，使得

$$s_{p,n,t}(0) \leq p, t(\text{end}) \quad \text{and} \quad [t^\frown s_{p,n,t}] \subseteq O_{n+1}.$$

Let

$$\varphi_t^{n+1}(p) := \begin{cases} s_{p,n,t}(\text{end}), & \text{if } p \text{ is compatible with } t(\text{end}), \\ p, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由性质 (†)，存在一个 $(M,\ \mathbb{P})$-泛型条件 $q \leq r$，使得

$$q \Vdash \text{"}\Gamma_{\mathbb{P}} \cap \varphi^0[M \cap \mathbb{P}] \neq \emptyset\text{"}, \quad \text{and} \quad q \Vdash \text{"}\Gamma_{\mathbb{P}} \cap \varphi_t^n[M \cap \mathbb{P}] \neq \emptyset\text{"}$$

对所有 $n \geq 1$ 和 $t \in C_n$ 均成立。

由稠密性，我们可以找到某个 $q \in G$ 来强迫上述结论。从现在起，我们在 $V[G]$ 中工作。定义 $R := \bigcap_{n\in\omega} U_n$，其中 $U_n := \bigcup\{ [s] :\ s \in C, [s] \cap V \subseteq O_n \}$。集合 R 在 V中编码，并且对所有$n \in \omega$，$U_n = O_n \cap V$。我们在泛型扩张中解释 Y 和 f 的定义，并像之前一样得到：Y 与 ω^ω 同胚，且f: $Y \to 2^\omega$ 连续且处处不恒定。Y 和 f 都在 V中编码。现在我们将归纳地定义一些 $y \in Y$。取 $q_0 \in G \cap \varphi^0[M \cap \mathbb{P}]$。那么存在 r_0 和$s_{r_0,\mathbf{0}}$，使得 $[s_{r_0,0}] \subseteq U_0$ 且$q_0 = s_{r_0,\mathbf{0}}$(end)。特别地，对每个 $j \in \text{dom}(s_{r_0,\mathbf{0}})$，我们有 $s_{r_0,\mathbf{0}}(j) \in G$。令 $y_0 := s_0 := s_{r_0,\mathbf{0}}$。假设我们已经构造了 $y_n = s_0 \hat{\mathbf{U}} s_1 \hat{\mathbf{U}} \cdots \hat{\mathbf{U}} s_n$，使得对所有 $k \leq n$，$[s_0 \hat{\mathbf{U}} \cdots \hat{\mathbf{U}} s_k] \subseteq U_k$成立，并且对所有 $j \in \text{dom}(y_n)$，$y_n(j) \in G$。我们有 $y_n \in \bigcup_{k\in\omega} Y \restriction k = \bigcup_{k\in\omega} (Y \cap V) \restriction k$，因此可以选取$q_{n+1} \in G \cap \varphi_{y_n}^{n+1}[M \cap \mathbb{P}]$。那么存在某个 s_{n+1}，使得 $[y_n \hat{\mathbf{U}} s_{n+1}] \subseteq U_{n+1}$ 且$s_{n+1}(\text{end}) = q_{n+1}$。同样，对所有 j，我们有 $s_{n+1}(j) \in G$。令 $y_{n+1} := y_n \hat{\mathbf{U}} s_{n+1}$。最后，定义 $y := \bigcup_{n\in\omega} y_n \in Y$。

根据 Y 的定义，对于所有 $i \in \omega$，都存在某个 $t_i \in 2^i$，使得 $y(i) \Vdash \text{"}\tau \restriction i = t_i\text{"}$。因此，$\tau^G = f(y)$。此外，根据构造，对于所有 $n \in \omega$，都有 $y \in [y_n] \subseteq U_n$。由此可得 $y \in \bigcap_{n\in\omega} U_n$，因此

$$\tau^G = f(y) \in f[\bigcap_{n\in\omega} U_n].$$

回顾一下，集合 $(\bigcap_{n\in\omega} U_n) \cap V = \bigcap_{n\in\omega} (U_n \cap V) = \bigcap_{n\in\omega} O_n$ 是证明 $X \cap V$ 为普遍瘦的见证，即

$$(\bigcap_{n\in\omega} U_n) \cap V \cap f^{-1}[(X \cap V) \cap f[Y \cap V]] = \emptyset.$$

因此，$f[\bigcap_{n\in\omega} U_n] \cap X \cap V = \emptyset$。根据我们对 V 和 α 的假设，可得 $f[\bigcap_{n\in\omega} U_n] \cap X = \emptyset$，这与 $\tau^G = f(y) \in f[\bigcap_{n\in\omega} U_n] \cap X$. □矛盾

根据 [40, 命题 2.3]，每个全不完美的 Hurewicz 子空间都是普遍瘦的。结合定理 3.3，可得以下事实。

推论 3.4。 设 $\langle \mathbb{P}_\alpha, \mathbb{Q}_\beta \colon \alpha \leq \omega_2, \beta < \omega_2 \rangle$ 是一个具有可数支撑的迭代强迫构造，使得

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash \text{“}|\dot{\mathbb{Q}}_\alpha| \leq \omega_1 \text{ and } \dot{\mathbb{Q}}_\alpha \text{ satisfies } (\dagger)\text{“}$$

对所有 $\alpha < \omega_2$。那么在 $V^{\mathbb{P}_{\omega_2}}$ 中，所有 Hurewicz 全不完美空间的基数至多为 ω_1。

由于米勒强迫满足(†) [32, 引理2.5], ，我们得到以下推论，从而回答了 [43, 问题1.10]。

推论3.5。 在米勒模型中，每个 Hurewicz 全不完美空间的基数至多为 ω_1。

根据 [1, 定理9和 11] （另见 [1, 定理 17] ，其中给出了一个更一般的结果），在米勒模型中，每个完全贫乏子空间都是普遍瘦的。

推论3.6。 在米勒模型中，每个完全贫乏子空间的基数至多为 ω_1。

一个卢津集是 2^ω 的一个不可数子集，它与 2^ω的每个瘦子集的交集都是可数的。值得注意的是，根据 [24, 第 529 页定理 2] （该定理归功于卢津），每个卢津集都存在一个到某个完全贫乏子空间的一一映射。因此，在 Cohen模型中存在一个大小为 $\omega_2 = \mathfrak{c}$的完全贫乏子空间，因为在该模型中，“标准”的 Cohen 实数构成一个大小为 ω_2的卢津集。另一方面，根据 [27, 第 577 页定理], ，在该模型中不存在大小为 ω_2 的普遍瘦子空间。更多细节请参见问题 6.5 后的讨论。因此，不存在大小为 $\mathfrak{c}$的普遍瘦子空间，并不意味着所有完全贫乏子空间的大小都小于 $\mathfrak{c}$。

4. Rothberger spaces in some models of $\mathfrak{u} < \mathfrak{g}$

超滤的基的最小基数 $|\mathscr{B}|$ 记为 $\mathfrak{u}$。对于集合 Y和 Y'，若 $|Y' \backslash Y| < \omega$, 则记作 $Y' \subseteq^* Y$。若 $Y \in A$ 且 $Y' \subseteq^* Y$，则称族 $A \subseteq [\omega]^\omega$为群体稠密，其中 $Y' \in [\omega]^\omega$蕴含$Y' \in A$；并且对于任意由 ω 中两两不相交的非空有限子集组成的序列 $\langle K_n \colon n \in \omega \rangle$ ，都存在 $I \in [\omega]^\omega$ 使得 $\bigcup_{n \in I} K_n \in A$。满足 $\bigcap \mathscr{A} = \emptyset$的群体稠密族的集合 $\mathscr{A}$ 的最小基数记为 $\mathfrak{g}$。已知 $\omega_1 \leq \mathfrak{u}$ 且 $\mathfrak{g} \leq \mathfrak{c}$ （有关这些及其他连续统的基数特征的更多信息，见 [7] ）。

不等式 $\mathfrak{u} < \mathfrak{g}$ 已知具有相容性 [8] ，并且对组合覆盖性质有若干推论。例如，它意味着每个 Rothberger 空间都是 Hurewicz 空间，参见 [42, 定理 5]或 [38, 定理 2.2 和 3.1]。众所周知，Rothberger 空间是全不完美的，因为 Rothberger 性质在闭子空间下保持，而 Cantor 空间 2^ω 不具有 Rothberger 性质；例如，参见 [23, 定理 2.3] ，其中给出了强得多的结果。因此， $\mathfrak{u} < \mathfrak{g}$ 意味着 Rothberger 空间是 Hurewicz 全不完美空间，所以下述事实可直接由推论 3.4 得出。

推论 4.1。 设 $\mathbb{P}$ 是推论 3.4 中那样的迭代的极限，且满足 $V^{\mathbb{P}} \vDash (\mathfrak{u} < \mathfrak{g})$。那么在 $V^{\mathbb{P}}$中，每个 Rothberger 空间的基数至多为ω_1。

由于 $\mathfrak{u} < \mathfrak{g}$ 在米勒模型中成立（这是众所周知的，并且已在 [8, 下文的 2], 定理证明中提及；我们将在那里证明一个更一般的引理 4.5），我们得出，下文的定理 4.2 是推论 4.1 和上述讨论的直接结果。

定理 4.2。 在米勒模型中，每个 Rothberger 空间的基数至多为 ω_1。更确切地说，在该模型中，每个 Hurewicz 全不完美空间的基数至多为 ω_1，并且每个 Rothberger 空间都是 Hurewicz 全不完美空间。

请注意，此处不能省略条件 $\mathfrak{u} < \mathfrak{g}$，因为 Cohen 强迫满足 (†)，而由带可数支撑的 Cohen 强迫迭代“直接”添加的 ω_2 多个 Cohen 泛型 c_α 构成一个 Rothberger 空间。事实上，集合 $C = \{c_\alpha : \alpha < \omega_2\}$ 在相应的强迫扩张中，ω_2-集中于 2^ω 的任意可数稠密子集上，且 $\mathrm{cov}(\mathscr{M}) = \omega_2 = \mathfrak{c}$，因此只需应用[3] [31,定理 5]。

接下来，我们将分析 Goldstern、Judah 和 Shelah 在 [13]中引入的、具有可数支撑的长度为 ω_2 的适当强迫迭代；他们在那里研究了如何在不添加 Cohen 实数的情况下，构造大小为 $\mathfrak{c} > \omega_1$ 的强零测集。下文中，我们将这样的迭代称为 GJS-迭代。我们将证明，GJS-迭代中的迭代因子（因而最终偏序集也）满足（†）；结合若干众所周知的结果，我们还可得出，在相应的扩张中 $\mathfrak{u} < \mathfrak{g}$ 成立。因此，我们将证明 GJS-迭代属于推论 4.1 的适用范围。

更准确地说，若对于余终多个 $\alpha \in \omega_2$，都有 $\mathbb{Q}_\alpha$ 被强迫为米勒强迫，而其他迭代因子 $\mathbb{Q}_\alpha$ 是形如 PT_H 的（$\mathbb{P}_\alpha$-名称）偏序集，并依赖于函数 $H : \omega \to ([\omega]^{<\omega} \setminus [\omega]^{\leq 1})$；该函数由某个记账过程提供，以确保对于最终模型中的每个这样的 H，偏序集 PT_H 作为 $\mathbb{Q}_\alpha$ 被用于余终多个 α，则我们称迭代 $\langle \mathbb{P}_\alpha, \mathbb{Q}_\alpha : \alpha < \omega_2 \rangle$ 为 *GJS-*迭代。定义 PT_H 为所有满足以下条件的子树 $p \in \omega^{<\omega}$ 的集合：

(1) $\forall \eta \in p \, \forall l \in \mathrm{dom}(\eta) \, (\eta(l) \in H(l))$，(2) $\forall \eta \in p \, (|\mathrm{succ}_p(\eta)| \in \{1, |H(|\eta|)|\})$，(3) $\forall \eta \in p \, \exists \nu \in p \, (\eta \subseteq \nu$ 且 $|\mathrm{succ}_p(\nu)| = |H(|\nu|)|)$。

对于 p_1，$p_2 \in \mathrm{PT}_H$ 设 $p_1 \leq p_0$，即，如果且仅如果 $p_1 \subseteq p_0$，则 p_1 是比 p_0更强的条件。

在 [13, 推论 2.14]中，已证明 PT_H 是一个适当的 ω^ω-有界强迫概念。我们将沿用 [32, 引理 2.5]中的方法，证明它还满足 (†)。为此，我们需要引入一些辅助记号，用来描述 PT_H中条件的融合。

[3]我们不知道 C 是否是卢津集。

对于 $p \in \mathrm{PT}_H$，所有分裂节点的集合定义为

$$\mathrm{Split}(p) := \{\eta \in p : |\mathrm{succ}_p(\eta)| > 1\}.$$

此外，

$$\mathrm{Split}_k(p) := \{\eta \in \mathrm{Split}(p) : |\{\nu \subsetneq \eta : \nu \in \mathrm{Split}(p)\}| = k\}.$$

对于 $p,\ q \in \mathrm{PT}_H$，若 $p \leq q$ 且 $\mathrm{Split}_k(q) \subseteq p$，我们记作 $p \leq_k q$。若有一个序列 $\langle p_k : k \in \omega\rangle$ 满足 $p_{k+1} \leq_k p_k$，令 $p_\omega := \bigcap_{k\in\omega} p_k \in \mathrm{PT}_H$ 为该序列的融合；显然，对于所有 $k \in \omega$，它都满足 $p_\omega \leq_k p_k$。

引理4.3。PT_H 满足（†）。

证明。设 $M \ni H$ 和 $\{\varphi_i : i \in \omega\}$ 如（†）的表述所述。假设 $p \in M \cap \mathrm{PT}_H$，且 $\{D_n : n \in \omega\}$ 是所有属于 M 的 PT_H 开稠密子集的一个枚举。令 $p_0 := p$。假设已构造出 $\langle p_n : n \leq k\rangle$，使得 $p_n \leq_{n-1} p_{n-1}$，并且对于所有 $t \in$，$\mathrm{Split}_n(p_n)$ 均有 $(p_n)_t \in M$。

对于每个 $t \in \mathrm{Split}_k(p_k)$ 和 $m \in H(|t|)$，都存在 $R_{t,m} \in D_n \cap M$ 使得 $R_{t,m} \leq \varphi_k((p_k)_{t^\frown m})$。令

$$p_{k+1} := \bigcup\{R_{t,m} : t \in \mathrm{Split}_k(p_k), m \in H(|t|)\}.$$

注意，对于所有 $r \in \mathrm{Split}_{k+1}(p_{k+1})$，都存在 t 和 m，使得 $(p_{k+1})_r = R_{t,m} \in M$。令 $p_\omega := \bigcap_{k\in\omega} p_k$ 为该融合。我们有

$p_\omega \leq p_{k+1} \Vdash$ "$\exists r \in \mathrm{Split}_{k+1}(p_{k+1})\ \exists t, m\ ((p_{k+1})_r = R_{t,m} \in D_k \cap M \cap \Gamma$ " 对所有 $k \in \omega$均成立。特别地，$p_\omega \Vdash$ "$\exists t, m\ (\varphi_k((p_k)_{t^\frown m}) \in \Gamma$"。因此，$\mathrm{PT}_H$满足 (†)。□

引理 4.3、定理 3.3、Miller 强迫满足 (†) 这一事实、[32, 引理 2.5]，以及 GJS 迭代的定义推出以下事实。

推论 4.4。设 $\langle \mathbb{P}_\alpha,\ \mathbb{Q}_\alpha : \alpha < \omega_2\rangle$ 为一个 GJS-迭代。则可强迫使 $\mathbb{Q}_\alpha$ 对所有 $\alpha < \omega_2$满足（†），因此 $\mathbb{P}_{\omega_2}$ 也满足（†）。

下一个结果可以看作一个民间结果。

引理 4.5。设 $\langle \mathbb{P}_\alpha,\ \mathbb{Q}_\alpha : \alpha < \omega_2\rangle$ 是基模型V满足连续统假设 CH 时的一个 GJS-迭代。则 $\mathfrak{u} < \mathfrak{g}$ 在 $V^{\mathbb{P}_{\omega_2}}$中成立。

证明。设 G 是关于 V的 $\mathbb{P}_{\omega_2}$-泛型滤子。在 $V[G]$ 中成立的等式 $\mathfrak{u} = \omega_1$，源于以下事实：每个 P-点 $\mathscr{U} \in V$都被 $\mathbb{P}_{\omega_2}$保持不变，即它在 $V[G]$中生成一个超滤。反过来，这一点可以通过结合几个众所周知的结果来证明。首先，根据 [13, 引理 2.22]，P-点在偏序集 PT_H 下保持不变。Miller 强迫保持 P-点的性质已在 [29, 命题 4.1], 中证明；另见 [10, 引理 10]，其中给出了另一种证明。最后，根据 [9, 定理 4.1]，保持 P- 点的真偏序集的可数支撑迭代也保持 P- 点。

接下来，我们将证明 $V[G]$ 也满足 $\mathfrak{g} = \omega_2$。为此，我们需要两个标准事实。

断言 4.6. 设 $\mathbb{R}$ 是 ω^ω-有界的，且 H 是关于 V的 $\mathbb{R}$-泛型滤子。若 $\langle F_n : n \in \omega\rangle \in V[H]$ 是由 ω 的有限、非空且两两不交的子集组成的序列，那么存在一个序列 $\langle K_m : m \in \omega\rangle \in V$，其各项都是 ω 的有限、非空且两两不交的子集，并且对每个 $m \in \omega$，都存在某个 n 使得$F_n \subseteq K_m$。

证明。选取一个子序列 $\langle F_{n_m} : m \in \omega\rangle$ 使得 $\max F_{n_m} < \min F_{n_{m+1}}$。在 V 中，对每个 $f \in V \cap \omega^{\uparrow\omega}$ 定义

$$K^f_0 := [0, f(0)) \quad \text{and} \quad K^f_m := [f(m-1), f(m))$$

对所有 $m > 0$ 以及

$$K^f := \langle K^f_m : m \in \omega\rangle \in V$$

设 $g \in \omega^{\uparrow\omega}$ 是 $V[H]$中的一个函数，使得 $g(m) = \max F_{n_m}$。注意，对所有 $m \in \omega$，我们都有 $F_{n_m} \subseteq [g(m-1)\ g(m))$。由于 $\mathbb{R}$ 是 ω^ω-有界的，存在一个函数 $f \in \omega^{\uparrow\omega} \cap V$ 使得 $g \leq f$。递归地定义 $h \in \omega^{\uparrow\omega} \cap V$，令

$$h(0) := f(0) \quad \text{and} \quad h(n+1) := f(h(n)+1)+1.$$

我们有

$$h(n) < g(h(n)) < g(h(n)+1) \leq f(h(n)+1) < h(n+1)$$

对所有 $n \in \omega$。最后，考虑 $K^h := \langle K^h_m : m \in \omega\rangle \in V$。我们有

$$F_{n_{h(n)+1}} \subseteq [g(h(n)), g(h(n)+1)] \subseteq [h(m), h(m+1)) = K^h_m$$

对所有 $m \in \omega$。 □

断言 4.7。设 $\mathbb{R}$是 ω^ω-有界的，且 H 是一个 $\mathbb{R}$-泛型滤子。若 A 在 V中群体稠密，则该族

$$(\downarrow A)^{V[H]} := \{b \in [\omega]^\omega : \exists a \in A\ \ (b \subseteq a)\}$$

在 $V[H]$中群体稠密。

证明。集合 $(\downarrow A)^{V[H]}$ 显然向下封闭，且在有限修改下封闭。设 $\langle F_n : n \in \omega\rangle \in V[H]$ 是 ω的一个由有限个非空两两不交子集组成的序列。根据断言 4.6，选取相应的 $\langle K_m : m \in\omega\rangle \in V$，使得对所有 $m \in \omega$，都存在 $n_m \in \omega$，满足 $F_{n_m} \subseteq K_m$。由于 A 群体稠密，存在集合 $I \in [\omega]^\omega$，使得 $\bigcup_{m\in I} K_m \in A$。令 $J := \{n_m : m \in I\} \in [\omega]^\omega$。我们有 $\bigcup_{j\in J} F_j \subseteq \bigcup_{m\in I} K_m$，因此$\bigcup_{j\in J} F_j \in (\downarrow A)^{V[H]}$。 □

米勒强迫可用于扩大 $\mathfrak{g}$这一事实已在 [8, 定理 2]的证明末尾得到注意。就我们的目的而言，使用 [10, 引理 7]的以下直接推论将会很方便。在下文中，我们将用m表示米勒泛实数，即$m = \bigcup\bigcap H$，其中 H 是一个 $\mathbb{M}$-泛型滤子。

断言 4.8。对于每个 $p_0 \in \mathbb{M}$，存在 $h \in \omega^{\uparrow\omega}$ 和 $p_1 \leq p_0$，使得对于每个 $I \in [\omega]^\omega$，都存在一个 $q \leq p_1$ 强迫

$$\mathrm{rng}(m) \subseteq \bigcup_{n\in I} [h(n), h(n+1)).$$

断言 4.9。设 $A \subseteq [\omega]^\omega$ 是 V 中的一个组稠密族，且 H 是一个 V 上的 $\mathbb{M}$-泛型滤子。那么在 $V[H]$ 中，我们有

$$\mathrm{rng}(m) \subseteq (\downarrow A)^{V[H]}.$$

证明。只需证明集合

$$D := \{q \in \mathbb{M} : q \Vdash \text{“}\exists Y \in A \ (\mathrm{rng}(\dot{m}) \subseteq Y)\text{“}\}$$

在 $\mathbb{M}$中稠密。

固定 $p_0 \in \mathbb{M}$。令 $p_1 \leq p_0$ 和 h 如断言 4.8 中所述。由于 A 是群体稠密的，存在一个集合 $I \in [\omega]^\omega$，使得

$$Y := \bigcup_{n \in I} [h(n), h(n+1)) \in A.$$

由断言 4.8，存在 $q \leq p_1$ 强迫 $\mathrm{rng}(\dot{m}) \subseteq Y$。因此，$q \in D$。 □

现在我们可以在 $V[G]$ 中完成 $\mathfrak{g} = \omega_2$ 的证明（回想一下，G 是一个在 V上的$\mathbb{P}_{\omega_2}$-泛型滤子）。我们在 $V[G]$中进行论证。令 $\{A_\gamma : \gamma < \omega_1\}$是一个群体稠密集族。标准论证（例如，见 [8, 定理 2]的证明）给出一个 ω_1-俱乐部集 $C \subseteq \omega_2$，使得

$$A \cap V[G_\alpha] \in V[G_\alpha] \text{ and } A \cap V[G_\alpha] \text{ is groupwise dense in } V[G_\alpha]$$

对所有 $\alpha \in C$ 和 $\gamma \in \omega_1$。

令 β 为大于或等于 α 且满足 $\mathbb{Q}_\beta = \dot{\mathbb{M}}$的最小序数。强迫 $\mathbb{R} := \mathbb{P}^{G_\alpha}_{[\alpha,\beta)}$ 是 ω^ω-有界的。令 H 为在 $V[G_\alpha]$ 上的一个 $\mathbb{R}$-泛型滤子，使得 $V[G_\beta] = V[G_\alpha * H]$，并令 m_β 为迭代在阶段 β 添加的泛米勒实数。由断言 4.7，集合

$$A'_\gamma := \big(\downarrow (A_\gamma \cap V[G_\alpha])\big)^{V[G_\alpha * H]}$$

对所有 $\gamma \in \omega_1$而言，在 $V[G_\beta] = V[G_\alpha * H]$ 中是群体稠密的。由断言 4.9，

$$\mathrm{rng}(m_\beta) \subseteq \bigcap_{\gamma<\omega_1} \big(\downarrow (A_\gamma \cap V[G_\alpha])\big)^{V[G_\beta]} \subseteq \bigcap_{\gamma<\omega_1} A_\gamma,$$

因此 $\bigcap_{\gamma<\omega_1} A_\gamma \neq \emptyset$ 属于 $V[G]$。于是，$\mathfrak{g} = \omega_2$。 □

注 4.10. 如果我们将 GJS-迭代中的 PT $_{\dot{H}}$ 替换为任意一个大小至多为连续统的适当迫迫，并额外要求对于平稳地多个共尾数为 ω_1 的 $\alpha < \omega_2$，迭代因子 $\mathbb{Q}_\alpha$ 均为米勒强迫，那么在所得模型中也能得到 $\mathfrak{g} = \omega_2$。这是因为在引理 4.5 证明的最后部分，$\beta = \alpha$，这样就无需使用断言 4.7。□

最后，定理 1.5 是推论 4.4、引理 4.5 和推论 4.1 的直接推论；为方便读者，下面将以更详细的形式表述该定理。

定理 4.11。在由 GJS-迭代得到的 CH 基模型的强迫扩张中，存在一个大小为 $\omega_2 = \mathfrak{c}$ 的强测度零集 $X \subseteq 2^\omega$，但每个 Rothberger 空间的大小至多为 ω_1。

更确切地说，在此类强迫扩张中，每个 Hurewicz 全不完美空间的大小至多为 ω_1，且每个 Rothberger 空间都是 Hurewicz 且全不完美。

定理 4.11 得出，在 Goldstern–Judah–Shelah 模型中，每个 Rothberger 空间都是 Hurewicz 且全不完美的。事实证明，利用 Goldstern–Judah–Shelah 模型的已知性质，逆命题在该模型中也成立。

定理 4.12. 在 Goldstern–Judah–Shelah 模型中，一个空间是 Rothberger 空间，当且仅当它是 Hurewicz 且全不完美的。

证明. ($\Rightarrow$) 应用定理 4.11。

($\Leftarrow$) 每个 Hurewicz 全不完美的 2^ω 子空间都是普遍瘦的 [40, 命题 2.3]。在 Goldstern–Judah–Shelah 模型中，由推论 3.4 和推论 4.4 可知，每个普遍瘦子空间的大小至多为 ω_1，且每个大小为 ω_1 的集合都是强零测的，因为在 [13, 定理 3.8] 的证明中已经证明，在该模型中，强零测集理想对于少于 $\mathfrak{c}$ 个集合的并封闭。每个具有 Hurewicz 性质的强零测集都是 Rothberger 空间 [31, 定理 8]。□

在定理 4.12 的证明中，我们实际上已经证明了以下结论：

命题 4.13。如果每个普遍瘦空间都是强零测的，那么每个 Hurewicz 全不完美空间都是 Rothberger 空间。

5. Strong measure zero sets in the Miller model

本节证明定理 1.6。

我们将由递增的有限序列组成的子树 T of $\omega^{<\omega}$ 称为一棵米勒树，它满足以下条件：

- 每个 $t \in T$ 都有一个扩展 $s \in T$，该扩展在 T中是分叉的；也就是说，T中的 s 有多个直接后继；
- 如果 s 在 T中是分裂节点，那么它在 T中有无穷多个直接后继。

所谓米勒强迫，是由所有米勒树组成的集合 $\mathbb{M}$，并按包含关系排序；也就是说，较小的树包含关于泛型的更多信息。这个偏序集是在 [29]中引入的。对于一棵米勒树 T，我们用 Split(T) 表示 T的所有分裂节点组成的集合。给定 $p \in \mathbb{M}$ 和 $s \in$ Split(p)，我们用 scsr$_p$(s) 表示 s 在 Split(p) 中的所有直接后继组成的集合。令 $\mathbb{M}_\alpha$ 为长度为 α的米勒强迫 $\mathbb{M}$ 的可数支撑迭代。

我们将需要以下一个显然的事实。

引理 5.1。对于每个 $\mathbb{M}$-名称 τ（其表示一个实数），以及 $p_0 \in \mathbb{M}$，存在 $p \leq_0 p_0$，满足以下性质：对于每个 $s \in$ Split(p)，都存在 $u_s \in 2^\omega$ 使得

- 对于每个 $n \in \omega$ 以及几乎所有 $t \in$ scsr$_p$(s)，都有$p_t \Vdash$ "$\tau \restriction n = u_s \restriction n$"；并且
- $p_s \Vdash$ "$\tau \restriction$ (rng(s) 的最大值) $+ 1 = u_s \restriction$ (rng(s) 的最大值) $+ 1$)" 对每个 $s \in$ Split(p) 都成立。

证明。 实现第一项相当容易。至于第二项，如有必要，通过移除 p 的每个分裂节点的有限多个直接后继，我们可以假设

$$p_t \Vdash \text{“}\tau \restriction (\max(\mathrm{rng}(s))+1) = u_s \restriction (\max(\mathrm{rng}(s))+1)\text{“}$$

对每个 $s \in \mathrm{Split}(p)$ 和 $t \in \mathrm{scsr}_p(s)$。由于集合 $\{p_t : t \in \mathrm{scsr}_p(s)\}$ 在 p_s 下预稠密，因此我们有

$$p_s \Vdash \text{“}\tau \restriction (\max(\mathrm{rng}(s))+1) = u_s \restriction (\max(\mathrm{rng}(s))+1)\text{“}. \qquad \square$$

对于 $A \in [\omega]^\omega$ 映射 $\psi : Y \to 2^A$，若对每个$x \in 2^A$ 都存在 $y \in Y$ 使得 $\psi(y) =^* x$，也就是说，对所有除有限多个 $k \in A$ 之外的 $k \in A$，都有 $\psi(y)(k) = x(k)$，则称其为 $=^*$-满射 。下一个引理的证明与 [22, 引理 10] 的证明相当相似，因此可以视为一个民间结果。

引理 5.2。 设 $Y \in V$ 是 2^ω 的一个非瘦子集。设 G 是 V 上的一个 $\mathbb{M}$-泛型滤子，并且 m 是由 G 添加的泛米勒实数。在 $V[G]$ 中，令 $\psi\colon 2^\omega \to 2^{\mathrm{rng}(m)}$ 为将每个 $y \in 2^\omega$ 映射到其限制$y \restriction \mathrm{rng}(m)$ 的映射。那么映射 $\psi \restriction Y$ 是 $=^*$-满射。

证明。 给定一个实数名称 τ 以及 $p_0 \in \mathbb{M}$，我们需要找到 $r \leq p_0$ 和$y \in Y$，使得

$$r \Vdash \text{“}y \restriction \mathrm{rng}(\dot m) =^* \tau \restriction \mathrm{rng}(\dot m)\text{“},$$

其中 $\dot m$ 是 m的一个名称。为此，我们先考虑 $p \leq_0 p_0$ 和$\{u_s : s \in \mathrm{Split}(p)\}$，如引理 5.1 所示。如有必要，取 $\mathrm{scsr}_p(s)$ 的一个无限子集后，我们还可以假设

$$(\mathrm{rng}(t_1) \setminus \mathrm{rng}(s)) \cap (\mathrm{rng}(t_0) \setminus \mathrm{rng}(s)) = \emptyset$$

对于任意 $s \in \mathrm{Split}(p)$ 以及不同的 t_0，$t_1 \in \mathrm{scsr}_p(s)$ 均成立。进一步缩小每个 $s \in \mathrm{Split}(p)$ 对应的 $\mathrm{scsr}(s)$，我们可以假设

$$\big(\mathrm{rng}(t_1) \setminus \mathrm{rng}(s_1)\big) \cap \big(\mathrm{rng}(t_0) \setminus \mathrm{rng}(s_0)\big) = \emptyset \tag{10}$$

对于每个不同的 s_0，$s_1 \in \mathrm{Split}(p)$ 以及 $t_0 \in \mathrm{scsr}(s_0)$，都有 $t_1 \in \mathrm{scsr}(s_1)$。由此可得

$$A_s := \{\mathrm{rng}(t) \setminus \mathrm{rng}(s) : t \in \mathrm{scsr}_p(s)\}$$

是 ω 的一个由有限非空子集组成的无限不交族，因此

$$M_s := \big\{x \in 2^\omega : \forall^* a \in A_s\, (x \restriction a \neq u_{t(a)} \restriction a)\big\}$$

是 2^ω 的一个稀疏子集，其中 $t(a) \in \mathrm{scsr}_p(s)$ 满足

$$a = \mathrm{rng}(t(a)) \setminus \mathrm{rng}(s)$$

对所有 $a \in A_s$ 都成立。因此存在 $y \in Y \setminus \bigcup_{s \in \mathrm{Split}(p)} M_s$，所以

$$T_s := \{t \in \mathrm{scsr}_p(s) : y \restriction a = u_{t(a)} \restriction a\}$$

对所有 $s \in \mathrm{Split}(p)$ 都是无限的。设 $r \leq_0 p$ 是一个条件，使得如果$s \in \mathrm{Split}(p)$ 属于 r，那么 $\mathrm{scsr}_r(s) = T_s$。我们声称

$$r \Vdash \text{“}y \restriction \big(\mathrm{rng}(\dot m) \setminus \mathrm{rng}(s_0)\big) = \tau \restriction \big(\mathrm{rng}(\dot m) \setminus \mathrm{rng}(s_0)\big)\text{“}, \tag{11}$$

因此，r 和 y 符合要求，其中 s_0 是 r的词干。

事实上，否则我们可以找到 $r_1 \leq r$ 和 $k \in \omega$，使得

$$r_1 \Vdash \text{“}\big(k \in \mathrm{rng}(\dot{m}) \setminus \mathrm{rng}(s_0)\big) \wedge \big(y(k) \neq \tau(k)\big)\text{“}. \tag{12}$$

由 (10) 可知，强于 r （即强于 p）的条件要想判定 $k \in \mathrm{rng}(\dot{m}) \setminus \mathrm{rng}(s_0)$，唯一的可能是存在 $s \in \mathrm{Split}(r)$ 和 $t \in \mathrm{scsr}_r(s)$，使得 $k \in \mathrm{rng}(t) \setminus \mathrm{rng}(s)$ 且 $r_1 \leq r_t$。令 $a := \mathrm{rng}(t) \setminus \mathrm{rng}(s)$。那么，根据 r 的定义，我们有 $t = t(a) \in T_s$，因此

$$y(k) = u_{t(a)}(k). \tag{13}$$

另一方面，根据我们对 p 的选择，由引理 5.1 可知，

$$p_t \Vdash \text{“}\tau \restriction (\max(\mathrm{rng}(t)) + 1) = u_t \restriction (\max(\mathrm{rng}(t)) + 1)\text{“},$$

由于 $a \subseteq \max(\mathrm{rng}(t)) + 1$，我们有 $p_t \Vdash \text{“}\tau \restriction a = u_{t(a)} \restriction a\text{“}$。由于 $k \in a$ 且 $r_t \leq p_t$，特别地，我们有

$$r_t \Vdash \text{“}\tau(k) = u_{t(a)}(k)\text{“}. \tag{14}$$

最后需要指出，(13) 和 (14) 的合取与 (12) 矛盾，由此完成证明。□

每当我们讨论 2^A 的子空间之间的一致连续映射时，其中的子空间取为某个 $A \in [\omega]^\omega$，我们都将这些 2^A 与如下定义的超度量 ρ_A 一并考虑：若 y_0，y_1 是 2^A 中不同的元素，则

$$\rho_A(y_0, y_1) = 2^{-\min\{l \in A \,:\, y_0(l) \neq y_1(l)\}}.$$

推论 5.3. 设 $Y \in V$ 是 2^ω 的非瘦子集，且 G 是 V 上的一个$\mathbb{M}$-泛型滤子。那么在 $V[G]$ 中，存在一个可数族 Φ，由从 Y 到 2^ω 的一致连续映射组成，使得 $2^\omega = \bigcup_{\varphi \in \Phi} \varphi[Y]$。

证明。在整个证明过程中，我们都在 $V[G]$ 中工作。设 m 是由 G 添加的米勒实数，且 $\psi\colon\ 2^\omega \to 2^{\mathrm{rng}(m)}$ 是引理 5.2 中定义的映射。由于 2^ω 是紧的，因而ψ 关于 ρ_ω 和$\rho_{\mathrm{rng}(m)}$是一致连续的。

再令 $\theta\colon\ \omega \to \mathrm{rng}(m)$ 为保序双射。那么，将每个 $x \in 2^{\mathrm{rng}(m)}$ 映射到复合映射 $x \circ \theta \in 2^\omega$ 的映射 $\tilde{\theta}$ 是 $2^{\mathrm{rng}(m)}$ 与 2^ω 之间的同胚，因此，由于 $2^{\mathrm{rng}(m)}$ 的紧致性，它是一致连续的。

对于每个 $k \in \omega$ 和 $s \in 2^k$，考虑映射 $\nu_s\colon\ 2^\omega \to 2^\omega$，使得

$$\nu_s(z) = s \cup \big(z \restriction (\omega \setminus k)\big).$$

同样，由于 2^ω 是紧致的，它是一致连续的。根据引理 5.2，映射 $\psi \restriction Y\colon\ Y \to 2^{\mathrm{rng}(m)}$ 是 $=^*$-满射，因此映射 $\varphi = \tilde{\theta} \circ (\psi \restriction Y)\colon\ Y \to 2^\omega$ 也是 $=^*$-满射。于是，所有映射组成的集合

$$\nu_s \circ \tilde{\theta} \circ (\psi \restriction Y)\colon Y \to 2^\omega$$

对于 $s \in 2^{<\omega}$，符合要求。 □

下面这个简单事实可能早已广为人知；为求完整起见，我们给出一个简明的证明。

引理5.4。 如果 $\mathbb{P}$ 具有Laver性质，那么在 $V^{\mathbb{P}}$ 中，基模型实数 $2^\omega \cap V$ 不是强零测集。

证明。 设 G 是 V 上的一个 $\mathbb{P}$-泛型滤子。在 $V[G]$ 中，固定 $\langle s_n : n \in \omega\rangle \in \prod_{n\in\omega} 2^{(n+1)^2}$。由 $\mathbb{P}$ 的 Laver 性质，存在一个序列

$$\langle S_n : n \in \omega\rangle \in \prod_{n\in\omega} [2^{(n+1)^2}]^n \cap V$$

使得对所有 $n \in \omega$ 都有 $s_n \in S_n$。由于对所有 $n \in \omega$ 都有 $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1 > n$，我们可以在 V 中构造一个序列

$$\langle t_n : n \in \omega\rangle \in \prod_{n\in\omega} 2^{[n^2,(n+1)^2)}$$

使得对所有 $s \in S_n$ 和 $n \in \omega$，都有 $t_n \neq s \restriction [n^2,(n+1)^2)$。令 $x := \bigcup_{n\in\omega} t_n \in 2^\omega \cap V$。那么，对任意 $s \in \bigcup_{n\in\omega} S_n$ 都有 $x \notin [s]$，特别地，对任意 $n \in \omega$ 都有 $x \notin [s_n]$，由此证明完毕。□

推论5.5. 在 $V^{\mathbb{M}_{\omega_2}}$ 中，每个强零测集都是瘦集。

证明. 令 G 为一个 $\mathbb{M}_{\omega_2}$-泛型。在 $V[G]$ 中，固定一个非贫乏集 $Y_0 \subseteq 2^\omega$。反设，与我们的断言相反，Y_0 在 $V[G]$ 中是强零测的。一个标准论证给出 $\alpha \in \omega_2$，使得集合 $Y := Y_0 \cap V[G_\alpha] \in V[G_\alpha]$ 在 $V[G_\alpha]$ 中是非贫乏的。根据推论 5.3，存在一个可数族 Φ，其元素是从 Y 到 2^ω 的一致连续映射，并且 $2^\omega \cap V[G_{\alpha+1}] = \bigcup_{\varphi\in\Phi} \varphi[Y]$。由于强零测集在一致连续映射和可数并下保持强零测，我们得出 $2^\omega \cap V[G_{\alpha+1}]$ 在 $V[G]$ 中是强零测的。强迫 $\mathbb{M}$ 具有Laver性质 [3, 定理 7.3。45]，并且 Laver性质在具有可数支撑的真偏序集迭代下保持 [3, 定理 6.3。34]。因此，$\mathbb{M}_{\omega_2}$ 具有 Laver性质。根据引理5.4，集合 $2^\omega \cap V[G_{\alpha+1}]$ 在 $V[G]$ 中不是强零测的，矛盾。□

定理 *1.6* 的证明。 整个证明过程中，我们都在米勒模型中进行。由推论3.6可知，只需证明所有强零测集都是完全贫乏的。设 $P \subseteq 2^\omega$ 是一个完美集，X 是一个强零测集。固定一个同胚$f\colon P \to 2^\omega$。由于 $X \cap P$是强零测的，且 f 是一致连续的，因此 $f[X \cap P]$是强零测的，进而由推论5.5可知，它在 2^ω 中是瘦的。因此，集合 $X \cap P$在 P中是瘦的，证明完毕。□

6. 评论和开放问题

关于性质 (†)。 回顾一下，泛型扩张中的实数 g 称为最终不同的，如果对于所有 $y \in \omega^\omega \cap V$，集合 $\{ n \in \omega\colon y(n) = g(n) \}$ 都是有限的。

命题 6.1。 设 $\mathbb{P}$ 是满足(†)的强迫概念。那么在 $V^{\mathbb{P}}$中不存在最终不同实数。

证明。 令 τ为一个实数的名称，并令 $p \in \mathbb{P}$。令 $M \ni \mathbb{P}, \tau, p$为足够大的 θ对应的可数初等子模型 $H(\theta)$。枚举$M \cap \mathbb{P} = \{ p_i\colon i \in \omega \}$。令 $\varphi\colon M \cap \mathbb{P} \to M \cap \mathbb{P}$为一个函数，使得

$\varphi(p_i) \leq p_i$ 决定 $\tau(i)$ 对所有 $i \in \omega$ 均为 $a_i \in \omega$。定义 $g_M\colon\ \omega^\omega \to \omega^\omega$，令 $g_M(i) := a_i$。由性质（†），存在 $q \leq p$ 使得

$$q \Vdash \text{“}\exists^\infty p \in M \cap \mathbb{P}\ (\varphi(p) \in \Gamma_{\mathbb{P}})\text{”}.$$

设 $G \subseteq \mathbb{P}$ 是一个泛型滤子。由稠密性可知，我们可以找到如上所述的 $q \in \Gamma_{\mathbb{P}}$。于是 $\{\, i \in \omega\colon\ \tau\ (i)\ = a_i = g_M\ (i)\ \}$ 是无限的。□

注 6.2。 作为命题 6.1 的推论，随机强迫、Hechler 强迫和 Laver 强迫都不满足性质（†）。请注意，虽然存在违反性质（†）的可数链条件强迫，但很容易看出，所有 σ-闭强迫都满足性质（†）。由于 Sacks 强迫和 PT_H 满足（†），人们可能会猜想，所有强 Axiom A 强迫（见定义 1.3],）都满足性质（†）。然而，强迫 $PT_{f,\ g}$（其在定义 7.3.3], 中引入）满足强公理A（引理 7.3.5], ），但不满足性质（†），因为它会添加最终不同实数（引理 7.3.6]）。□

众所周知，添加最终不同实数等价于在 ω^ω 泛型扩张中$\omega^\omega \cap V$是瘦的，参见 [3, 引理 2.48]。

我们注意到，在我们的所有应用中，不等式 $\mathfrak{u} < \mathfrak{g}$ 都是必不可少的。也许我们的结果仅由此即可推出。一个需要核查的重要情形是 Blass 和 Shelah 在 [9], 中引入的强迫；这是第一个证明 $\mathfrak{u} < \mathfrak{g}$ [8, 的模型（定理 2]）。在这里，我们有 $\mathfrak{c} = \mathfrak{s} =$ 非$(\mathscr{M})$，参见 [9, 定理 52], ，这意味着 $\omega^\omega \cap V$是瘦的，因此，强迫无法满足(†)。

问题 6.3。 由 $\mathfrak{u} < \mathfrak{g}$ 是否可以推出，所有普遍瘦子空间（Hurewicz 全不完美子空间）的大小至多为 ω_1？Blass–Shelah 模型又如何？

下一个问题询问，[13] 的主要结果能否得到改进，从而在不添加 Cohen 实数的情况下，甚至获得大小为 $\mathfrak{c}$ 的 Rothberger 空间。定理 4.11 表明，需要使用一个在概念上不同于 [13]中所构造模型的模型。

问题 6.4。 如果相应的偏序集不添加 Cohen 实数，并且由长度为 ω_2 、由大小为 ω_1 的真偏序集构成、采用可数支撑的迭代得到，那么 GCH 模型的一个强迫扩张能否包含一个大小为 ω_2的 Rothberger 空间？

Rothberger 空间与 Hurewicz 全不完美空间之间的关系。 我们证明，在 Goldstern–Judah–Shelah 模型中，Rothberger 空间类与 Hurewicz 全不完美空间类重合。在连续统假设下，存在一个不是 Hurewicz 空间的 Rothberger 空间，例如卢津集；也存在一个不是 Rothberger 空间的 Hurewicz 全不完美空间，例如 Sierpi´nski 集，见 [23, 34]及其中的参考文献。因此，在连续统假设下，Rothberger 性质与 Hurewicz 全不完美性质互不可比。

在 Laver 模型中，所有 Rothberger 空间都是可数的（因而是平凡的），而在 ZFC 中存在一个不可数的 Hurewicz 全不完美空间。在

米勒模型中，存在一个不可数的 Rothberger 空间，并且 Rothberger 蕴含 Hurewicz 全不完美（这在该模型中由不等式 $\mathfrak{u} < \mathfrak{g}$ 推出）。

问题 6.5. 在米勒模型中，是否存在一个全不完美的 Hurewicz 空间，但它不是 Rothberger 空间?

反过来，众所周知的事实是[4]，在向一个满足连续统假设的模型添加 ω_2 个 Cohen 实数（采用有限支撑）所得到的模型中，每个普遍瘦子空间（因而每个 Hurewicz 全不完美子空间）的基数至多为 ω_1。事实上，若在此模型中 $X \in [2^\omega]^{\omega_2}$，则存在一个卢津集 $L \subseteq 2^\omega$ 和一个单射连续映射 $f\colon\ L \to 2^\omega$，使得$|f[L] \cap X| = \omega_2$，见 [27, 第 577]页。如有必要，将 L换成一个余可数闭子空间后，我们还可以假设 L 没有孤立点。令 $R \supseteq L$ 为 2^ω 的一个 G_δ子空间，使得 L 在 R 中稠密，并且 f 可以
延拓为一个连续映射 $f\colon\ R \to 2^\omega$。因此， R 是一个波兰空间， f处处不恒定，因为它在 L上的限制（即 f）是单射；而且$\bar{f}^{-1}[X]$ 在 R 中非瘦，因为它包含L的一个不可数子空间，因此由 [41,定理 1.1]可知， X 不是普遍瘦集。

由于添加 ω_1 Cohen 实数会使基模型中的任意实数集成为 Rothberger 集，参见 [35, 定理 11], ，因此在这个模型中，每个 Hurewicz 全不完美空间都是 Rothberger。反向推论并不成立，因为 Cohen 实数构成一个卢津集，因此是 Rothberger 的，但甚至不是瘦集。

在此语境下还应提及另一个模型：Bartoszyński 和 Shelah 在 [4] 中，通过对一个 CH 模型上的偏序集 PT_H 进行长度为 ω_2 的可数支撑迭代得到该模型；这里使用的是一个固定的严格递增 H，其形式为 $H(n) = 2^{h(n)}$，其中某个 $h \in \omega^\omega$。在此模型中，每个 Hurewicz 全不完美空间同样都是 Rothberger。事实上，每个普遍瘦子空间的大小至多为 ω_1，参见 [4, 第 4], 节；而每个大小为 ω_1 的子空间都是强零测，因为任意 ω_1 个强零测集的并仍是强零测。通过结合 [13, 事实 0.4] 和对 [13,事实 2.26]的如下修改即可证明这一点:

事实 6.6。设 $h^*\colon\ \omega \to \omega \setminus \{0\}$, $H^*\colon\ \omega \to \mathscr{P}(2^{<\omega})$ 且 $H^*(n) = 2^{h^*(n)}$， $\mathscr{H}$ 是一个支配族， $\bar{\nu}$ 有指标 $\mathscr{H}$，而 $\dot{g}$ 是由 PT_{H^*} 添加的泛型函数的一个名称。那么

$$\Vdash_{PT_{H^*}} \text{“}\forall h \in \mathscr{H}\ \ \exists d \in [\omega]^\omega\ \ \exists h_1 \in \mathscr{H}$$
$$\big(h \le d \le h_1 \text{ and } \bigcup_{k\in\omega} [\nu^{h_1}(k)] \subseteq \bigcup_{n\in d} [\dot{g}(n)]\big)\text{“}.$$

因此，在此模型中，每个普遍瘦子空间都是强零测的，从而根据命题 4.13，每个 Hurewicz 全不完美空间都是 Rothberger 空间。

问题 6.7. 在 Bartoszyński–Shelah 模型中，是否存在一个不是 Hurewicz 空间的 Rothberger 空间?

[4]这是我们从 P. Zakrzewski 那里了解到的。

References

[1] T. Bartoszy´nski. 关于完全贫乏集。Proc. Amer. Math. Soc., 130(4):1189–1195, 2002. doi:10.1090/S0002-9939-01-06138-X.[2] T. Bartoszy´nski 和 L. Halbeisen. 关于 Banach–Kuratowski 定理和 K-Lusin 集。落基山数学杂志, 33(4):1223–1231, 2003. doi:10.1216/rmjm/ 1181075459.[3] T. Bartoszy´nski 和 H. Judah. 集合论。A K Peters, Ltd., 马萨诸塞州韦尔斯利，1995。关于实数线的结构。[4] T. Bartoszy´nski 和 S. Shelah. 完全贫乏集与普遍零集。Proc. Amer. Math. Soc., 130(12):3701–3711, 2002. doi:10.1090/ S0002-9939-02-06465-1.[5] T. Bartoszy´nski 和 S. Shelah. 基数为连续统的强瘦集。Arch. Math. Logic, 42(8):769–779, 2003. doi:10.1007/s00153-003-0184-0.[6] J. E. Baumgartner. 迭代强迫。载于《集合论综述》，伦敦数学会讲义丛书第 87 卷，第 1–59 页。剑桥大学出版社，剑桥，1983。doi:10.1017/CBO9780511758867.002.[7] A. Blass. 连续统的组合基数特征。载于《集合论手册》第 1、2、3 卷，第 395–489 页。施普林格，多德雷赫特，2010。URL: https://doi. org/10.1007/978-1-4020-5764-9_7, doi:10.1007/978-1-4020-5764-9_7.[8] A. Blass 和 C. Laflamme. 关于滤子及不等价增长类型数量的相容性结果。J. Symbolic Logic, 54(1):50–56, 1989. doi:10.2307/ 2275014.[9] A. Blass 和 S. Shelah. 简单的 $P_{\aleph_1}$-点和$P_{\aleph_2}$-点可能存在，且 Rudin–Keisler 序可能是向下有向的。Ann. Pure Appl. Logic, 33(3):213–243, 1987. doi:10.1016/0168-0072(87)90082-0.[10]A. Blass 和 S. Shelah. 滤子的近相干性 III：一种简化的相容性证明。圣母大学形式逻辑杂志, 30(4):530–538, 1989. doi:10.1305/ndjfl/ 1093635236.[11] E. Borel. 关于零测集的分类。法国数学会通报，47:97–125, 1919. URL: http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1919__47__97_0.[12] J. Gerlits 和 Z. Nagy. $C(X)$ 的若干性质。I. Topology Appl., 14(2):151–161, 1982. doi:10.1016/0166-8641(82)90065-7.[13] M. Goldstern、H. Judah 和 S. Shelah. 不含 Cohen 实数的强零测集。J. Symbolic Logic, 58(4):1323–1341, 1993. doi:10.2307/2275146.[14] M. Goldstern、J. Kellner、S. Shelah 和 W. Wohofsky. 博雷尔猜想与对偶 Borel 猜想。美国数学会汇刊，366(1):245–307, 2014. doi:10.1090/ S0002-9947-2013-05783-2.[15] M. Goldstern、J. Kellner、S. Shelah 和 W. Wohofsky. 博雷尔猜想与对偶 Borel 猜想。美国数学会汇刊，366(1):245–307, 2014. doi:10.1090/ S0002-9947-2013-05783-2.[16] E. Grzegorek. Banach 关于无连续测度的 σ-域问题的解答。波兰科学院通报 S ´er. Sci. Math, 28:7–10, 1980.[17] E. Grzegorek. 总是第一纲的集合。第 12 届抽象分析冬季学校论文集，第 139–147 页，1984 年。[18] E. Grzegorek. 总是第一纲的集合 II。第 12 届抽象分析冬季学校论文集，第 43–48 页，1985 年。[19] V. Haberl、P. Szewczak 和 L. Zdomskyy. 米勒模型中的集中集与 γ-集。Topology Appl.，即将出版。doi:10.48550/arXiv.2310.03864..[20] W. Hurewicz. 关于连续函数序列。Fund. Math., 9:193–204, 1927.[21] J. I. Ihoda. 强零测集与快速滤子。J. Symbolic Logic, 53(2):393– 402, 1988. doi:10.2307/2274512.[22] H. Judah 和 S. Shelah. 消灭 Luzin 集与 Sierpi´nski 集。Proc. Amer. Math. Soc., 120(3):917–920, 1994. doi:10.2307/2160487.

[23] W. Just、A. W. Miller、M. Scheepers 和 P. J. Szeptycki。《开覆盖的组合学》II。Topology Appl.，73(3):241–266，1996。doi:10.1016/S0166-8641(96) 00075-2。[24] K. Kuratowski。《拓扑学》第一卷。Academic Press，纽约—伦敦；Pa´nstwowe Wydawnictwo Naukowe [Polish Scientific Publishers]，华沙，新版，1966年。由 J. Jaworowski 从法文译出。[25] R. Laver。论 Borel猜想的一致性。Acta Math.，137(3-4):151–169，1976年。doi:10.1007/BF02392416。[26] H. Mildenberger 和 S. Shelah。用强公理A和减半特化 Aronszajn树。Notre Dame J. Form. Log.，60(4):587–616，2019年。doi:10.1215/ 00294527-2019-0021。[27] A. W. Miller。将一个实数集映射到实数集上。J. Symbolic Logic，48(3):575–584，1983年。doi:10.2307/2273449。[28] A. W. Miller。有理完美集迫。载于《公理化集合论》（科罗拉多州博尔德，1983），Contemp. Math. 第31卷，第143–159页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1984年。doi:10.1090/conm/031/763899。[29] A. W. Miller。实数直线的特殊子集。载于《集合论拓扑学手册》，第201–233页。North-Holland，阿姆斯特丹，1984年。[30] A. W. Miller。γ-Borel猜想。Arch. Math. Logic，44(4):425–434，2005年。doi: 10.1007/s00153-004-0260-0。[31] A. W. Miller 和 D. H. Fremlin。关于 Hurewicz、Menger 和 Rothberger 的某些性质。Fund. Math.，129(1):17–33，1988年。doi:10.4064/fm-129-1-17-33。[32] D. Repovˇs 和 L. Zdomskyy。 γ-空间的保持性与乘积的覆盖性质。Proc. Amer. Math. Soc.，147(11):4979–4985，2019年。doi:10.1090/proc/ 14593。[33] F. Rothberger。c性质的一个强化。Fund. Math.，30:50–55，1938年。¨M. Scheepers。开覆盖的组合学I：Ramsey理论。Topology Appl.，69(1):31–62，1996年。doi:10.1016/0166-8641(95)00067-4。[34]M. Scheepers 和 F. D. Tall。Lindel¨of不可毁性、拓扑博弈与选 择原理。Fund. Math.，210(1):1–46，2010年。doi:10.4064/fm210-1-1。[36] W. Sierpi´nski。论一个不可数集，其任意连续像都是零测集。Fund. Math.，11:302–303，1928年。´B. Tsaban。Menger问题与Hurewicz问题：来自“那本书”的解答与细化。载于《集合论及其应用》，Contemp. Math. 第533卷，第211–226页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2011年。doi:10.1090/conm/533/10509。[37] B. Tsaban 和 L. Zdomskyy。实数集的组合像与半滤子三分。J. Symbolic Logic，73(4):1278–1288，2008年。doi:10.2178/jsl/1230396918。[38] W. Wohofsky。Borel猜想、对偶 Borel 猜想及 Borel猜想的其他变体。载于《Borel猜想百年纪念》，Contemp. Math. 第755卷，第135–227页。美国数学会，[39] 罗得岛州普罗维登斯 [，]，©2020。doi:10.1090/conm/755/15216。 [2020] P. Zakrzewski。普遍瘦集。Proc. Amer. Math. Soc.，129(6):1793–1798，2001年。doi:10.1090/S0002-9939-00-05726-9。[40] P. Zakrzewski。普遍瘦集II。Topology Appl.，155(13):1445–1449，2008年。doi:10.1016/j.topol.2008.05.005。[41] L. Zdomsky。选择原理的半滤子方法。Comment. Math. Univ. Carolin.，46(3):525–539，2005年。[42] L. Zdomskyy。Laver模型、Miller模型和Sacks模型中的选择原理。载于《Borel猜想百年纪念》，Contemp. Math. 第755卷，第229–242页。美国数学会，[43] 罗得岛州普罗维登斯 [，]，©2020。doi:10.1090/conm/755/15176。

Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie、 Technische Universität Wien、 Wiedner Hauptstrasse 8-10/104、 1040 Wien、 Austria.
电子邮箱: valentin.haberl.math@gmail.com
网址： https://www.tuwien.at/mg/valentin-haberl/

Institute of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Sci-ence, College of Sciences, Cardinal Stefan Wyszyński University in War-saw, Wóycickiego 1/3, 01–938 Warsaw, Poland, and Institute of Mathe-matics, Faculty of Mathematics, Informatics and Mechanics, University ofWarsaw, Banacha 2, 02-097, Warsaw, Poland

电子邮箱: p.szewczak@wp.pl网址:
http://piotrszewczak.pl

Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie, Technische Universität Wien, Wiedner Hauptstrasse 8-10/104, 1040 Wien, Austria.电子邮箱:
lzdomsky@gmail.com网址: https://dmg.tuwien.ac.at/zdomskyy/