arXiv:2512.15509v1 [math.AT] 17 Dec 2025

滤子与上同调 III：$\mathbf{E}_\infty$-环的上同调

Benjamin Antieau

2025年12月18日

摘要

我们讨论源自$\mathbf{E}_\infty$-环和$\mathbf{E}_n$-环的 de Rham 型上同调理论的滤过。示例包括相对拓扑 Hochschild 同调上的 HKR 滤过、$\mathbf{E}_\infty$-无穷小上同调上的 Hodge 滤子，以及$\mathbf{E}_\infty$-德拉姆上同调上的 Hodge 滤子。

目录

1 引言 1
2 无穷小上同调 2
3 Quillen谱序列 5
4 HKR滤过 6
5 高阶 THH与$\mathbf{F}_p$ 7
6 一个$\mathbf{E}_\infty$-版本的德拉姆上同调 10
7 $\mathbf{E}_n$-无穷小上同调与 HKR 11
8 与 Goodwillie 微积分的联系 14
参考文献 17

1 引言

我们通过泛性质构造与映射相关的某些乘法滤子，这些映射来自$\mathbf{E}_\infty$-环谱（或 $\mathbf{E}_n$-环谱），并说明这些滤子与文献中先前研究的谱序列和滤过之间的关系。最后一节将介绍它们与 Goodwillie 微积分的联系。大多数主要结果的证明与 [4, 5], 中的证明完全相同，因此我们从略。Tyler Lawson 几年前提出了密切相关的思想，并在博尔德的一次会议上作了讲解；视频见 [42]。

记号。 我们沿用前文 [4, 5] 中的所有记号和术语。未加修饰的模范畴（如 Mod_k ）总是指左 k-模的 ∞-范畴，通常记作 LMod_k。若 k 是一个$\mathbf{E}_\infty$-环，则令 CAlg_k 表示$\mathbf{E}_\infty$-k-代数的 ∞-范畴，并令 FCAlg_k 表示滤过$\mathbf{E}_\infty$-k-代数的 ∞-范畴。FCAlg_k 中的对象有时称为递减$\mathbf{E}_\infty$-滤过，或递减乘法滤过。令 $\widehat{\mathrm{FCAlg}}_k$ 表示完备滤过$\mathbf{E}_\infty$-k-代数的 ∞-范畴。若 $k=\mathbf{S}$ 是球谱，我们就将它们分别简记为 CAlg、FCAlg 和 $\widehat{\mathrm{FCAlg}}$。我们常常不加说明地将$\mathbf{E}_\infty$-环 R 视为滤过$\mathbf{E}_\infty$-环；在这些情况下，我们默认指的是与该滤过相对应的滤过$\mathbf{E}_\infty$-环 $\mathrm{ins}^0 R$

$$\cdots \to 0 \to R = R = R = \cdots,$$

其中第一个非零项的滤过权重为零。

致谢。 感谢 Bhargav Bhatt、Sanath Devalapurkar、Bjørn Dundas、Elden Elmanto、John Francis、Paul Goerss、Mike Hill、Achim Krause、Tyler Lawson、Deven Manam、Akhil Mathew、Thomas Nikolaus、Arpon Raksit、Birgit Richter 和 Nick Rozenblyum 的有益讨论。特别感谢 Bjørn Dundas、Tyler Lawson 和 Birgit Richter 对初稿提出了极有帮助的意见。

本项目得到美国国家科学基金会资助（项目编号 DMS-2152235）和西蒙斯完美性合作项目的支持。我们也感谢美国数学研究所的盛情款待：我们在那里从 Michael Hill 处了解到 2025年10月讨论的例 7.7 中 Hill–Lawson 的工作。

2 无穷小上同调

我们的基本概念是 $\mathbf{E}_\infty$-类比的无穷小上同调，由 [4]引入。其定义受到 Raksit 在 [53]中对导出德拉姆上同调的定义的启发。

构造 2.1 ($\mathbf{E}_\infty$-无穷小上同调)。 设 k 是一个$\mathbf{E}_\infty$-环，并令 FCAlg_k 为 ∞-范畴，即 k上的滤过$\mathbf{E}_\infty$-代数范畴。函子 $\mathrm{gr}^0\colon \mathrm{FCAlg}_k \to \mathrm{CAlg}_k$ 保极限和余极限，因此是一个伴随中的右伴随

$$\mathrm{F}^\star_{\mathrm{H}}\mathbb{\Gamma}^{\mathbf{E}_\infty}_{-/k}\colon \mathrm{CAlg}_k \rightleftarrows \mathrm{FCAlg}_k\colon \mathrm{gr}^0,$$

按定义，其中 $\mathrm{F}^\star_{\mathrm{H}}\mathbb{\Gamma}^{\mathbf{E}_\infty}_{-/k}$ 是左伴随。给定 $R \in \mathrm{CAlg}_k$，我们称 $\mathbb{\Gamma}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/k}$ 为相对于 k的$\mathbf{E}_\infty$-无穷小上同调。根据定义，它带有一个滤子 $\mathrm{F}^\star_{\mathrm{H}}\mathbb{\Gamma}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/k}$，称为 Hodge 滤子。令 $\widehat{\mathbb{\Gamma}}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/k}$ 为 $\mathbb{\Gamma}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/k}$ 关于 Hodge 滤子的完备化，并令 $\mathrm{F}^\star_{\mathrm{H}}\widehat{\mathbb{\Gamma}}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/k}$ 表示完备化上诱导的 Hodge 滤子。存在一个伴随

$$\mathrm{F}^\star_{\mathrm{H}}\widehat{\mathbb{\Gamma}}^{\mathbf{E}_\infty}_{-/k}\colon \mathrm{CAlg}_k \rightleftarrows \widehat{\mathrm{FCAlg}}_k\colon \mathrm{gr}^0$$

给出完备形式的 $\mathbf{E}_\infty$-无穷小上同调的泛性质 .

引理 2.2。 存在一个自然等价

$$\mathrm{Sym}^*_R(\mathrm{L}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/k}[-1]) \to \mathrm{gr}^*_{\mathrm{H}}\mathbb{\Gamma}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/k}$$

的分次 $\mathbf{E}_\infty$-R-代数。

证明。 参见 F&C.I.8.13 或 [53, 定理 5.3.6]。 □

构造 2.3 （霍奇谱序列）。 给定一个滤过谱 $\mathrm{F}^\star M$，边界映射 $\delta\colon \mathrm{gr}^i M \to \mathrm{gr}^{i+1} M[1]$ 组装成某种相干上链复形

$$\cdots \to \mathrm{gr}^{-1}M[-1] \to \mathrm{gr}^0 M \to \mathrm{gr}^1 M[1] \to \cdots.$$

例如，一个简单的练习表明 $\delta^2 \simeq 0$。事实上，正如 Ariotta 所示， [7], 完备滤过谱等价于谱中的相干上链复形。[1] 在完备过滤与相干上链复形之间的等价下，$\mathrm{F}^\star_{\mathrm{H}}\widehat{\mathbb{\Gamma}}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/k}$ 对应于如下形式的相干上链复形

$$R \to \mathrm{L}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/k} \to \mathrm{Sym}^2_R(\mathrm{L}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/k}[-1])[2] \to \mathrm{Sym}^3_R(\mathrm{L}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/k}[-1])[3] \to \cdots.$$

[1]这个等价也可以看作 Koszul 对偶的一种形式，因此出现在 [53, 第 3.2 节].

相应的霍奇谱序列具有如下形式

$$\mathrm{E}_1^{s,t} = \mathrm{H}^{s+t}(\mathrm{Sym}_R^s(\mathrm{L}_{R/k}^{\mathbf{E}_\infty}[-1])) \Rightarrow \mathrm{H}^{s+t}(\widehat{\mathbb{\Pi}}_{R/k}^{\mathbf{E}_\infty}),$$

其中，对于任意谱 M，我们令 $\mathrm{H}^i(M) = \pi_{-i}(M)$。

下面的结果很容易证明，但很重要。

定理 2.4 （庞加莱引理）。 对于任意的 $\mathbf{E}_\infty$-环映射 $k \to R$，自然映射 $k \to \mathbb{\Pi}_{R/k}^{\mathbf{E}_\infty}$ 是一个等价。

证明。 参见 F&C.I.9.6。取余极限得到一个左伴随函子 colim: $\mathrm{FCAlg}_k \to \mathrm{CAlg}_k$。它有一个由常值滤过函子给出的右伴随，该函子将 k 上的一个 $\mathbf{E}_\infty$-代数 R 映为常值$\mathbf{Z}^{\mathrm{op}}$-指标滤过

$$\cdots = R = R = R = \cdots .$$

右伴随的复合是 $\mathrm{CAlg}_k \leftarrow \mathrm{CAlg}_k$ 上以 CAlg_k 的终对象零环为值的常值函子。因此，左伴随的复合是以始对象为值的常值函子，也就是以 k 为值的常值函子。

□

定义 2.5. 令 Pairs(CAlg) 为由$\mathbf{E}_\infty$-环的映射 $k \to R$ 构成的 ∞-范畴 CAlg^{Δ^1}。这是一个具有余笛卡尔对称幺半结构的对称幺半 ∞-范畴。

命题 2.6 （基变换性质）**.** 函子

$$\mathrm{F}_{\mathrm{H}}^\star \mathbb{\Pi}_{-/-}^{\mathbf{E}_\infty} : \mathrm{Pairs}(\mathrm{CAlg}) \to \mathrm{FCAlg},$$
$$\mathrm{F}_{\mathrm{H}}^\star \widehat{\mathbb{\Pi}}_{-/-}^{\mathbf{E}_\infty} : \mathrm{Pairs}(\mathrm{CAlg}) \to \widehat{\mathrm{FCAlg}}$$

具有对称幺半结构。

证明。 参见 F&C.II.2.6。 □

Ex例 2.7. 若 $k \to R \to S$ 是$\mathbf{E}_\infty$-环的映射，则存在自然等价

$$\mathrm{F}_{\mathrm{H}}^\star \mathbb{\Pi}_{S/k}^{\mathbf{E}_\infty} \otimes_{\mathrm{F}_{\mathrm{H}}^\star \mathbb{\Pi}_{R/k}^{\mathbf{E}_\infty}} R \simeq \mathrm{F}_{\mathrm{H}}^\star \mathbb{\Pi}_{S/R}^{\mathbf{E}_\infty} \quad \text{and} \quad \mathrm{F}_{\mathrm{H}}^\star \widehat{\mathbb{\Pi}}_{S/k}^{\mathbf{E}_\infty} \widehat{\otimes}_{\mathrm{F}_{\mathrm{H}}^\star \widehat{\mathbb{\Pi}}_{R/k}^{\mathbf{E}_\infty}} R \simeq \mathrm{F}_{\mathrm{H}}^\star \widehat{\mathbb{\Pi}}_{S/R}^{\mathbf{E}_\infty}.$$

备注 2.8. 作为 fi 滤过的 $\mathrm{F}_{\mathrm{H}}^\star \mathbb{\Pi}_{R/k}^{\mathbf{E}_\infty}$-代数，$\mathrm{F}_{\mathrm{H}}^\star \mathbb{\Pi}_{S/k}^{\mathbf{E}_\infty}$ 具有由伴随所描述的泛性质

$$\mathrm{F}_{\mathrm{H}}^\star \mathbb{\Pi}_{-/k}^{\mathbf{E}_\infty} : \mathrm{CAlg}_R \rightleftarrows \mathrm{FCAlg}_{\mathrm{F}_{\mathrm{H}}^\star \mathbb{\Pi}_{R/k}^{\mathbf{E}_\infty}} : \mathrm{gr}^0,$$

完备情形下也类似。参见 F&C.II.2.1。

得益于庞加莱引理，有趣的问题如下。(a) $\mathbb{\Pi}_{R/k}^{\mathbf{E}_\infty}$ 上的 Hodge 滤子何时完备？(b) 完备化 $\widehat{\mathbb{\Pi}}_{R/k}^{\mathbf{E}_\infty}$ 是什么？当 $\widehat{\mathbb{\Pi}}_{R/k}^{\mathbf{E}_\infty}$ 值得关注时，霍奇谱序列提供了一种理解它的新方式。

为了分析完备性和完备化，我们需要一个关于典范覆盖的下降结果，该结果将发表于与 Ryomei Iwasa 和 Achim Krause 合作的后续工作中。

定义 2.9（典范覆盖）。设 $f\colon (R/A) \to (S/B)$ 是一对连通$\mathbf{E}_\infty$-环之间的映射，对应于如下交换图

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ R & \longrightarrow & S. \end{array}$$

令 $S^\bullet$ 为 $R \to S$ 的 Čech 复形。若自然映射 $R \to \mathrm{Tot}(S^\bullet)$ 是等价，并且对基变换到任意其他连通 $\mathbf{E}_\infty$-环后仍然如此，则称 f 为典范覆盖。注意，此条件仅取决于映射 $R \to S$，与这对对象间态射的其他信息无关。

注 2.10. 在拓扑斯理论的意义下，存在一些连通 $\mathbf{E}_\infty$-环的典范覆盖，不能由定义2.9意义下的单个典范覆盖生成。普通交换环的 $\mathrm{Spec}\mathbf{Z}$ 的一个非有限生成典范覆盖，见 [57, 标签 0EUE] 。在我们与 Iwasa 和 Krause 的合作中，我们还证明，Hodge 完备的 $\mathbf{E}_\infty$-无穷小上同调是位于连通 E_∞-环范畴的反范畴上的位点中，关于所有典范覆盖的一个层。

定理 2.11（下降，Antieau–Iwasa–Krause）。设 $f\colon (R/A) \to (S/B)$ 是连通$\mathbf{E}_\infty$-环的一个典范覆盖。若$(S^\bullet/B^\bullet)$表示 f 的 *Čech* 复形，则自然映射

$$\mathrm{F}^\star_{\mathrm{H}}\widehat{\mathbb{\Pi}}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/A} \to \mathrm{Tot}(\mathrm{F}^\star_{\mathrm{H}}\widehat{\mathbb{\Pi}}^{\mathbf{E}_\infty}_{S^\bullet/B^\bullet})$$

是一个等价。

推论 2.12。设$(R/A) \to (S/B)$ 是连通$\mathbf{E}_\infty$-环的一个典范覆盖，其 *Čech* 复形为$(S^\bullet/B^\bullet)$。若 M 是一个有下界的 A-模，则自然映射

$$M \otimes_A \mathrm{Sym}^i_R(\mathrm{L}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/A}[-1]) \to \mathrm{Tot}(M \otimes_A \mathrm{Sym}^i_{S^\bullet}(\mathrm{L}^{\mathbf{E}_\infty}_{S^\bullet/B^\bullet}[-1]))$$

对所有 $i \geqslant 0$ 都是等价。取 $M = A$，可得自然映射

$$\mathrm{Sym}^i_R(\mathrm{L}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/A}[-1]) \to \mathrm{Tot}(\mathrm{Sym}^i_{S^\bullet}(\mathrm{L}^{\mathbf{E}_\infty}_{S^\bullet/B^\bullet}[-1]))$$

对所有 $i \geqslant 0$ 都是等价。

证明。参见 F&C.II.6.4。 □

在 [5] 中构造 Gauss–Manin 联络的方法也适用于 $\mathbb{\Pi}^{\mathbf{E}_\infty}$。

命题 2.13 (Gauss–Manin 滤过)。 给定 $\mathbf{E}_\infty$-环的映射 $k \to R \to S$，在 $\mathrm{F}^\star_{\mathrm{H}}\widehat{\mathbb{\Pi}}^{\mathbf{E}_\infty}_{S/k}$ 上存在一个完备穷尽乘法滤过 $\mathrm{F}^\star_{\mathrm{GM}}\mathrm{F}^\star_{\mathrm{H}}\widehat{\mathbb{\Pi}}^{\mathbf{E}_\infty}_{S/k}$，其分次分量为

$$\mathrm{gr}^i_{\mathrm{GM}}\mathrm{F}^\star_{\mathrm{H}}\widehat{\mathbb{\Pi}}^{\mathbf{E}_\infty}_{S/k} \simeq \mathrm{F}^\star_{\mathrm{H}}\widehat{\mathbb{\Pi}}^{\mathbf{E}_\infty}_{S/R}\widehat{\otimes}_R\mathrm{Sym}^i_R(\mathrm{L}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/k}[-1]).$$

证明。参见 F&C.II.4.12。 □

注 2.14. 作为一个相干上链复形（位于完备滤过谱中），Gauss–Manin 滤过具有如下形式

$$\mathrm{F}^\star_{\mathrm{H}}\widehat{\mathbb{\Pi}}^{\mathbf{E}_\infty}_{S/R} \xrightarrow{\nabla} \mathrm{F}^{\star-1}_{\mathrm{H}}\widehat{\mathbb{\Pi}}^{\mathbf{E}_\infty}_{S/R}\widehat{\otimes}_R\mathrm{L}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/k} \xrightarrow{\nabla} \mathrm{F}^{\star-2}\widehat{\mathbb{\Pi}}^{\mathbf{E}_\infty}_{S/k}\widehat{\otimes}_R\mathrm{Sym}^2_R(\mathrm{L}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/k}[-1])[2] \to \cdots.$$

定义 2.15（完备性）。设 $k \to R$ 是一个 E∞-环之间的映射，其 Čech 复形为 $R^\bullet$。若 M 是一个 k-模，则令 $M^\wedge_R = \mathrm{Tot}(M \otimes_k R^\bullet)$。若自然映射 $M \to M^\wedge_R$ 是等价，则称 M 是 R-完备的。一般而言，此定义与其他完备化定义并不一致。

我们有以下三个结果。

命题 2.16。如果 $k \to R$ 是连通 E∞-环之间的一个 1-连通映射，那么 $\mathrm{F}^s\mathbb{\Pi}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/k}$ 是 s-连通的。特别地，*Hodge* 滤子是完备的。

证明。参见 F&C.II.7.1。 □

命题 2.17。设 $k \to R$ 是连通 $\mathbf{E}_\infty$-环之间的一个映射，且 $\pi_0 k \to \pi_0 S$ 是满射。那么，对于任意有下界的 k-模，$M\widehat{\otimes}_k \mathrm{F}^\star\mathbb{\Pi}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/k}$ 是 $M^\wedge_R$ 上的完备过滤。特别地，取 $M = k$，我们得到 $k^\wedge_R \simeq \widehat{\mathbb{\Pi}}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/k}$。

证明。参见 F&C.II.7.3。 □

定理 2.18 (典范不变性)。设 $k \to R \to S$ 是连通$\mathbf{E}_\infty$-环之间的映射。若$\frown \quad \frown R \to S$ 是一个典范覆盖，且 $\pi_0 R \to \pi_0 S$ 是满射，则 $\mathbb{\Pi}_{R/k} \simeq \mathbb{\Pi}_{S/k}$。

证明。参见 F&C.II.7.5。 □

例 2.19。p-完备球面 S^p 是 F_p-完备的，也就是说，Adams谱序列收敛。因此 $\mathrm{S}^\wedge_p \simeq \widehat{\mathbb{\Pi}}^{\mathbf{E}_\infty}\mathrm{F}_p/\mathrm{S}$。霍奇谱序列给出一个收敛到稳定茎的谱序列，据我们所知，此前文献中尚未出现过。得益于例 7.5，E^1页接收一个来自 Adams谱序列 E^1页的映射，并映射到 Adams谱序列的 E^2页。具体而言，例 7.5 表明，Adams谱序列的 E^1 页是 $\mathrm{F}^\star_{\mathrm{H}}\widehat{\mathbb{\Pi}}^{\mathbf{E}_1}\mathrm{F}_p/\mathrm{S}$ 的 E^1页。其移位 $\mathrm{Dec}(\mathrm{F}^\star_{\mathrm{H}}\widehat{\mathbb{\Pi}}^{\mathbf{E}_1}\mathrm{F}_p/\mathrm{S})$ 的关联 E^1页是 Adams谱序列的 E^2页（见 [3]）。然而，$\mathrm{Dec}(\mathrm{F}^\star_{\mathrm{H}}\widehat{\mathbb{\Pi}}^{\mathbf{E}_1}\mathrm{F}_p/\mathrm{S})$ 也具有自然的 E∞结构，且 $\mathrm{gr}^0 \simeq \mathrm{F}_p$，因为它可以构造为 $\mathrm{Tot}(\tau_{\geqslant\star}\mathrm{F}^\bullet_p)$，其中 $\mathrm{F}^\bullet_p$ 是 $\mathrm{S} \to \mathrm{F}_p$的 Čech 复形。因此存在映射

$$\mathrm{F}^\star_{\mathrm{H}}\widehat{\mathbb{\Pi}}^{\mathbf{E}_1}_{\mathbf{F}_p/\mathbf{S}} \to \mathrm{F}^\star_{\mathrm{H}}\widehat{\mathbb{\Pi}}^{\mathbf{E}_\infty}_{\mathbf{F}_p/\mathbf{S}} \to \mathrm{Dec}(\mathrm{F}^\star_{\mathrm{H}}\widehat{\mathbb{\Pi}}^{\mathbf{E}_1}_{\mathbf{F}_p/\mathbf{S}})$$

关于滤过的$\mathbf{E}_1$-代数。

3 Quillen谱序列

如果 $k \to R$ 是$\mathbf{E}_\infty$-环的映射，那么$\mathrm{L}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/}{}_{(R\otimes_k R)} \simeq \mathrm{L}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/k}[1]$。由此可知，$\mathbb{\Pi}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/}{}_{(R\otimes_k R)}$ 上的 Hodge 滤子具有关联分次部分，且与$\mathrm{Sym}^i_R(\mathrm{L}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/k})$ 等价。这导出了 Quillen谱序列的一个$\mathbf{E}_\infty$-版本；经典版本见 [52, 定理 6。3] 或 [57, Tag 08RC] 或 F&C.II.8。

命题 3.1。如果 $k \to R$ 是$\mathbf{E}_\infty$-环的映射，那么 $B \otimes_k B$上存在一个递减的$\mathbf{E}_\infty$-滤子，其关联分次部分为 $\mathrm{Sym}^i(\mathrm{L}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/k})$。如果 k 和 R 是连通的，且 $\pi_0 k \to \pi_0 R$ 是满射，那么该滤子是完备的。

证明。该滤过为 $\mathrm{F}^\star_{\mathrm{H}}\mathbb{\Pi}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/R\otimes_k R}$。这是一个$\mathbf{E}_\infty$-代数，属于 滤过模$_{R\otimes_k R}$，由构造可知，且 $\mathrm{F}^0_{\mathrm{H}}\mathbb{\Pi}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/R\otimes_k R}$ 根据 $R \otimes_k R$ 庞加莱引理成立。若 k 和 R 均为连通，且 $\pi_0 k \to \pi_0 R$ 为满射，则$R \otimes_k R \to R$ 的纤维是 1-连通，因此根据命题 2.16，该滤过是完备的。 □

构造 3.2 （Quillen谱序列）。 $\mathrm{F}^{\star}_{\mathrm{H}}\mathbb{\Gamma}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/R\otimes_k R}$ 的霍奇谱序列具有如下形式

$$\mathrm{E}^1_{s,t} = \pi_{s+t}(\mathrm{Sym}^{-s}_R(\mathrm{L}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/k})) \Rightarrow \pi_{s+t}(R\otimes_k R).$$

注 3.3. 我们有 $\mathrm{F}^{\star}_{\mathrm{H}}\mathbb{\Gamma}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/(R\otimes_k R)} \simeq R\otimes_{\mathrm{F}^{\star}_{\mathrm{H}}\mathbb{\Gamma}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/k}} R$ 由命题 2.6得出。

4 HKR 滤过

设 $k\to R$ 是一个 $\mathbf{E}_\infty$-环之间的映射。回忆一下，$\mathrm{THH}(R/k)\simeq R\otimes_{R\otimes_k R} R$。存在一个典范增广 $\mathrm{THH}(R/k)\to R$，并且相对于这个增广，$\mathrm{L}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/\mathrm{THH}(R/k)}\simeq \mathrm{L}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/k}[2]$。遵循 F&C.II.9，这便导出了 $\mathrm{THH}(R/k)$ 上 HKR 滤过的如下形式。

命题4.1. 若 $k\to R$ 是一个 $\mathbf{E}_\infty$-环之间的映射，则存在一个递减的 $\mathbf{E}_\infty$-滤过 $\mathrm{F}^{\star}_{\mathrm{HKR}}\mathrm{THH}(R/k)$，满足

$$\mathrm{gr}^i_{\mathrm{HKR}}\mathrm{THH}(R/k)\simeq \mathrm{Sym}^i_R(\mathrm{L}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/k}[1]).$$

若 k 和 R 是连通的，则此滤过是完备的。

证明。定义$\mathrm{F}^{\star}_{\mathrm{HKR}}\quad \mathrm{THH}(R/k)=\mathrm{F}^{\star}_{\mathrm{H}}\mathbb{\Gamma}_{R/\mathrm{THH}(R/k)}$。结果的其余部分由命题 2.16 得出。 □

格言 4.2。 $\mathrm{THH}(R/k)$ 上的 HKR 滤过就是 $\mathbb{\Gamma}_{R/\mathrm{THH}(R/k)}$ 上的 Hodge 滤子。

注 4.3。 导出命题 4.1 的构造表明，$\mathrm{THH}(R/k)$上的 HKR 滤过可以通过计算$\mathrm{THH}(R/\mathrm{F}^{\star}_{\mathrm{H}}\mathbb{\Gamma}_{R/k})$来构造，即 FCAlg 内部的THH，其中 R 相对于$\mathrm{F}^{\star}_{\mathrm{H}}\mathbb{\Gamma}_{R/k}$。也就是说，

$$\mathrm{F}^{\star}_{\mathrm{HKR}}\mathrm{THH}(R/k)\simeq R\otimes_{R\otimes_{\mathrm{F}^{\star}_{\mathrm{H}}\mathbb{\Gamma}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/k}R}R} R.$$

因此，这个滤过是 S^1-等变的，但这种构造并不能自然地产生 [50, 53] 意义下的滤过圆等变滤过，也不能产生 [6, 35]意义下的合成圆作用。

构造4.4 （HKR谱序列）。 HKR谱序列的形式为

$$\mathrm{E}^1_{s,t} = \pi_{s+t}(\mathrm{Sym}^{-s}_R(\mathrm{L}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/k}[1])) \Rightarrow \pi_{s+t}\mathrm{THH}(R/k).$$

当 k 和 R 连通时，它是收敛的。

注 4.5。 Minasian 在 [48] 中构造了一个类似的谱序列。我们将在注 8.4 中看到它们是一致的。

注 4.6 （导出$\mathbf{E}_\infty$ 比较）。 设 $k\to R$ 是连通导出交换环之间的一个映射。于是，我们可以考虑经典的 HKR 滤过 $\mathrm{HH}_{\mathrm{fil}}(R/k)$，它取决于导出结构。这里，$\mathrm{gr}^i\simeq \Lambda^i \mathrm{L}_{R/k}[i]$，其中 $\mathrm{L}^{R/k}$ 是导出交换环映射的余切复形。我们还有如上构造的 $\mathrm{F}^{\star}\mathrm{THH}(R/k)$。它仅对$\mathbf{E}_\infty$-结构敏感。存在映射 $\mathrm{F}^{\star}\mathrm{THH}(R/k)\to \mathrm{HH}_{\mathrm{fil}}(R/k)$，以及 $\mathrm{THH}(R/k)\simeq \mathrm{HH}(R/k)$。这两种滤过都是完备的，因此在 FMod_k 中计算得到的纤维 $\mathrm{F}^{\star}M$ 是零上的一个滤过。

5 高阶THH 与$\mathbf{F}_p$

THH 的高阶版本 早在 Loday 和 Pirashvili 时期就已开始受到研究 [51]。如今，我们知道它们是因子化同调或手性同调的例子；参见 [8, 46]。近年来已有许多相关计算，其中大多源自 Bökstedt 对 $\mathrm{THH}(\mathbf{Z})$ 或 $\mathrm{THH}(\mathbf{F}_p)$的计算。例如，参见 [15, 16, 22, 32, 34]。我们注意到，HKR 滤过可推广到所有这些理论。

构造 5.1 （高阶 THH 上的 HKR 滤过）。设 $k \to R$ 是一个 $\mathbf{E}_\infty$-环之间的映射。$\mathrm{THH}^{(n)}(R/k)$ 表示对增广 $R \otimes_k R \to R$应用 n 次 Bar 构造的结果。因此，$\mathrm{THH}^{(0)}(R/k) \simeq R \otimes_k R$，$\mathrm{THH}^{(1)}(R/k) \simeq \mathrm{THH}(R/k)$，依此类推。这个构造与更一般的拓扑手征同调构造有关：

$$\mathrm{THH}^{(n)}(R/k) \simeq \int_{S^n}^{k} R.$$

更多细节请参见 [8] 或 [46, 第 5] 章。这里，$\int^k$ 中的上标 k 表示我们是在 Mod_k内部进行讨论。

类似地，我们可以令 $\mathrm{F}^\star_{\mathrm{HKR}}\mathrm{THH}^{(n)}(R/k)$ 表示对 FCAlg 中的增广 $\mathbb{\Gamma}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/R\otimes_k R} \to R$ 应用 n 次 Bar 构造的结果。因此，$\mathrm{F}^\star_{\mathrm{HKR}}\mathrm{THH}^{(0)}(R/k)$ 是我们用于构造 Quillen谱序列的对象，而 $\mathrm{F}^\star_{\mathrm{HKR}}\mathrm{THH}^{(1)}(R/k)$ 则是 Hochschild 同调中通常的 HKR谱序列的 $\mathbf{E}_\infty$-类比。它还有一种因子化同调的解释：

$$\mathrm{F}^\star_{\mathrm{HKR}}\mathrm{THH}^{(n)}(R/k) \simeq \int_{S^n}^{\mathrm{F}^\star_{\mathrm{H}}\mathbb{\Gamma}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/k}} R,$$

其中我们在 $\mathrm{FMod}^{\mathrm{F}^\star_{\mathrm{H}}\mathbb{\Gamma}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/k}}$ 内部进行运算。

备注 5.2. 按照这些约定，也可以定义 $\mathrm{THH}^{(-1)}(R/k) = k$ 和 $\mathrm{F}^\star_{\mathrm{HKR}}\mathrm{THH}^{(-1)}(R/k) = \mathrm{F}^\star_{\mathrm{H}}\mathbb{\Gamma}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/k}$。

备注 5.3. 更一般地，若 $k \to R$ 是$\mathbf{E}_\infty$-环之间的映射，且 X 是一个 anima，则我们可以考虑$\mathbf{E}_\infty$-环 $X \otimes R$，即在 CAlg_k 中由 X 对 R 进行张量化或余幂化。通过改为在 $\mathrm{FCAlg}^{\mathrm{F}^\star_{\mathrm{H}}\mathbb{\Gamma}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/k}}$ 中考虑 $X \otimes R$，我们可以在 $X \otimes R$ 上得到类似 HKR 的滤过。

引理 5.4. 对每个整数 $n \geqslant -1$，都有一个自然同一

$$\mathrm{gr}^*\mathrm{THH}^{(n)}(R/k) \simeq \mathrm{Sym}^*_R(\mathrm{L}_{R/k}[n])$$

分次$\mathbf{E}_\infty$-R-代数的。

证明。 对于 $n = -1$，这正是引理 2.2的内容。一般情形可通过迭代应用 Bar 构造得出。

□

本节余下部分中，高阶THH、$\mathbf{E}_\infty$-余切复形和$\mathbf{E}_\infty$-无穷小上同调均相对于$\mathbf{S}$ 计算，以简化阐述，因此我们在记号中省略基底。

例5.5（Thom 谱）。设 A 是一个类群 E_∞-anima，且 $f\colon A \to \mathrm{Pic}(\mathbf{S})$ 是一个 E_∞-映射。令 $R = \mathrm{Th}(f)$ 表示 f 的 Thom谱，它是一个 E_∞-环。Blumberg–Cohen–Schlichtkrull 的结果 [14] 将 $\mathrm{THH}(R)$ 与 $R[\mathrm{B}A] \simeq \Sigma^\infty_+ \mathrm{B}A \otimes_{\mathbf{S}} R$ 识别为 E_∞-R-代数；另见 [13, 38]。事实上，从本质上说，这个等价性源于 [2] 中研究的 Thom同构。确实，我们有 $R \otimes_{\mathbf{S}} R \simeq R[A]$。

通过对由 R 的典范R-定向产生的增广 $R[A] \to R$ 反复应用 Bar 构造，我们得到

$$\mathrm{THH}^{(n)}(R) \simeq R[\mathrm{B}^n A]$$

对于 $n \geqslant 0$。（相关结果见 [55] 。）现在，Thom 谱的$\mathbf{E}_\infty$-余切复形也已得到理解，这归功于 Basterra–Mandell 的工作 [10] (另见 [54])，该工作证明$\mathrm{L}_R^{\mathbf{E}_\infty} \simeq R \otimes_{\mathbf{S}} \mathrm{B}^\infty A$，其中$\mathrm{B}^\infty A$ 是与 A相关联的连通谱。$\mathrm{THH}^{(n)}(R)$ 上的 HKR 滤过因此具有如下关联分次部分：

$$\mathrm{gr}^*\mathrm{THH}^{(n)}(R) \simeq \mathrm{Sym}^*_R(R \otimes_{\mathbf{S}} \mathrm{B}^\infty A[n]) \simeq R \otimes_{\mathbf{S}} \mathrm{Sym}^*(\mathrm{B}^\infty A[n]).$$

我们可以反过来，利用 $\mathrm{THH}^{(n)}(R)$ 的计算，通过稳定化确定余切复形 L_R 。

得益于 [53, 命题 3.3.4], ，存在一个对称幺半剪切自等价 $[2*]$: 分次模$_{\mathbf{Z}} \to$分次模$_{\mathbf{Z}}$。更一般地，我们有一个对称幺半函子 $[2a*]$，它由剪切 a 次得到。

引理 5.6。设 R 是一个$\mathbf{E}_\infty$-$\mathbf{Z}$-代数。剪切诱导出等价

$$[2a*]\colon \mathrm{gr}^*\mathrm{THH}^{(-1)}(R) \simeq \mathrm{gr}^*\mathrm{THH}^{(-1+a)}(R) \quad \textit{and} \quad [2a*]\colon \mathrm{gr}^*\mathrm{THH}^{(0)}(R) \simeq \mathrm{gr}^*\mathrm{THH}^{(a)}(R)$$

对每个整数 $a \geqslant 0$。

证明。 该结论由引理 5.4 和剪切得出。 □

特化到 $R = \mathrm{F}_p$ 时，引理 5.6 有一个有趣的推论。存在收敛谱序列，分别计算 $\pi_*\mathbf{S}_p$ 和 $\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{F}_p)$，它们的 E^1 页相同（相差一个剪切）。类似地，存在收敛谱序列，分别计算 $\pi_*(\mathrm{F}_p \otimes_{\mathbf{S}} \mathrm{F}_p)$（即对偶 Steenrod 代数）和 $\pi_*\mathrm{THH}^{(2)}(\mathrm{F}_p)$，它们的 E_1 页相同（相差一个剪切）。注意，$\mathrm{THH}^{(2)}(\mathrm{F}_p) \simeq \mathrm{F}_p \oplus \mathrm{F}_p[3]$。在这两种情况下，第一个渐近项都很大且很有趣，而第二个则相当小。

注 5.7。 当 $p = 2$ 时，~~1~~ 2-剪切在命题 [53, Prop. 3.3.4] 的变体下也具有对称幺半性。因此，在这种情况下，$\mathbf{E}^1$ 页的 HKR 谱序列对于 $\mathrm{THH}^{(n)}(\mathbf{F}_2)$ 对所有$n \geqslant -1$都一致（相差一个剪切）。

引理 5.6 可用于获取有关谱序列结构的一些信息。图 1 和图 2 展示了在 $p = 2$ 处，$\mathrm{F}^\star_{\mathrm{H}}\mathbb{\Pi}^{\mathbf{E}_\infty}\mathrm{F}_p$ 和 $\mathrm{F}^\star_{\mathrm{HKR}}$ $\mathrm{THH}(\mathrm{F}_p)$ 的 E^1 页。容易看出 $\pi_0\mathrm{L}^{\mathbf{E}_\infty}\mathrm{F}_p = 0$，并且 $\pi_1\mathrm{L}^{\mathbf{E}_\infty}\mathrm{F}_p \cong \mathrm{F}_p$。根据 Bökstedt计算 [17]，有 $\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{F}_p) \cong \mathrm{F}_p[b]$，其中 $|b| = 2$。由此可知，HKR谱序列中斜率为 2 的对角线上的乘法生成元都是永久的。该对角线以下的所有元素都必须在 E^∞ 页之前消失。这意味着对于$i = 2$、3、4，$\pi_i\mathrm{L}^{\mathbf{E}_\infty}\mathrm{F}_p = 0$。因此，在低次数范围内，$\pi_*\mathrm{Sym}^i_{\mathbf{F}_p}(\mathrm{L}^{\mathbf{E}_\infty}\mathrm{F}_p[-1])$ 与 $\mathrm{H}_*(\mathrm{B}\Sigma_i, \mathrm{F}_p)$ 同构。这说明了霍奇谱序列中的零项。

霍奇谱序列中的第 0 列累积到 $\pi_0\mathbf{S}_p \cong \mathbf{Z}_p$。如果 $p = 2$，第 1 列中必须只有一个 $\mathbf{F}_2$ 在 E^∞ 页存活。由于 $\mathrm{H}_1(\mathrm{B}\Sigma_2, \mathbf{F}_2) \cong \mathbf{F}_2$ 无法支撑微分，也不会被微分击中，因此它检测到霍普夫映射 $\eta \in \pi_1\mathbf{S}_2$。特别地，霍普夫映射在滤过权重 2 中被检测到。

利用 THH $^{(2)}(\mathbf{F}_p)$ 是 $\mathbf{F}_p \oplus \mathbf{F}_p[3]$，还可以进一步找到 $\pi_i\mathrm{L}^{\mathbf{E}_\infty}_{\mathbf{F}_2} \cong \mathbf{F}_2$ 对于 $i = 5, 6, 7$。

事实上，借助 Lazarev 的工作，余切复形 $\mathrm{L}^{\mathbf{E}_\infty}{}_{\mathbf{F}_p}$ 可用斯廷罗德运算来描述；参见 [43,定理 6.5]，其中 Lazarev 引用了 Kriz 尚未发表的工作。此外，对称群的同调完全可以用戴尔–拉什夫运算来理解；例如参见 [1, 第 VI 章]。由此可知，$\mathbf{F}_p$ 的 Hodge 谱序列和 HKR 谱序列的完整 E^1 页都可以写出。它们相当庞大。

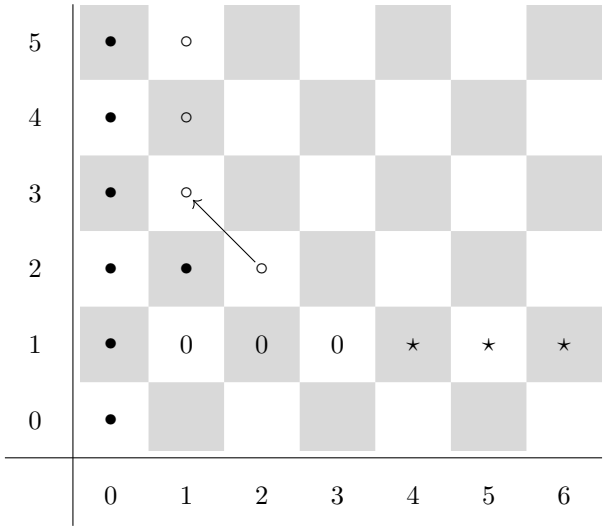

图 1：Adams 分次下与 $\mathrm{F}_{\mathrm{H}}^{\star}\widehat{\mathbb{I}}^{\mathbf{E}_\infty \mathbf{F}_2/\mathbf{S}}$ 相关的谱序列的$\mathbf{E}^1$页。标记为 0 的项已知为零。圆点 • 是$\mathbf{F}_2$ 的副本，它们延续到 E^∞页。圆圈 ∘ 是$\mathbf{F}_2$ 的副本，它们不会延续到 E^∞页。星号 ⋆ 是$\mathbf{F}_2$ 的副本，它们可能支持也可能不支持微分。位于 1 线上或其上方、没有装饰的方框表示未指定的$\mathbf{F}_2$向量空间。

注 5.8。 Pirashvili 给出了交换$\mathrm{HH}^{(n)}(R/\mathbf{Q})$ 代数情形下高阶 **Q**-代数的分解，并指出其同伦群（相差一个平移）仅取决于 n的奇偶性。这是由特征 0 下 HKR 滤过的分解（参见 [45]）得出的，随后对增广 $\mathrm{HH}(R/\mathbf{Q}) \to R$反复应用 Bar 构造即可。在混合特征下，借助引理 5.6，我们得到非分裂过滤，其关联分次部分具有相同的对应关系。Richter–Ziegenhagen 在 [56] 中研究了相关工作，情形为 $\mathbf{E}_n$-代数。我们预计这与第 7节的内容有关。

本节余下部分将指出，当 R 是交换环时，我们可以使用在$\mathrm{THH}(R;\mathbf{Z}_p)$ 中的 [12]动机滤过的更高阶 THH 变体来代替上文构造的 $\mathbf{E}_\infty$ $\mathrm{THH}^{(n)}(R)$ 上的滤过。我们预期，Devalapurkar–Hahn–Raksit–Senger 正在发展的合成 $\mathbf{E}_\infty$环理论和合成 THH 理论最终将为$\mathbf{E}_\infty$ 滤过与动机滤过之间搭建一座直接桥梁。

构造 5.9（高阶 THH 上的动机滤过）。构造 5.1 适用于所有 E_∞-环映射。我们也可以改为仅考虑 $\mathrm{THH}(R) = \mathrm{THH}(R/\mathbf{S})$，其中 R 是交换环，并将这些思路应用于 Bhatt–Morrow–Scholze 在 p-adic 情形下于 [12] 中构造的动机滤过，以及在一般情形下于 [11, 31, 49] 中构造的动机滤过。将此滤过记为 $\mathrm{F}^{\star}_{\mathrm{mot}}\mathrm{THH}^{(1)}(R) = \mathrm{F}^{\star}_{\mathrm{mot}}\mathrm{THH}(R)$。将 Bar 构造 $(n-1)$ 与增广 $\mathrm{F}^{\star}_{\mathrm{mot}}\mathrm{THH}^{(1)}(R) \to \mathrm{gr}^0_{\mathrm{mot}}\mathrm{THH}^{(1)}(R) \simeq R$ 作张量积，我们得到一个滤过 $\mathrm{F}^{\star}_{\mathrm{mot}}\mathrm{THH}^{(n)}(R)$。

警告 5.10。在 p-完备的情形下，由于 $\mathrm{gr}^i_{\mathrm{mot}}\mathrm{THH}(R;\mathrm{Z}_p) \simeq \mathrm{gr}^i_{\mathrm{N}}\mathbb{\Delta}_R$，很容易猜想，我们可以像构造 5.1 那样，通过在由滤过的 p-完备 $\mathrm{N}^{\geqslant\star}\mathbb{\Delta}_R$-模构成的$\infty$-范畴内部取映射 $\mathrm{N}^{\geqslant\star}\mathbb{\Delta}_R \to \mathrm{gr}^0_{\mathrm{N}}\mathbb{\Delta}_R \simeq R$ 的因子化同调，来计算 $\mathrm{F}^{\star}_{\mathrm{mot}}\mathrm{THH}^{(n)}(R;\mathrm{Z}_p)$。然而，如果真是如此，那么 $\mathrm{THH}^{(n)}(R)$ 尤其应当具有连通导出交换环的结构。$R = \mathrm{F}_p$ 和 $n = 1$的情形表明事实并非如此。根据 Bökstedt [17]，我们有

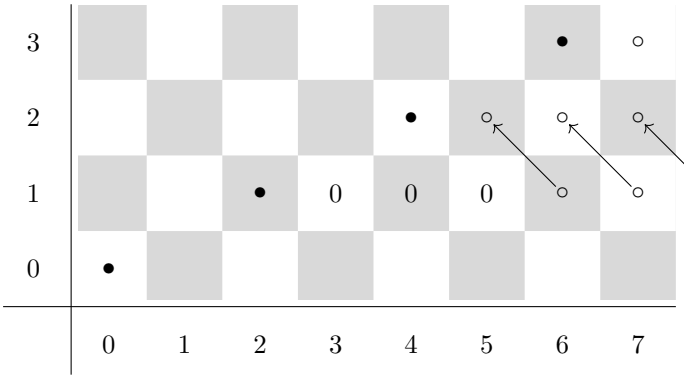

图 2：与 $\mathrm{F}^\star_{\mathrm{HKR}}\mathrm{THH}(\mathbf{F}_2)$ 相关的谱序列的 $\mathbf{E}^1$ 页，采用 Adams 分次。

$\pi_*\mathrm{THH}(\mathbf{F}_p) \cong \mathbf{F}_p[b]$，这是一个以 2 次生成元为变量的多项式环。然而，连通导出交换环中的 2 次同伦类具有除幂，因此这是不可能的。

例 5.11。 我们有 $\mathrm{F}^\star_{\mathrm{mot}}\mathrm{THH}^{(1)}(\mathbf{F}_p) \simeq \tau_{\geqslant 2\star}\mathrm{THH}^{(1)}(\mathbf{F}_p)$。因此，$\mathrm{F}^\star_{\mathrm{mot}}\mathrm{THH}^{(2)}(\mathbf{F}_p)$由 $\mathrm{THH}^{(2)}(\mathbf{F}_p)$ 上的二步乘法滤过给出，其 $\mathrm{gr}^1 \simeq \mathbf{F}_p[3]$ 和 $\mathrm{gr}^0 \simeq \mathbf{F}_p$。于是，我们有 $\pi_*\mathrm{THH}^{(3)}(\mathbf{F}_p)$ 是一个由一个 4 次类 $\sigma^2 b$ 生成的自由除幂代数，并且 $\mathrm{F}^\star_{\mathrm{mot}}\mathrm{THH}^{(3)}(\mathbf{F}_p) \simeq \tau_{\geqslant 4\star}\mathrm{THH}^{(3)}(\mathbf{F}_p)$。

注 5.12。 上的动机滤过 $\mathrm{THH}^{(1)}(\mathbf{F}_p)$ 与 [31]的偶滤过一致。对于所有准合成环都是如此。根据其构造，偶滤过的gr^i 是 $2i$-余连通的。因此，示例 $\mathrm{THH}^{(2)}(\mathbf{F}_p)$ 5.11 中考察的动机滤过并非偶滤过。

注 5.13. 与 [12, 第 11]，节中一样，我们可以让动机滤过适用于以其他某些 $\mathbf{E}_\infty$-环为底的高阶 THH。例如，考虑 $\mathrm{S}[z] \to \mathrm{Z}_p$，其中 $z \mapsto p$。那么，$\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{Z}_p/\mathrm{S}[z]; \mathrm{Z}_p) \cong \mathrm{Z}_p[b]$，其中 $|b| = 2$。这里的动机滤过是双倍速度的波斯特尼科夫滤过，我们可以对其应用 Bar 构造，从而在 $\mathrm{THH}^{(n)}(\mathrm{Z}_p/\mathrm{S}[z]; \mathrm{Z}_p)$ 上得到动机滤过，即 $\mathrm{THH}^{(n)}(\mathrm{Z}_p/\mathrm{S}[z])$ 的 p-完备化。这一技巧还可以与 Krause–Nikolaus 的下降方法 [39] 结合，从而得到 p-adic 域 K中整数环 $\mathcal{O}_K$ 的 $\mathrm{THH}^{(n)}(\mathcal{O}_K; \mathrm{Z}_p)$ 的新计算。例如，Krause 和 Nikolaus 将 $\mathrm{THH}^{(1)}(\mathrm{Z}_p/\mathrm{S}[z]; \mathrm{Z}_p)$ 计算为微分分次代数 $\mathrm{Z}_p[b] \otimes_{\mathbf{Z}_p} \Lambda_{\mathbf{Z}_p}(y)$ 的同调，其中 $|b| = 2$、$|y| = 1$，且 $\mathrm{d}(b) = y$。因此，$\mathrm{d}(b^n) = nb^{n-1}y$，这表明对于 $n \geqslant 1$，$\pi_{2n-1}\mathrm{THH}^{(1)}(\mathrm{Z}_p/\mathrm{S}[z]; \mathrm{Z}_p) \cong \mathrm{Z}_p/n$，其余正次数群均消失。对这个微分分次代数取 Bar 构造，我们得到 $\Lambda_{\mathbf{Z}_p}(\sigma b) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \Gamma_{\mathbf{Z}_p}(\sigma y)$，其中 $\mathrm{d}(\sigma b) = \sigma y$，它计算了 $\pi_*\mathrm{THH}^{(2)}(\mathrm{Z}_p; \mathrm{Z}_p)$。现在，$\mathrm{d}(\sigma b(\sigma y)^{[n]}) = (\sigma y)(\sigma y)^{[n]} = (n+1)(\sigma y)^{[n+1]}$。由此，我们重新得到 [23] 的计算结果：$\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{Z}_p; \mathrm{Z}_p)$ 是 $\Gamma_{\mathbf{Z}_p}(z)/(z)$，即由一个 2 次元素生成、模掉该元素所生成理想的自由除幂代数。

6 德拉姆上同调的 $\mathbf{AnE}_\infty$ 版本

对于导出交换环，德拉姆上同调的存在与剪切这一概念密切相关。在$\mathbf{S}$上，剪切并非对称幺半的。不过，它可以用来赋予 $\mathrm{GrMod}_{\mathbf{S}}$ 一种奇异的对称幺半结构。设 k 为一个$\mathbf{E}_\infty$-环。设

$$[-2*]\colon \mathrm{GrMod}_k \to \mathrm{GrMod}_k$$

是剪切（向下）等价。利用它，我们可以将 $\mathrm{GrMod}_k^{\otimes_{\mathrm{D}}}$上的通常对称幺半结构迁移到 GrMod_k 上的新对称幺半结构 $\mathrm{GrMod}_k^{\otimes_{\mathrm{S}}}\mathrm{GrMod}_k$。该结构

由以下要求唯一确定：剪切可提升为一个对称幺半等价

$$[-2*]\colon \mathrm{GrMod}^{\otimes_{\mathrm{D}}} \to \mathrm{GrMod}^{\otimes_{\mathrm{S}}}.$$

注意到 $[-2*]$ 实际上是 $\mathbf{E}_2$-单的，因此 $\mathrm{GrMod}^{\otimes_{\mathrm{S}}}$ 的底层 $\mathbf{E}_2$-单结构等价于 $\mathrm{GrMod}^{\otimes_{\mathrm{D}}}$ 的底层 $\mathbf{E}_2$-单结构。

现在，考虑 $\mathbf{T}^{\vee}_{\mathrm{gr}} \simeq k(0) \oplus k(-1)[-1]$，即作为 $\mathrm{GrMod}_k^{\otimes_{\mathrm{D}}}$ 中的$\mathbf{E}_\infty$-环，由 $k(-1)[-1]$ 对 $k(0)$ 作出的平凡平方零扩张。与任何平凡平方零扩张一样，$\mathbf{T}^{\vee}_{\mathrm{gr}}$ 具有双交换双代数结构，也就是说，它自然是 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{GrMod}_k^{\otimes_{\mathrm{D}}})$ 中的余交换余代数。（无论滤过圆是否存在，这个分次圆都存在。）我们可以向下剪切，从而得到 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{GrMod}_k^{\otimes_{\mathrm{S}}})$ 中的 $\mathbf{D}^{\vee}_{-} = \mathbf{T}^{\vee}_{\mathrm{gr}}[-2*]$。

定义 6.1. 令 $\widehat{\mathrm{FMod}}_k^{\otimes_{\mathrm{S}}} = \mathrm{cMod}_{\mathbf{D}^{\vee}_{-}}(\mathrm{GrMod}_k^{\otimes_{\mathrm{S}}})$。$\widehat{\mathrm{FMod}}_k^{\otimes_{\mathrm{S}}}$ 的底层 ∞-范畴是 $\widehat{\mathrm{FMod}}_k$。其对称幺半结构是通常的完备滤过$k$-模上的对称幺半结构的一种扭曲，二者在 $\mathbf{E}_2$意义下相符。

引理 6.2. *FMod*上存在一个对称幺半结构 $\mathrm{FMod}_k^{\otimes_{\mathrm{S}}}$，它由以下条件确定：完备化函子 $\mathrm{FMod}_k^{\otimes_{\mathrm{S}}} \to \widehat{\mathrm{FMod}}_k^{\otimes_{\mathrm{S}}}$ 是对称幺半的，而包含函子$\mathrm{FMod}_k^{\otimes_{\mathrm{S}}} \leftarrow \widehat{\mathrm{FMod}}_k^{\otimes_{\mathrm{S}}}$ 在FMod_k 的紧对象（它们都是完备的）上是对称幺半的。

证明。 紧对象 $\mathrm{FMod}_k^{\omega} \subseteq \mathrm{FMod}_k$ 都是完备的，并且在 $\mathrm{FMod}_k^{\wedge}$中对 $\otimes_{\mathrm{S}}$ 封闭。因此，我们在 $\mathrm{Ind}(\mathrm{FMod}_k^{\omega}) \simeq \mathrm{FMod}_k$上得到一个对称幺半结构。其具有所需性质，留给读者验证。 □

以下定义由 Arpon Raksit 提议给我们。

定义 6.3 ($\mathbf{E}_\infty$-德拉姆上同调). 我们令

$$\mathrm{F}^{\star}\mathrm{dR}^{\mathbf{E}_\infty}_{-/k}\colon \mathrm{CAlg}_k \to \mathrm{CAlg}(\mathrm{FMod}_k^{\otimes_{\mathrm{S}}})$$

为 gr^0 函子的左伴随。这是$\mathbf{E}_\infty$-k-代数的霍奇滤过德拉姆上同调。类似地，令 $\mathrm{F}^{\star}\widehat{\mathrm{dR}}^{\mathbf{E}_\infty}_{-/k}\colon \mathrm{CAlg}_k \to \mathrm{CAlg}(\widehat{\text{滤过模}}_k^{\otimes_{\mathrm{S}}})$ 为 gr^0 函子的左伴随。它定义了 $\mathbf{E}_\infty$-环的霍奇完备的霍奇滤过德拉姆上同调。

注记 6.4. 当 k 上存在一个滤过圆，即在 $k[S^1]$ 上有一个两步滤过，其分次分量为 k 权 0 下的 k 权 1 下的，并且此外它是 $\mathbf{E}_\infty$-代数对象（属于 k上的余代数范畴），那么可以像 [53], 那样构造 HKR 滤过：取关联分次部分，并向下剪切以恢复$\mathbf{E}_\infty$-德拉姆上同调。

注记 6.5. 对于一个$\mathbf{E}_\infty$-R-代数 R，我们有 $\mathrm{gr}^*_{\mathrm{H}}\mathrm{dR}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/k} \simeq \mathrm{Sym}^*_R(\mathbb{L}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/k}[1])[-2*]$。对于 Hodge 完备的$\mathbf{E}_\infty$-无穷小上同调，其下降结果同样适用于 Hodge 完备的$\mathbf{E}_\infty$-德拉姆上同调。若 k 和 R 是连通的，则我们可以沿着 $k \to \pi_0 k$ 进行下降，从而进入剪切是对称幺半的情形，因此$\mathbf{E}_\infty$-无穷小理论与$\mathbf{E}_\infty$-德拉姆理论一致。我们可以利用这一下降策略来确立$\mathbf{E}_\infty$-德拉姆上同调的性质。不过目前我们还没有这些结果的具体应用。

7 $\mathbf{E}_n$-无穷小上同调与HKR

存在一种自然的 $\mathbf{E}_\infty$-无穷小上同调变体。

定义 7.1。 固定一个 $\mathbf{E}_\infty$-环 k 和一个整数 $n \geqslant 0$。令 $\mathrm{FAlg}_k^{\mathbf{E}_n}$为滤过 $\mathbf{E}_n$-代数上的 ∞-范畴，即 FMod_k 中的 $\mathbf{E}_n$-代数的 ∞-范畴。它具有一个保极限和余极限的函子 $\mathrm{Alg}_k^{\mathbf{E}_n} \leftarrow \mathrm{FAlg}_k^{\mathbf{E}_n}\colon \mathrm{gr}^0$。左伴随

$$\mathrm{F}_{\mathrm{H}}^\star \mathbb{\Gamma}_{-/k}^{\mathbf{E}_n} \colon \mathrm{Alg}_k^{\mathbf{E}_n} \to \mathrm{FAlg}_k^{\mathbf{E}_n}$$

称为 $\mathbf{E}_n$无穷小上同调函子。令 $\mathrm{F}_{\mathrm{H}}^\star \widehat{\mathbb{\Gamma}}_{-/k}^{\mathbf{E}_n}$ 为其完备化。

一个 $\mathbf{E}_n$-代数 R 具有一个 $\mathbf{E}_n$-幺半 ∞范畴 $\mathrm{Mod}_R^{\mathbf{E}_n}$，其对象为 $\mathbf{E}_n$-模。例如，当 $n = 1$ 时，这是由 (R, R)-双模构成的 ∞-范畴。当 $n = \infty$ 时，$\mathrm{Mod}_R^{\mathbf{E}_\infty} \simeq \mathrm{LMod}_R$。我们还有 $\mathrm{GrMod}_R^{\mathbf{E}_n}$，这是关于 R的分次$\mathbf{E}_n$-模构成的 $\mathbf{E}_n$-幺半范畴。

引理 7.2。 给定 $R \in \mathrm{Alg}_k^{\mathbf{E}_n}$，$\mathrm{gr}_{\mathrm{H}}^* \mathbb{\Gamma}_{R/k}^{\mathbf{E}_n}$ 与在$\mathrm{GrMod}_R^{\mathbf{E}_n}$ 中由$\mathrm{L}_{R/k}^{\mathbf{E}_n}[-1](1)$生成的自由 $\mathbf{E}_n$-代数之间存在自然等价。

证明。证明与 E_∞-情形相同，只需注意以下几点。首先，$\mathrm{Alg}^{\mathbf{E}_n}(\mathrm{GrMod}_R^{\mathbf{E}_n}) \simeq (\mathrm{Alg}^{\mathbf{E}_n}\mathrm{GrMod}_k)^{R(0)/}$。限制到分次分量 0 和 1，我们发现 $\mathrm{F}^{[0,1]}\ \mathrm{H}^{\mathbb{\Gamma}_{R/k}^{\mathbf{E}_n}}$ 是 R 的泛 E_n-平方零扩张，因此 $\mathrm{gr}_{\mathrm{H}}^1 \mathbb{\Gamma}_{R/k}^{\mathbf{E}_n} \simeq \mathrm{L}_{R/k}^{\mathbf{E}_n}[-1]$。这给出了从在 $\mathrm{GrMod}^{\mathbf{E}_n}$ 中由 $\mathrm{L}_{R/k}^{\mathbf{E}_n}[-1](1)$生成的自由 E_n-代数到 $\mathrm{gr}_{\mathrm{H}}^* \mathbb{\Gamma}_{R/k}^{\mathbf{E}_n}$的自然映射。要证明它是等价，只需在自由 E_n-代数上证明即可。令 $R = \mathrm{Fr}_k^{\mathbf{E}_n}(X)$ 表示由一个 k-模 X生成的自由 E_n-代数。那么，$\mathrm{gr}_{\mathrm{H}}^* \mathbb{\Gamma}_{R/k}^{\mathbf{E}_n}$ 等价于由 $X(0) \oplus X[-1](1)$ 生成的自由分次 E_n-代数。这反过来又是 $R(0)$下的自由分次 E_n-代数，其中生成元为 R 上的自由 E_n-模 $X[-1](1)$。这个由 R 上的 $X[-1](1)$ 生成的自由 E_n-模正是 $\mathrm{L}_{R/k}^{\mathbf{E}_n}[-1](1)$（见 [24, 引理 2.12]）。因此，两边具有相同的形式，且所诱导的映射在权 0 和 1 上是等价。由于这些代数是自由的，它是一个等价。

□

注记 7.3（$\mathbf{E}_n$-余切复形）。 给定一个$\mathbf{E}_n$-代数 R，根据 [24, 定理 2.26] 或 [46, 定理 7.3.5.1],，存在一个典范纤维列

$$\int_{S^{n-1}} R \to R \to \mathrm{L}_{R/k}^{\mathbf{E}_n}[n]$$

在 $\mathrm{Mod}_R^{\mathbf{E}_n}$ 中。

例 7.4。 由于 $\mathbf{F}_p$ 是$\mathbf{E}_\infty$，我们可以将 $\int_{S^2} \mathbf{F}_p$ 计算为 $\mathbf{F}_p \otimes_{\mathrm{THH}(\mathbf{F}_p)} \mathbf{F}_p$。根据 Bökstedt计算 [17], , 我们有 $\pi_* \mathrm{THH}(\mathbf{F}_p) \cong \mathbf{F}_p[b]$，它是由一个 2 次生成元生成的多项式环。因此，$\int_{S^2} \mathbf{F}_p \simeq \mathbf{F}_p \oplus \mathbf{F}_p[3]$。由此可得 $\mathrm{L}^{\mathbf{E}_3}_{\mathbf{F}_p} \simeq \mathbf{F}_p[1]$。

例 7.5 ($n = 1$)。 假设 k 是一个$\mathbf{E}_\infty$-环，而 R 是一个$\mathbf{E}_1$-k-代数，即 LMod_k 中的一个$\mathbf{E}_1$-代数。存在一个余挠构造 $R^\bullet$，它是一个形如以下形式的余单纯左 k-模

$$R \rightrightarrows R \otimes_k R \ \substack{\rightarrow\\ \rightarrow\\ \rightarrow}\ R \otimes_k R \otimes_k R \cdots .$$

若令 $I = \mathrm{fib}(k \to R)$ 为与 R 相关的理想，则根据 [47, 命题 2.14]，存在自然的纤维序列$I^{\otimes(n+1)} \to k \to \mathrm{Tot}^n(R^\bullet)$。由此可知，根据 [29, 命题 1.5] 中介绍的（余单纯、增广的）Dold–Kan 对应的幺半群版本，所诱导的塔

$$\cdots \to I^{\otimes 3} \to I^{\otimes 2} \to I \to k$$

等价于 $\mathrm{F}_{\mathrm{H}}^\star \mathbb{\Gamma}_{R/k}^{\mathbf{E}_1}$。 [42] 中也提到了这个例子。

注 7.6。 Burklund [20] 构造了 $\mathbf{E}_n$-代数结构于 $\mathbf{S}/p^r$ 上， r取适当的 $n=1$。由例 7.5 可知，$\mathbf{S}/p^r$ 具有 $\mathbf{E}_1$-代数结构，当且仅当 p^r-adic 滤过 $\mathbf{S}$ 具有 $\mathbf{E}_1$-结构。

以下例子的细节承蒙 Tyler Lawson 提供。

例 7.7（与 Hill–Lawson 的比较）。由前一个例子可知，F_p 的 E_3-余切复形是 $\mathrm{F}_p[1]$，视为 F_p 上的 E_3-模。然而，这个 E_3-模是中心的，即它属于 E_3-幺半遗忘函子 $\mathrm{Mod}^{\mathbf{E}_3}\mathrm{F}_p \leftarrow \mathrm{LMod}^{\mathbf{F}_p}$ 的像（该函子在 [46, Rem. 5.1.3.3] 中隐式构造）。这个遗忘函子也保余极限。因此，$\mathrm{gr}^*_{\mathrm{H}}\mathbb{\Pi}^{\mathbf{E}_3}\mathrm{F}_p$ 等价于自由分次 E_3-代数 $\mathrm{Fr}^{\mathbf{E}_3}\mathrm{F}_p(\mathrm{F}_p)$，它是在对称幺半 ∞-范畴 $\mathrm{GrLMod}^{\mathbf{F}_p}$ 中、由 $\mathrm{F}_p(1)$ 生成的、带有来自 F_p 的映射的代数。

在 [37], Hill 和 Lawson 构造了球谱上的一个 $\mathbf{E}_2$-滤过，其关联分次对象也等价于自由分次 $\mathbf{E}_3$-代数 $\mathrm{Fr}^{\mathbf{E}_3}{}_{\mathbf{F}_p}(\mathbf{F}_p(1))$。他们利用了这样一个事实：作为一个 $\mathbf{E}_2$-环，$\mathbf{F}_p$ 是一个推出

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fr}^{\mathbf{E}_2}(x) & \xrightarrow{x\mapsto p} & \mathbf{S} \\ {\scriptstyle x\mapsto 0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \succ \mathbf{F}_p} \\ \mathbf{S} & \longrightarrow & \end{array}$$

由 Hopkins–Mahowald 给出，其中 x 表示一个 0 次生成元。Hill 和 Lawson 证明，这意味着 $\mathbf{F}_p$ 也可实现为自由 $\mathbf{E}_3$-代数在 x 上的 Bar 构造 $\mathbf{S}^{\otimes_{\mathrm{Fr}^{\mathbf{E}_3}(x)}}\mathbf{S}$。他们通过令

$$\mathrm{F}^\star_{\mathrm{HL}}\mathbf{S} = \mathrm{Fr}^{\mathbf{E}_3}(x_1)\otimes_{\mathrm{Fr}^{\mathbf{E}_3}(x_0)}\mathbf{S},$$

其中 x_0 在左侧映射到 τx_1，在右侧映射到 p。先验地，这个张量积是一个 $\mathbf{E}_2$-环。尽管如此，由于 $p\in\mathbf{S}$ 可提升到 $p\in\mathrm{F}^1_{\mathrm{H}}\mathbb{\Pi}^{\mathbf{E}_\infty}{}_{\mathbf{F}_p}$，存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fr}^{\mathbf{E}_3}(x_0) & \longrightarrow & \mathrm{ins}^0\mathbf{S} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Fr}^{\mathbf{E}_3}(x_1) & \longrightarrow & \mathrm{F}^\star_{\mathrm{H}}\mathbb{\Pi}^{\mathbf{E}_3}_{\mathbf{F}_p} \end{array}$$

在滤过的 $\mathbf{E}_3$-代数范畴中。这诱导出一个 $\mathbf{E}_2$-幺半映射 $\mathrm{F}^\star_{\mathrm{HL}}\mathbf{S}\to\mathrm{F}^\star_{\mathrm{H}}\mathbb{\Pi}^{\mathbf{E}_3}{}_{\mathbf{F}_p}$，例如可由 [36, 引理 2.3] 得出。我们断言此映射是等价。施加 F^0 后它是等价，并且两侧的关联分次环等价，因此只需证明诱导映射在 gr^1 上是等价，甚至只需证明它非零。不过，p 出于次数原因在 $\mathrm{gr}^1_{\mathrm{HL}}\mathbf{S}$ 和 $\mathrm{gr}^1\mathbb{\Pi}^{\mathbf{E}_3}{}_{\mathbf{F}_p}$ 中都可检测到，由此完成证明。

注 7.8。 我们不知道$\mathbf{S}_p\simeq\widehat{\mathbb{\Pi}}^{\mathbf{E}_3}{}_{\mathbf{F}_p}$，尽管$\mathbf{S}_p$ 是 $\widehat{\mathbb{\Pi}}^{\mathbf{E}_3}{}_{\mathbf{F}_p}$ 的直 retract，这归功于自然映射$\widehat{\mathbb{\Pi}}^{\mathbf{E}_3}{}_{\mathbf{F}_p}\to\widehat{\mathbb{\Pi}}^{\mathbf{E}_\infty}{}_{\mathbf{F}_p}\simeq\mathbf{S}_p$。要详细研究这个问题，需要一些关于$\mathbf{E}_n$-余切复形下降的结果，而这超出了本文的范围。

现在我们讨论$\mathbf{E}_n$-环的 THH 的一种 HKR 滤过。

定义7.9 （相对于无穷小上同调的THH）。 如果 k 是一个$\mathbf{E}_\infty$-环，且 $R\in\mathrm{Alg}_{\mathbf{E}_n}(\mathrm{LMod}_k)$，那么$\mathrm{F}^\star_{\mathrm{H}}\mathbb{\Pi}^{\mathbf{E}_n}_{R/k}\to R$ 可视为FMod_k中的$\mathbf{E}_n$-代数映射。因此，我们可以将 R 视为$\mathbf{E}_n$-幺半范畴$\mathrm{FMod}^{\mathbf{E}_n}{}_{\mathrm{F}^\star_{\mathrm{H}}\mathbb{\Pi}^{\mathbf{E}_n}_{R/k}}$中的一个$\mathbf{E}_n$-代数。如果 $n\geqslant 2$，那么我们记$\mathrm{F}^\star_{\mathrm{HKR}}\mathrm{THH}^{\mathbf{E}_n}(R/k) = \mathrm{THH}(R/\mathrm{F}^\star_{\mathrm{H}}\mathbb{\Pi}^{\mathbf{E}_n}_{R/k})$,

在 $\mathbf{E}_n$-幺半范畴 滤过模$^{\mathbf{E}_n}$ $\mathrm{F}_{\mathrm{H}}^{\star}\mathbb{\Gamma}^{\mathbf{E}_n}_{R/k}$中计算。所得对象 $\mathrm{F}^{\star}_{\mathrm{HKR}}\mathrm{THH}^{\mathbf{E}_n}(R/k)$ 是一个 $\mathbf{E}_{n-2}$-代数，位于 滤过模$_k$中。THH 在 $\mathbf{E}_2$-幺半范畴语境中的意义见 [39,注315]。

例 7.10. 我们有 $\mathrm{F}^{\star}_{\mathrm{HKR}}\mathrm{THH}^{\mathbf{E}_3}(\mathrm{F}_p) \simeq \tau_{\geqslant 2\star}\mathrm{THH}(\mathrm{F}_p)$，它们作为 E_1-环等价。事实上，$\mathrm{F}^{\star}_{\mathrm{HKR}}\mathrm{THH}^{\mathbf{E}_3}(\mathrm{F}_p)$ 是通过对增广 $\mathrm{F}^{\star}_{\mathrm{H}}\mathbb{\Gamma}^{\mathbf{E}_3}\mathrm{F}_p \to \mathrm{F}_p$ 连续应用两次 Bar 构造得到的。因此，在关联分次部分上，结果是 F_p 之下的自由分次 E_1-代数，位于 $\mathrm{L}^{\mathbf{E}_3}\mathrm{F}_p[1](1) \simeq \mathrm{F}_p[2](1)$ 上。如例 7.7 所示，由于 $\mathrm{F}_p[2]$ 是中心的，这实际上等价于 $\mathrm{LMod}_{\mathrm{F}_p}$ 中位于 $\mathrm{F}_p[2](1)$ 上的自由分次 E_1-代数。我们可以沿着 E_1-映射 $\mathrm{THH}^{\mathbf{E}_3}\mathrm{fil}\,(\mathrm{F}_p) \to \mathrm{F}_p$ 再做一次 Bar 构造，从而在 $\mathrm{THH}^{(2)}(\mathrm{F}_p)$ 上得到一个 E_0-滤过 $\mathrm{F}^{\star}_{\mathrm{HKR}}\mathrm{THH}^{(2),\mathbf{E}_3}(\mathrm{F}_p)$。在关联分次部分上，它恰好是 $\mathrm{LMod}^{\mathbf{F}_p}$ 中位于 $\mathrm{L}^{\mathbf{E}_3}\mathrm{F}_p[2](1) \simeq \mathrm{F}_p[3](1)$ 上的自由分次 E_0-代数。

注 7.11. 这些构造应当可以用$\mathbf{E}_n$-幺半范畴 滤过模$^{\mathbf{E}_n}$ $\mathrm{F}_{\mathrm{H}}^{\star}\mathbb{\Gamma}^{\mathbf{E}_n}_{R/k}$ 内部的因子化来诠释，如构造 5.1所示。**它应当与 $\mathbf{E}_n$-同调理论有关，这些理论由 Fresse [26] 和 Livernet–Richter [44]研究过。目前文献中尚无此类理论，我们也不再进一步探讨。**

8 与Goodwillie 微积分的联系

我们感谢 John Francis 提出的评论，正是这一评论促成了本节。增广的 $\mathcal{O}$-代数上的滤过、Koszul 对偶和 Goodwillie 微积分有着悠久且彼此交织的历史。例如，参见 [9, 21, 25, 28, 33, 40, 41, 56]。我们将遵循 [19]中的综述。

为简便起见，我们在$\mathbf{E}_\infty$-环的背景下开展讨论，但许多结果在更一般的情形下也成立。令 k为固定的 $\mathbf{E}_\infty$-环，并考虑 $\mathrm{CAlg}_k^{\mathrm{aug}}$，即增广的 ∞-代数范畴。Brantner 和 Mathew 在 [19] 中解释了如何利用伴随 $\mathrm{cot}\colon \mathrm{CAlg}_k^{\mathrm{aug}} \rightleftarrows \mathrm{Mod}_k : \mathrm{sqz}$ 所关联的余单子，发展一种能够控制变形理论的李代数理论。这里，$\mathrm{cot}(R)$ 是余切纤维 $k \otimes_R \mathrm{L}^{R/k}$，而 sqz 是平方零扩张函子。

为此并控制有限性性质，他们引入了一种过滤类比。令 $\mathrm{F}^{\geqslant 1}\mathrm{Mod}_k = \mathrm{Fun}(\mathbf{Z}_{\geqslant 1}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Mod}_k)$ 为 $\mathbf{Z}_{\geqslant 1}$-指标递减滤过构成的 ∞-范畴。这是一个非幺对称幺半范畴。可以将其视为 $\mathrm{F}^{+}\mathrm{Mod}_k$ 的全非幺对称幺半子范畴，其中对象是满足 $\mathrm{gr}^0 M \simeq 0$ 的滤过 $\mathrm{F}^{\star}M$。令 $\mathrm{CAlg}^{\mathrm{nu}}(\mathrm{F}^{\geqslant 1}\mathrm{Mod}_k)$ 表示 $\mathrm{F}^{\geqslant 1}\mathrm{Mod}_k$ 中非幺 $\mathbf{E}_\infty$-环构成的 ∞-范畴。等价地，它是 $\mathrm{F}^{+}\mathrm{Mod}_k$ 中满足$k \simeq \mathrm{gr}^0 R$ 的增广 $\mathbf{E}_\infty$-代数 $\mathrm{F}^{\star}R$ 构成的 ∞-范畴。注意，对于这样的过滤 $\mathbf{E}_\infty$-代数，增广并非额外数据，因为总存在一个典范映射 $\mathrm{F}^{\star}R \to \mathrm{gr}^0 R$。因此，我们将用 $\mathrm{F}^{+}\mathrm{CAlg}_k^{\mathrm{red}}$ 表示 $\mathrm{CAlg}^{\mathrm{nu}}(\mathrm{F}^{\geqslant 1}\mathrm{Mod}_k)$ 的这一实例。他们考虑一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Mod}_k & \xrightarrow{\mathrm{Sym}^{\mathrm{nu}}} & \mathrm{CAlg}_k^{\mathrm{aug}} & \xrightarrow{\mathrm{cot}} & \mathrm{Mod}_k \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ins}^1} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{adic}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ins}^1} \\ \mathrm{F}^{\geqslant 1}\mathrm{Mod}_k & \xrightarrow{\mathrm{Sym}^{\mathrm{nu}}} & \mathrm{F}^{+}\mathrm{CAlg}_k^{\mathrm{red}} & \xrightarrow{\mathrm{cot}} & \mathrm{F}^{\geqslant 1}\mathrm{Mod}_k \end{array}$$

左伴随函子。

引理 8.1。 给定一个增广的 $\mathbf{E}_\infty$-k-代数 R，$\mathrm{adic}(R)$ 等价于 $\mathrm{F}^{\star}_{\mathrm{H}}\mathbb{\Gamma}^{\mathbf{E}_\infty}_{k/R}$。

证明。 adic 的右伴随是这样一个函子：它将一个约化的 $\mathbf{E}_\infty$-环 $\mathrm{F}^{\star}S$ in $\mathrm{F}^{+}\mathrm{Mod}_k$ 映到 $\mathrm{F}^0 S \to \mathrm{gr}^0 S$ 的纤维。换言之，它就是函子 $\mathrm{F}^{\star}S \mapsto \mathrm{F}^1 S$。由于一般而言，$\mathbf{E}_\infty$-无穷小上同调是 gr^0-函子的左伴随，因此该断言可由图追逐得到。

□

注 8.2。 The $\mathbf{E}_\infty$-无穷小上同调 $\mathbb{\Gamma}^{\mathbf{E}_\infty}_{k/R}$ 是余切纤维的上同调类比。事实上，在 Toën–Vezzosi $\mathbf{E}_\infty$-版本的导出叶状结构理论中 [58], $\mathrm{F}^\star_{\mathrm{H}}\mathbb{\Gamma}^{\mathbf{E}_\infty}_{k/R}$对应于 Spec 上终末叶状结构中经过点 $\operatorname{Spec} R$ 的叶 $x \in \operatorname{Spec} R$，该点对应于增广。这一联系在 Branter–Magidson–Nuiten [18]和 Fu [27]的工作中得到了更明确的阐述。

引理 8.3. 阿蒂亚滤过就是 *Goodwillie* 塔。特别地，$\mathrm{F}^\star_{\mathrm{H}}\mathbb{\Gamma}^{\mathbf{E}_\infty}_{k/R}$ 是遗忘函子 $\mathrm{CAlg}^{\mathrm{aug}}_k \to \mathrm{Mod}_k$的 *Goodwillie* 塔。

证明。 参见 [9, 定理 2.1.6] 或 [33, 注 1.14]。 □

注 8.4。 由此可知，我们对 $\mathrm{F}^\star_{\mathrm{HKR}}\mathrm{THH}(R)$ 的构造与 Minasian [48] 的构造一致。事实上，根据 [48]，第 278 页的论断，Minasian 的构造恰好是增广的 R-代数 $R \to \mathrm{THH}(R) \to R$上的阿蒂亚滤过。我们看到，这就是 $\mathrm{F}^\star_{\mathrm{H}}\mathbb{\Gamma}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/\mathrm{THH}(R)}$。

注 8.5 （与 Glasman 的比较）。 我们所知文献中 THH 上最后一种 HKR 型滤过归功于 Saul Glasman [30]。他在 $\mathrm{THH}(R)$ 上定义的 $\mathrm{THH}(R)$ 的滤过 $\mathrm{G}^\star$，是乘法的，且 $\mathrm{gr}^0_{\mathrm{G}}\mathrm{THH}(R) \simeq R$。因此存在一个自然映射 $\mathrm{F}^\star_{\mathrm{HKR}}\mathrm{THH}(R) \simeq \mathrm{F}^\star_{\mathrm{H}}\mathbb{\Gamma}^{\mathbf{E}_\infty}_{R/\mathrm{THH}(R)} \to \mathrm{G}^\star\mathrm{THH}(R)$。目前我们尚未比较这两种构造。不过，它应该与 [9] 中讨论的数值（点计数）滤过和 Goodwillie–Weiss 滤过之间的 Koszul 对偶有关。

参考文献

[1] Alejandro Adem 和 R. James Milgram，《有限群上同调》，第 2 版，《数学科学基础》丛书，第 309 卷，Springer-Verlag，柏林，2004年。[2] Matthew Ando、Andrew J. Blumberg、David Gepner、Michael J. Hopkins 和 Charles Rezk，《通过刚性无穷循环空间理论研究环谱的单位、定向与 Thom 谱》，《拓扑学杂志》7 (2014)，第 4 期，1077–1117。[3] Benjamin Antieau，《谱序列、移位与 Beilinson t-结构》，arXiv:2411.09115 (2024年)。[4] ,《滤过与上同调 I：晶化》，arXiv:2511.01567 (2025年)。[5] ，《滤过与上同调 II：Gauss–Manin 联络》，arXiv:2511.14731 (2025年)。[6] Benjamin Antieau 和 Noah Riggenbach，《分圆合成谱》，arXiv:2411.19929 (2024年)。[7] Stefano Ariotta，《相干上链复形与 Beilinson t-结构》，附 Achim Krause 撰写的附录，arXiv:2109.01017 (2021年)。[8] David Ayala 和 John Francis，《拓扑流形的因子化同调》，《拓扑学杂志》8 4, 1045 2015 1084 ( ), no. – 。[9] ，《Poincaré/Koszul 对偶》，Comm. Math. Phys. 365 (2019)，第 3 期，847–933。[10] Maria Basterra 和 Michael A. Mandell，《E_∞ 环谱的同调与上同调》，Math. Z. 249 (2005)，第 4 期，903–944。[11] Bhargav Bhatt 和 Jacob Lurie，《绝对棱柱上同调》，arXiv:2201.06120 (2022年)。[12] Bhargav Bhatt、Matthew Morrow 和 Peter Scholze，《拓扑 Hochschild 同调与整数 p-adic Hodge 理论》，Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 129 (2019)，199–310。[13] Andrew J. Blumberg，《E_∞ 环谱 Thom 谱的拓扑 Hochschild 同调》，《拓扑学杂志》3 (2010)，第 3 期，535–560。[14] Andrew J. Blumberg、Ralph L. Cohen 和 Christian Schlichtkrull，《Thom 谱的拓扑 Hochschild 同调与自由环空间》，Geom. Topol. 14 (2010)，第 2 期，1165–1242。

[15] Irina Bobkova、Eva Höning、Ayelet Lindenstrauss、Kate Poirier、Birgit Richter 和 Inna Zakharevich，《高阶 THH 的分裂与计算技巧》，代数与几何拓扑 19 (2019)，第 7 期，3711–3753。[16] Irina Bobkova、Ayelet Lindenstrauss、Kate Poirier、Birgit Richter 和 Inna Zakharevich，《关于 F_p 与交换 F_p-群代数的高阶拓扑 Hochschild 同调》，《拓扑学中的女性：同伦论合作研究》，Contemp. Math.，第 641 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2015年，第 97–122 页。[17] Marcel Bökstedt，《Z 和 Z/p 的拓扑 Hochschild 同调》，比勒费尔德大学数学系，1985年。[18] Lukas Brantner、Kirill Magidson 和 Joost Nuiten，《导出叶状结构的形式积分》，arXiv:2502.05257 (2025年)。[19] Lukas Brantner 和 Akhil Mathew，《变形理论与分拆李代数》，arXiv:1904.07352 (2019年)。[20] Robert Burklund，《Moore 谱上的乘法结构》，arXiv:2203.14787 (2022年)。[21] Michael Ching 和 John E. Harper，《结构化环谱的导出 Koszul 对偶与 TQ-同调完备化》，数学进展 341 (2019)，118–187。[22] Bjørn Ian Dundas、Ayelet Lindenstrauss 和 Birgit Richter，《关于整数环的高阶拓扑 Hochschild 同调》，数学研究快报 25 (2018)，第 2 期，489–507。[23] ，《关于整数环的高阶拓扑 Hochschild 同调》，数学研究快报 25 2, 489 2018 507 ( ), no. – 。[24] John Francis，《E

n **149** 2013 3, -环

430 480
的切复形与 Hochschild上同调》，Compos. Math. ( ), no. – 。[25] John Francis 和 Dennis Gaitsgory，《手征 Koszul 对偶》，Selecta Math. (N.S.) 18 (2012年)，第 1 期，27–87。[26] Benoit Fresse，《 E-无穷代数的迭代 bar 复形与同调理论》，代数与几何拓扑 11 (2011年)，第 2 期，747–838。[27] Jiaqi Fu，《李代数胚与无穷小叶状结构之间的对偶》，arXiv:2410.04950 (2024年)。[28] Dennis Gaitsgory 和 Nick Rozenblyum，《导出代数几何研究。第二卷：变形、李理论与形式几何》，《数学调查与专著》第 221 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2017年。[29] Benjamin Gammage、Justin Hilburn 和 Aaron Mazel-Gee，《渗 pervers schober 与三维镜像对称》，《欧洲数学学会杂志》，可见 https://doi.org/10.4171/jems/1657。[30] Saul Glasman，《拓扑 Hochschild 同调上的谱层面 Hodge 滤子》，Selecta Math. (N.S.) 22 (2016)，第 3 期，1583–1612。[31] Jeremy Hahn、Arpon Raksit 和 Dylan Wilson，《交换环谱的拓扑循环同调上的动机滤过》，arXiv:2206.11208 (2022年)。[32] Gemma Halliwell、Eva Höning、Ayelet Lindenstrauss、Birgit Richter 和 Inna Zakharevich，《相对 Loday 构造及其在高阶 THH 计算中的应用》，Topology Appl. 235 (2018)，523–545。[33] John E. Harper 和 Kathryn Hess，《结构化环谱的同伦完备化与拓扑 Quillen 同调》，Geom. Topol. 17 (2013)，第 3 期，1325–1416。[34] Alice Hedenlund、Sarah Klanderman、Ayelet Lindenstrauss、Birgit Richter 和 Foling Zou，《扭曲积与环面上的 Loday 构造》，Topology Appl. 316 (2022)，论文编号 108103，25 页。[35] Alice Hedenlund 和 Tasos Moulinos，《合成希尔伯特加法群概形》，Selecta Mathematica 31 (2025)，第 5 期，1–64。[36] Gijs Heuts 和 Markus Land，《E_n-代数的形式性与球面上的上链》，arXiv:2407.00790 (2024年)。[37] Michael A Hill 和 Tyler Lawson，《E_k-推出与 E_{k+1}-张量》，arXiv:2110.07429 (2021年)。[38] Achim Krause 和 Thomas Nikolaus，《拓扑 Hochschild 同调与回旋谱讲义》，(2018)，可见 https://www.uni-muenster.de/IVV5WS/WebHop/user/nikolaus/Papers/Lectures.pdf。

[39] ———, Bökstedt 周期性与离散赋值环的商，Compos. Math. 158（2022年），第 8 期，1683–1712。[40] Nicholas J. Kuhn，空间与交换环谱张量积的 McCord 模型，载于《代数拓扑中的范畴分解技术》（斯凯岛，2001），《数学进展》第 215 卷，Birkhäuser，巴塞尔，2004 年，第 213–236 页。[41] Nicholas J. Kuhn 和 Luís Alexandre Pereira，代数 André–Quillen 过滤上的算子模双模与复合积，代数与几何拓扑 17（2017年），第 2 期，1105–1130。[42] Tyler Lawson，Adams–Novikov 谱序列作为 Goodwillie 塔，视频见 https://math. colorado.edu/chtjourney/，2017年。[43] A. Lazarev，高度结构化环谱的上同调理论，载于《结构化环谱》，伦敦数学学会讲义丛书第 315 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2004 年，第 201–231 页。[44] Muriel Livernet 和 Birgit Richter，将 E_n-同调解释为函子同调，Math. Z. 269（2011年），第 1–2 期，193–219。[45] Jean-Louis Loday，《循环同调》，第 2 版，《数学科学基础》丛书第 301 卷，Springer-Verlag，柏林，1998 年；附录 E 由 María O. Ronco 撰写，第 13 章由作者与 Teimuraz Pirashvili 合作撰写。[46] Jacob Lurie，《高等代数》，见 https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/HA.pdf，版本日期为 2017 年 9 月 18 日。[47] Akhil Mathew、Niko Naumann 和 Justin Noel，等变稳定同伦论中的幂零性与下降，数学进展 305（2017年），994–1084。[48] Vahagn Minasian，THH的 André–Quillen 谱序列，Topology Appl. 129（2003年），第 3 期，273–280。[49] Baptiste Morin，拓扑 Hochschild 同调与 ζ 值，Duke Math. J. 173（2024年），第 13 期，2619–2685。[50] Tasos Moulinos、Marco Robalo 和 Bertrand Toën，一个普适的 Hochschild–Kostant–Rosenberg 定理，Geom. Topol. 26（2022年），第 2 期，777–874。[51] Teimuraz Pirashvili，高阶 Hochschild 同调的 Hodge 分解，Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 33（2000年），第 2 期，151–179。[52] Daniel Quillen，关于交换环的（上）同调，载于《范畴代数的应用》（纯数学专题讨论会论文集，第 XVII 卷，纽约，1968），纯数学专题讨论会论文集第 XVII 卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1970 年，第 65–87 页。[53] Arpon Raksit，重新审视 Hochschild 同调与导出 de Rham 复形，arXiv:2007.02576（2020）。[54] Nima Rasekh 和 Bruno Stonek，余切复形与 Thom 谱，Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. 90（2020年），第 2 期，229–252。[55] Nima Rasekh、Bruno Stonek 和 Gabriel Valenzuela，∞范畴中的 Thom 谱、高阶 THH 与张量，代数与几何拓扑 22（2022年），第 4 期，1841–1903。[56] Birgit Richter 和 Stephanie Ziegenhagen，有限代数解环的同调谱序列，J. K-Theory 13（2014年），第 3 期，563–599。[57] Stacks 项目作者，Stacks 项目，https://stacks.math.columbia.edu，2025年。[58] Betrand Toën 和 Gabriele Vezzosi，无穷小导出叶状结构，arXiv:2305.13010（2023）。

西北大学数学系 antieau@northwestern.edu