arXiv:2512.15494v1 [math.GR] 17 Dec 2025

关于群的可逼近性与稳定性的若干说明

瓦迪姆·阿列克谢耶夫和安德烈亚斯·托姆

Abstract. 本文列举了若干情形，说明一些有趣的逼近性质和稳定性性质在对有限生成正规子群取商群时仍得以继承；更进一步，对具有 Kazhdan 性质 (T) 的正规子群取商群时，这些性质也得以继承。将这些观察与 Wise 以及 Belegradek–Osin 的 Rips 构造变体结合起来，可以得到相应的应用。

Contents

1. 引言 1 2. 灵活的 P-稳定性 3 3. 有限作用中的稳定性 5 4. 残余有限维群 9 5. 测度 sofic 逼近 10 6. 商群的 sofic 性 12 7. 定理 A 及其推论的证明 18 致谢 19 参考文献 19

1. 引言

几何群论、逼近与稳定性性质以及非交换调和分析之间的相互作用，产生了丰富多样的现象。若一个群具有渐近置换模型 [**19**]，则称其为 sofic 群；若任何 sofic 逼近都以 Kechris 的意义弱包含于有限作用中 [**13**] ，则称该群有限作用稳定 [**16**]。柔性 P-稳定性形式化了修正渐近置换模型 [**5**], 的可能性，而群的全群代数C^*的剩余有限维性（RFD）则记录了有限维酉表示能够多有效地检测一个群，参见 [**10**]。Gromov 双曲群处于一个交汇点，在此处，这些主题可以与 Rips 构造的变体结合起来，参见 [**8, 20, 23**]。借此，任意有限表示群都可以表示为双曲群对受控正规子群取商所得的商群。全文中，我们考虑可数群的短正合列

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 1, \tag{1.1}$$

使得 $Q = G/N$ 是商群。当 N 有限生成时， N 在汉明度量下的近似局部平凡性会迫使 N 在一个大子集上平凡作用。当N 是 Kazhdan 群时，概率测度保持作用中有限个原子的近似不变性，或酉表示中有限个向量的近似不变性，都可以提升为真正的不变性。这些基本要素给出了以下关于正规子群分别为有限生成群和 Kazhdan 群的扩张的推论。

THEOREMA. 设

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 1$$

为一个短正合列，其中 N 有限生成。则：

(i) 若 G 是柔性 *P*-稳定的，则 Q 是柔性 *P*-稳定的；(ii) 若 N 具有 *Kazhdan* 性质， G 是剩余有限、有限作用稳定的，且 Q 是 *sofic* 的，则 Q 是剩余有限的；(iii) 若 N 具有 *Kazhdan* 性质且 G 是残余有限维的，则 Q是残余有限维的；(iv) 若 N 具有 *Kazhdan* 性质，且典范的概率测度保持作用 $G \curvearrowright \{0,1\}^Q$ 是 *sofic* 的，则 Q是 *sofic* 的。

证明见第 2–6 节。Becker–Lubotzky 曾预见到第一个蕴含关系成立的可能性，参见 [**5**]。第四个蕴含关系的证明也依赖 Kun 的结果，参见 [**17**]。作为第一个应用，我们记录四个推论，它们基于 Wise 的剩余有限 Rips 构造 [**23**] 以及 Belegradek–Osin 提出的改进版本 [**8**]。

COROLLARY B. 存在一个双曲、剩余有限但并非柔性 *P*-稳定的群。

据我们所知，此类群此前尚无已知实例。在不要求残余有限性的情况下，Becker– Lubotzky 概述了这一结果及一种类似的策略，见 [**5**]。

COROLLARY C. 存在一个无法在有限作用下稳定的双曲群，前提是它是剩余有限的。

每个双曲群是否都是剩余有限的，仍是一个重要的开放问题——背景介绍请参见 [**23**] 。另一方面，是否存在一个并非有限作用稳定的剩余有限群，同样是一个开放问题；参见 Gohla 和第二作者的工作 [**13**]。前一个推论表明，其中一个问题的答案是否定的。

COROLLARY D. 存在一个双曲群 G，它不是残余有限维的。

对于在树或双曲平面上适当不连续且余紧作用的双曲群，其万有 C^*-代数已知是残余有限维的；例如参见 [**10**, 第 2.39] 节。对于闭双曲三维流形的基本群，其完全群 C^*-代数也具有残余有限维性；见下文注 4.3。SO(n,1) 或 SU(n, 1) 中的格是否为 $n \geq 4$ 的残余有限维群，仍未解决，参见 [**18**, 猜想 6.4]。请注意，作为 Connes 嵌入问题的否定解的推论， [**15**], 群 $F_2 \times F_2$ 及任何包含它的群都不是残余有限维的。

Corollary E。 如果存在非 *sofic* 群，那么就存在一个具有非 *sofic* 概率测度保持作用的双曲群。

这仍然有些令人意外，因为普遍看法是，确实存在非 sofic 群，而双曲二维和三维流形群则具有这样的性质：它们的所有作用都是 sofic 的。事实上，已知这些群具有 Kechris 的 MD 性质[**16**] ，因此所有作用都弱包含于有限作用；特别地，它们都是 sofic 群。一个尚未解决的重要问题是：是否存在非 sofic 群，或者至少是否存在非 sofic 的概率测度保持作用。

本文结构如下。第 2 节回顾柔性 P-稳定性，并陈述关于商群的结论。第 3 节讨论在存在 Kazhdan 正规子群时，有限作用中的稳定性，并给出相应结论。第 4 节讨论剩余有限维性。第 5 节讨论测度 sofic 逼近，这是下一节要用到的一个有用工具。第 6 节指出，准正则伯努利移位的 sofic 性会迫使商群具有 sofic 性。第 7 节回顾 Rips 构造的相关变体，并证明定理 A 及其推论。

2. 柔性 P-稳定性

我们回顾一下 sofic 性和置换稳定性的基本设置。Gromov 提出了 sofic 性的概念 [**14**], 另见 [**19, 22**]。设 X 为一个有限集。对于$\sigma \in$Sym(X)，记

$$\ell_X(\sigma) = \frac{1}{|X|}\,|\{x \in X \mid \sigma(x) \neq x\}| \qquad \text{and} \qquad d_X(\sigma,\tau) = \ell_X(\sigma^{-1}\tau).$$

Definition 2.1. 设 S为一个有限集， $F = F(S)$为自由群。给定 $\pi\colon F \twoheadrightarrow Q$，其核为 N，以及一个同态序列

$$\varphi_n\colon F \to \mathrm{Sym}(k_n)$$

在汉明度量下分离 N 当且仅当

$$\lim_{n\to\infty} \ell_{k_n}(\varphi_n(w)) = \begin{cases} 0 & \text{if } w \in N, \\ 1 & \text{if } w \notin N. \end{cases}$$

众所周知，群 $Q = F/N$ 是 *sofic* 的充要条件是存在如上所述的同态序列，使得它们在汉明度量下分离 N。

汉明度量具有各种抽象性质，这些性质并非三角不等式的推论。除了它在 Sym(X) 上是条件负定的之外，下面这个初等引理或许体现了汉明度量最显著的抽象性质。

Lemma 2.2. 设 $\sigma_1, \dots, \sigma_m \in \mathrm{Sym}(X)$ 满足 $\ell_X(\sigma_i) \le \varepsilon$ 对所有 i均成立。那么每个$\tau \in \langle \sigma_1, \dots, \sigma_m \rangle$ 都满足 $\ell_X(\tau) \le m\varepsilon$.

Proof. 令 supp(σ_i) $= \{x \in X \mid \sigma_i(x) \neq x\}$ ，并设 $\Omega = \bigcup_{i=1}^m$supp(σ_i)。于是$|\Omega| \le m\varepsilon|X|$。每个 σ_i 都逐点固定 Ω^c ，因此， $\sigma_i^{\pm 1}$中的每个字也如此。因此，每个 τ 都只移动 Ω 中的点，断言得证。□

LEMMA 2.3。 假设 N由 m个元素 n_1、……、 n_m生成。设 $\varphi\colon G \to \mathrm{Sym}(X)$是一个同态，满足 $\ell_X(\varphi(n_i)) \le \varepsilon$，其中 $i = 1$、……、 m。则存在$\Omega \subseteq X$，使得 $|\Omega| \le m\varepsilon|X|$，并且 $\varphi(N)$逐点固定Ω^c。

PROOF. 将引理 2.2 应用于 $\varphi(n_1)\dots,\varphi(n_m)$. □

我们还要回顾这一背景下渐近同态和灵活稳定性的概念。

DEFINITION 2.4. 设 G 是一个可数群。映射序列 $\sigma_n\colon G \to \mathrm{Sym}(X_n)$ 若满足渐近同态 条件，则称为渐近同态。

$$\lim_{n\to\infty} d_{X_n}(\sigma_n(gh), \sigma_n(g)\sigma_n(h)) = 0 \qquad \forall g, h \in G.$$

DEFINITION 2.5. 若一个有限生成群 G 对每个渐近同态 $\sigma_n\colon G \to \mathrm{Sym}(X_n)$ 都存在有限集 Y_n 满足 $X_n \subseteq Y_n$，则称其为柔性 *P*-稳定，

$$\frac{|Y_n \setminus X_n|}{|X_n|} \to 0,$$

并且存在同态 $\tau_n\colon G \to \mathrm{Sym}(Y_n)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} d_{X_n}(\sigma_n(g), \tau_n(g)|_{X_n}) = 0 \qquad \forall g \in G.$$

柔性 P-稳定性和通常的 P-稳定性的概念是在一系列论文中提出并研究的，其中包括 [**2, 5, 6**]。

THEOREM 2.6. 设

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 1$$

是一个短正合列，且 N 有限生成。若 G 是柔性 *P*-稳定的，则 Q 也是柔性 *P*-稳定的。

PROOF. 设 $\sigma_n\colon Q \to \mathrm{Sym}(X_n)$ 是一个渐近同态，并令

$$\bar\sigma_n := \sigma_n \circ \pi\colon G \to \mathrm{Sym}(X_n).$$

则 $(\bar\sigma_n)_n$ 是 G的一个渐近同态。由 G 的柔性 P-稳定性，我们可以找到满足 $|Y_n \setminus X_n|/|X_n| \to 0$ 的有限集 $Y_n \supseteq X_n$ 以及同态

$$\tau_n\colon G \to \mathrm{Sym}(Y_n)$$

使得

$$d_{X_n}\big(\bar\sigma_n(g), \tau_n(g)|_{X_n}\big) \to 0 \qquad \forall g \in G.$$

设 $n_1, \dots, n_m$生成 N。由于 $\pi(n_i) = e$，限制 $\tau_n(n_i)|_{X_n}$渐近平凡。将引理 2.3 应用于在 X_n上的限制作用，我们得到子集 $\Omega_n \subseteq X_n$，满足 $|\Omega_n|/|X_n| \to 0$，且 N逐点固定 $X_n \setminus \Omega_n$。

考虑 G 在有限轨道集 Y_n/N上的诱导作用。由于 N 是正规子群，此作用可通过 Q因子化。此外， X_n中趋近于 1 的比例的点对应于单点 N-轨道。等价地，存在一个序列 $\delta_n \to 0$ 和子集 $X_n' \subseteq X_n$，满足 $|X_n'| \ge (1-\delta_n)|X_n|$，使得 X_n' 中的每个点都有平凡的

N-稳定子。在 X'_n 上，诱导的 Q-作用与原映射 σ_n 相一致，误差在汉明距离意义下为 δ_n ，即

$$d_{X_n}\big(\sigma_n(q),\, \bar{\tau}_n(q)\big) \le \delta_n \qquad \forall q \in Q,$$

其中， $\bar{\tau}_n$ 表示由 τ_n 在 Y_n/N 上诱导、并通过将单元素 N-轨道与其唯一元素的对应关系限制到X_n 上的 Q 的置换作用。将X_n 扩展到 Y_n/N 只会使基数改变一个趋于零的比例，因此，在Y_n/N 上诱导的 Q-作用将渐近同态（σ_n）$_n$ 修正为真正的作用。□

Corollary 2.7. 在该定理的情形下。如果 G是柔性 *P*-稳定的，且 Q是 ***sofic*** 的，那么 Q是剩余有限的。

Proof. 根据定理 2.6， Q 是柔性 P-稳定的。对于 sofic 群，柔性 P-稳定性推出残余有限性；参见 [**5**]。□

3. 有限作用中的稳定性

现在我们转向 Gohla 和第二作者提出的较弱稳定性概念。下面的论证采用如下策略： G 的残余有限性使得我们能够将 Q 的渐近同态放大为 G的 sofic 逼近，同时不损失划分统计量。让我们回顾有限作用中的稳定性概念 [**13**, 定义 3.7]:

Definition 3.1. 若对于 G 的每个 sofic 逼近，相应的极限作用都弱包含于有限 G-作用类中，则称可数群 G 是有限作用稳定 的。

关于弱包含的定义，参见 [**16**]。我们将需要以下两个引理 .

Lemma 3.2. 设 G 是剩余有限的，且 $\alpha_n\colon G \to \mathrm{Sym}(X_n)$ 是一个渐近同态。那么存在有限商群 $\rho_n\colon G \to H_n$ 以及映射

$$\theta_n\colon G \to \mathrm{Sym}(X_n \times H_n), \qquad \theta_n(g)(x,h) := \big(\alpha_n(g)(x),\ \lambda_{H_n}(\rho_n(g))(h)\big),$$

使得$(\theta_n)_n$ 是 G 的一个 ***sofic*** 逼近。此外，由 α_n 诱导的 G 在 X_n 上的作用，是由坐标投影 $X_n \times H_n \to X_n$ 通过 θ_n 诱导的作用的一个因子。

Proof. 取 G 的有限集递增穷尽 $F_1 \subset F_2 \subset \cdots$，使得 $e \in F_n$。利用残余有限性，选取 $\rho_n\colon G \to H_n$ ，使得 ρ_n 在 F_n 上是单射。

由于 $\lambda_{H_n} \circ \rho_n$ 是真正的同态， α_n 的渐近乘法性意味着 θ_n 是渐近同态。对于 $g \in F_n \setminus \{e\}$ ，我们有 $\rho_n(g) \neq e$，因此 $\lambda_{H_n}(\rho_n(g))$ 移动 H_n 中的每个元素。因此，$\theta_n(g)$ 移动 $X_n \times H_n$ 中的每个元素，因而

$$\ell_{X_n \times H_n}(\theta_n(g)) = 1 \qquad \text{for all } g \in F_n \setminus \{e\}.$$

因此，(θ_n) 是 G 的 sofic 逼近，正如所需。最后，坐标投影 $X_n \times H_n \to X_n$ 对于由 θ_n 和 α_n 定义的作用是 G-等变的，因此后者是前者的一个因子。□

LEMMA 3.3. 设 N 是一个 *Kazhdan* 群，且具有有限生成集 $K \subset N$。对于每个 $d \in \mathbb{N}$，都存在一个 $C > 0$，它仅取决于 K 和 d，使得对于每个 $\delta > 0$，以下结论成立：只要 N 在有限集 Y 上作用，且 $Y = B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_d$ 是一个满足以下条件的划分

$$|kB_i \triangle B_i| < \delta |Y| \qquad \forall\, k \in K,\ i = 1, \dots, d,$$

存在一个划分 $Y = B_1' \sqcup \cdots \sqcup B_d'$，将其分成 N-不变集，使得

$$|B_i \triangle B_i'| \le C\sqrt{\delta}|Y| \qquad \forall\, i = 1, \dots, d.$$

PROOF. 由于 N 是 Kazhdan 群且 K 是生成集，因此存在 $\kappa > 0$，使得对于任意酉表示 π：在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的 $N \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$，对每个$v \in \mathcal{H}$都有

$$\|v - Pv\| \ \le\ \kappa \max_{k \in K} \|\pi(k)v - v\|. \tag{3.1}$$

这里 $P\colon\ \mathcal{H} \to \mathcal{H}^N$ 是到不变子空间上的正交投影。

考虑希尔伯特空间 $\mathcal{H} :\ = \ell^2(Y,\ \mu)$，其中 μ 是 Y上的归一化计数测度。 N-不变向量恰好是在 Y中每个N-轨道上均为常值的函数。将轨道分解写为

$$Y = \bigsqcup_{\alpha} O_\alpha.$$

于是，正交投影 $P\colon\ \mathcal{H} \to \mathcal{H}^N$ 由在各轨道上取平均给出：

$$(Pf)(y) \ =\ \frac{1}{|O_\alpha|} \sum_{z \in O_\alpha} f(z) \qquad \text{for } y \in O_\alpha.$$

现在令 $Y = B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_d$ 满足

$$|kB_i \triangle B_i| < \delta |Y| \qquad \forall\, k \in K,\ \forall\, i = 1, \dots, d.$$

对每个 i，令 $f_i := \mathbf{1}_{B_i} \in \ell^2(Y)$。对于任意 $k \in N$，我们有

$$\|\pi(k)f_i - f_i\|_2^2 = \frac{1}{|Y|} \sum_{y \in Y} \left|\mathbf{1}_{kB_i}(y) - \mathbf{1}_{B_i}(y)\right|^2 = \frac{1}{|Y|}\,|kB_i \triangle B_i| < \delta,$$

从而可以得出

$$\max_{k \in K} \|\pi(k)f_i - f_i\|_2 \ \le\ \sqrt{\delta} \qquad \forall i = 1, \dots, d. \tag{3.2}$$

将 (3.1) 应用于每个 f_i 并使用 (3.2)，我们得到

$$\|f_i - Pf_i\|_2 \ \le\ \kappa\sqrt{\delta}, \qquad \forall i = 1, \dots, d. \tag{3.3}$$

对于每个轨道 O_α 和每个 i，定义密度

$$p_{i,\alpha} \ :=\ \frac{|B_i \cap O_\alpha|}{|O_\alpha|}.$$

然后根据 P 的显式公式，我们得到 $(Pf_i)(y) = p_{i,\ \alpha}$ 对所有 $y \in O_\alpha$ 均成立。注意，对于每个 α,

$$0 \le p_{i,\alpha} \le 1, \qquad \sum_{i=1}^{d} p_{i,\alpha} = 1,$$

sin由于集合 B_i 构成 Y 的一个划分。范数 $\|f_i - Pf_i\|_2^2$ 可以按轨道计算 :

$$\begin{aligned}\|f_i - Pf_i\|_2^2 &= \frac{1}{|Y|}\sum_{\alpha}\sum_{y\in O_\alpha}\left(\mathbf{1}_{B_i}(y) - p_{i,\alpha}\right)^2 \\ &= \frac{1}{|Y|}\sum_{\alpha}|O_\alpha|\,p_{i,\alpha}(1-p_{i,\alpha}),\end{aligned}$$

因为对于 $y \in O_\alpha$，随机变量 $\mathbf{1}_{B_i}(y)$ 的均值为 $p_{i,\alpha}$ 方差为 $p_{i,\alpha}(1-p_{i,\alpha})$。利用 (3.3), 我们对每个 $i = 1,\ldots,d$ 得到

$$\|f_i - Pf_i\|_2^2 = \sum_{\alpha}\frac{|O_\alpha|}{|Y|}p_{i,\alpha}(1-p_{i,\alpha}) \le \kappa^2\delta. \tag{3.4}$$

根据马尔可夫不等式，使得 $p_{i,\alpha}(1-p_{i,\alpha})$ 大于 $\sqrt{\delta}$ 的轨道 α 的总大小至多为 $\kappa^2\sqrt{\delta}|Y|$。现在固定 $i \in \{1,\ldots,d\}$ 并定义

$$B_i' := \bigsqcup_{\alpha: p_{i,\alpha}\ge 1-2\sqrt{\delta}} O_\alpha.$$

于是 B_i' 是若干 N-轨道的并，因此是 N-不变的。此外，若 $O_\alpha \subset B_i'$ 且 $O_\alpha \subset B_j'$，其中 $i \ne j$，则 $p_{i,\alpha}$，$p_{j,\alpha} \ge 1 - 2\sqrt{\delta}$，因此 $p_{i,\alpha} + p_{j,\alpha} \ge 2 - 4\sqrt{\delta} > 1$ 对于 $\delta \le \frac{1}{16}$ 成立，这不可能，因为 $\sum_{k=1}^d p_{k,\alpha} = 1$。因此，集合 B_i' 两两不相交。

此外，我们有

$$\|Pf_i - \mathbf{1}_{B_i'}\|_2^2 = \frac{1}{|Y|}\sum_{\alpha: p_{i,\alpha}<1-2\sqrt{\delta}}|O_\alpha|p_{i,\alpha}^2 \le \frac{1}{|Y|}\sum_{\alpha: p_{i,\alpha}\le 2\sqrt{\delta}}|O_\alpha|p_{i,\alpha}^2 + \kappa^2\sqrt{\delta} \le (2+\kappa^2)\sqrt{\delta}.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\frac{|B_i \triangle B_i'|^{1/2}}{|Y|^{1/2}} = \|f_i - \mathbf{1}_{B_i'}\| &\le \|f_i - Pf_i\| + \|Pf_i - \mathbf{1}_{B_i'}\| \\ &\le \kappa\sqrt{\delta} + (2+\kappa^2)^{1/2}\delta^{1/4} \le 2(2+\kappa^2)^{1/2}\delta^{1/4},\end{aligned}$$

从而，我们得到

$$\frac{|B_i \triangle B_i'|}{|Y|} \le (8+4\kappa^2)\sqrt{\delta}.$$

最后，我们注意到

$$|Y| - \sum_{i=1}^d |B_i'| \le \sum_{i=1}^d |B_i \triangle B_i'| \le d(8+4\kappa^2)\sqrt{\delta}|Y|.$$

因此，将 $Y \setminus \bigsqcup_{i=1}^d B_i'$ 加入 B_1'，我们得到 Y 的一个划分，其中各集合均为 N-不变，并满足所需的估计。□

THEOREM 3.4. 假设 G 是剩余有限的，且 N 具有 ***Kazhdan*** 性质。若 G 在有限作用中稳定，则 Q 在有限作用中稳定。特别地，若 Q 是 ***sofic*** 的，则 Q 是剩余有限的。

PROOF. 令 $\sigma_n\colon Q \to \mathrm{Sym}(X_n)$ 是 Q的 sofic 逼近。通过如下设定，将其视为 G 的渐近同态:

$$\alpha_n := \sigma_n \circ \pi\colon G \to \mathrm{Sym}(X_n).$$

由于 $\pi(N) = \{e\}$，映射 α_n 在 N上是渐近平凡的：对于所有$g \in N$，都有 $\ell_{X_n}(\alpha_n(g)) \to 0$。

根据引理 3.2，利用 G 的残余有限性，我们可以选取有限商群 $\rho_n\colon\ G \to H_n$ 并得到一个 sofic 逼近

$$\theta_n\colon G \to \mathrm{Sym}(X_n \times H_n)$$

其关联作用通过坐标投影，将由 $(\alpha_n)_n$ 定义的 G-作用作为因子。特别地，$(\alpha_n)_n$ 的极限作用是 $(\theta_n)_n$ 的极限作用的一个因子。

假设 G 在有限作用中稳定。那么，sofic 逼近 $(\theta_n)_n$ 的极限作用弱包含于有限 G-作用类中。由于弱包含在取因子时保持不变，对于 (α_n) 的极限作用也同样如此。

固定一个有限集 $E \subset Q$、一个整数 $d \geq 1$ 和 $\varepsilon > 0$。选取一个有限集 $E \subset G$，使得$\pi(E) = E$。令 $K \subset N$ 为一个有限生成集。考虑一个任意的划分

$$X_n = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_d.$$

(α_n) 的极限作用弱包含于有限 G-作用，意味着对于足够大的 n，划分 $(A_i)_i$ 在有限集 $E \cup K$ 上的统计特征可以由 G 的真正有限作用来建模：存在一个有限 G-集 Y、一个同态$\tau\colon\ G \to \mathrm{Sym}(Y)$ 以及一个划分 $Y = B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_d$，使得

$$\left| \frac{|A_i \cap \alpha_n(g) A_j|}{|X_n|} - \frac{|B_i \cap \tau(g) B_j|}{|Y|} \right| < \varepsilon \qquad \forall\, g \in \bar{E} \cup K,\ 1 \leq i, j \leq d.$$

对于 $g \in K$，$\ell(\alpha_n(g)) \to 0$ 为 $n \to \infty$。因此

$$\sum_{i=1}^{d} \frac{|A_i \triangle (\alpha_n(g) A_i)|}{|X_n|} < \varepsilon$$

对于足够大的 n。因此

$$\sum_{i=1}^{d} \frac{|B_i \triangle \tau(g) B_i|}{|Y|} < (d+1)\varepsilon$$

因此每个 B_i 都满足

$$\left| \frac{|B_i \triangle \tau(g) B_i|}{|Y|} \right| < (d+1)\varepsilon$$

对于 $g \in K$，$1 \leq i \leq d$。

应用引理 3.3，我们可以用一个 N-不变划分 (B_i') 替换 (B_i)，使得

$$\left| \frac{|B_i \triangle B_i'|}{|Y|} \right| < C' \sqrt{\varepsilon}$$

对于某个 $C' > 0$，其仅取决于 d 和 $K \subset N$ 的 Kazhdan 常数。由于 $N \lhd G$，G 在由原子 $B_1', \ldots, B_d'$ 生成的有限布尔代数上的诱导作用可经由 Q 因子化。因此，我们得到一个有限 Q-作用，其划分统计量在集合 E 下近似于划分 $(A_i)_i$ 的划分统计量，从而证明 Q 是有限作用稳定的。如果 Q 是 sofic 的，那么根据 [**13**] 中的结果，有限作用稳定性蕴含残余有限性。□

4. 残余有限维群

含幺 C*-代数 A 称为残余有限维（残余有限维）（RFD），如果所有有限维 *-表示构成的族能够分离 A 中的点。等价地，

$$\bigcap_{\pi\in \mathrm{Rep}_{\mathrm{fd}}(A)} \ker(\pi) = \{0\},$$

或者说，同样地， A 嵌入到全矩阵代数的一个可能无限的乘积中。这一性质可视为一种强有限维逼近性质，其作用类似于离散群的残余有限性。

Definition 4.1. 若一个可数群 G 的全群 C^*-代数 $C^*(G)$是残余有限维的，则称其为残余有限维（*RFD*）。

Choi 证明了，自由群 F_2 的全群 C^*-代数是 RFD [11]。另一方面，Lubotzky 和 Shalom 引入并研究了表示论性质（FD），并证明闭曲面的基本群具有这一性质；因此，这些群的全群 C^*-代数是 RFD [18]。对于闭双曲 3-流形的基本群，其全群C^*-代数也具有残余有限维性；参见备注 4.3。高秩算术群则呈现出显著的反差。Bekka 证明，若 Γ具有同余子群性质，则全群 C*-代数 $C^*(\Gamma)$不存在一个能分离元素的有限维表示族 [7]。特别地， $SL_3(\mathbb{Z})$不是 RFD；更一般地，对所有 $n \geq 3$， $SL_n(\mathbb{Z})$都不是 RFD。

我们将使用以下标准刻画（例如参见 [10, 命题 2.3.2]）：群 G 的全群 C^*-代数 C^* 是残余有限维的，当且仅当 G 的每个酉表示都弱包含于 G 的有限维酉表示族。

Proposition 4.2. 假设 N 具有 *Kazhdan* 性质。如果 G 是残余有限维的，那么 Q 也是残余有限维的。

Proof. 令 $\pi\colon G \to Q$ 为商映射。任取 Q 的一个酉表示 σ，并考虑其诱导表示 G 上的诱导表示 $\bar{\sigma} := \sigma \circ \pi$。假设 G 是残余有限维的，则表示 $\bar{\sigma}$ 弱包含于 G 的有限维酉表示之中。

¯固定一个有限集 $F \subset Q$ 和 $\varepsilon > 0$，并令 $F \subset G$ 为一个有限的提升集。令 K 为 N的有限生成集。弱包含给出一个有限维表示 $\rho\colon G \to U(d)$以及一个单位向量 ξ，其矩阵系数在 $F \cup K$ 上以至多 ε的误差逼近¯ $\bar{\sigma}$ 的矩阵系数。特别地，由于 $\bar{\sigma}|_N$ 是平凡的，向量 ξ 几乎是K-不变的。根据 N的性质 (T)， ρ 的表示空间包含一个非零的N-不变向量。令 V^N表示 N-不变子空间。由于 $N \lhd G$，空间V^N是 G-不变的，且限制表示 $\rho|_{V^N}$通过 $Q = G/N$因子化。将 ρ 压缩到 V^N 上，得到 Q 的一个有限维表示，其矩阵系数在 F上逼近 σ 的矩阵系数。由于 F和 ε 是任意的，这表明σ 弱包含于 Q的有限维表示中。因此，我们得出 Q 是残余有限维的。□

REMARK 4.3. 令 M 为一个闭双曲三维流形，且 $G = \pi_1(M)$。已知，根据 Lubotzky–Shalom 的意义， G 具有性质（FD）。例如参见 Aschenbrenner–Friedl–Wilton [3, （H.28）和（I.6）], ，其中 G的性质（FD）由 Lubotzky–Shalom [18] 的工作，结合 Agol 的虚纤维化定理以及 Haglund–Wise 理论的特殊立方复形而推出。由于性质（FD）意味着有限像酉表示在酉对偶中稠密，因此立即可知，完整群 C^*-代数 $C^*(G)$是残余有限维的。特别地，对于闭双曲 3-流形，通用群 C^*-代数是残余有限维的。

5. 测度 sofic 逼近

设 (X, μ) 是一个有限概率测度空间。对于置换 $\alpha, \beta \in \mathrm{Sym}(X)$，我们定义 $d_\mu(\alpha, \beta) := \mu\big(\{x \in X : \alpha(x) \neq \beta(x)\}\big)$。另请回忆概率测度上的全变差距离： $\|\nu - \nu'\|_{\mathrm{TV}} := \sup_{A \subseteq X} |\nu(A) - \nu'(A)|$. 在某些情况下，自然会出现 sofic 性的一种变体：其作用对象不再只是一个集合，而是一个有限概率空间，并且误差由上述度量衡量——定义显而易见。我们不详述这些内容，因为下面的引理可以将这种测度 sofic 逼近约化为普通的 sofic 逼近。

LEMMA 5.1. 设 G 是一个群，(X, μ) 是一个有限测度空间， $F \subset G$ 是有限的，且$\sigma\colon F \to \mathrm{Sym}(X)$。假设存在某个 $\varepsilon \geq 0$:

(a) 对于所有满足 $gh \in F$, $d_\mu\big(\sigma$ 的 $g, h \in F(gh)$ $\sigma(g)\sigma(h)$ $\big) \leq \varepsilon$.(b) 对于所有 $g \in F$, $\big\|\sigma(g)_*(\mu) - \mu\big\|_{\mathrm{TV}} \leq \varepsilon$.

于是，对于每个整数 $N \geq |X|$ ，存在一个有限集 X ，满足 $|X| = N$ ，并且存在映射 $p\colon X \to X$, $\bar{\sigma}\colon F \to \mathrm{Sym}(X)$，使得以下条件成立：

(i) 对于每个 $g \in F$,

$$\big|\{y \in \bar{X} : p(\bar{\sigma}(g)y) \neq \sigma(g)(p(y))\}\big| \leq N\varepsilon + |X|.$$

(ii) 对于所有满足 $gh \in F$ 的 $g, h \in F$,

$$d_{\bar{X}}\big(\bar{\sigma}(gh), \bar{\sigma}(g)\bar{\sigma}(h)\big) \leq 4\varepsilon + \frac{4|X|}{N}.$$

PROOF. 选取整数 $m_x \in \{0, 1, \ldots, N\}$，使得 $\sum_{x \in X} m_x = N$，并且

$$\left|\mu(x) - \frac{m_x}{N}\right| \leq \frac{1}{N} \qquad \forall x \in X.$$

定义离散化测度 $\mu_N(x) := m_x/N$. 接着

$$\|\mu_N - \mu\|_{\mathrm{TV}} = \frac{1}{2}\sum_{x \in X}\Big|\mu_N(x) - \mu(x)\Big| \leq \frac{|X|}{2N}.$$

现在，令 $X := \bigsqcup_{x \in X}\{x\} \times \{1, 2, \ldots, m_x\}$, 并令 $p(x, i) := x$. 于是 $|X| = N$和$p_*(u) = \mu_N$，其中 u 表示 X 上的均匀测度

固定 $g \in F$。对于每个 $x \in X$集合 $r_x := \min\{m_x, m_{\sigma(g)x}\}$，并定义一个部分双射 n

$$\psi_g(x, i) := (\sigma(g)x, i) \qquad \text{for } 1 \leq i \leq r_x.$$

由于 $\sigma(g)$ 是 X 的一个置换，不同 x 的像落在互不相交的纤维中，因此 ψ_g 是单射。其定义域与像的基数相同，均为 $\sum_x r_x$。将 ψ_g 任意扩展为一个完整置换 $\bar{\sigma}(g) \in \mathrm{Sym}(X)$。

我们设 $B_g := \{y \in X : \ p(\bar{\sigma}(g)y) \neq \sigma(g)(p(y))\}$. 根据构造， B_g 恰好由不在 ψ_g定义域中的点组成，因此

$$|B_g| = \sum_{x \in X} (m_x - r_x) = \frac{1}{2} \sum_{x \in X} \left| m_x - m_{\sigma(g)x} \right|.$$

两边除以 N，得到

$$u(B_g) = \frac{1}{2} \sum_{x \in X} \left| \mu_N(x) - \mu_N(\sigma(g)^{-1}x) \right| = \left\| \sigma(g)_*(\mu_N) - \mu_N \right\|_{\mathrm{TV}}.$$

利用三角不等式以及全变差在推前下的不变性,

$$\begin{aligned} \left\| \sigma(g)_*(\mu_N) - \mu_N \right\|_{\mathrm{TV}} &\leq \left\| \sigma(g)_*(\mu_N) - \sigma(g)_*(\mu) \right\|_{\mathrm{TV}} \\ &\quad + \left\| \sigma(g)_*(\mu) - \mu \right\|_{\mathrm{TV}} + \|\mu - \mu_N\|_{\mathrm{TV}} \\ &\leq 2\|\mu - \mu_N\|_{\mathrm{TV}} + \varepsilon \\ &\leq \varepsilon + \frac{|X|}{N}, \end{aligned}$$

这就证明了 (i)。现在，固定 $g,\ h \in F$ 满足 $gh \in F$，并定义乘法缺陷集

$$A_{g,h} := \{x \in X : \ \sigma(gh)x \neq \sigma(g)\sigma(h)x\}.$$

由 (a)， $\mu(A_{g,\ h}) \leq \varepsilon$，因此

$$\mu_N(A_{g,h}) \leq \mu(A_{g,h}) + \|\mu_N - \mu\|_{\mathrm{TV}} \leq \varepsilon + \frac{|X|}{2N}.$$

现在考虑同时满足以下条件的 $y \in X$： $p(y) \notin A_{g、\ h}$，以及 $y \notin B_h$、 $\bar{\sigma}(h)y \notin B_g$，和 $y \notin B_{gh}$。那么 $p(\bar{\sigma}(h)y) = \sigma(h)p(y)$，且 $p(\bar{\sigma}(g)\bar{\sigma}(h)y) = \sigma(g)\sigma(h)p(y)$，同时 $p(\bar{\sigma}(gh)y) = \sigma(gh)p(y)$。由于 $p(y) \notin A_{g、\ h}$，后两者重合；又因为在良好部分上，我们的提升逐纤维地通过（x、 i） $\mapsto (\sigma(\cdot)x$、 $i)$作用，所以得到

$$\bar{\sigma}(gh)y = \bar{\sigma}(g)\bar{\sigma}(h)y.$$

因此，我们得到

$$d\big(\bar{\sigma}(gh), \bar{\sigma}(g)\bar{\sigma}(h)\big) \leq u\big(p^{-1}(A_{g,h})\big) + u(B_h) + u(B_g) + u(B_{gh}).$$

但是 $u(p^{-1}(A_{g、\ h})) = \mu_N(A_{g、\ h})$，并且根据(i)，每个 $u(B_{\cdot}) \leq \varepsilon + |X|/N$，因此

$$d_{\bar{X}}\big(\bar{\sigma}(gh), \bar{\sigma}(g)\bar{\sigma}(h)\big) \leq \Big(\varepsilon + \frac{|X|}{2N}\Big) + 3\Big(\varepsilon + \frac{|X|}{N}\Big) \leq 4\varepsilon + \frac{4|X|}{N}.$$

这就证明了 (ii)。 □

6. 商群的 sofic 性

现在我们记录一个关于伯努利移位的拟有限模型的观察。可数群 G 在 (Z,ν) 上的概率测度保持作用称为 *sofic*，如果存在 G 的 sofic 逼近 (σ_n) 以及映射 $\varphi_n\colon V_n \to Z$，使得其有限模式的经验分布与 (Z,ν) 的经验分布相符，误差趋于 0；例如可参见 Bowen 在 [9] 中的表述。

Definition 6.1. 设 G为一个有限生成群，并给定其有限对称生成集 S。若一个 sofic 逼近$(\sigma_n\colon G \to \mathrm{Sym}(V_n))_n$ 在移除一个满足 $|E_n| = o(|V_n|)$ 的集合 $E_n \subset V_n$ 之后，其 G 在 $V_n' := V_n \setminus E_n$ 上相对于 S 的 Schreier 图可分解为若干互不相交的有限连通分量之并，则称它本质上是扩张图的不交并，其中$n \to \infty$,

$$V_n' \;=\; \bigsqcup_{C \in \mathcal{C}_n} C$$

并且存在 $\varepsilon > 0$，使得每个分量 C（带有诱导的部分 S–Schreier 图结构）的切格常数都至少为 ε，且这一界对 n 和 $C \in \mathcal{C}_n$一致成立。

Kun 的一个引人注目的结果 [**17**, 定理 1] 表明，Kazh- dan 群的所有 sofic 逼近本质上都是扩张图的不交并。我们将在以下命题的证明中使用这一结果。

Proposition 6.2. 假设 N 是 ***Kazhdan*** 群，并考虑带均匀基测度的伯努利移位 $Q \curvearrowright \{0,1\}^Q$ 。如果这个诱导的 G作用是 ***sofic*** 的，那么 Q 也是 ***sofic*** 的。

Proof. 设 $(\sigma_n\colon G \to \mathrm{Sym}(V_n))_n$ 是对上述G作用进行建模的 sofic 逼近，并带有关联的标记 $\varphi_n\colon V_n \to \{0,1\}^Q$。

固定 N的一个有限对称生成集 S_N。根据 Kun 定理，丢弃 $o(|V_n|)$ 个顶点组成的集合后，我们可以假设 N–Schreier图上

$$V_n' \;=\; \bigsqcup_{C \in \mathcal{C}_n} C$$

分解为连通分量 $C \in \mathcal{C}_n$，这些分量构成一个具有一致切格常数 $c_N > 0$ 的扩展子图族（相对于 S_N）。我们在 $\mathcal{C}_n$ 上赋予一个概率测度，定义为

$$\mu_n(\{C\}) \;:=\; \frac{|C|}{|V_n'|}.$$

令 $A := \{x \in \{0,1\}^Q \mid x(e) = 1\}$，并设 $A_n := \varphi_n^{-1}(A) \cap V_n'$。那么

$$\frac{|A_n|}{|V_n'|} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

由于 A 是 N 不变的，作用的 sofic 性意味着对于每个 $s \in S_N$,

$$\frac{|\sigma_n(s) A_n \triangle A_n|}{|V_n'|} \longrightarrow 0.$$

因此，存在一个序列 $\varepsilon_n \to 0$，使得对于所有足够大的 n 以及所有 $s \in S_N$,

$$|\sigma_n(s) A_n \triangle A_n| \;\le\; \varepsilon_n \, |V_n'|.$$

通过扩张（在每个 N-分量上），存在一个由 N-分量组成的并集 $A'_n \subseteq V'_n$，使得

$$|A_n \triangle A'_n| \;\le\; \varepsilon'_n\,|V'_n|.$$

对于一个可能不同的序列 $\varepsilon'_n \to 0$。固定给定有限集 $F \subset Q$的一组提升 $F \subset G$，并令 $\eta_n \to 0$。对于 $g \in F$，定义缺陷集

$$B_n(g) := \bigcup_{s\in S_N} \Big\{ v \in V'_n \;\Big|\; \sigma_n(g)\sigma_n(s)v \neq \sigma_n(gsg^{-1})\sigma_n(g)v \Big\}.$$

由 σ_n 的渐近乘法性可知，对于每个固定的 $g \in F$，存在一个序列$\beta_n(g) \to 0$，使得

$$|B_n(g)| \;\le\; \beta_n(g)\,|V'_n| \qquad \text{for all } n.$$

现在固定 $g \in F$ 和一个 N-分量 $C \in \mathcal{C}_n$。对于每个分量 $D \in \mathcal{C}_n$，定义

$$\alpha_C(D) := \frac{|\sigma_n(g)C \cap D|}{|C|}.$$

令 D_C 为使 $\alpha_C(D)$ 达到最大值的一个分量。我们断言，对于 μ_n-多数 C，有$\alpha_C(D_C) \ge 1-\eta_n$，其中某个 $\eta_n \to 0$。

令 $\beta_n := \beta_n(g)$，并定义

$$\mathcal{C}_n^{\mathrm{bad}} := \Big\{ C \in \mathcal{C}_n : \; \frac{|\sigma_n(g)C \cap B_n(g)|}{|C|} > \sqrt{\beta_n} \Big\}.$$

然后，利用 $\sigma_n(g)$ 是 V'_n 的双射以及 μ_n 的定义，

$$\mu_n(\mathcal{C}_n^{\mathrm{bad}}) \le \frac{1}{\sqrt{\beta_n}} \sum_{C\in\mathcal{C}_n} \mu_n(\{C\}) \frac{|\sigma_n(g)C \cap B_n(g)|}{|C|} = \frac{1}{\sqrt{\beta_n}} \cdot \frac{|B_n(g)|}{|V'_n|} \le \sqrt{\beta_n}.$$

特别地，舍弃 $\mathcal{C}_n^{\mathrm{bad}}$ 后，我们可以假设

$$|\sigma_n(g)C \cap B_n(g)| \;\le\; \sqrt{\beta_n}\,|C| \qquad \text{for all remaining } C \in \mathcal{C}_n.$$

现在固定这样一个分量 C，令 $D \in \mathcal{C}_n$ 任意，并设 $U := \sigma_n(g)C \cap D$。D 中离开 U 的每条 S_N-边，都通过 $\sigma_n(g)^{-1}$ 对应于 C 中的一条 S_N-边，而该边在 $\sigma_n(g)$ 下的像不完全位于 D 内。根据 $B_n(g)$ 的定义，这只能发生在 $\sigma_n(g)C$ 的顶点上，而这些顶点属于 $B_n(g)$。因此，这类边界边的数量至多为

$$|S_N| \cdot |\sigma_n(g)C \cap B_n(g)| \;\le\; |S_N|\sqrt{\beta_n}\,|C|.$$

由于 D 的切格常数至少为 c_N，我们还得到

$$|\partial_D U| \;\ge\; c_N \min\{|U|,\; |D\setminus U|\}.$$

结合这两个不等式可得

$$\min\{|U|,\; |D\setminus U|\} \;\le\; \frac{|S_N|}{c_N}\sqrt{\beta_n}\,|C|.$$

取 $D = D_C$ 并记 $\eta_n := \frac{|S_N|}{c_N}\sqrt{\beta_n}$（于是 $\eta_n \to 0$），我们得到

$$\alpha_C(D_C) = \frac{|U|}{|C|} \;\ge\; 1-\eta_n$$

对所有 $C \in \mathcal{C}_n \setminus \mathcal{C}_n^{\mathrm{bad}}$ 均成立。由于 $\mu_n(\mathcal{C}_n^{\mathrm{bad}}) \le \sqrt{\beta_n} \to 0$，这就证明了该断言。

定义 $\bar{\sigma}_n(\pi(g)) \in \mathrm{Sym}(\mathcal{C}_n)$ 为

$$\bar{\sigma}_n(\pi(g))(C) := D_C$$

在良好分支上，并任意扩展为 $\mathcal{C}_n$ 的一个置换。由于 $\sigma_n(g)$ 是 V_n' 的一个双射，诱导的置换 $\bar{\sigma}_n(\pi(g))$ 几乎保持 μ_n，其含义是

$$\big\|(\bar{\sigma}_n(\pi(g)))_*\mu_n - \mu_n\big\|_{\mathrm{TV}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \forall g \in \bar{F}.$$

此外，根据 $\bar{\sigma}_n$ 的构造以及 σ_n 的渐近乘法性，还可得测度几乎乘法性：

$$d_{\mu_n}\big(\bar{\sigma}_n(q_1q_2), \bar{\sigma}_n(q_1)\bar{\sigma}_n(q_2)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \forall q_1, q_2, q_1q_2 \in F.$$

固定 $q \in F \setminus \{e\}$，并取一个提升 $g \in F$，使得 $\pi(g) = q$。对于伯努利移位，随机对 $\big(x(e),\ (q\cdot x)(e)\big)$ 在 $\{0,1\}^2$ 上均匀分布，因此

$$\nu\big(\{x : x(e) = 1,\ (q\cdot x)(e) = 0\}\big) = \frac{1}{4}.$$

由于 $(\sigma_n,\ \varphi_n)$ 见证了该作用的 sofic 性，存在一个序列 $\varepsilon_n \to 0$，使得

$$\left|\frac{1}{|V_n'|}\Big|\{v \in V_n' :\ v \in A_n,\ \sigma_n(g)v \notin A_n\}\Big| - \frac{1}{4}\right| \le \varepsilon_n.$$

由于 $|A_n \triangle A_n'|/|V_n'| \to 0$，存在另一个序列 $\varepsilon_n' \to 0$，使得

$$\frac{1}{|V_n'|}\Big|\{v \in V_n' :\ v \in A_n,\ \sigma_n(g)v \notin A_n'\}\Big| \ \ge\ \frac{1}{4} - \varepsilon_n - \varepsilon_n'.$$

若 $C \in \mathcal{C}_n$ 满足 $\bar{\sigma}_n(q)C = C$，则根据 $\bar{\sigma}_n(q)$ 的定义性质，存在一个序列 $\eta_n \to 0$，使得

$$\Big|\{v \in C :\ \sigma_n(g)v \notin C\}\Big| \ \le\ \eta_n\,|C|.$$

此外，由于 A_n' 是 N-分量的并集，而 C 是一个分量，对于每个满足 $\sigma_n(g)v \in C$ 的 $v \in C$，都有 $\sigma_n(g)v \notin A_n' \implies v \notin A_n'$。我们设 $\mathcal{C}_n(q) := \{C \in \mathcal{C}_n \mid \bar{\sigma}_n(q)C = C\}$。由此得到，

$$\{v \in V_n' :\ v \in A_n,\ \sigma_n(g)v \notin A_n'\} \subseteq (A_n \setminus A_n') \ \cup\ E_n \ \cup \bigsqcup_{C \notin \mathcal{C}_n(q)} C,$$

其中 $E_n := \bigsqcup_{C\in\mathcal{C}_n(q)}\{v \in C :\ \sigma_n(g)v \notin C\}$ 满足 $|E_n| \le \eta_n\,|V_n'|$。

两边除以 $|V_n'|$ 并利用 $|A_n \setminus A_n'| \le |A_n \triangle A_n'| \le \varepsilon_n'|V_n'|$，得到

$$\mu_n\big(\{C \in \mathcal{C}_n :\ \bar{\sigma}_n(q)C \ne C\}\big) \ \ge\ \frac{1}{4} - \varepsilon_n - 2\varepsilon_n' - \eta_n.$$

因此，我们在 $(\mathcal{C}_n,\ \mu_n)$ 上得到了 Q 在 F 上的测度置换模型，它满足：(i) 在 d_{μ_n} 中几乎是乘法的；(ii) 几乎保持 μ_n；(iii) 对非平凡的 $q \in F$，通过移动 μ_n 的质量 $\ge 1/4 + o(1)$ 将其区分开来。应用通常的乘积技巧（取足够大的 k 重 k 次乘积），我们可以假设每个 $q \in F \setminus \{e\}$ 至少移动 $1-\varepsilon$ 的 μ_n 质量。

现在将引理 5.1 应用于 $(\mathcal{C}_n, \mu_n)$ 以及映射 $\bar{\sigma}_n|_F$，并取较大的 N（取决于 n），使得 $|\mathcal{C}_n|/N \to 0$，由此我们得到有限集上的真正置换模型，其度量为通常的汉明度量。对有限子集 $F \subset Q$ 进行对角化，可得 Q 的 sofic 逼近。$\square$

Remark 6.3. 为了使前述结果成立，可以从任意一个自由的概率测度保持 Q 作用开始；然而，根据 Ab´ert-Weiss [1], ，任何这样的作用都弱包含伯努利作用。因此，只需考虑伯努利作用。

下面的观察描述了在存在 Kazhdan 正规子群 N 和单商群 Q的情况下，sofic 逼近的一种二分情形。从本质上说，它与命题 6.2 非常接近，但以更具结构性的方式运用了 Kun 的扩展图分解。

下面的定义或许本身就值得关注，过去也曾在不同场合进行过非正式讨论。

Definition 6.4. 如果 G 具有 $sofic$-(τ) 性质，我们就称之为如此：对于 G 的每个 sofic 逼近（σ_n: $G \to \mathrm{Sym}(V_n)$)$_n$ ，经过取子序列后，它在本质上都是扩展子图的不交并（定义 6.1）。

以下命题概述了 Kun [17] 的开创性工作，并结合 Schmidt 定理 [21]提出了一些观察。

Proposition 6.5. 令 G为一个群。

(i) 若 G 具有 *Kazhdan* 性质 (T)，则 G 具有 *sofic*-(τ)性质。(ii)假设可数群 G 的每个概率测度保持作用都是 *sofic* 的。若 G 具有 *sofic*-(τ)性质，则 G 具有 *Kazhdan* 性质 (T)。

Proof. 第一个断言直接源于 Kun 关于具有性质 (T) 的群的 sofic 逼近的定理 [17, 定理 1], 。该定理指出，对于 Kazhdan 群，每个 sofic 逼近（相对于任意固定的有限生成集）在舍弃 $o(|V_n|)$ 个顶点后，都是由扩张图分量构成的不交并，且这些分量的切格常数具有统一的正下界。这恰好就是 sofic-(τ)性质。

对于第二个断言，我们采用逆否法进行论证。假设 G 不具有性质 (T)。根据 Schmidt 的定理 [21] （另见 [16]），存在一个自由遍历保测作用 $G \curvearrowright (X,\ \mu)$，它不是强遍历的。

固定 G 的一个有限对称生成集 S。由于该作用不是强遍历的，存在一列可测集 $A_n \subset X$ ，满足 $\mu(A_n) = 1/2$ ，并且

$$\max_{s\in S} \mu(sA_n \triangle A_n) \longrightarrow 0.$$

任取一个序列 $\varepsilon_n \downarrow 0$。根据欣钦引理和该作用的遍历性，存在 $g_n \in G$ ，使得

$$\mu(A_n \cap g_n A_n) \leq \mu(A_n)^2 + \varepsilon_n = \frac{1}{4} + \varepsilon_n.$$

根据假设，作用 $G \curvearrowright (X,\ \mu)$ 是 sofic 的。因此，对每个 n ，都存在一个 sofic 逼近映射 σ_n: $G \to \mathrm{Sym}(V_n)$ 以及一个标记 φ_n: $V_n \to X$，使得记$B_n := \varphi_n^{-1}(A_n)$ 时，下列条件成立:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|B_n|}{|V_n|} = 1/2, \qquad \lim_{n\to\infty} \max_{s\in S} \frac{|\sigma_n(s)B_n \triangle B_n|}{|V_n|} = 0,$$

and

$$\frac{|B_n \cap \sigma_n(g_n)B_n|}{|V_n|} \leq \frac{1}{4} + 2\varepsilon_n.$$

Set

$$\delta_n := \sum_{s\in S} \frac{|\sigma_n(s)B_n \triangle B_n|}{|V_n|}, \qquad \text{so } \delta_n \to 0.$$

在 V_n上的 S–Schreier图中，从 B_n 出发的 S-边数至多为 $\delta_n|V_n|$.

反设 sofic 逼近 $(\sigma_n)_n$ 本质上是若干扩展子图的不交并，因此，舍弃 $o(|V_n|)$ 个顶点后，我们可以假设S–Schreier图在 V_n 上分解为若干连通分量的不交并

$$V_n = \bigsqcup_{C\in\mathcal{C}_n} C$$

每个分量的切格常数都至少为某个固定值 $c > 0$，且该值与 n 和 C无关。

对每个 $C \in \mathcal{C}_n$ ，令 $B_{n,\ C} := B_n \cap C$。那么， C 内部的边界边满足

$$|\partial_C(B_{n,C})| \ \geq\ c\,\min\{|B_{n,C}|,\ |C \setminus B_{n,C}|\}.$$

对各分量求和可得

$$\delta_n|V_n| \ \geq\ |\partial(B_n)| = \sum_{C\in\mathcal{C}_n} |\partial_C(B_{n,C})| \ \geq\ c \sum_{C\in\mathcal{C}_n} \min\{|B_{n,C}|,\ |C \setminus B_{n,C}|\}.$$

D定义 $B'_n \subset V_n$ 为满足$|B_{n,\ C}| \geq |C|/2$的那些分量 C 的并集。那么

$$|B_n \triangle B'_n| = \sum_{C\in\mathcal{C}_n} \min\{|B_{n,C}|,\ |C \setminus B_{n,C}|\} \ \leq\ \frac{\delta_n}{c}\,|V_n| = o(|V_n|).$$

现在，由于 g_n 是生成集 S中的一个字，置换 $\sigma_n(g_n)$保持每个连通 S-分量不变。因此， B'_n 是 $\sigma_n(g_n)$-不变的，即$\sigma_n(g_n)B'_n = B'_n$.因此，我们得到

$$|B_n \cap \sigma_n(g_n)B_n| \ \geq\ |B'_n \cap \sigma_n(g_n)B'_n| - 2|B_n \triangle B'_n| \ =\ |B'_n| - 2|B_n \triangle B'_n|.$$

除以 $|V_n|$ 并利用 $|B'_n|/|V_n| = |B_n|/|V_n| + o(1) \to 1/2$，我们得到

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|B_n \cap \sigma_n(g_n)B_n|}{|V_n|} \ \geq\ \frac{1}{2}.$$

但根据构造，我们还有

$$\frac{|B_n \cap \sigma_n(g_n)B_n|}{|V_n|} \leq \frac{1}{4} + 2\varepsilon_n,$$

这对 $n \to \infty$构成矛盾。因此，sofic 逼近$(\sigma_n)_n$ 不可能本质上是扩张图的不交并。这与 G 具有 sofic-(τ)性质的假设矛盾。□

PROPOSITION 6.6. 设

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 1$$

构成一个短正合列，其中 N *Kazhdan*，且 Q 是一个无限单群。那么， G 是 *sofic*-(τ) ，或者 Q 是 *sofic*。

Proof. 如果 G 不是 sofic，那么根据定义，它平凡地是 sofic-(τ)，因此不妨假设 G 是 sofic，并令 $(\sigma_n\colon G \to \mathrm{Sym}(V_n))_n$ 为 G的一个 sofic 逼近。取 N的一个有限对称生成集 S_N。根据 Kun 定理 [**17**, Theorem 1], ，去掉 $o(|V_n|)$ 个顶点后，我们可以假设 N–Schreier 图上的

$$V_n' = \bigsqcup_{C\in\mathcal{C}_n} C$$

分解为连通分量 $C \in \mathcal{C}_n$ ，这些分量构成一个切格常数一致的扩展子族 $c_N > 0$。赋予 $\mathcal{C}_n$ 概率测度

$$\mu_n(\{C\}) := \frac{|C|}{|V_n'|}.$$

取一个有限集 $F \subset G$ ，并令 $F := \pi(F) \subset Q$。对于 $g \in F$，定义共轭缺陷集

$$B_n(g) := \bigcup_{s\in S_N} \Big\{ v \in V_n' \;\Big|\; \sigma_n(g)\sigma_n(s)v \neq \sigma_n(gsg^{-1})\sigma_n(g)v \Big\}.$$

渐近乘法性给出 $|B_n(g)| = o(|V_n'|)$。固定 $g \in F$ 和 $C \in \mathcal{C}_n$，按照命题 6.2 的证明，定义$\alpha_C(D)$和多数分量 D_C。由扩张性可知，舍去一组其 μ_n-测度可忽略的分量后，我们可以假设

$$\frac{|\sigma_n(g)C \cap D_C|}{|C|} \;\geq\; 1-\eta_n \qquad \text{for some } \eta_n \to 0.$$

定义 $\bar\sigma_n(\pi(g)) \in \mathrm{Sym}(\mathcal{C}_n)$，使得 $\bar\sigma_n(\pi(g))(C) := D_C$ 在良好分量上成立，并任意扩展为 $\mathcal{C}_n$的一个置换。

于是映射 $\bar\sigma_n\colon F \to \mathrm{Sym}(\mathcal{C}_n)$ 满足：

(a) 测度几乎乘法性：

$$d_{\mu_n}\big(\bar\sigma_n(q_1q_2), \bar\sigma_n(q_1)\bar\sigma_n(q_2)\big) \xrightarrow{n\to\infty} 0, \qquad \forall q_1, q_2, q_1q_2 \in F;$$

(b) 几乎 μ_n-保持性：

$$\big\|(\bar\sigma_n(q))_*\mu_n - \mu_n\big\|_{\mathrm{TV}} \xrightarrow{n\to\infty} 0, \qquad \forall q \in F.$$

此外，由于 N 在 N-分量集合上作用平凡，诱导映射在 d_{μ_n} 中模 $o(1)$ 只取决于 $\pi(g)$。

利用引理 5.1，我们可以将 $\bar\sigma_n\colon F \to \mathrm{Sym}(\mathcal{C}_n)$ 在$(\mathcal{C}_n,\ \mu_n)$ 上的测度几乎作用替换为 F 在配备均匀测度的有限集 X_n 上的几乎作用，其中缺陷是用均匀汉明度量衡量的。

对有限子集 $F \subset Q$ 取对角序列后，我们得到一列映射 $\widetilde\sigma_n\colon Q \to \mathrm{Sym}(X_n)$，它们渐近地满足乘法性。等价地，我们得到一个同态

$$\widetilde\sigma\colon Q \longrightarrow \prod_{\mathcal{U}} (\mathrm{Sym}(\bar X_n), d_{\mathrm{Ham}})$$

映入度量超积，其核是 Q 的正规子群。由于 Q 是单群，这个核要么是 $\{e\}$ ，要么是 Q。在第一种情况下， $\widetilde\sigma$ 是单射，因此 Q 是 sofic。

如果 Q 不是 sofic，那么所有超积同态都是平凡的，这意味着在近似作用 $\widetilde\sigma_n$ 中，每个 $q \in Q$ 的汉明长度都满足 $\ell_n(\widetilde\sigma_n(q)) \to 0$,

这尤其意味着，被 $\bar{\sigma}_n(q)$ 移动的分量的 μ_n-质量趋于 0。我们现在在这一假设下继续讨论。

取 S_G 的一个有限对称生成集 G，其中包含 S_N；对于 $g \in S_G$，我们令 $q = \pi(g)$。根据 $\bar{\sigma}_n(q)$ 的定义，现在可知集合

$$E_{n,\ g} := \{v \in V_n' :\ \sigma_n(g)v \text{ 位于与 } v\} \text{ 不同的 } N\text{-分量中}$$

满足 $|E_{n,\ g}| = o(|V_n'|)$。令 $E_n := \bigcup_{g \in S_G} E_{n,\ g}$，并设 $V_n'' := V_n' \setminus E_n$。那么 $|V_n''| = (1 - o(1))|V_n|$，且每个生成元 $g \in S_G$ 都将包含于 V_n'' 中的每个 N-分量映射到自身。因此，关于 S_G 的 G–Schreier 图在 V_n'' 上是有限连通图的不交并，这些图由 N-分量索引。

在每个这样的分量 C 上，S_N-边构成一个切格常数为$\geq c_N$的扩张图，而添加更多边（即来自 $S_G \setminus S_N$ 的边）不会降低切格常数。因此，舍弃 $o(|V_n|)$ 个顶点后，$(\sigma_n)_n$ 的 Schreier 图分解为切格常数一致的扩展子图的不交并；又由于我们最初采用的近似是任意的，我们得出 G 具有 sofic-(τ) 性质。□

Remark 6.7. 前述结果有一个颇为特别的推论。假设 Q是有限表示的、单群且不具有 Kazhdan 性质。首先，G 也不可能具有 Kazhdan 性质。现在，根据 Schmidt 的上述定理，每个不具有性质 (T) 的可数群都存在一个自由遍历概率测度保持作用，但该作用并非强遍历——例如参见 [**21, 16**] 及其中的参考文献。如果已知这样的作用在 Bowen 意义下是 sofic 的，那么便可推出 G 不是 sofic-(τ)，进而 Q 必定是 sofic 的。

7. 定理 A 及其推论的证明

迄今为止所得结果之所以有趣，在于存在多种群扩张，其核是有限生成的，甚至具有 Kazhdan 性质。我们回顾一下下文应用所依赖的 Rips 构造的两个版本。

Theorem 7.1（Wise，参见 [**23**]）。对于每个有限表示群 Q，都存在一个短正合列

$$1 \to N \to G \to Q \to 1$$

使得 G 是双曲且剩余有限的，并且 N 是有限生成的。

Theorem 7.2（Belegradek–Osin，参见 [**8**]）。设 Q 是有限表示的，且 H 是非初等双曲群。那么存在一个短正合列

$$1 \to N \to G \to Q \to 1$$

其中 G 是双曲的，且 N 是 H的商群。特别地，若 H 具有 *Kazhdan* 性质，则 N 也具有 *Kazhdan* 性质。

Proof of Theorem A. A(i) 部分即定理 2.6。A(ii) 部分是将定理 3.4 应用于 sofic 商群。定理 A(iii) 即命题 4.2。定理 A(iv) 即命题 6.2。□

为了应用这些结果，我们只需要一个不是剩余有限的有限表示 sofic 群的例子。事实上，此类例子有很多，其中最简单的

也许是鲍姆斯拉格-索利塔群 $BS(2,\ 3) = \langle a,\ b \mid ba^3 = a^2b \rangle$ 或者鲍姆斯拉格-格斯滕群 $B = \langle a,\ t \mid a^{a^t} = a^2 \rangle$，见 [**4**]。事实上，众所周知，这两个群都不是剩余有限的，同时它们又是 sofic 群，因为它们是可和子群的 HNN 扩张。事实上，Elek-Szab´o [**12**] 证明了，sofic 群沿可和子群作融合自由积后仍然是 sofic 群。现在，众所周知，某个同构 $\varphi\colon H_1 \to H_2$ 下，可和子群 G 的 HNN 扩张 $G*_\varphi$ 与 $\mathbb{Z}$ 和一个群的半直积同构，而该群是沿 amenable 群作融合自由积所得的直并；因此，借助一个标准论证，这种情形很容易归结为融合自由积。

Proof of Corollary B. 对 Q（其为有限表示、sofic 且非剩余有限群）应用 Wise 的剩余有限 Rips 构造（定理 7.1），得到一个带有有限生成核的双曲剩余有限 G。若 G 是柔性 P-稳定的，则定理 A(i)和推论 2.7将迫使 Q 为剩余有限群，矛盾。□

Proof of Corollary C. 对同一个 Q选取 Belegradek–Osin 扩张（定理 7.2）。定理 A(ii)表明，若一个剩余有限且有限作用稳定的G 存在，则必然迫使 Q 为剩余有限群，这再次与 Q的选取矛盾。因此，若 G是剩余有限的，则它并非有限作用稳定。□

Proof of Corollary D. 再次选取 Belegradek–Osin 扩张（定理 7.2），其中包含一个具有性质 (T) 的双曲群 H。由于 Q 是有限生成且非剩余有限的，Q 不可能是残余有限维；于是定理 A(iii)推出 G 不是残余有限维。□

Proof of Corollary E. 令 Q不是 sofic 群，并利用 Kazhdan 双曲群 H 应用 Belegradek–Osin 构造，得到一个双曲扩张 $1 \to N \to G \to Q \to 1$，其中 N 具有 Kazhdan 性质。若准正则伯努利移位 $G \curvearrowright \{0,1\}^Q$是 sofic 的，则定理 A(iv) 将推出 Q 是 sofic 的，这与假设矛盾。因此，G存在非 sofic 的概率测度保持作用。□

致谢

第二作者感谢艾萨克·牛顿研究所在 2025年11月 举办研讨会期间提供的热情接待。撰写本手稿的部分内容时使用了 ChatGPT 辅助。作者审阅并大幅修订了全部内容，并对最终文本负责。

参考文献

[1] M. Ab´ert 和 B. Weiss，伯努利作用弱包含于任意自由作用，*Ergodic TheoryDynam. Systems* **33**（2013），第 2 期，323–333。[2] G. Arzhantseva 和 L. P˘aunescu，几乎交换的置换是近似交换的置换，*J. Funct. Anal.* **269**，*J. Funct. Anal.* **269**（2015），745–757。[3] M. Aschenbrenner、S. Friedl 和 H. Wilton，*3-Manifold Groups*，《数学讲座 EMS 丛书》，欧洲数学会（EMS），Z¨urich，2015。[4] G. Baumslag，一个所有有限商群均为循环群的非循环单关系群，*J. Austral. Math. Soc.* **10**（1969），497–498。[5] O. Becker 和 A. Lubotzky，群稳定性与性质 (T)，*J. Funct. Anal.* **278**（2020），108298。

[6] O. Becker、A. Lubotzky 和 A. Thom，稳定性与不变随机子群， *Duke Math. J.*168（2019），2207–2234。[7] B. Bekka，*On the full C^*-algebras of arithmetic groups and the congruence subgroup problem*，《数学论坛》11（1999），705–715。[8] I. Belegradek 和 D. Osin，Rips 构造与 Kazhdan 性质 (T)，*Groups Geom. Dyn.* **2**（2008），第 1 期，1–12。[9] L. Bowen，关于可数 sofic 群作用的测度共轭不变量， *J. Amer. Math. Soc.*23（2010），217–245。[10] N. P. Brown 和 N. Ozawa，*C^*-algebras and finite-dimensional approximations*，《数学研究生教材》，第 88 卷，美国数学会，2008。[11] M.-D. Choi， *The full C^*-algebra of the free group on two generators*，《太平洋数学杂志》87（1980），41–48。[12] G. Elek 和 E. Szab´o， *Sofic representations of amenable groups*，《美国数学会会刊》139（2011），第 12 期，4285–4291。[13] L. Gohla 和 A. Thom，高维扩张与群的 sofic 性，arXiv:2403.09582，已被《以色列数学杂志》接受发表。[14] M. Gromov，*Endomorphisms of symbolic algebraic varieties*，《欧洲数学会杂志》（JEMS）1（1999），第 2 期，109–197。[15] Z. Ji、A. Natarajan、T. Vidick、J. Wright 和 H. Yuen，$\mathrm{MIP}^* = \mathrm{RE}$，arXiv:2001.04383。[16] A. S. Kechris，自由群作用空间中的弱包含， *Israel J. Math.* **189**（2012），461–507。[17] G. Kun，关于具有性质 (T) 的群的 sofic 逼近，arXiv:1606.04471。[18] A. Lubotzky 和 Y. Shalom， *Finite representations in the unitary dual and Ramanujan groups*，载于 *Discrete geometric analysis*（仙台，2002），《当代数学》347，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2004，173–189。[19] V. G. Pestov，超线性群与 sofic 群：简明指南， *Bull. Symbolic Logic* **14**（2008），第 4 期，449–480。[20] E. Rips，小消去群的子群， *Bull. Lond. Math. Soc.* **14**（1982），第 1 期，45–47。[21] K. Schmidt，可和性、 Kazhdan 性质 (T) 、强遍历性以及遍历群作用的不变均值，*Ergodic Theory Dynam. Systems* **1**（1981），第 2 期，223–236。[22] B. Weiss，*Sofic groups and dynamical systems*，《Sankhy¯a》，《印度统计学杂志》（A）62（2000），第 3 期，350–359。[23] D. T. Wise，Rips 构造的剩余有限版本， *Bull. Lond. Math. Soc.* **35**（2003），第 1 期，23–29。

Vadim Alekseev, TU Dresden, 01062 Dresden, Germany
Email address: vadim.alekseev@tu-dresden.de

Andreas Thom, TU Dresden, 01062 Dresden, Germany
Email address: andreas.thom@tu-dresden.de