arXiv:2512.15511v1 [math.GR] 17 Dec 2025

自同构群为 2-群的对称多胞体

GABE CUNNINGHAM、YAN-QUAN FENG、DONG-DONG HOU 和 EGON SCHULTE

Abstract. 本文研究任意秩 $d \geq 3$ 的正则、半正则和手性多胞体，其自同构群均为 2-群。存在种类繁多且规模相当小的有限正则或交错半正则多胞体，其自同构群的阶为 2 的幂：对于具有秩为 3 的环面截面的此类多胞体，可以完全指定其各种秩为 3 的截面（半正则情形可能有一个例外）。此外，研究还表明，在取泛扩张时，自同构群为 2-群这一性质具有遗传性：给定一个正则、手性或交错半正则多胞体，若其自同构群是有限或无限的 2-群，则该多胞体的泛扩张是一个秩高一的多胞体，并且其自同构群为无限 2-群。

关键词：正则多胞体、自同构群、2-群、半正则、手性 MSC主题分类（2020）：20B25, 52B15, 51M20

1. Introduction

数十年来，抽象多胞体一直备受关注（McMullen & Schulte [22], McMullen [21], Pellicer [26]）。它们是具有鲜明几何、代数或拓扑特征的组合结构。大量文献着眼于正则、手性或其他高度对称的抽象多胞体的分类，通常聚焦于多胞体本身。另有一类研究从群出发，试图列举自同构群属于预先指定类型的正则或手性多胞体；例如，对称群 [4], 交错群 [3, 6],或其他几乎单群，如射影线性群 [1, 2, 19]。

本文研究自同构群为 2-群的正则、半正则和手性多胞体。这延续了一项研究方向，其起源是 [31]中提出的一个问题，而 Hou、Feng、Leemans 和 Qu [13, 14, 15, 16, 17], 以及 Gomi、Loyola 和 De Las Penas [12, 20]则率先对一些特殊情形展开了实质性研究。我们主要关注自同构群为有限 2-群的多胞体，不过也会涉及无限 2-群。

我们的结果表明，存在种类繁多且规模较小的有限正则和半正则多胞体，其群的阶为 2 的幂。具体而言，对于具有秩为 3 的环面截面（$d \geq 4$）的 d-多胞体，可以完全指定各种秩为 3 的截面；但半正则情形中的 $(d-4)$-余面可能例外：任意由若干环面正则多面体组成的组合，只要每个多面体的自同构群都是 2-群，都可以作为某个规模较小的正则或交替半正则多胞体中的秩为 3 的截面集合出现，且该多胞体的自同构群为 2-群。

我们还证明，若正则或手性 d 多胞体的自同构群是有限或无限 2-群，则其自由（泛）扩张分别是正则或手性 $(d+1)$ 多胞体，且自同构群为无限 2-群。类似的结果也适用于

日期：2025年12月18日。

由一对相容的正则 d 多胞体 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 作为面构成、且自同构群为有限或无限 2-群的泛交替半正则 $(d+1)$ 多胞体。

本文结构如下。第 2 节和第 3 节介绍必要的背景知识，并回顾正则多胞体的平坦粘合性质。第 4 节简要讨论具有 2-群的环面正则多面体后，我们利用平坦粘合性质，构造一些规模较小的正则和半正则多胞体，它们具有指定的秩为 3 的环面截面，且其自同构群的阶为 2 的幂；相关内容分别见第 5 节和第 6 节。第 7 节介绍我们关于具有无限 2-群的多胞形的结果。最后，第 8 节简要讨论群阶为 2 的幂的正则幂多胞体。

2. Basic Notions

本节简要回顾抽象正则多胞体的基本概念和结果，主要遵循 [22, 第 2, 3] 章。

秩为 d 的（抽象）多胞体是一个偏序集 $\mathcal{P}$，并带有一个严格单调的秩函数，其取值属于 $\{-1, 0, \ldots, d\}$。秩为 j 的元素称为 $\mathcal{P}$ 的 j 面；秩为 0、1 或 $d-1$ 的面也分别称为顶点、棱或面。多胞体 $\mathcal{P}$ 有唯一的最小面 F_{-1}（秩为 -1）和唯一的最大面 F_d（秩为 d），称为 $\mathcal{P}$ 的非正常面。旗是 $\mathcal{P}$ 的一个极大全序子集。每个旗恰好包含 $d+2$ 个面，每个秩各一个，包括 F_{-1} 和 F_d。如果两个旗仅有一个面不同，则称它们相邻；如果这个面是一个 j 面，也称这两个旗 j 相邻。多胞体 $\mathcal{P}$ 是强旗连通的，也就是说，$\mathcal{P}$ 的任意两个旗 Φ 和 Ψ，都可以通过一个有限的、依次相邻的旗序列连接起来，且序列中的每个旗都包含 $\Phi \cap \Psi$。最后，$\mathcal{P}$ 满足菱形条件：当 $F \le G$，其中 F 是一个（$j-1$）面，而 G 是某个 j 的一个（$j+1$）面时，恰有两个 j 面 H 满足 $F \le H \le G$。换言之，菱形条件就是说，每个旗 Φ 对于每个 $j = 0,$ ....., $d-1$，都有唯一一个 j 相邻旗，记作 Φ^j。秩 3 的抽象多胞体也称为（抽象）多面体。

对于任意两个面 F（秩为 j）和 G（秩为 k），若满足 $F \le G$，我们称

$$G/F := \{H \in \mathcal{P} \mid F \le H \le G\}$$

$\mathcal{P}$的截面。这本身是一个（$k-j-1$）-多胞体。我们通常将面F 与截面 F/F_{-1}视为同一对象。对于一个 j-面 F，截面 F_d/F 称为余j-面（或简称余面）—— $\mathcal{P}$ 在 F处的余面；如果 F 分别是顶点或棱，则也称为 $\mathcal{P}$ 在 F 处的顶点图或棱图。一个余-j-面具有 $d-j-1$ 秩。

如果一个多胞体 $\mathcal{P}$ 的自同构群是正则的，则称其为正则多胞体；若其自同构群 $\Gamma(\mathcal{P})$ 在各旗上传递，则满足此条件。在这种情况下，$\Gamma(\mathcal{P})$ 在各旗上正则作用，因为多胞体的自同构群中的旗标稳定子必然是平凡的。如果 $\mathcal{P}$ 是一个正则多胞体，则 $\Gamma(\mathcal{P})$ 在每个秩的面上传递地作用，$\mathcal{P}$ 的所有截面也都是正则的，并且可比较的截面（由秩相匹配的面组成的面偶定义）是同构的。如果对于每个 $i = 1$、.....、$d-1$ 以及每个由（$i-2$）-面和（$i+1$）-面组成的关联对 F, G，截面 G/F 同构于一个 p_i 边形（可能是 $p_i = \infty$），则称正则多胞体具有（Schl¨afli）型 $\{p_1, \ldots, p_{d-1}\}$。

正则多胞体 $\mathcal{P}$ 的群 $\Gamma(\mathcal{P})$具有一套性质良好的特定生成元。事实上，$\Gamma(\mathcal{P})$由对合 $\rho_0, \ldots, \rho_{d-1}$ 生成，其中 ρ_i 将一个（固定的）基旗 Φ 映射到与其 i- 相邻的旗 Φ^i。这些生成元满足带有弦图的 Coxeter 群所对应的标准 Coxeter 型关系（至少满足这些关系），

$$(\rho_i \rho_j)^{p_{ij}} = 1 \quad \text{for } i, j = 0, \ldots, d-1, \tag{1}$$

其中 $p_{ii}=1$, $p_{ji}=p_{ij}=:p_{i+1}$ 当 $j=i+1$时成立，否则为 $p_{ij}=2$。数值 p_j 是 Schläfli 符号 $\{p_1,\dots,p_{d-1}\}$中的各项。此外，还满足以下交性质，

$$\langle \rho_i \mid i\in K\rangle \cap \langle \rho_i \mid i\in J\rangle = \langle \rho_i \mid i\in K\cap J\rangle \quad \text{for } K,J\subseteq\{0,1,\dots,d-1\}. \tag{2}$$

此外，对于 $i=1,\dots,d-1$，元素 $\sigma_1,\dots,\sigma_{d-1}$（其中 $\sigma_i:=\rho_{i-1}\rho_i$）生成 Γ(*P*) 的旋转子群 $\Gamma^+(\mathcal{P})$，其指数至多为 2。该子群由 Γ(*P*) 中所有可写成偶数个生成元之积的元素构成 ρ_i。若正则多胞体 $\mathcal{P}$ 的 Γ(*P*) 在 $\Gamma^+(\mathcal{P})$ 中的指数为 2，则称其为直接正则 。

串型 *C*-群 是一个群 $\Gamma=\langle\rho_0,..,\rho_{d-1}\rangle$，其生成元满足（1）和交性质（2）；这里的“C”代表“Coxeter”，不过并非每个串型 C-群都是 Coxeter 群。串型 C-群恰好是正则多胞体的自同构群（见 [22, 第 2E 章]）。我们通常将正则多胞体与其自同构（串型 C-）群视为同一对象。

我们用 $[p_1,p_2,\dots,p_{d-1}]$ 表示其底层 Coxeter 图为字符串的 Coxeter 群，该字符串有 d 个节点和 $d-1$ 个分支，标记为 p_1，p_2，……，p_{d-1}。（这里，如果 $p_i=2$，我们就将字符串的第 i 个分支视为缺失。）这是一个串型 C-群，也是该泛正则 n-多胞体 $\{p_1,\dots,p_{d-1}\}$ 的自同构群（见 [22, 第 3D 章]）。

由低秩多胞体组装正则多胞体通常是个难题。如果一个正则 d-多胞体 $\mathcal{P}$ 的面与 $\mathcal{P}_1$ 同构，且顶点图形与 $\mathcal{P}_2$ 同构，那么 $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_2$ 必须是相容的 $(d-1)$-多胞体，所谓相容，是指 $\mathcal{P}_1$ 的顶点图形必须与 $\mathcal{P}_2$ 的面同构。正则 $(d-1)$-多胞体 $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_2$ 的相容性只是存在一个面为 $\mathcal{P}_1$、顶点图形为 $\mathcal{P}_2$ 的正则 d-多胞体的必要条件，而非充分条件。不过，如果这样的多胞体确实存在，那么还存在一个泛多胞体，记作 $\{\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2\}$，它覆盖所有面为 $\mathcal{P}_1$、顶点图形为 $\mathcal{P}_2$ 的其他正则多胞体（见 [22, 定理 4A2]）。推广 Schläfli 符号的概念后，我们稍微滥用一下记号，称正则多胞体 $\mathcal{P}$ 为型 $\{\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2\}$，如果 $\mathcal{P}$ 的面为 $\mathcal{P}_1$，且顶点图形为 $\mathcal{P}_2$。

我们还将使用一个广义施莱¨夫利符号 来记录秩为 3 的截面的结构。回顾一下，如果 $\Phi=\{F_{-1},F_0,\dots,F_d\}$ 是正则 d-多胞体 $\mathcal{P}$的一个旗，则由 Φ确定的秩为 3 的截面序列为

$$F_3/F_{-1},\ F_4/F_0,\ F_5/F_1,\ \dots,\ F_d/F_{d-4}, \tag{3}$$

它刻画了 $\mathcal{P}$的秩为 3 的截面的局部几何，即每个由 j-面 G 和一个 $(j-4)$-面 F（其中 $F\le G$）给出的截面 G/F都与 F_j/F_{j-4}同构。于是，如果对于每个 $j=3$，……，d，$\mathcal{P}_j$都是与 $\mathcal{P}$的截面 F_j/F_{j-4}同构的正则 3-多胞体，我们就称 $\mathcal{P}$具有 $\{\mathcal{P}_3,\dots,\mathcal{P}_d\}$型。如果 $d=4$，这与我们之前的记号是一致的（下标重命名除外）。注意，我们的记号并不意味着 $\mathcal{P}$在具有相同广义施莱¨夫利符号的正则多胞体中具有普适性。

若一个 d-多胞体 $\mathcal{P}$ 满足：其自同构群 Γ(*P*) 有两个旗轨道，且任意两个相邻旗都属于不同的旗轨道（见 [26, 29]），则称其为手性的 。如果 $\mathcal{P}$ 是一个手性 d-多胞体，那么 Γ(*P*) 由元素 σ_1，……，σ_{d-1} 生成，其中 σ_i 将一个（固定的）基旗 Φ 映射到 $\mathcal{P}$ 的 $(\Phi^i)^{i-1}$，即 i-相邻旗 Φ^i 的 $(i-1)$ 个相邻旗。这些生成元至少满足以下关系：

$$\sigma_i^{p_i}=(\sigma_i\sigma_{i+1}\cdot\ldots\cdot\sigma_j)^2=\epsilon \quad \text{for } i,j=1,\dots,d-1,\ \text{with } i<j, \tag{4}$$

其中，与之前一样，数字 p_i 确定了 $\mathcal{P}$的施莱夫利符号 $\{p_1, \ldots, p_{d-1}\}$。手性多胞体的生成元还满足交性质，这一性质比（2）更为复杂。

若一个 d-多胞体 $\mathcal{S}$ 具有正则面，且其自同构群$\Gamma(\mathcal{S})$在顶点上传递，则称其为半正则 多胞体。若一个半正则多胞体 $\mathcal{S}$ 的面（均为正则面）分为两类 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$，并且在 $\mathcal{S}$ 中的任意一个（$d-3$）面周围按交替方式出现（见 [23, 24]），则称该多胞体为交替 多胞体。我们允许 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 同构，但只有在以下情形中才会遇到这种可能性： $\Gamma(\mathcal{S})$有一个指数为 2 的子群，其面轨道恰有两个，并且在 $\mathcal{S}$中的任意一个（$d-3$）面周围，这些面轨道按交替方式出现。交替半正则多面体的简单例子有立方八面体和二十面体，前者的两个三角形与两个正方形、后者的两个五边形，分别在任意顶点周围交替出现。（Coxeter [7] 将这类多面体称为“拟正则”。）在秩 3 的情形下，所有面都是二维多胞体，因而都是正则的，所以抽象多面体为半正则，当且仅当其 $\Gamma(\mathcal{S})$在顶点上传递。

若一个 d-多胞体 $\mathcal{P}$ 的每个顶点都与其每个面关联，则称其为平坦的。更一般地，若 $0 \le k < l \le d-1$，则称 $\mathcal{P}$为(k, l)-平坦的，若其每个 k-面都与其每个 l-面关联。平坦多胞体是(0, $d-1$)-平坦的。

本文研究自同构群为 2-群的多胞体。我们主要关注有限 2-群的情形（此时其阶是 2 的幂），但也会涉及无限 2-群。

3. The FAP and flat amalgamation

本节简要回顾平坦粘合性质（简称 FAP），以及 [22, 第 4E、4F 节]中描述的正则多胞体粘合过程。

设 $\Gamma = \langle \rho_0, \ldots\ldots, \rho_{d-1} \rangle$ 为由对合生成的任意群，并满足对于所有 i, j，有 $(\rho_i\rho_j)^2 = 1$，其中 $|i-j| \ge 2$。我们通常取 Γ 为某个正则多胞体的群。注意，若 $\varphi \in \Gamma$ 满足 $\varphi = \varphi_0\rho_{j_1}\varphi_1\rho_{j_2}\cdots\varphi_{m-1}\rho_{j_m}\varphi_m$, 则我们可以写成

$$\varphi = \psi_0(\psi_1^{-1}\rho_{j_1}\psi_1)\cdots(\psi_m^{-1}\rho_{j_m}\psi_m),$$

其中 $\psi_i := \varphi_i\varphi_{i+1}\cdots\varphi_m$对于 $i = 0, \ldots, m$。这里，如果 $\varphi_0, \ldots, \varphi_m$属于 Γ的某个指定子群，那么 $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_m$ 也属于该子群。

对于 $k = 0, \ldots, d-1$，定义

$$\begin{aligned} N_k^+ &:= N_{k,\ldots,d-1} := \langle \varphi^{-1}\rho_i\varphi \mid i \ge k,\ \varphi \in \Gamma \rangle, \\ N_k^- &:= N_{0,\ldots,k} := \langle \varphi^{-1}\rho_i\varphi \mid i \le k,\ \varphi \in \Gamma \rangle. \end{aligned}$$

这些子群分别是 $\{\rho_k, \ldots, \rho_{d-1}\}$ 和 $\{\rho_0, \ldots, \rho_k\}$在$\Gamma = \langle \rho_0, \ldots, \rho_{d-1} \rangle$中的正规闭包，并且满足

$$\Gamma = N_k^+\langle \rho_0, \ldots, \rho_{k-1} \rangle = \langle \rho_0, \ldots, \rho_{k-1} \rangle N_k^+, \tag{5}$$

$$\Gamma = N_k^-\langle \rho_{k+1}, \ldots, \rho_{d-1} \rangle = \langle \rho_{k+1}, \ldots, \rho_{d-1} \rangle N_k^-. \tag{6}$$

现在设 $\mathcal{P}$是一个正则 d-多胞体，其自同构群为 $\Gamma(\mathcal{P}) = \langle \rho_0、\ldots\ldots、\rho_{d-1} \rangle$，并设 $0 \le k \le d-1$。若上述 (5) 中的直积是半直积，则称 $\mathcal{P}$具有关于其 k-面的*FAP*；也就是说，

$$\Gamma(\mathcal{P}) \cong N_k^+ \rtimes \langle \rho_0, \ldots, \rho_{k-1} \rangle,$$

或者，等价地，子群 N_k^+ 和 $\langle\rho_0$、……、$\rho_{k-1}\rangle$ 的交平凡。在这种情况下，若$k = d-1$，我们也称 $\mathcal{P}$ 具有关于其面集的 ***FAP***。

对偶地， $\mathcal{P}$ 称为相对于余***FAP***k-面 具有 FAP，当 (6) 中的直积是半直积时；也就是说，

$$\Gamma(\mathcal{P}) \cong N_k^- \rtimes \langle\rho_{k+1}, \ldots, \rho_{d-1}\rangle,$$

或者，等价地， N_k^- 与 $\langle\rho_{k+1}, \ldots, \rho_{n-1}\rangle$ 交集平凡。在这种情况下，若 $k = 0$或 $k = 1$，则分别称 $\mathcal{P}$ 具有相对于其顶点图形的 ***FAP***或棱图形。那么，正则 d-多胞体 $\mathcal{P}$ 相对于其余 k-面具有 FAP，当且仅当其对偶 $\mathcal{P}^*$ 相对于（$d-k-1$）-面具有 FAP。（回顾一下， $\mathcal{P}$ 的对偶 $\mathcal{P}^*$是由 $\mathcal{P}$ 得到的多胞体：保持 $\mathcal{P}$ 的面集不变，但反转 $\mathcal{P}$上的偏序。）

我们常利用这样一个事实：如果一个正则 d-多胞体 $\mathcal{P}$ 关于其 k-面具有 FAP，那么 $\mathcal{P}$ 中带有 $j > k$ 的 j-面也关于其 k-面具有 FAP，而 $\mathcal{P}$ 中带有 $j < k$ 的余-j-面也关于其 $(k-j-1)$-面具有 FAP。对于关于其余-k-面具有 FAP 的多胞体，也有类似的对偶陈述。

下面的引理 3.2 将表明，FAP 在另一种意义上也具有遗传性。证明需要以下简单的技术引理。

引理 3.1。 设 G 是一个群，且 A、B、C 是 G 的子群，使得 $G = AB$、$A \cap B = C \cap B = 1$、$B \trianglelefteq G$, $C \trianglelefteq A$, 和 $CB \trianglelefteq AB$。那么

$$G/CB = AB/CB \cong A/C.$$

证明。 根据群的同构定理，

$$(AB)/B \cong A/(A \cap B) \cong A, \ \ (CB)/B \cong C/(C \cap B) \cong C$$

因此

$$G/CB = AB/CB \cong (AB/B)/(CB/B) \cong A/C.$$

□

下面引理的第一部分将在定理 5.1 的证明中用到。第二部分是相应的对偶陈述。

引理 3.2。 设 $\mathcal{P}$ 是一个正则 d-多胞体， $d \geq 4$。
(a) 设 $0 \leq k \leq d-3$ 和 $0 \leq l \leq d-k-4$。若 $\mathcal{P}$ 关于其余-k-面具有 ***FAP***，且余-k-面关于其余-l-面具有 FAP，则 $\mathcal{P}$ 关于其余-$(k+l+1)$-面具有 ***FAP***。

(b) 设 $2 \leq l < k \leq d-1$。若 $\mathcal{P}$ 关于其 k-面具有 ***FAP***，且 k-面关于其 l-面具有 FAP，则 $\mathcal{P}$ 关于其 l-面具有 ***FAP***。

证明。 设 $\Gamma(\mathcal{P}) = \langle\rho_0, \ldots, \rho_{d-1}\rangle$。由于这两部分互为对偶，只需证明第一部分。

k的群在 $\mathcal{P}$的基底 k面处的余k面，由 $\langle\rho_{k+1}, \ldots, \rho_{d-1}\rangle$给出。于是，我们对 $\mathcal{P}$ 及其余k面的假设意味着

$$\Gamma(\mathcal{P}) \cong N_k^- \rtimes \langle\rho_{k+1}, \ldots, \rho_{d-1}\rangle$$

and

$$\langle\rho_{k+1}, \ldots, \rho_{d-1}\rangle = \hat{N}_{k+1,\ldots,k+l+1} \rtimes \langle\rho_{k+l+2}, \ldots, \rho_{d-1}\rangle,$$

ˆ其中$N_{k+1,\dots,k+l+1}$定义为 $\{\rho_{k+1},\dots,\rho_{k+l+1}\}$ 在子群$\langle\rho_{k+1},\dots,\rho_{d-1}\rangle$中的正规闭包。我们断言

$$N^-_{k+l+1} = N^-_k \hat{N}_{k+1,\dots,k+l+1}, \tag{7}$$

ˆ 或等价地，$N^-_{k+l+1}/N^-_k \cong N_{k+1,\dots,k+l+1}$。事实上，根据 $\mathcal{P}$ 关于其余 ˆk 面的 FAP，N^-_k 与 $\langle\rho_{k+1},\dots,\rho_{k+l+1}\rangle$ 的子群 $N_{k+1,\dots,k+l+1}$ 的交平凡，因此，

$$\begin{aligned}
N^-_{k+l+1}/N^-_k &= \langle\rho_0,\dots,\rho_{k+l},\varphi\rho_{k+l+1}\varphi^{-1}\,|\,\varphi\in\langle\rho_{k+l+2},\dots,\rho_{d-1}\rangle\rangle/N^-_k\\
&= \langle\rho_0N^-_k,\dots,\rho_{k+l}N^-_k,\varphi\rho_{k+l+1}\varphi^{-1}N^-_k\mid\varphi\in\langle\rho_{k+l+2},\dots,\rho_{d-1}\rangle\rangle\\
&= \langle\rho_{k+1}N^-_k,\dots,\rho_{k+l}N^-_k,\varphi\rho_{k+l+1}\varphi^{-1}N^-_k\mid\varphi\in\langle\rho_{k+l+2},\dots,\rho_{d-1}\rangle\rangle\\
&= \langle\rho_{k+1},\dots,\rho_{k+l},\varphi\rho_{k+l+1}\varphi^{-1}\mid\varphi\in\langle\rho_{k+l+2},\dots,\rho_{d-1}\rangle\rangle N^-_k/N^-_k\\
&= \hat{N}_{k+1,\dots,k+l+1}N^-_k/N^-_k\\
&= \hat{N}_{k+1,\dots,k+l+1}/(\hat{N}_{k+1,\dots,k+l+1}\cap N^-_k)\\
&\cong \hat{N}_{k+1,\dots,k+l+1}.
\end{aligned}$$

ˆ 因此，$N^-_{k+l+1} = N^-_k N_{k+1,\dots,k+l+1}$。

现在我们应用引理 3.1 完成证明。更具体地说，由于余-k 面相对于其余-l 面具有 FAP，

$$\begin{aligned}
\Gamma(\mathcal{P})/N^-_{k+l+1} &= \langle\rho_{k+1},\dots,\rho_{d-1}\rangle N^-_k/\hat{N}_{k+1,\dots,k+l+1}N^-_k\\
&= \langle\rho_{k+1},\dots,\rho_{d-1}\rangle/\hat{N}_{k+1,\dots,k+l+1}\\
&\cong \langle\rho_{k+l+2},\dots,\rho_{d-1}\rangle.
\end{aligned}$$

因此，$\mathcal{P}$ 关于其余-$(k+l+1)$-面具有 FAP。 □

平坦粘合性质可用于构造具有预先指定的面 $\mathcal{P}_1$ 和余面 $\mathcal{P}_2$ 的平坦正则多胞体 $\mathcal{P}$。设 $\mathcal{P}_1$ 是一个正则 c-多胞体，而 $\mathcal{P}_2$ 是一个正则 d-多胞体，并且 $\mathcal{P}_1$ 的余-k 面 $\mathcal{K}$ 与 $\mathcal{P}_2$ 的 $(c-k-1)$-面同构。令 $\Gamma(\mathcal{P}_1) = \langle\alpha_0,\dots,\alpha_{c-1}\rangle$，以及 $\Gamma(\mathcal{P}_2) = \langle\beta_{k+1},\dots,\beta_{k+d}\rangle$，其中 $\Gamma(\mathcal{P}_2)$ 的标准生成元的下标已平移 $k+1$。如在 [22, 4F5], 中一样，考虑直积 $\Gamma(\mathcal{P}_1)\times\Gamma(\mathcal{P}_2)$ 的子群 $\Gamma := \Gamma(\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2) := \langle\rho_0,\dots,\rho_{k+d}\rangle$，其中生成元 ρ_i 定义为

$$\rho_i := \begin{cases} (\alpha_i,1) & \text{if}\quad 0\le i\le k,\\ (\alpha_i,\beta_i) & \text{if}\quad k+1\le i\le c-1,\\ (1,\beta_i) & \text{if}\quad c\le i\le k+d.\end{cases} \tag{8}$$

于是 Γ 称为群 $\Gamma(\mathcal{P}_1)$ 和 $\Gamma(\mathcal{P}_2)$ 的 $(k+1)$-混合，记作 $\Gamma(\mathcal{P}_1)\diamond_{k+1}\Gamma(\mathcal{P}_2)$。如果 Γ 恰好是一个 C 群（如下文所述的情形），那么相应的正则多胞体称为多胞体 $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_2$ 的 $(k+1)$-混合，记作 $\mathcal{P}_1\diamond_{k+1}\mathcal{P}_2$。生成元的具体性质立即表明，$N^-_k$ 和 N^+_c 分别属于 $\Gamma(\mathcal{P}_1)\times\{1\}$ 或 $\{1\}\times\Gamma(\mathcal{P}_2)$，因而作为元素彼此可交换。

以下定理概述了这一混合构造的性质（见 [22, 定理 4F9]）。

定理 3.3。设 c、$d\ge 2$，且设 $0\le k\le c-2$ 和 $k\ge c-d$。设 $\mathcal{P}_1$ 是一个群为 $\Gamma(\mathcal{P}_1) = \langle\alpha_0,\dots,\alpha_{c-1}\rangle$ 的正则 c-多胞体，并设 $\mathcal{P}_2$ 是一个正则 d-多胞体，其 $\Gamma(\mathcal{P}_2) = \langle\beta_{k+1},\dots,\beta_{k+d}\rangle$（下标平移 $k+1$）。假设 $\mathcal{P}_1$ 的余-k-面 $\mathcal{K}$ 与 $\mathcal{P}_2$ 的$(c-k-1)$-面同构，并且 $\mathcal{P}_1$ 相对于其余-k-面具有 *FAP*，$\mathcal{P}_2$ 相对于其$(c-k-1)$-面具有 *FAP*。那么$(k+1)$-混合体

$\Gamma = \Gamma(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ 由 $\Gamma(\mathcal{P}_1)$ 和 $\Gamma(\mathcal{P}_2)$ 组成，是一个秩为 $k+d+1$ 的串型 *C*-群。设 $\mathcal{P} := \mathcal{P}_1 \diamond_{k+1} \mathcal{P}_2$ 是相应的正则$(k+d+1)$-多胞体，其群为 $\Gamma(\mathcal{P}) = \Gamma$。那么 $\mathcal{P}$ 具有以下性质：

(a) c的 $\mathcal{P}$ -面与 $\mathcal{P}_1$同构，而余-k-面与 $\mathcal{P}_2$同构。更一般地，若 $r \leq k$、 $s \geq c$、 $s-r \geq 4$和 $\{F_{-1}, F_0, \ldots, F_{k+d+1}\}$ 表示 $\mathcal{P}$的基旗，则 $\mathcal{P}$的截面 F_s/F_r与正则（$s-r-1$）-多胞体 $\mathcal{Q}$：$= \mathcal{Q}_1 \diamond_{k-r} \mathcal{Q}_2$同构。该多胞体由 $\mathcal{P}_1$ 的余-r-面 $\mathcal{Q}_1$ 和 $\mathcal{P}_2$ 的（$s-k-1$）-面 $\mathcal{Q}_2$ 构造而成，方式与 $\mathcal{P}$ 由 $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_2$构造而成相同。
(b) 关于其余-k-面和 c-面， $\mathcal{P}$ 都具有 *FAP*。特别是，

$$\Gamma(\mathcal{P}) \cong N_k^- \rtimes \Gamma(\mathcal{P}_2) \cong N_c^+ \rtimes \Gamma(\mathcal{P}_1) \cong (N_k^- \times N_c^+) \rtimes \Gamma(\mathcal{K}),$$

其中 N_k^-和 N_c^+分别是 Γ（$\mathcal{P}_1$）中 $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_k\}$的正规闭包，以及$\Gamma$（$\mathcal{P}_2$）中 $\{\beta_c, \ldots, \beta_{k+d}\}$ 的正规闭包。*(c)* $\mathcal{P}$ 是（k、 c）-平坦的。

4. Toroidal polyhedra of type $\{4,4\}$

环面正则多面体 $\{4,4\}_{(s,t)}$（其中 $s \geq 2$、 $t = 0$ 或 $s = t \geq 2$）已得到广泛研究（参见 Coxeter 和 Moser [9, 第 8] 章）。它们可由平面上的正方形镶嵌导出：以 $\mathbb{Z}^2$ 为顶点集，并分别对由向量 (s, t)、$(-t, s)$ 张成的格取商即可。这里我们简要讨论自同构群为 2-群的多面体 $\{4,4\}_{(s,t)}$。

引理 4.1。 自同构群为 *2*-群的 $\{4,4\}$ 型正则多面体为多面体$\{4,4\}_{(2^e,0)}$ 和$\{4,4\}_{(2^e,2^e)}$ 、 $e \geq 1$，其群阶分别为 2^{2e+3} 和 2^{2e+4}。

证明。 *</style}*一个正则多面体，其，或，具有阶为 *8()* 的自同构群。若该群为 *2*-群，则必须是 *2* 的幂。利用模 *4* 的简单算术，不难看出，每个 *2* 的幂都能且只能以一种方式表示为两个非负整数的平方和（忽略两项的顺序）：若 为偶数，则 *()*；若 为奇数，则*()()*。因此，若群的阶为 ,，方程 给出的参数分别为 *(*， *t*) $=(2^e$， 0)，$(2^e$， $2^e)$，其中 $n = 2e+3$, $2e+4$。由此引理得证。□

对于 $n \geq 5$，我们用 $\{4,4\}^{(n)}$ 表示型为 $\{4,4\}$、自同构群的阶为 2^n的唯一正则多面体。因此，

$$\{4,4\}^{(n)} = \{4,4\}_{(2^e,0)} \text{ or } \{4,4\}_{(2^e,2^e)}, \tag{9}$$

根据 n 是奇数、 $n-3 = 2e$，还是 n 是偶数、 $n-4 = 2e$。类似地，我们用记号 $[4,4]^{(n)}$, $[4,4]_{(2^e,0)}$ 或 $[4,4]_{(2^e,2^e)}$ 分别表示相应的自同构群。每个正则多面体 $\{4,4\}^{(n)}$ 都是自对偶的，并具有一个极性 ω （阶为 2 的对偶），该极性固定基旗。若令 $[4,4]^{(n)} = \langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \rangle$，则在扩张群（包含所有自同构和对偶）中， ω的共轭作用会交换生成元 α_0 和 α_2 ，同时保持生成元α_1 不变。

多面体 $\{4,4\}^{(n)}$ 均具有平坦粘合性质，且同时适用于顶点图形和面 [28]。特别是，如果 $N(\alpha_0)$ 表示 α_0 的正规闭包

在 $[4,4]^{(n)}$ 中，那么 $N(\alpha_0)$ 的阶为 2^{n-3}，并且

$$[4,4]^{(n)} = N(\alpha_0) \rtimes \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \cong N(\alpha_0) \rtimes D_4. \tag{10}$$

类似地，

$$[4,4]^{(n)} = N(\alpha_2) \rtimes \langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle \cong N(\alpha_2) \rtimes D_4, \tag{11}$$

其中，$N(\alpha_2)$ 表示 α_2 在 $[4,4]^{(n)}$ 中的正规闭包。

5. 正则多胞体与 2-群

在本节中，我们构造自同构群为有限 2-群的平坦正则 d-多胞体 $\mathcal{P}$，其如式 (3) 所示的连续秩为 3 的截面是上一节所述类型的环面图。任意此类多胞体 $\mathcal{P}$ 均可赋予广义 Schl¨afli 符号

$$\{\{4,4\}^{(n_3)}, \{4,4\}^{(n_4)}, \ldots, \{4,4\}^{(n_d)}\}, \tag{12}$$

其中，环面多面体 $\{4,4\}^{(n_j)}$（其自同构群的阶为 2^{n_j}）给出了 $\mathcal{P}$ 中 $j = 3$、.....、d 对应的截面 F_j/F_{j-4} 的同构类型。我们将证明，对于 $j = 3$、.....、d，任何满足 $n_j \geq 5$ 的数列 n_3、.....、n_d 都可以预先指定。

我们的结果基于定理 3.3 中描述的平坦正则多胞体构造技巧。采用此方法可以通过几种方式构造出具有所需型 (12) 且自同构群为 2-群的多胞体。本文构造的多胞体，其自同构群中的 2-群阶相对较小。

定理 5.1. 设 $d \geq 3$，且 $n_3, \ldots, n_d \geq 5$。则存在一个有限正则 d-多胞体$\mathcal{P}$，具有以下性质：

(a) $\mathcal{P}$的型为 $\{\{4,4\}^{(n_3)}\ \{4,4\}^{(n_4)} \ldots, \{4,4\}^{(n_d)}\}$。*(b)* $\mathcal{P}$的自同构群是一个阶为 $2^{n_3+n_4+\ldots+n_d-3(d-3)}$ 的 *2*-群。*(c)* 若 $d \geq 4$，则 $\mathcal{P}$是平坦的；事实上，若 $d \geq 4$，则 $\mathcal{P}$是$(d-4, d-1)$-平坦的。*(d)* $\mathcal{P}$ 相对于其余面为 $(d-4)$ 的面、其余面为 $(d-3)$ 的面，以及其面，都具有 *FAP*。

证明。我们利用定理 3.3，并运用如下事实：环面图 $\{4,4\}^{(n_j)}$ 对于面和顶点图形都具有平坦粘合性质。

我们的证明对秩 d进行归纳。对于每个维数 $d \geq 3$，我们构造具有所需性质的正则多胞体 $\mathcal{P}_d$。对于 $d = 3$，无需证明：$\mathcal{P}_3 = \{4,4\}^{(n_3)}$。对于 $d \geq 4$，多胞体 $\mathcal{P}_d$ 将通过沿着 2-截面粘合 $\mathcal{P}_{d-1}$ 和 $\{4,4\}^{(n_d)}$ 得到；这些 2-截面分别是 $\mathcal{P}_{d-1}$ 的余-$d-4$面和 $\{4,4\}^{(n_d)}$的 2-面。

先考察 $d = 4$这一情形很有启发性。令 $\mathcal{Q}_1 := \{4,4\}^{(n_3)}$ 且 $\mathcal{Q}_2 := \{4,4\}^{(n_4)}$。那么 $\mathcal{Q}_1$ 相对于其顶点图形具有 FAP，而 $\mathcal{Q}_2$ 相对于其 2-面具有 FAP。特别地，若令 $\Gamma(\mathcal{Q}_1) = \langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ 以及 $\Gamma(\mathcal{Q}_2) = \langle \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rangle$，则

$$\Gamma(\mathcal{Q}_1) = N(\alpha_0) \rtimes \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle, \quad \Gamma(\mathcal{Q}_2) = N(\beta_3) \rtimes \langle \beta_1, \beta_2 \rangle,$$

其中，$\alpha_2\rangle \cong \langle \beta_1$和$\beta_2 \rangle \cong D_4$分别是 α_0在 Γ和 β_3在 Γ中的正规闭包。这里，子群 N和 N 的阶分别为 2^{n_3-3}和 2^{n_4-3}。现在，根据上面的定理 3.3（取 $k = 0$），存在一个(0, 3)-平坦正则四维多胞体，记作 $\mathcal{P}_4$，其面和顶点图形分别同构于 $\mathcal{Q}_1$和 $\mathcal{Q}_2$。因此，$\mathcal{P}_4$具有所需的型 $\{\{4,4\}^{(n_3)}\ \{4,4\}^{(n_4)}\}$。若令$\Gamma = \langle \rho_0$，.....，$\rho_3\rangle$，其生成元 ρ_i如(8)所示，并令 N_0 和 N_3

分别表示 ρ_0 和 ρ_3 在面子群 $\langle\rho_0、\ \rho_1、\ \rho_2\rangle$ 以及顶点图子群 $\langle\rho_1、\ \rho_2、\ \rho_3\rangle$中的正规闭包，那么 N_0 和 N_3 也是 ρ_0 和 ρ_3在全群 Γ和

$$\Gamma(\mathcal{P}_4) \cong N_0 \rtimes \Gamma(\mathcal{Q}_2) \cong N_3 \rtimes \Gamma(\mathcal{Q}_1) \cong (N_0 \times N_3) \rtimes D_4,$$

其中二面体群 D_4 由 $\langle\rho_1,\ \rho_2\rangle$ 给出。此外， $\mathcal{P}_4$ 关于其顶点图形和面具有 FAP。注意， Γ($\mathcal{P}_4$) 的阶为

$$2^{(n_3-3)+(n_4-3)+3} = 2^{n_3+n_4-3} = 2^{n_3+n_4-3(d-3)}.$$

为了通过上述粘合过程继续推进到下一秩，我们必须验证 $\mathcal{P}_4$ 关于其棱图形也具有 FAP。但这可由引理 3.2(a) 得出。事实上，由于 $\mathcal{P}_4$ 关于其顶点图形具有 FAP，且 $\mathcal{P}_4$ 的顶点图形关于其顶点图形具有 FAP，引理 3.2(a) 表明， $\mathcal{P}_4$ 关于其棱图形也具有 FAP。特别地，

$$\Gamma(\mathcal{P}_4) = N_{0,1}\langle\rho_2, \rho_3\rangle \cong N_{0,1} \rtimes \langle\rho_2, \rho_3\rangle,$$

其中$N_{0,\ 1}$ 是 t $\{\rho_0, \rho_1\}$ 在 Γ($\mathcal{P}_4$) 中的正规闭包。在此背景下，(7) 的形式为

$$N_{0,1} = N_0\,\hat{N}_1 \cong N_0 \rtimes \hat{N}_1, \tag{13}$$

ˆ其中 N_1 是 ρ_1 在顶点图子群 $\langle\rho_1, \rho_2, \rho_3\rangle$ 中的正规闭包。

注意，(13) 中的半直积并非直积； N_0 中的元素 $\rho_1\rho_0\rho_1$ˆ 与 N_1 中的元素 $\rho_2\rho_1\rho_2$ 不可交换。事实上，若假设相反，并记住 $\rho_1\rho_2$ 的阶为 4，则方程 $\rho_2\rho_1\rho_2 \cdot \rho_1\rho_0\rho_1 \cdot \rho_2\rho_1\rho_2 = \rho_1\rho_0\rho_1$ 可简化为 $\rho_2\rho_1\rho_2\rho_0\rho_2\rho_1\rho_2 = \rho_0$ ，因此 $(\rho_1\rho_0)^2 = 1$，这与 $\rho_0\rho_1$ 的阶矛盾。

在构造的归纳步骤中，令 $d \geq 5$ ，并假设存在一个正则 $(d-1)$-多胞体 $\mathcal{P}_{d-1}$ ，具有定理中列出的性质。设 $\mathcal{Q}_1 := \mathcal{P}_{d-1}$ 和$\mathcal{Q}_2 := \{4,4\}^{(n_d)}$。那么， $\mathcal{Q}_1$ 相对于其余维为 $(d-4)$ 的面具有 FAP，而 $\mathcal{Q}_2$ 相对于其 2-面具有 FAP。现在，根据上面的定理 3.3，存在一个 $(d-4,\ d-1)$-平坦正则 d-多胞体，记作 $\mathcal{P}_d$，使得 $\mathcal{P}_d$ 的面和余维为 $(d-4)$ 的面分别与 $\mathcal{Q}_1$ 和 $\mathcal{Q}_2$ 同构。若令 Γ($\mathcal{P}_d$) $= \langle\rho_0, \ldots, \rho_{d-1}\rangle$，则

$$\Gamma(\mathcal{P}_d) \cong N_{0,1,\ldots,d-4} \rtimes \Gamma(\mathcal{Q}_2) \cong N_{d-1} \rtimes \Gamma(\mathcal{Q}_1) \cong (N_{0,1,\ldots,d-4} \times N_{d-1}) \rtimes D_4,$$

其中，$N_{0,1,\ldots,d-4}$表示 $\{\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{d-4}\}$ 在面子群 $\langle\rho_0, \ldots, \rho_{d-2}\rangle$ 中的正规闭包，而 N_{d-1} 是 ρ_{d-1} 在余维为 $(d-4)$ 的面子群 $\langle\rho_{d-3}, \rho_{d-2}, \rho_{d-1}\rangle$ 中的正规闭包。这些子群 $N_{0,1,\ldots,d-4}$ 和 N_{d-1} 也分别是 $\{\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{d-4}\}$ 和 ρ_{d-1} 在全群 Γ($\mathcal{P}_d$) 中的正规闭包。由于 $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{P}_{d-1}$，自同构群的阶为

$$|\Gamma(\mathcal{P}_d)| = |N_{d-1}| \cdot |\Gamma(\mathcal{P}_{d-1})| = 2^{n_d-3} \cdot 2^{n_3+\ldots+n_{d-1}-3(d-4)} = 2^{n_3+\ldots+n_d-3(d-3)}.$$

根据定理 3.3， $\mathcal{P}_d$对于其余维为（$d-4$）的面和其面也具有 FAP。还需证明 $\mathcal{P}_d$对于其余维为（$d-3$）的面也具有 FAP。我们可以仿照秩为 4 的情形，应用引理 3.2。由此可得，$\mathcal{P}_d$ 对于其余维为（$d-3$）的面也具有 FAP，并且

$$\Gamma(\mathcal{P}_d) = N_{0,\ldots,d-3}\,\langle\rho_{d-2}, \rho_{d-1}\rangle \cong N_{0,\ldots,d-3} \rtimes \langle\rho_{d-2}, \rho_{d-1}\rangle,$$

其中 $N_{0,\ldots,d-3}$ 是 $\{\rho_0, \ldots, \rho_{d-3}\}$ 在 Γ($\mathcal{P}_d$) 中的正规闭包。这里，(7) 的形式为

$$N_{0,\ldots,d-3} = N_{0,\ldots,d-4}\,\hat{N}_{d-3} \cong N_{0,\ldots,d-4} \rtimes \hat{N}_{d-3}, \tag{14}$$

ˆ其中 N_{d-3} 是 ρ_{d-3} 在余-$d-4$-面子群 $\langle \rho_{d-3},\ \rho_{d-2},\ \rho_{d-1}\rangle$ 中的正规闭包。注意，(14) 中的半直积并非直积，因为 ˆ$N_{0,\ \ldots\ldots,\ d-4}$ 中的元素 $\rho_{d-3}\rho_{d-4}\rho_{d-3}$ 与 N_{d-3} 中的元素 $\rho_{d-2}\rho_{d-3}\rho_{d-2}$ 不交换，原因与前文类似。

因此，正则 d-多胞体 $\mathcal{P}_d$ 具有所需的性质，定理的归纳证明至此完成。□

注 5.2. 定理 *5.1* 中正则 d-多胞体 $\mathcal{P}_d$ 的群是一个“迭代半直积”。回顾一下，上述证明中的等式 *(14)* 立即给出

$$N_{0,\ldots,d-3} = N_{0,\ldots,d-4} \rtimes \hat{N}_{d-3} \quad (d \geq 4).$$

沿秩逐步迭代，并利用 *(13)*，我们得到一系列半直积，起始于

$$N_{0,\ldots,d-3} = (N_{0,\ldots,d-5} \rtimes \hat{N}_{d-4}) \rtimes \hat{N}_{d-3},$$

并以

$$N_{0,\ldots,d-3} = ((((N_0 \rtimes \hat{N}_1) \rtimes \hat{N}_2) \rtimes \ \ldots) \rtimes \hat{N}_{d-4}) \rtimes \hat{N}_{d-3} \quad (d \geq 4), \tag{15}$$

ˆ其中，N_0 是 $\langle \rho_0$ 中 ρ_0 的正规闭包；对于 $j = 1, \ldots, d-3$，每个 N_j 都是子群 $\langle \rho_j, \rho_{j+1}, \rho_{j+2}\rangle$ 中 ρ_j 的正规闭包。这里，因子 N_0 的阶为 2^{n_3-3}，而每个因子 ˆ N_j 的阶为 $2^{n_{j+3}-3}$。因此，$N_{0,\ldots,d-3}$ 是一个阶为 $2^{n_3+\ldots+n_d-3(d-2)}$ 的迭代半直积。此外，由于 $\Gamma(\mathcal{P}_d) \cong N_{0,\ldots,d-3} \rtimes D_4$，且 $D_4 \cong \langle \rho_{d-2}, \rho_{d-1}\rangle$，我们也得到全群的迭代半直积分解，

$$\Gamma(\mathcal{P}_d) \cong (((((N_0 \rtimes \hat{N}_1) \rtimes \hat{N}_2) \rtimes \ \ldots) \rtimes \hat{N}_{d-4}) \rtimes \hat{N}_{d-3}) \rtimes D_4 \quad (d \geq 3), \tag{16}$$

从而确认 $2^{n_3+\ldots+n_d-3_{(d-3)}}$ 是 $\Gamma(\mathcal{P}_d)$的阶。这里请注意，我们本可以用 N_0替换ˆˆ ˆN_0，其中 N_0 的定义与 N_j 相同，只需将 $j = 0$ 代入即可。

定理 5.1 中的一些较小多胞体 $\mathcal{P}$ 实际上是泛多胞体，也就是说，它们同构于一个正则多胞体 $\{\{4,4\}_{(p,q)}, \{4,4\}_{(r,s)}\}$（见 [22, 第 371]页）。例如，当面 $\mathcal{P}_1$ 或顶点图 $\mathcal{P}_2$ 是平坦的，即 $(p,q) = (2,0)$ 或 $(r,s) = (2,0)$ 时，分别属于这种情况。在这种情况下，除对偶情形外，相应的多胞体 $\mathcal{P}$ 为

$$\{\{4,4\}_{(2,0)}, \{4,4\}_{(2^e,0)}\}, \quad e \geq 1,$$

其群 $(C_2 \times C_2) \rtimes [4,4]_{(2,0)}$ 的阶为 128（对应 $e = 1$），而 $(D_{2^{e-1}} \times D_{2^{e-1}}) \rtimes [4,4]_{(2,0)}$ 的阶为 2^{2e+5}（对应 $e \geq 2$）；此外还有

$$\{\{4,4\}_{(2,0)}, \{4,4\}_{(2^e,2^e)}\}, \quad e \geq 1,$$

其群为 $(D_{2^e} \times D_{2^e} \times C_2 \times C_2) \rtimes (C_2 \times C_2)$，阶为 2^{2e+6}。注意，当 $n_3 = n_4 = 6$ 时，定理 5.1 中的多胞体 $\mathcal{P}$ 不是泛多胞体；在这种情况下，泛多胞体

$$\{\{4,4\}_{(2,2)}, \{4,4\}_{(2,2)}\}$$

是 $\mathcal{P}$ 的二重覆盖，其群为 $C_2^4 \rtimes [4,4]_{(2,2)}$，阶为 1024，是 $\mathcal{P}$ 的群的阶的两倍。

现在我们来确定定理 5.1 中多胞体的自同构群的表示。

定理 5.3. 型为 $\mathcal{P}$ 的多胞体的自同构群

$$\{\{4,4\}^{(n_3)},\dots,\{4,4\}^{(n_d)}\}$$

由定理 *5.1* 保证，是该型泛多胞体对额外关系子取商所得的商群

$$[(\rho_0\rho_1)^2,(\rho_2\rho_3)^2],\dots,[(\rho_{d-4}\rho_{d-3})^2,(\rho_{d-2}\rho_{d-1})^2].$$

证明。令 $\Gamma(n_3,\dots,n_d)$ 为.....的商

$$\Gamma(\{\{4,4\}^{(n_3)},\dots,\{4,4\}^{(n_d)}\})$$

对额外关系子 $[(\rho_0\rho_1)^2,(\rho_2\rho_3)^2],\dots,[(\rho_{d-4}\rho_{d-3})^2,(\rho_{d-2}\rho_{d-1})^2]$ 取商。考虑 $\mathcal{P}$ 的 4-面，它们由 $\{4,4\}^{(n_3)}$ 与 $\{4,4\}^{(n_4)}$ 的平坦 amalgamation 构成。根据构造，$(\rho_0\rho_1)^2$ 与 $(\rho_2\rho_3)^2$ 可交换，因为 $(\rho_0\rho_1)^2=((\alpha_0\alpha_1)^2,1)$ 且 $(\rho_2\rho_3)^2=(1,(\beta_2\beta_3)^2)$。类似地，由于 $\mathcal{P}$ 是通过平坦 amalgamation 逐步构建的，我们可见，对每个 $0\le i\le d-4$，$(\rho_i\rho_{i+1})^2$ 与 $(\rho_{i+2}\rho_{i+3})^2$ 可交换。因此，$\Gamma(\mathcal{P})$ 是 $\Gamma(n_3,\dots,n_d)$ 的一个商。要证明 $\Gamma(\mathcal{P})$ 等于该群，只需证明它们的阶相同。

显然，$\Gamma(n_3,\dots,n_d)$覆盖

$$\Gamma(n_3,\dots,n_{i-1},5,n_{i+1},\dots,n_d).$$

该覆盖的核 K 是 $\langle(\rho_{i-3}\rho_{i-2}\rho_{i-1}\rho_{i-2})^2\rangle$ 的正规闭包。为简单起见，假设 $i=4$，于是 K 是 $\langle(\rho_1\rho_2\rho_3\rho_2)^2\rangle$ 的正规闭包。因此显然，K 包含

$$H=\langle(\rho_1\rho_2\rho_3\rho_2)^2,(\rho_3\rho_2\rho_1\rho_2)^2\rangle.$$

现在，H 的生成元对应于 $\{4,4\}^{(n_4)}$ 对称群中的垂直平移，因此它们彼此交换且交为平凡群，这意味着 $|H|=|(\rho_1\rho_2\rho_3\rho_2)^2|\cdot|(\rho_3\rho_2\rho_1\rho_2)^2|=2^{n_4-5}$。容易看出，$H$ 被 ρ_1、ρ_2 和 ρ_3 规范化。此外，显然 H 被 ρ_j 规范化，其中 $j\ge5$。下面证明 ρ_4 与 H 的生成元交换。注意，由于 $(\rho_3\rho_4)^2$ 与 $(\rho_1\rho_2)^2$ 以及 ρ_1 交换，因此 $(\rho_3\rho_4)^2$ 与 $\rho_2\rho_1\rho_2$ 交换，进而 $\rho_3\rho_4\rho_3$ 与 $\rho_2\rho_1\rho_2$ 交换。现在略去 ρ，仅用下标进行推导:

$$\begin{aligned}4\ 1232\ 1232\ 4\ 2321\ 2321&=4\ 1232\ 123\ 4\ 321\ 2321\\&=4123\ 212\ 343\ 212\ 321\\&=4123\ 343\ 321\\&=412421\\&=e\end{aligned}$$

类似的计算表明，ρ_4 与 $\rho_3\rho_2\rho_1\rho_2$可交换，并且 ρ_0 与 H的两个生成元都可交换。由此可得，H 是正规子群，因此 $K=H$。于是，不再假设 $i=4$，我们有

$$|\Gamma(n_3,\dots,n_d)|=|\Gamma(n_3,\dots,n_{i-1},5,n_{i+1},\dots,n_d)|\cdot|H|=2^{n_i-5}|\Gamma(n_3,\dots,n_{i-1},5,n_{i+1},\dots,n_d)|.$$

然后，通过反复取商，直到每个 n_j 都是 5，我们得到

$$|\Gamma(n_3,\dots,n_d)|=2^{n_3+\cdots+n_d-5d+10}|\Gamma(5,\dots,5)|.$$

现在考虑 $\Gamma(5,\ldots,5)$。在这个群中，对于 $0 \le i \le d-3$，有 $(\rho_i\rho_{i+1}\rho_{i+2}\rho_{i+1})^2 = 1$。然后

$$\begin{aligned}\rho_{i+2}(\rho_i\rho_{i+1})^2\rho_{i+2}(\rho_{i+1}\rho_i)^2 &= \rho_i\rho_{i+2}\rho_{i+1}\rho_i\rho_{i+1}\rho_{i+2}\rho_{i+1}\rho_i\rho_{i+1}\rho_i\\ &= \rho_i(\rho_{i+2}\rho_{i+1}\rho_i\rho_{i+1})^2\rho_i\\ &= 1,\end{aligned}$$

因此 $(\rho_i\rho_{i+1})^2$ 与 ρ_{i+2} 可交换。类似的计算表明，它与 ρ_{i-1}也可交换（假设 $i \ge 1$），并且显然它与所有其他 ρ_j 都可交换，因此它是中心元。于是，$\Gamma(5,\ldots,5)$ 是 $[5,$定义 5.1$]$ 中群的一个商，其阶为 2^{2d-1}，由 $[5,$定理 5.2$]$得出。另一方面，根据 $[5,$定理 3.2$]$，每个型为 $\{4,\ldots,4\}$ 的 d-多胞体至少有 2^{2d-1} 个旗，因此可知 $\Gamma(5,\ldots,5)$ 恰好就是这个阶为 2^{2d-1} 的群。因此，

$$|\Gamma(n_3,\ldots,n_d)| = 2^{n_3+\cdots+n_d-5d+10+2d-1} = 2^{n_3+\cdots+n_d-3(d-3)},$$

其阶为 $\Gamma(\mathcal{P})$。 □

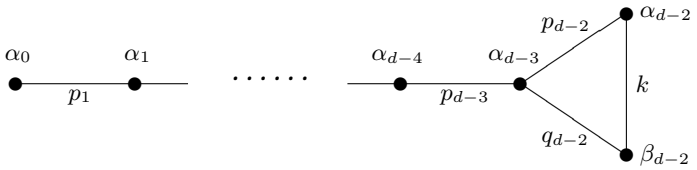
定理 5.1 中将正则多面体或多胞体拼接为更高秩正则多胞体的连续截面的合并技术，适用范围比文中所述更广。我们在此关注自同构群为 2-群的多胞体。

6. Alternating semiregular polytopes with 2-groups

半正则多胞体也是高度对称且自同构群为 2-群的多胞体的一种来源。回顾一下，交错半正则 d-多胞体 $\mathcal{S}$ 有两种正则面 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$，它们在$\mathcal{S}$的任意一个（$d-3$）面周围交替出现。

交错半正则多胞体与尾三角形 C-群（Monson 与 Schulte $[23, 24]$）密切相关，也就是说，这类 C-群的底层尾三角形图具有如下形式

(17)



每个如 (17) 所示的 d-生成元尾三角形 C-群 Γ，都会以自然的方式产生一个交错半正则 d-多胞体 $\mathcal{S}$。我们将利用 $[23, 24]$的一些构造来导出自同构群为 2-群的多胞体。

我们首先考察 $d = 3$ 的情况，具体而言是中位构造。当 $d = 3$ 缺少尾部且图示为三角形时，可能带有 $k = 2$，从而使图示呈线性。

正则多面体的中位体

当 $d = 3$ 且 $k = 2$ 时，(17) 中 C 群 Γ 的图是线性的。在这种情况下，Γ 是一个串型 C-群，因而产生一个正则多面体 $\mathcal{K}$。另一方面，将该图视为三角形图（其中 $k = 2$），同一个群 Γ 也确定了一个半正则多面体 $\mathcal{S}$。在 Coxeter 的记号中，$[7]$，$\mathcal{S}$ 是通过对（线性）图中间节点加环，应用 Wythoff 构造由 Γ 导出的。更明确地说，$\mathcal{S}$ 正是多面体 $\mathcal{K}$ 的中位体（见 $[27]$）。$\mathcal{K}$ 的中位体 $\mathcal{S}$ 可以绘制在与 $\mathcal{K}$ 相同的曲面上（如果 $\mathcal{K}$ 的面和顶点图形是有限的）：$\mathcal{S}$ 的顶点就是

“棱中点” $\mathcal{K}$ （任意选取棱的相对内部点，每条棱取一个点）； $\mathcal{S}$ 的边连接 $\mathcal{K}$的一个面上相邻棱的棱中点； $\mathcal{S}$ 的面由边循环构成，这些边循环或者经过 $\mathcal{K}$ 一个面的各条棱的棱中点（使得新面“内接”于旧面），或者经过 $\mathcal{K}$ 一个顶点周围连续棱上的棱中点（因此，在某种意义上，旧顶点被截去）。例如，如果 $\mathcal{K}$ 是立方体 $\{4,3\}$，那么 $\mathcal{S}$就是立方八面体。如果 $\mathcal{K}$ 属于 $\{p,q\}$型（其中 $p=p_{d-2}$ 和 $q=q_{d-2}$），那么其中位体 $\mathcal{S}$ 的面包括 p 边形和 q边形，并且每种面各有两个，交替排列在 $\mathcal{S}$的每个顶点周围。注意，半正多面体 $\mathcal{S}$是正则的，当且仅当 $\mathcal{K}$ 是自对偶。在此情况下， $\Gamma(\mathcal{S}) = \Gamma(\mathcal{K}) \rtimes C_2$。在所有其他情况下，$\Gamma(\mathcal{S}) = \Gamma(\mathcal{K})$。

通过中位构造，每个以 2-群为自同构群的正则多面体 $\mathcal{K}$ 都会产生一个半正多面体 $\mathcal{S}$: 若 $\mathcal{K}$ 不是自对偶的，其自同构群与原群相同；若 $\mathcal{K}$ 是自对偶的，其自同构群的阶则是原群的两倍。若 $\mathcal{K}$ 的型为 $\{2^k,2^l\}$，那么在 $\mathcal{S}$的每个顶点周围，两个 2^k边形与两个 2^l 边形交替排列。

小型交错半正多胞体

回顾一下， $\{4,4\}^{(n)}$ 表示型为 $\{4,4\}$ 且群的阶为 2^n的唯一正则多面体。特别地，当 n 为奇数时， $\{4,4\}^{(n)}$ 是 $\{4,4\}_{(2^e,0)}$； 当 n 为偶数时，则是 $\{4,4\}_{(2^e,2^e)}$。

与正则多胞体的情形一样，我们可以预先指定任意组合的型为$\{4,4\}^{(n)}$ 的环面图，使其成为某个小型交替半正则多胞体的秩 3（正则）截面集合，其中该多胞体的自同构群的阶为 2 的幂。我们再次滥用标准的施莱夫利符号记法，并将任意此类 d多胞体 $\mathcal{S}$、 $d \geq 4$赋予广义施莱夫利符号 广义施莱¨夫利符号

$$\left\{ \{4,4\}^{(n_3)}, \ldots, \{4,4\}^{(n_{d-3})}, \{4,4\}^{(n_{d-2})}, \begin{matrix} \{4,4\}^{(n_{d-1})} \\ \{4,4\}^{(m_{d-1})} \end{matrix} \right\}, \tag{18}$$

按照约定，当 $d=4$ 时，该符号就简化为

$$\left\{ \begin{matrix} \{4,4\}^{(n_{d-1})} \\ \{4,4\}^{(m_{d-1})} \end{matrix} \right\}.$$

那么， $\mathcal{S}$ 的两类正则面 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$的符号分别为

$$\{\{4,4\}^{(n_3)}, \ldots, \{4,4\}^{(n_{d-3})}, \{4,4\}^{(n_{d-2})}, \{4,4\}^{(n_{d-1})}\}$$

and

$$\{\{4,4\}^{(n_3)}, \ldots, \{4,4\}^{(n_{d-3})}, \{4,4\}^{(n_{d-2})}, \{4,4\}^{(m_{d-1})}\},$$

并且对于 $d \geq 5$，它们沿公共的（$d-2$）-面相交，其符号为

$$\{\{4,4\}^{(n_3)}, \ldots, \{4,4\}^{(n_{d-3})}, \{4,4\}^{(n_{d-2})}\}$$

而对于 $d=4$，它们沿 2-面相交， $\{4\}$。

在交替半正则 d-多胞体 $\mathcal{S}$中，除一个以外，所有秩为 3 的截面都是 $\mathcal{S}$ 的面之截面，并由上述符号表示。例外是余（$d-4$）-面，它们通常不是正则的。这些面不属于施莱夫利符号，也没有预先指定。如果 S 可以由尾三角形 C 群得到，那么余（$d-4$）-面就是正则多面体的中位体。

以下定理结合了 [24, 定理 5.3], 中所述的小型交替半正则多胞体构造技巧，以及上述定理 5.1 的结果。

定理 6.1. 设 $d \geq 4$，且 n_3、……、$n_{d-1} \geq 5$ 和 $m_{d-1} \geq 5$。那么存在一个有限的交替半正则 d-多胞体 $\mathcal{P}$，具有以下性质：

(a) $\mathcal{P}$ 的型为

$$\left\{ \{4,4\}^{(n_3)}, \ldots, \{4,4\}^{(n_{d-3})}, \{4,4\}^{(n_{d-2})}, \begin{matrix} \{4,4\}^{(n_{d-1})} \\ \{4,4\}^{(m_{d-1})} \end{matrix} \right\},$$

若 $d = 4$，则按上述方式作适当解释。

(b) $\mathcal{P}$ 的自同构群是一个 *2*-群，其阶为

$$2^{n_3+n_4+\ldots+n_{d-2}+n_{d-1}+m_{d-1}-3(d-3)} \text{ if } n_{d-1} \neq m_{d-1}$$

若 $n_{d-1} = m_{d-1}$，则其阶为上述阶的两倍。

证明。根据定理 5.1 应用于两条序列 $n_3, \ldots, n_{d-2}, n_{d-1}$ 和 $n_3, \ldots, n_{d-2}, m_{d-1}$ 的公共子序列 $n_3, \ldots, n_{d-2}$，存在一个具有定理 5.1 中所列性质的 $\mathcal{K}$ 型小型正则（$d-2$）多胞体

$$\{\{4,4\}^{(n_3)}, \ldots, \{4,4\}^{(n_{d-2})}\},$$

此外，再次根据定理 5.1，这次将其应用于序列 $n_3, \ldots, n_{d-2}, n_{d-1}$ 和 $n_3, \ldots, n_{d-2}, m_{d-1}$，还存在分别具有以下型的小型正则（$d-1$）多胞体 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$

$$\{\{4,4\}^{(n_3)}, \ldots, \{4,4\}^{(n_{d-3})}, \{4,4\}^{(n_{d-2})}, \{4,4\}^{(n_{d-1})}\}$$

and

$$\{\{4,4\}^{(n_3)}, \ldots, \{4,4\}^{(n_{d-3})}, \{4,4\}^{(n_{d-2})}, \{4,4\}^{(m_{d-1})}\},$$

特别地，根据我们构造的归纳性质，$\mathcal{K}$ 是 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 的面；并且根据定理 5.1 的 (d) 部分，$\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 相对于其面也都具有 FAP。若 $m_{d-1} = n_{d-1}$，则 $\mathcal{P}$ 与 $\mathcal{Q}$ 同构。

现在，由于 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 相对于它们的公共面 $\mathcal{K}$ 都具有 FAP，我们可以援引 [24, 定理 5.3]，从而得到一个交替半正则 d 多胞体 $\mathcal{S}$：在 $\mathcal{S}$ 的每个余-$d-3$-面周围，$\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 各出现两次并交替排列。多胞体 $\mathcal{S}$ 由一个群 Γ 得到，该群的生成元为 α_0、……、α_{d-3}、α_{d-2}、β_{d-2}，如式（17）所示；这里，$\Gamma(\mathcal{P})$ 和 $\Gamma(\mathcal{Q})$ 分别与 $\langle \alpha_0$、……、α_{d-3}、$\alpha_{d-2} \rangle$ 以及 $\langle \alpha_0$、……、α_{d-3}、$\beta_{d-2} \rangle$ 相对应。若分别令 $N_{d-2}(\mathcal{P})$ 和 $N_{d-2}(\mathcal{Q})$ 表示 α_{d-2} 和 β_{d-2} 在 $\Gamma(\mathcal{P})$ 和 $\Gamma(\mathcal{Q})$ 中的正规闭包，则

$$\Gamma(\mathcal{P}) \cong N_{d-2}(\mathcal{P}) \rtimes \Gamma(\mathcal{K}), \quad \Gamma(\mathcal{Q}) \cong N_{d-2}(\mathcal{Q}) \rtimes \Gamma(\mathcal{K}).$$

构造多胞体 $\mathcal{S}$ 所依据的尾三角形 C-群 Γ 为

$$\Gamma \cong (N_{d-2}(\mathcal{P}) \times N_{d-2}(\mathcal{Q})) \rtimes \Gamma(\mathcal{K}).$$

请注意，当且仅当 $m_{d-1} = n_{d-1}$ 时，$\mathcal{S}$ 才是正则多胞体。在这种情况下，$\Gamma(\mathcal{S}) \cong \Gamma \rtimes C_2$。在所有其他情况下，$\Gamma(\mathcal{S}) = \Gamma$。

根据定理 5.1，$\Gamma(\mathcal{K})$ 是一个阶为 $2^{n_3+n_4+\ldots+n_{d-2}-3\ (d-5)}$ 的 2-群。此外，由定理 5.1 的证明可知，$N_{d-2}(\mathcal{P})$ 和 $N_{d-2}(\mathcal{Q})$ 的阶分别为 $2^{n_{d-1}-3}$ 和 $2^{m_{d-1}-3}$。由此可得，Γ 是一个阶为

$$2^{n_3+n_4+\ldots+n_{d-2}+n_{d-1}+m_{d-1}-3(d-3)}.$$

如果 $m_{d-1} \neq n_{d-1}$，这也是 $\Gamma(\mathcal{S})$ 的阶。不过，如果 $m_{d-1} = n_{d-1}$，其阶则是原来的两倍。证明至此完成。□

注 6.2. 定理 *6.1* 中交替半正则 d-多胞体$\mathcal{S}$ 的顶点数和面数为

$$f_0(\mathcal{S}) = \frac{f_0(\mathcal{P})f_0(\mathcal{Q})}{f_0(\mathcal{K})}, \quad f_{d-1}(\mathcal{S}) = f_{d-2}(\mathcal{P}) + f_{d-2}(\mathcal{Q}),$$

其中， f_0 和 f_{d-1} 分别表示相应多胞体的顶点数和面数。与正则情形不同，多胞体 $\mathcal{S}$ 通常并非平坦。平坦性要求所有面都有相同数量的顶点，但 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 的顶点数可能不同。 $\mathcal{S}$的余$(d-4)$面与 $\{4,4\}_{(2,2)} = \{4,4\}^{(6)}$同构，而 $\{4,4\}_{(2,2)} = \{4,4\}^{(6)}$是 $\{4,4\}_{(2,0)} = \{4,4\}^{(5)}$的中位体，因此余面也是正则的。

7. 具有无限 2-群的多胞体

称有限生成无限群 G 为一个无限 *2*-群，如果 G 中每个有限阶元素的阶都是 2 的幂。注意，有限生成无限群 G 是无限 2-群，当且仅当 G的每个有限子群都是有限 2-群。

回忆一下，正则多胞体 $\mathcal{K}$ 的一个（正则）扩张是一个正则（$d+1$）-多胞体，其面与 $\mathcal{K}$ 同构。给定一个正则 d-多胞体 $\mathcal{K}$，存在一个正则（$d+1$）-多胞体，称为 $\mathcal{K}$ 的自由扩张，它覆盖 $\mathcal{K}$ 的每个正则扩张（见 [22,4D4]）。我们的目标是证明：具有有限或无限 2-群的正则 d-多胞体 $\mathcal{K}$ 的自由扩张，是一个具有无限 2-群的正则（$d+1$）-多胞体 $\mathcal{P}$。我们利用这样一个事实：自由扩张的自同构群同构于某个融合自由积。

设 $\mathcal{K}$ 是一个正则 d-多胞体，其群为 $\Gamma(\mathcal{K}) = \langle \rho_0, \ldots\ldots, \rho_{d-1} \rangle$。令 $\mathcal{F}$ 表示 $\mathcal{K}$ 的面，使得 $\Gamma(\mathcal{F}) = \langle \rho_0, \ldots\ldots, \rho_{d-2} \rangle$，并记 ρ_d 为一个循环群 C_2 的生成元。则 $\mathcal{P}$ 的群由以下融合自由积给出

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathcal{P}) &= \Gamma(\mathcal{K}) *_{\Gamma(\mathcal{F})} (\Gamma(\mathcal{F}) \times C_2), \\ &= \langle \rho_0, \ldots, \rho_{d-1} \rangle *_{\langle \rho_0, \ldots, \rho_{d-2} \rangle} \langle \rho_0, \ldots, \rho_{d-2}, \rho_d \rangle, \end{aligned} \tag{19}$$

其中， ρ_d生成因子 C_2；对于 $i = 0, \ldots, d-2$， $\Gamma(\mathcal{K})$ 和 $\Gamma(\mathcal{F})$ 中两个 $\Gamma(\mathcal{F})$ 副本的生成元 ρ_i $\times C_2$按显然的方式对应起来。

现在我们得到以下结果。

定理 7.1。 设 $\mathcal{K}$ 是一个正则 d-多胞体，其自同构群为有限或无限 *2*-群。那么， $\mathcal{K}$ 的自由扩张 $\mathcal{P}$ 是一个正则$(d+1)$-多胞体，其自同构群为无限 *2*-群。

证明。 根据（19）， $\Gamma(\mathcal{P})$ 是 $\Gamma(\mathcal{K})$ 与 $\Gamma(\mathcal{F}) \times C_2$沿其公共子群 $\Gamma(\mathcal{F})$ 融合而成的融合自由积。特别地， $\Gamma(\mathcal{P})$ 由 ρ_0、……、 ρ_{d-1}、 ρ_d 生成。根据融合自由积的挠元定理（见 [18]），$\Gamma(\mathcal{P})$ 中的每个有限阶元素都与两个因子 $\Gamma(\mathcal{K})$ 或 $\Gamma(\mathcal{F}) \times C_2$中的某个有限阶元素共轭。由于$\Gamma(\mathcal{K})$ 是有限或无限 2-群，其面子群 $\Gamma(\mathcal{F})$，从而 $\Gamma(\mathcal{F}) \times C_2$ 也必然是有限或无限 2-群。因此， $\Gamma(\mathcal{P})$ 中的每个有限阶元素都与因子 $\Gamma(\mathcal{K})$ 或 $\Gamma(\mathcal{F}) \times C_2$中的某个 2 的幂阶元素共轭，因而其自身也必具有 2 的幂阶。□

对于手性多胞体的自由扩张，也有类似的定理。回顾一下，手性 d-多胞体 $\mathcal{K}$ 的自同构群具有两个旗轨道，使得任意两个相邻旗都属于不同的轨道。如果 $\mathcal{K}$ 是手性的，则 $\Gamma(\mathcal{K})$ 分别具有两组指定生成元：第一组由基旗确定，即 σ_1、……、σ_{d-1}；第二组由基旗的 0-相邻旗确定，即 σ_1^{-1}、$\sigma_2\sigma_1^2$、σ_3、……、σ_{d-1}（见 [26, 29]）。这些生成元组在 $\Gamma(\mathcal{K})$ 中并不共轭，并分别表示$\mathcal{K}$的两种对映（镜像）形式；从某种意义上说，就是同一个底层多胞体的*左* 版本和*右* 版本。一个*定向* 手性多胞体由一个手性多胞体以及这两组指定生成元中的一组构成。

有向手性 d-多胞体 $\mathcal{K}$ 的手性扩张是一个有向手性$(d+1)$-多胞体，其（有向）面与 $\mathcal{K}$ 同构。注意，若要使 $\mathcal{K}$ 存在手性扩张，则 $\mathcal{K}$ 的面 $\mathcal{F}$ 必须是直接正则的，也就是说，它们自身的旋转子群 $\Gamma^+(\mathcal{F})$ 在其完整自同构群 $\Gamma(\mathcal{F})$ 中的指数为 2。已知，给定一个具有（必然是）直接正则面 $\mathcal{F}$ 的有向手性d-多胞体 $\mathcal{K}$，存在一个有向手性$(d+1)$-多胞体 $\mathcal{P}$，称为 $\mathcal{K}$ 的*自由扩张*，它覆盖 $\mathcal{K}$ 的每个手性扩张（见 Schulte 与 Weiss [30]）。$\mathcal{P}$ 的群由融合自由积给出

$$\Gamma(\mathcal{P}) = \Gamma(\mathcal{K}) *_{\Gamma^+(\mathcal{F})} \Gamma(\mathcal{F}) = \Gamma(\mathcal{K}) *_{\Gamma^+(\mathcal{F})} (\Gamma^+(\mathcal{F}) \rtimes C_2). \tag{20}$$

现在我们有如下定理 7.1 的类似结果。

定理 7.2。*设 $\mathcal{K}$ 是一个具有直接正则面、定向的手性 d-多胞体，并假设 $\mathcal{K}$ 的自同构群是有限或无限 2-群。那么，$\mathcal{K}$ 的自由扩张 $\mathcal{P}$ 是一个定向的手性 $(d+1)$-多胞体，其自同构群为无限 2-群。*

证明。 我们可以仿照定理 7.1 的证明进行论证，只是现在使用式 (20) 中的融合自由积。根据融合自由积的挠元定理，$\Gamma(\mathcal{P})$ 中的每个有限阶元素都与两个因子 $\Gamma(\mathcal{K})$ 或 $\Gamma(\mathcal{F})$ 中的某个有限阶元素共轭。由于 $\Gamma(\mathcal{K})$ 是有限或无限 2-群，且第二个因子同构于第一个因子的一个子群（因此它也必定是有限或无限 2-群），所以 $\Gamma(\mathcal{P})$ 中的每个有限阶元素都与因子 $\Gamma(\mathcal{K})$ 或 $\Gamma(\mathcal{F})$ 中的某个 2 的幂阶元素共轭，因而自身也必定具有 2 的幂阶。□

请注意，定理 7.2 是关于*定向*手性多胞体的扩张定理。一般而言，同一个底层手性多胞体的两种可能定向版本的自由手性扩张，不一定彼此同构。然而，如果 $\mathcal{K}$ 的顶点图形是直接正则的，那么定理 7.2 中自由扩张的顶点图形也直接正则（见 [30, 定理 2(e)]），因此，$\mathcal{K}$ 的两种定向版本的自由扩张恰好与同一个底层手性（$d+1$）多胞体的两种对映形式重合。例如，若 $d=3$，便会出现这种情况，因为手性多面体的顶点图形是直接正则的。

关于手性多胞体的手性扩张，参见 Cunningham 与 Pel- licer [10] 以及 Pellicer [26]。

此外，基于 [23, 25] 中确立的泛多胞体存在性，定理 7.1 和 7.2 对交错半正则多胞体也有相应的类比。设 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 是正则 d-多胞体，且它们的面均同构于正则 $(d-1)$-多胞体 $\mathcal{K}$。那么存在一个泛交错半正则 $(d+1)$-多胞体 $\mathcal{U}$，其面同构于 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$。这里，当且仅当 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 同构时，$\mathcal{U}$ 才是正则的。令 Γ 表示自由

积 $\Gamma(\mathcal{P})$ 和 $\Gamma(\mathcal{Q})$ 沿它们的公共子群 $\Gamma(\mathcal{K})$ 合并而成。那么，当 $\mathcal{P} \ncong \mathcal{Q}$ 时，$\mathcal{U}$ 的自同构群为 Γ；当 $\mathcal{P} \cong \mathcal{Q}$ 时，则为 $\Gamma \rtimes C_2$。

定理 7.3。设 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$是正则 d-多胞体，它们的面都同构于正则$(d-1)$-多胞体 $\mathcal{K}$。假设 $\mathcal{P}$和 $\mathcal{Q}$ 的自同构群是有限或无限的 2-群。那么，面同构于 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 的泛交替半正则$(d+1)$-多胞体 $\mathcal{U}$ 具有一个无限 2-群作为其自同构群。

证明与定理 7.1 和 7.2 的证明大致相同，此处应用关于 Γ的自由积 amalgamation 的挠元定理。

8. Power polytopes

幂多胞体 $2^{\mathcal{K}}$ 和 $2^{\mathcal{K},\ \mathcal{G}(2^m)}$ 在 [22] 中有所描述，在某些情况下其自同构群也为 2-群。

如果 $\mathcal{K}$是一个具有 v 个顶点、类型为 $\{2^{k_1},\dots,2^{k_{d-1}}\}$ 的有限正则 d-多胞体，那么 $2^{\mathcal{K}}$ 是一个具有同构于 $\mathcal{K}$的顶点图形、类型为 $\{4,2^{k_1},\dots,2^{k_{d-1}}\}$ 的正则 $(d+1)$-多胞体，其自同构群为 $\Gamma(2^{\mathcal{K}}) = C_2^v \rtimes \Gamma(\mathcal{K})$（见 [22, 8C2]）。因此，如果 $\Gamma(\mathcal{K})$的阶为 2^n，那么$\Gamma(2^{\mathcal{K}})$的阶为 2^{n+v}。

若 $m \geq 3$和 $\mathcal{K}$是一个具有 v 个顶点、类型为 $\{2^{k_1},\dots,2^{k_{d-1}}\}$的中心对称有限正则 d-多胞体，则 $2^{\mathcal{K},\mathcal{G}(2^m)}$ 是一个类型为 $\{4,2^{k_1},\dots,2^{k_{d-1}}\}$ 的正则 $(d+1)$-多胞体，其顶点图形与 $\mathcal{K}$ 同构，自同构群为 $\Gamma(2^{\mathcal{K},\mathcal{G}(2^m)}) = (D_{2^m})^{v/2} \rtimes \Gamma(\mathcal{K})$（见[22, 8C5]）。这里回顾一下，若正则多胞体的群包含一个真中心对合 α，则称该多胞体为中心对称；“真”是指 α 不固定任何顶点（因而将顶点两两配成“对踵”顶点）；也就是说，α 不能属于 $\Gamma(\mathcal{K}) = \langle \rho_0,\dots,\rho_{d-1}\rangle$ 的顶点图子群 $\langle \rho_1,\dots,\rho_{d-1}\rangle$。现在，每个 2- 群都有非平凡中心。若 $\Gamma(\mathcal{K})$ 的阶为 2^n，且包含一个真中心对合，该对合也不属于 $\Gamma(\mathcal{K})$ 的面子群 $\langle \rho_0,\dots,\rho_{d-1}\rangle$（这样 $\mathcal{K}$ 仍保持为顶点图），则 $\Gamma(2^{\mathcal{K},\mathcal{G}(2^m)})$ 的群的阶为 $2^{n+(m+1)v/2}$。

致谢。我们感谢有机会在 2024年夏季 Gabe Cunningham 和 Egon Schulte 到访北京交通大学和山西师范大学期间与他们会面，此次访问由 Yan-Quan Feng 和 Dong-Dong Hou 接待。本文源于访问期间的讨论。本研究得到国家自然科学基金委员会（12201371、12271024、12331013、12301461、12425111）资助。

References

[1] P. A. Brooksbank 和 D. Leemans，$PSL(4,\ \mathbb{F}_q)$ 的高秩多胞体，《代数杂志》**452** (2016)，390–400。[2] P. A. Brooksbank 和 D. A. Vicinsky，作用于多胞体上的三维经典群，《离散与计算几何》**44**(2010)，第 3 期，654–659。[3] P. J. Cameron、M. E. Fernandes、D. Leemans 和 M. Mixer，A_n 的多胞体最高秩，《伦敦数学会会刊》(3)**115**(2017)，第 1 期，135–176。[4] P. J. Cameron、M. E. Fernandes 和 D. Leemans，高秩弦 C-群的数量，《数学进展》**453** (2024)，文章编号 109832。[5] M. Conder，给定秩的最小正则多胞体，《数学进展》**236** (2013)，92–110。[6] M. Condera、I. Hubard 和 E. O’Reilly-Regueiro，构造具有交错或对称自同构群的高秩手性多胞体，《数学进展》**452** (2024)，文章编号 109819。[7] H. S. M. Coxeter，正则多胞体，第 3 版，Dover，纽约，1973。

[8] H. S. M. Coxeter，正则与半正则多胞体，I，《数学杂志》46 (1940)，380–407。（载于《万花筒：H. S. M. Coxeter 文选》（编者：F. A. Sherk、P. McMullen、A. C. Thompson 和 A. I. Weiss），Wiley-Interscience（纽约等地，1995），251–278。）[9] H. S. M. Coxeter 和 W. O. J. Moser，《离散群的生成元与关系》，第 4 版，施普林格，1980。[10] G. Cunningham 和 D. Pellicer，手性多胞体的手性扩张，《离散数学》330 (2014)，51–60。[11] G. Cunningham、Y.-Q. Feng、D.-D. Hou 和 E. Schulte，阶为 2 的幂的小型正则多胞体（暂定标题），编写中。[12] Y. Gomi、M.L. Loyola 和 M. L. A. N. De Las Penas，阶为 1024 的弦群，《离散数学贡献》13 (2018)，第 1 期，1–22。[13] D.-D. Hou、Y.-Q. Feng 和 D. Leemans，阶为 2^n的正则 3-多胞体的存在性，《群论杂志》22 (2019)，579–616。[14] D.-D. Hou、Y.-Q. Feng 和 D. Leemans，具有 2^n 个胞腔的正则三超多胞体的存在性，《离散数学》342 (2019)，1857–1863。[15] D.-D. Hou、Y.-Q. Feng 和 D. Leemans，阶为 2 的幂的正则多胞体，《离散与计算几何》64 (2020)，339–346。[16] D.-D. Hou、Y.-Q. Feng 和 D. Leemans，阶为 2^np的正则 3-多胞体，《群论杂志》28 (2025)，895–914。[17] D.-D. Hou、Y.-Q. Feng、D. Leemans 和屈海鹏，阶为 $4p^m$ 的弦 C-群，《代数通讯》53 (2025)，3388–3399。[18] R. C. Lyndon 和 P. E. Schupp，《组合群论》，施普林格，柏林，1977。[19] D. Leemans 和 E. Schulte，作用于多胞体上的 $L_2(q)$ 型群，《几何进展》7 (2007)，第 4 期，529–539。[20]M. L. Loyola，由阶为 2^m 且指数为 2^{m-3} 的群构造弦 C-群，预印本 (2018)，https://arxiv.org/abs/1607.01457。[21] P. McMullen，《几何正则多胞体》，剑桥大学出版社，2020。[22] P. McMullen 和 E. Schulte，《抽象正则多胞体》，剑桥大学出版社，2002。[23] B. Monson 和 E. Schulte，半正则多胞体与粘合 C-群，《数学进展》229 (2012)，2767–2791。[24] B. Monson 和 E. Schulte，交错半正则多胞体的组装问题，《离散与计算几何》64 (2020)，453–482。[25] B. Monson 和 E. Schulte，万能交错半正则多胞体，《加拿大数学杂志》73 (2021)，572–595。[26] D. Pellicer，《抽象手性多胞体》，剑桥大学出版社，2025。[27] T. Pisanski 和 B. Servatius，《图形视角下的构形》，Birkh¨auser，施普林格，2013。[28] E. Schulte，正则关联多胞体的粘合，《伦敦数学会会刊》(3) 56 (1988)，303–328。[29] E. Schulte 和 A. I. Weiss，手性多胞体，载于《应用几何与离散数学》（维克多·克利纪念文集）（编者：P. Gritzmann 和 B. Sturmfels），《离散数学与理论计算机科学 DIMACS 系列》，第 4 卷，美国数学会和计算机协会，493–516，1991。[30] E. Schulte 和 A. I. Weiss，手性多胞体的自由扩张，《加拿大数学杂志》47 (3) (1995)，641–654。[31] E. Schulte 和 A. I. Weiss，多胞体、其群及实现问题，《匈牙利数学期刊》，（离散几何专刊）53 (2006)，231–255。

Gabe Cunningham, Applied Mathematics, School of Computing and Data Science, Went-worth Institute of Technology, Boston, MA 02115, USA电子邮箱：cunningham1@wit.edu

Yan-Quan Feng, Department of Mathematics, Beijing Jiaotong University, Beijing, 100044,P.R. China

电子邮箱：yqfeng@bjtu.edu.cn

Dong-Dong Hou, Shanxi Key Laboratory of Cryptography and Date Security, Department of Mathematics, Shanxi Normal University, Taiyuan, 100044, P.R. China电子邮箱：holderhandsome@bjtu.edu.cn

Egon Schulte, Department of Mathematics, Northeastern University, Boston, MA, 02115,USA电子邮箱地址：e.schulte@northeastern.edu