arXiv:2512.15519v1 [math.FA] 17 Dec 2025

有限畸变同胚的雅可比行列式倒数的整体可积性

ANNA DOLEŽALOVÁ、JANI ONNINEN、YIZHE ZHU 和 ZHENG ZHU

摘要。对于具有 p-可积畸变的同胚，我们得到了其雅可比行列式倒数的最优整体可积度。作为应用，我们加强了 Doležalová、Hencl 和 Malý 关于有限畸变 Sobolev 同胚弱极限的结果。这类极限代表物理可容许变形，因为它们几乎处处保持单射，因此尽可能贴合数学非线性弹性模型中的物质不可互相穿透原理。

1. 引言

若 Sobolev 类 $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ 中的同胚 $h\colon \Omega \to \Omega'$，定义在实数空间$\mathbb{R}^n$ 中的域之间，则称其具有有限畸变，如果

$$|Dh(x)|^n \le K(x) J_h(x) \qquad \text{a.e. in } \Omega \tag{1.1}$$

对某个可测函数 $1 \le K(x) < \infty$。这里，$|Dh(x)|$ 表示 h 在 x处的弱导数的算子范数，而 $J_h(x) = \det Dh(x)$。使畸变不等式 (1.1) 成立的最小 $K(x)$，记作 $K_h(x)$，称为 h的畸变函数。

请注意，畸变不等式仅要求：当雅可比行列式 $J_h(x)$ 为零时，微分 $Dh(x)$ 也为零，并且雅可比行列式在 Ω 中几乎处处非负。这似乎是映射携带任何几何信息的最低要求。然而，要建立稳健的理论，对畸变进行定量控制至关重要。在极限情形下，当 $K_h \in L^\infty(\Omega)$ 时，我们得到拟共形同胚。事实上，有限畸变映射理论源于将经典拟共形理论 [5, 29, 48] 推广到

日期：2025年12月18日。2020 数学学科分类。46E35。关键词与短语。有限畸变映射、Sobolev同胚、雅可比行列式的可积性、物质相互穿透、同胚的弱极限、(INV) 条件。A. Doležalová 和 Y. Zhu 得到了芬兰科学院项目 334014 的资助。此外，A. Doležalová 还得到了捷克科学院项目 PPLZ L100752451 以及 GAČR 资助项目 P201/23-04766S 的支持。J. Onninen 得到了美国国家科学基金会资助项目 DMS- 2453853 的支持。Z. Zhu 得到了国家自然科学基金委员会资助项目 No. 12301111、北京航空航天大学中央高校基本科研业务费以及北京自然科学基金项目 No. 1242007 的支持。

退化椭圆情形下的几何函数论（GFT）。这一更广泛的框架已在材料科学中得到具体应用，尤其是非线性弹性（NE） [1, 6, 13] 和临界相现象，以及变分法。

非线性弹性（NE）数学模型中的超弹性一般理论研究具有非负雅可比行列式 $J_h \geq 0$ 的 Sobolev 同胚 $h\colon \Omega \to \Omega'$，它们使给定的储能泛函达到最小值。尤其是，新胡克材料在这一背景下受到了广泛关注（例如参见 [7, 8, 9, 10, 11, 12, 14,15, 21, 44, 45, 46, 49]）。新胡克这一术语指的是当 J_h 趋于零时能量密度发散：

$$\mathcal{E}^p[h] = \int_\Omega |Dh(x)|^p + \phi(J_h(x))\,\mathrm{d}x, \tag{1.2}$$

其中 $p \geq 1$ 和 ϕ 是定义在 $(0, \infty)$ 上的正凸函数，且 $\lim_{t\to 0^+} \phi(t) = \infty$，而 $\phi(t) = \infty$，其中 $t \leq 0$。

容易看出，若 $\phi(t) \gtrsim t^{-q}$，则任何具有有限能量 $\mathcal{E}^p[h]$ 的 Sobolev同胚 $h\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ 都满足 $K_h \in L^\alpha_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，对所有满足 $p > n\alpha$ 和 $q \geq \frac{p\alpha}{p-n\alpha}$ 的 $\alpha > 0$ 均如此。然而，反过来则远非如此。例如，存在一个 Sobolev同胚 $h\colon \Omega \to \Omega'$，其雅可比行列式在一个正测度集合上为零，但对所有 $\alpha < \frac{1}{n-1}$，它仍满足 $K_h \in L^\alpha_{\mathrm{loc}}(\Omega)$；参见 [36]。此外，通常若要保证对某个 $q > 0$ 有 $J_h^{-1} \in L^q{}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，就必须假设 K_h 本质有界。事实上，对于 K-拟共形映射 $h\colon \Omega \to \Omega'$，Gehring 高阶可积性定理 [22] 保证对某个 $q > 0$ 有 $J_h^{-1} \in L^q{}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$。对于平面上的 K-拟共形映射，Astala 在一项开创性工作中确定了尖锐指数 $q < \frac{1}{K-1}$ [2]。然而，当 $n \geq 3$ 时，尖锐指数 $q = q(n, K)$ 尚未确定。

本文研究超出拟共形范围的情形，并确立了具有 p-可积畸变的同胚的雅可比行列式倒数的最优整体可积性。

定理 1.1. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界 *Lipschitz* 区域，$\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ 为有界 *Ahlfors* n-正则区域，并设 $h\colon \Omega \to \Omega'$ 是一个有限畸变同胚，满足 $K_h^{n-1} \in L^p(\Omega)$，其中某个 $1 \leq p < \infty$。那么，存在一个常数 C，使得

$$\int_\Omega \log^p\left(e + \frac{1}{J_h(x)}\right) dx \leq C \int_\Omega K_h^{\frac{p}{n-1}}(x)dx, \tag{1.3}$$

其中常数 $C = C(n, p, \Omega, \Omega', h\big|_{\partial\Omega})$ 取决于 n，p，Ω，Ω'，还取决于 h在 $\partial\Omega$上的边界值。

定理 1.1 的局部版本由 Koskela、Onninen 和 Rajala 建立于 [37]，，他们还给出了一个例子，表明若不失去结论，则无法降低（1.3）中畸变函数的可积性阶数；参见 [37, 例 1。1]。

例如，这类积分界自然出现在二维中与 Morrey拟凸性条件的精细形式相关的情形下；在这些条件下，可以证明下半连续性以及极小化子的存在性；参见 [3, 4]。

对参考构形 Ω 的 Lipschitz正则性假设是非线性弹性中的标准公理化条件。另一方面，我们假设目标区域 Ω′ 仅为有界的 Ahlfors n-正则域。这类域在 GFT 中经常出现，允许边界不规则，甚至可能是分形边界，但仍具有均匀边界测度标度 [23, 24, 25] 等关键几何测度性质。这一更广泛的框架仍能使我们从局部可积性结果推导出整体可积性结果，因此涵盖的几何构形类别远比光滑或 Lipschitz 类别广泛。

然而，即使目标区域光滑，也不能指望全局估计式（1.3）成立，且常数C 与 h 无关。事实上，考虑如下从单位圆盘 $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ 到其自身的莫比乌斯变换序列 $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ ，其公式为

$$h_k(z) = \frac{z - a_k}{a_k z - 1}, \qquad \text{where} \quad a_k = 1 - \frac{1}{2k}.$$

Then

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{D}} \phi(J_{h_k}(z))\, dz = \infty$$

对任意 ϕ，其中它是在 (0, ∞) 上的非负递减函数，且 $\lim_{t\to 0^+} \phi(t) = \infty$。然而，由于 h_k 是共形的，对每个 k， $K_{h_k} \equiv 1$ 。特别地，

$$\int_{\mathbb{D}} K_{h_k}^{\frac{p}{n-1}}(z)\, dz = \pi.$$

研究极小化问题时，首先必须解决应考虑哪一类容许映射的问题。即使对于二维中的经典狄利克雷能量，同胚的极小化序列在取极限时也可能失去单射性，从而导致物质相互穿透 [30, 31, 32, 33]。因此，要在二维和三维中发展可行模型，就必须系统研究索伯列夫同胚的弱极限，并且更一般地，需要建立一个有原则的框架，以扩大可容许变形的类别。

我们用 $\mathscr{H}_{\varphi}^{p}(\Omega, \Omega')$ 表示以下同胚 h 的类：它们将 Ω 映 onto $\overline{\longrightarrow} \Omega'$，属于 Sobolev空间 $W^{1,p}(\Omega\ \mathbb{R}^n)$，并且在 Ω 上与给定的边界同胚$\varphi$： $\partial\Omega$ 映 onto $\longrightarrow$ $\partial\Omega'$ 相一致。我们假设这一类别非空。关于 φ 具有 Sobolev同胚延拓的条件（即何时$\mathscr{H}_{\varphi}^{p}(\Omega, \Omega') \neq \emptyset$），详见文献 [27, 35, 38, 39]。

若 $p \geq n$，则同胚序列 $h_k \in \mathscr{H}_{\varphi}^{p}(\Omega, \Omega')$ 包含一个一致收敛子列，因此极限映射是单调的。连续映射 h: Ω 映到 $\longrightarrow$ Ω′ 的单调性，按照 Morrey [43]，的概念，简单来说就是任意点 $y_0 \in \Omega'$ 的原像 $h^{-1}(y_0)$ 是 Ω 中的一个连续统。在平面情形， $W^{1,p}$-单调映射 h: Ω 映到 $\longrightarrow$ Ω′，且在 $\partial\Omega$ 上与 φ 相同,一实际上完全刻画了 $W^{1,p}$-弱极限的

同胚，当 $p \geq 2$。因此，当 $W^{1,p}$-同胚满足 $p \geq 2 = n$ 时，平面情形下的弱极限与强极限相同，另见 [34]。De Philippis 和 Pratelli 的一项重要结果 [16] 将这一结论推广到了闭单位圆盘之间的自同胚的极限：这些自同胚在边界上等于恒等映射，且满足 $p < 2$。

然而，当 $p < n$ 时，情况会发生巨大变化。在这种情况下，$W^{1,p}$-同胚的弱极限未必连续，因此可能出现空穴化等现象。于是，单调映射不再足以作为可容许变形。然而，在非线性弹性模型中，通常只排除物理上不可接受的映射，尤其是那些会导致物质严重相互穿透，或使材料体积“由内向外翻转”的映射。受此启发，Müller 和 Spector [44], 在 Šverák [49], 的思想基础上，引入了 Sobolev（INV）映射的概念。通俗地说，一个（INV）映射会将球 $B(x, r)$ 映入其自身边界像 $h(\partial B(x, r))$ 的内部，同时将闭球的补集映至该边界之外；精确定义见第2 节。该条件最初是为 $W^{1,p}$-映射定义的，且要求 $p > n-1$；在几乎每个球面上连续，确保了“内部”和“外部”的概念定义明确。对于 $p > n-1$，$\mathscr{H}^p_\varphi(\Omega, \Omega')$ 中同胚的弱极限满足（INV）条件；此外，此类（INV）映射构成的函数类在 $W^{1,p}$ [44, 中弱闭，见引理 3.3]。如果这类变形的雅可比行列式几乎处处严格为正（即它们是严格保定向的），那么它们几乎处处单射 [44]。

人们越来越关注将这些结果推广到 $p = n-1$ 的临界情形。Conti 和 De Lellis [15] 首先将 (INV) 条件引入 Sobolev 类 $W^{1,n-1}$ 中的有界映射。其研究主要受到可压缩 Neo-Hookean 弹性中的三维模型的推动，这类模型包含经典的 Dirichlet 项 $|Dh|^2$，即满足 $\mathcal{E}^2[h] < \infty$ 的映射 h （见（1.2））。严格保定向的有界$W^{1,n-1}$ 映射若满足 (INV) 条件，便具有许多重要性质（例如几乎处处单射），与 $W^{1,p}(\Omega\ \mathbb{R}^n)$ 中相应的映射类似，其中 $p > n-1$。然而，当 $p = n-1$ 时，这一类在弱极限下并不封闭。Conti 和 De Lellis [15] 构造了一列定义在单位球 $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^3$ 上的双 Lipschitz 映射，它们在边界上与恒等映射重合，且能量一致有界 $\mathcal{E}^2$；这一列映射弱收敛到一个不满足 (INV) 条件的映射。Doležalová、Hencl 和 Malý [17] 进一步证明，这样的极限不可能是 $W^{1,2}$-同胚的强极限，由此凸显了它与平面情形之间的根本差异：在三维中，$W^{1,2}$-同胚的弱极限与强极限并不一致。

在 [17], 弱 $W^{1,n-1}$-同胚的极限满足(INV) 条件的前提已得到确定。具体而言，假设函数 ϕ 在（1.2）中还满足存在 $A > 0$ 使得

$$A^{-1}\phi(t) \leq \phi(2t) \leq A\phi(t) \quad \text{for all } t \in (0, \infty).$$

那么，如果一列 $W^{1,n-1}$-同胚 h_k 在有界 Lipschitz 区域的闭包之间具有相同的边界数据，并且满足

(A) $\sup_k \mathcal{E}^{n-1}[h_k] < \infty$, and

(B) $\sup_k \int_\Omega K_{h_k}^{\frac{1}{n-1}} < \infty$,

那么其弱极限满足 (INV) 条件。

利用定理 1.1，我们证明，对于在 $W^{1,n-1}$ 中弱收敛的序列，由于它们有界，因此假设 (A) 是多余的，并且我们可以用畸变项估计包含 ϕ 的积分：

定理 1.2. 设 $\Omega,\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ 为有界 *Lipschitz* 区域，且 $n \geq 3$。假设 $h_k : \Omega$ 到 $\longrightarrow \Omega'$ 是 $W^{1,n-1}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ 中的同胚，且对所有 $k \in \mathbb{N}$，在 $\partial\Omega$ 上有 $h_k \equiv h_1$，并且

$$\sup_k \int_\Omega K_{h_k}^{\frac{1}{n-1}}(x)dx < \infty. \tag{1.4}$$

若序列 $\{h_k\}$ 在 $W^{1,n-1}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ 中弱收敛到映射 h，则 h 满足 (INV)。

畸变函数的 $L^{\frac{1}{n-1}}$-可积性假设（见（1.4））是尖锐的，参见注 4.1。

2. 预备知识

本节给出后续章节所需的定义和结果。下文中，$B(z,r)$ 表示一个以 $z \in \mathbb{R}^n$ 为中心、半径为 $r > 0$ 的开球。若无需强调中心，我们也用 B_r 表示半径为 $r > 0$ 的球。我们用 C 表示一个通用的正常数；即使在同一串估计式中，它也可能变化。若需强调常数对参数 $\alpha, \beta, \cdots$ 的依赖关系，则记作 $C = C(\alpha, \beta, \cdots)$。首先回顾 Lipschitz 域和 Ahlfors n-正则区域的定义，更多内容参见例如 [18]。

2.1. Lipschitz 与 Ahlfors 正则域。

定义 2.1. 有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 称为 *Lipschitz* 区域，如果对每个 $z \in \partial\Omega$，都存在 $r_z > 0$ 和一个 *Lipschitz* 映射 $M_z : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$，使得在必要时旋转坐标轴并重新标记后，有

$$\Omega \cap B(z, r_z) = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) : M_z(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) < x_n\} \cap B(z, r_z).$$

换言之，在每个点 $z \in \partial\Omega$附近，Ω 的边界都是一个 Lipschitz 函数的图像。对每个 $r > 0$，我们将上半球定义为

$$B^+(0,r) := \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x| < r \text{ and } x_n > 0\}$$

而球 $B(0,r)$ 在 $(n-1)$ 维超平面 $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ 上的投影定义为

$$\mathcal{P}B(0,r) := \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x| < r \text{ and } x_n = 0\}.$$

ThLipschitz 区域的以下性质是众所周知的，参见例如 [40, 42]。

引理 2.1. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个 *Lipschitz* 区域。那么对于每个 $z \in \partial\Omega$，都存在 $r_z > 0$ 以及一个双 *Lipschitz* 同胚 $L_z\colon B(z, r_z)$ 到 $\longrightarrow B(0, r_z)$，使得

$$L_z : \Omega \cap B(z, r_z) \xrightarrow{\text{onto}} B^+(0, r_z),$$

$L_z(z) = 0$，且

$$L_z\left(\partial\Omega \cap B(z, r_z)\right) = \mathcal{P}B(0, r_z).$$

现在，我们来定义 Ahlfors n-正则域。

定义 2.2。 若存在常数 $0 < c < 1$，使得对于任意 $x \in \Omega$ 和 $0 < r < 1$，均有，则称区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为 *Ahlfors* n-正则域。

$$\mathcal{H}^n(\Omega \cap B(x, r)) \geq c\mathcal{H}^n(B(x, r)).$$

注 2.1。 给定一个有界 *Lipschitz* 域 Ω，$x \in \Omega$ 和 $r \in (\overline{0}$，diam $(\Omega))$，我们有

$$\frac{r^n}{C} \leq |B(x, r) \cap \Omega| \leq Cr^n \tag{2.1}$$

其中常数 $C > 0$ 取决于 Ω 的形状。这意味着任何有界 *Lipschitz* 域都是 *Ahlfors* n-正则域。

2.2。**变量替换公式。** 下面的变量替换公式是 [19, 定理 3.1。8], 或 [26, 定理 A。35]的特殊情形。

引理 2.2. 设Ω、$\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ 为域，且 $h : \Omega \to \Omega'$ 是一个属于 *Sobolev* 类 $W^{1,1\,\mathrm{loc}}(\Omega, \Omega')$的同胚。那么，对于 $\Omega\Omega'$ 上的任意非负 *Borel* 可测函数η，有

$$\int_\Omega \eta(h(x))|J_h(x)|dx \leq \int_{\Omega'} \eta(y)dy. \tag{2.2}$$

~此外，存在一个满测度子集$\Omega \subset\Omega$，使得等式(2.2)成立；也就是说，

$$\int_{\widetilde{\Omega}} \eta(h(x))|J_h(x)|dx = \int_{h(\widetilde{\Omega})} \eta(y)dy. \tag{2.3}$$

2.3. **余面积公式。** Sobolev 函数的下列余面积公式是众所周知的，参见例如 [41, 定理 1.1]。

命题 2.1。 设 u: $\Omega \to \mathbb{R}$ 是一个属于 $W^{1,1}(\Omega\ \mathbb{R})$的函数。那么，对于任意可测集 $E \subset\Omega$，有

$$\int_E |\nabla u(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{n-1}(E \cap u^{-1}(s))\, ds.$$

Here $\mathcal{H}^{n-1}(A)$ 表示集合 A 的 $(n-1)$ 维 Hausdorff 测度 .

2.4. **读者（INV）条件。** 本节为方便读者，介绍（INV）条件。更详细、正式的阐述请参见 [15]或 [17, 第 2 节。4]。

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界区域，且 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ 为光滑映射。则 f 在 y 处关于 Ω 的（经典）拓扑度定义为

$$\deg(f,\Omega,y) := \sum_{x\in\Omega\cap f^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(J_f(x))$$

如果对每个 $x \in \Omega \cap f^{-1}(y)$，都有 $J_f(x) \neq 0$。通过逼近论证，该定义可以推广到从 Ω 到 $\mathbb{R}^n$的任意连续映射。需要强调的是，拓扑度仅取决于 f 在 Ω ∂上的值，更多细节请参见 [20]。对于同胚 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$，要么对所有 $y \in f(\Omega)$ 都有 $\deg(f,\Omega\ y) = 1$（f为保向），要么对所有 $y \in f(\Omega)$ 都有 $\deg(f,\Omega\ y) = -1$（f为反向）。对于 $W^{1,n-1}$-同胚，雅可比行列式的符号揭示了拓扑取向，参见 [28]中的以下命题。

命题 2.2。 设 $f \in W^{1,n-1}(\Omega\ \mathbb{R}^n)$ 是 Ω 上的一个同胚，且 $J_f > 0$几乎处处成立。那么

$$\deg(f,\Omega,y) = 1 \quad \text{for every } y \in f(\Omega).$$

拓扑度的概念使我们能够通过取度非零的点，来讨论球面连续像的“内部”。对于 $W^{1,p}(\Omega\ \mathbb{R})$，$p > n-1$ 中的映射，我们知道，它们在球面$S(a,r)$ 上连续，其中每个 $a \in \Omega$ 以及几乎每个 $r \in (0, \operatorname{dist}(a,\partial\Omega))$ 都如此。因此，我们可以使用经典的拓扑度。然而，在临界情形 $p = n-1$ 下，需要使用拓扑度的广义版本，因为我们的函数可能在许多球面上不连续。函数 Deg 是 $BV(\mathbb{R}^n)$ 中唯一的取整数值函数，满足

$$\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{Deg}(f,B,y)\psi(y)dy = \int_{\partial B} (\mathbf{u}\circ f)\cdot(\Lambda_{n-1}D_\tau f)\mathbf{v}d\mathcal{H}^{n-1} \tag{2.4}$$

对每个测试函数 $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 以及每个定义在 $\mathbb{R}^n$ 上并满足 $\operatorname{div}[\mathbf{u}] = \psi$ 的 C^∞-向量场 $\mathbf{u}$，其中 $\mathbf{v}(x)$ 表示 B 在 $x \in \partial B$ 处的外法向量，而 $D_\tau f$ 表示 f 在 ∂B 上的切向导数。可以证明，对于 $f \in W^{1,n-1}(\partial B, \mathbb{R}^n) \cap C(B, \mathbb{R}^n)$，且满足 $|f(\partial B)| = 0$，有

$$\operatorname{Deg}(f,B,y) = \deg(f,B,y) \text{ for almost every } y \in \mathbb{R}^n.$$

定义 2.3。 给定一个可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$，我们称

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\mathcal{H}^n(E\cap B(x,r))}{\mathcal{H}^n(B(x,r))}$$

集合 E 在点 $x \in \mathbb{R}^n$ 处的密度为该极限（如果极限存在）。

令 $B \subset \mathbb{R}^n$ 为一个球，$f \in W^{1,\ n-1}$（∂B、$\mathbb{R}^n$）$\cap L^\infty$（∂B、$\mathbb{R}^n$）。我们将 im_T（f、B）定义为 B在 f下的拓扑像，即集合 $\{y \in \mathbb{R}^n$：Deg（f、B、y）$\neq 0\}$ 中密度为 1 的所有点的集合。

令 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为一个区域。记号 $U \subset\subset \Omega$ 表示 $U \subset \Omega$。现在，我们准备定义如下的 (INV) 条件，见 [15, 44]。

定义 2.4。设 $f \in W^{1,n-1}(\Omega\ \mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\Omega\ \mathbb{R}^n)$。称 f 在球 $B \subset\subset \Omega$ 中满足(INV) 条件，如果

(1) 在 ∂B 上的迹属于 $W^{1,n-1} \cap L^\infty$；(2) $f(x) \in im_T$

(f, B) 对几乎处处的 $x \in B$成立；(3) $f(x) \notin im_T(f,$

$B)$ 对几乎处处的 $x \in \Omega \setminus B$成立。

称 f 在Ω 中满足(INV) 条件，如果对每个 $a \in \Omega$，都存在 $r_a > 0$，使得对 $\mathcal{H}^1$-几乎处处的 $r \in (0, r_a)$，它在 $B(a, r)$中满足(INV) 条件。

3. 定理1.1的证明

本节中，我们证明定理 1.1。

我们首先固定 $w \in \partial\Omega'$ 并设 $z := h^{-1}(w)$。然后我们选取充分小的半径$r_w > 0$ 和 $t_z > 0$，使得引理2.1 中的双 Lipschitz 映射存在，即

$$L_z : \overline{\Omega \cap B(z, t_z)} \to \overline{B^+(0, t_z)},$$

并且

$$h^{-1}(B(w, r_w) \cap \partial\Omega') \subset B(z, t_z) \cap \partial\Omega.$$

注意，所要求的半径充分小这一条件取决于域 Ω 和 Ω'，以及边界映射 $h\colon\ \partial\Omega \to \partial\Omega'$。

引理 3.1。对于每个球 B_r，若 $B_r \cap \Omega' \subset B(w,\ r_w) \cap \Omega'$，则有

$$\mathcal{H}^{n-1}\left(h^{-1}\left(\partial\Omega' \cap B_r\right)\right) \le C\mathcal{H}^{n-1}\left(h^{-1}\left(\partial B_r \cap \Omega'\right)\right), \tag{3.1}$$

其中常数 C 仅取决于该映射 L_z的双 *Lipschitz* 常数。

证明。对于每个 B_r，若 $B_r \cap \Omega' \subset B(w,\ r_w) \cap \Omega'$，则集合 $h^{-1}(B_r \cap \partial\Omega')$ 包含于 $B(z,\ t_z) \cap \Omega$ 中，而后者与 $B^+(0,\ t_z)$ 是 L_z-双 Lipschitz 等价的。特别地，像 $A := L_z(h^{-1}(B_r \cap \partial\Omega'))$ 包含于 $B^+(0,\ t_z)$ 的平坦底面中，并且

$$\mathcal{H}^{n-1}(h^{-1}(B_r \cap \partial\Omega')) \le C(L_z)\mathcal{H}^{n-1}(A). \tag{3.2}$$

令 $A' := L_z(h^{-1}(\partial B_r \cap \Omega'))$ 为像曲面，并将其在 $B^+(0, t_z)$ 底面上的投影记为 $\mathcal{P}A'$。注意，$A \subset \mathcal{P}A'$ 和

$$\mathcal{H}^{n-1}(A') = \int_{\mathcal{P}A'} \sqrt{\left(\frac{\partial L_z}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial L_z}{\partial x_{n-1}}\right)^2 + 1}\ d\mathcal{H}^{n-1}.$$

因此，

$$\mathcal{H}^{n-1}(A) \le \mathcal{H}^{n-1}(\mathcal{P}A') \le \mathcal{H}^{n-1}(A') \le C(L_z)\mathcal{H}^{n-1}(h^{-1}(\partial B_r \cap \Omega')). \tag{3.3}$$

结合（3.2）和（3.3），可得

$$\mathcal{H}^{n-1}(h^{-1}(B_r \cap \partial\Omega')) \le C(L_z)\mathcal{H}^{n-1}(h^{-1}(\partial B_r \cap \Omega')). \tag{3.4}$$

□

由于 $\partial\Omega'$ 是紧集，因此存在一个整数 $M_1 \in \mathbb{N}$，使得

$$\partial\Omega' \subset \bigcup_{i=1}^{M_1} B\left(w_i, \frac{r_{w_i}}{2}\right) = \bigcup_{i=1}^{M_1} \frac{1}{2} B\left(w_i, r_{w_i}\right). \tag{3.5}$$

由于 $\overline{\Omega'} \subset \mathbb{R}^n$ 也是紧集，因此存在有限个球 $\{B^k \subset \Omega'\}_{k=1}^{M_2}$，使得

$$\overline{\Omega'} \subset \bigcup_{i=1}^{M_1} \frac{1}{2} B\left(w_i, r_{w_i}\right) \cup \bigcup_{k=1}^{M_2} \frac{1}{2} B^k \tag{3.6}$$

and

$$\sum_{i=1}^{M_1} \chi_{B(w_i, r_{w_i})} + \sum_{k=1}^{M_2} \chi_{B^k} \leq C(n) < \infty. \tag{3.7}$$

我们将这族球记为 $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$，其中

$$\mathcal{B}_1 = \{B(w_i, r_{w_i}) \colon i = 1, \ldots, M_1\} \text{ and } \mathcal{B}_2 = \{B^k \colon k = 1, \ldots, M_2\}.$$

请注意 对于给定的 Ω、Ω' 以及 h 的边界值， $\mathcal{B}$ 的选取是统一的。

设 $h : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega'}$ 是一个同胚，其在 Ω 上的限制属于 $W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega, \Omega')$，且具有有限畸变，并且对某个 $1 \leq p < \infty$ 有 $K_h^{n-1} \in L^1(\Omega)$。设 N 是一个零测集，使得 h 在 $\Omega \setminus N$ 上满足变量替换公式 (2.3)。我们按照 [37], 中的方式，在 Ω' 上定义两个函数 j 和 g，如下:

$$j(y) := \begin{cases} \frac{1}{J_h(h^{-1}(y))}, & \text{if } J_h(h^{-1}(y)) > 0 \text{ and } h^{-1}(y) \in \Omega \setminus N, \\ 0, & \text{elsewhere,} \end{cases} \tag{3.8}$$

and

$$g(y) := \begin{cases} \frac{|Dh(h^{-1}(y))|}{J_h(h^{-1}(y))}, & \text{if } J_h(h^{-1}(y)) > 0 \text{ and } h^{-1}(y) \in \Omega \setminus N, \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases} \tag{3.9}$$

By [36, 定理 1.2], 对几乎处处的 $x \in \Omega$，我们有 $J_h(x) > 0$。记

$$\widetilde{\Omega}' := \{y \in \Omega' \colon j(y) > 0\}.$$

注意，如果 h 几乎处处可微，那么对于几乎处处的 $y \in \Omega'$，有 $j(y) = J_{h^{-1}}(y)$，且 $g(y) = |D^{\#} h^{-1}(y)|$，其中 $D^{\#}$ 表示余子式矩阵。由 (3.8) 可知，

$h^{-1}(\Omega') \subset \Omega \setminus N$。设 U 是 Ω' 的一个可测子集。因此，我们可以将 (2.3) 应用于 $h^{-1}(U)$，得到

$$\int_{h^{-1}(U)} \eta(h(x)) J_h(x) dx = \int_U \eta(y) dy \tag{3.10}$$

对于定义在 Ω' 上的任意非负可测函数 η。

使我们得以证明定理1.1(见 [37])局部版本的一个关键估计，是以下逆等周不等式的积分变体

$$⨍_{B_r} j(y) dy \leq C(n) \left(⨍_{B_{2r}} g(y) dy \right)^{\frac{n}{n-1}}, \tag{3.11}$$

其中， B_r 是任意一个满足 $B_{2r} \subset \Omega'$的球。本文中，我们用符号$-\!\!\!\!\int_A = \frac{1}{|A|}\int_A$ 表示集合 A上的积分平均。

下面的引理将该公式推广到与边界 Ω'相交的充分小的球。

引理 3.2。 设 $B \in \mathcal{B}_1$，且设 $B_r \subset \mathbb{R}^n$ 为一个球，其中心 y_0 包含于$B \cap \Omega'$ 中，并且满足 $B_{2r} \cap \Omega' \subset B \cap \Omega'$。则

$$-\!\!\!\!\!\!\int_{B_r \cap \Omega'} j(y)dy \leq C \left(-\!\!\!\!\!\!\int_{B_{2r} \cap \Omega'} g(y)dy \right)^{\frac{n}{n-1}}, \tag{3.12}$$

其中常数 C 取决于 n、Ω和 Ω'。

证明。 显然，

$$\int_{B_r \cap \Omega'} j(y)dy = \int_{\{y \in B_r \cap \Omega' \,:\, j(y)=0\}} j(y)dy + \int_{B_r \cap \widetilde{\Omega}'} j(y)dy = \int_{B_r \cap \widetilde{\Omega}'} j(y)dy\,. \tag{3.13}$$

由（3.10），可得

$$\begin{aligned} \int_{B_r \cap \widetilde{\Omega}'} j(y)dy &= \int_{h^{-1}\left(B_r \cap \widetilde{\Omega}'\right)} j(h(x))J_h(x)dx = \int_{h^{-1}\left(B_r \cap \widetilde{\Omega}'\right)} \frac{1}{J_h(x)} J_h(x)dx \\ &= \left| h^{-1}\left(B_r \cap \widetilde{\Omega}'\right) \right| \leq \left| h^{-1}(B_r \cap \Omega') \right|. \end{aligned} \tag{3.14}$$

对于每个 $s \in (r,\ 2r)$，我们分两种情况讨论。若 $B_s \subset B \cap \Omega'$，由经典等周不等式可得

$$\left| h^{-1}(B_s) \right|^{\frac{n-1}{n}} \leq C(n)\, \mathcal{H}^{n-1}\left(\partial\left(h^{-1}\left(B_s \right) \right) \right) = C(n)\, \mathcal{H}^{n-1}\left(h^{-1}\left(\partial B_s \right) \right),$$

因为 h 是一个同胚。如果 $B_s \cap \partial\Omega' \neq \emptyset$，经典等周不等式和不等式（3.1）推出

$$\begin{aligned} \left| h^{-1}(B_s \cap \Omega') \right|^{\frac{n-1}{n}} &\leq C\, \mathcal{H}^{n-1}\left(\partial(h^{-1}(B_s \cap \Omega')) \right) \\ &\leq C\, \mathcal{H}^{n-1}\left(h^{-1}\left((\partial\Omega' \cap B_s) \cup (\partial B_s \cap \Omega') \right) \right) \\ &\leq C\, \mathcal{H}^{n-1}\left(h^{-1}\left(\partial B_s \cap \Omega' \right) \right), \end{aligned}$$

其中常数 C 取决于 n、Ω 和 Ω'，但不取决于 B_s。因此，我们总有以下等周型不等式

$$\left| h^{-1}(B_s \cap \Omega') \right|^{\frac{n-1}{n}} \leq C(n, \Omega, \Omega')\, \mathcal{H}^{n-1}\left(h^{-1}\left(\partial B_s \cap \Omega' \right) \right).$$

将该不等式在区间（r，$2r$）上积分，我们得到

$$\begin{aligned} r \left| h^{-1}(B_r \cap \Omega') \right|^{\frac{n-1}{n}} &\leq \int_r^{2r} \left| h^{-1}(B_s \cap \Omega') \right|^{\frac{n-1}{n}} ds \\ &\leq C \int_r^{2r} \mathcal{H}^{n-1}\left(h^{-1}\left(\partial B_s \cap \Omega' \right) \right) ds. \end{aligned} \tag{3.15}$$

另一方面，将余面积公式（命题2.1）应用于 $u = |h - y_0|$和 $E = h^{-1}\left(B_{2r} \cap \Omega'\right)$ 可得

$$\begin{aligned}\int_r^{2r} \mathcal{H}^{n-1}\left(h^{-1}\left(\partial B_s \cap \Omega'\right)\right) ds &= \int_r^{2r} \mathcal{H}^{n-1}\left(E \cap h^{-1}\left(\partial B_s \cap \Omega'\right)\right) ds \\ &\leq \int_{h^{-1}(B_{2r}\cap\Omega')} |\nabla u(x)| \, dx \leq \int_{h^{-1}(B_{2r}\cap\Omega')} |Dh(x)| \, dx.\end{aligned}$$

将其与（3.15）结合，得到

$$r\left|h^{-1}(B_r \cap \Omega')\right|^{\frac{n-1}{n}} \leq C(n, \Omega, \Omega') \int_{h^{-1}(B_{2r}\cap\Omega')} |Dh(x)| \, dx. \tag{3.16}$$

由于 h 是一个从Ω到 $K_h \in L^{\frac{1}{n-1}}$的同胚，由[36] 可知， h 的雅可比行列式在Ω中几乎处处为正，因此

$$\int_{h^{-1}(B_{2r}\cap\Omega')} |Dh(x)|dx = \int_{h^{-1}(B_{2r}\cap\Omega')} \frac{|Dh(x)|}{J_h(x)} J_h(x)dx \leq \int_{h^{-1}(B_{2r}\cap\Omega')} g(h(x))J_h(x)dx.$$

此外，变量替换公式（2.2）给出

$$\int_{h^{-1}(B_{2r}\cap\Omega')} |Dh(x)|dx \leq \int_{B_{2r}\cap\Omega'} g(y) \, dy. \tag{3.17}$$

由（2.1）可知

$$\frac{r^n}{C} \leq |B_r \cap \Omega'| \leq |B_{2r} \cap \Omega'| \leq Cr^n.$$

将其与不等式（3.13）、（3.14）、（3.16）和（3.17）结合，得到所需的不等式（3.12）。□

以下证明的基本思路源自 [37]。

Lem引理 3.3。在定理 *1.1*的假设下，对每个 $B \in \mathcal{B}$ ，我们有 e

$$\int_{h^{-1}\left(\frac{1}{2}B\cap\Omega'\right)} \log^p\left(e + \frac{1}{J_h(x)}\right) dx \leq C \int_{h^{-1}(B\cap\Omega')} K_h^{\frac{p}{n-1}}(x)dx, \tag{3.18}$$

其中常数 $C > 0$ 依赖于 n， p， $|\Omega|$， $|B \cap \Omega'|$， h 在$\partial\Omega$ 上的边界值 以及 (2.1)中的常数。

证明。本证明的关键估计为

$$\int_{\frac{1}{2}B\cap\Omega'} j(y) \log^p\left(e + \frac{j(y)}{j_{B\cap\Omega'}}\right) dy \leq C \int_{B\cap\widetilde{\Omega}'} [g(y)]^{\frac{np}{n-1}} [j(y)]^{1-p} \, dy, \tag{3.19}$$

其中 $j_{B\cap\Omega'}$ 是 j 在集合 $B \cap \Omega'$上的积分平均。对于 $B \in \mathcal{B}_2$，这一结论已在 [37], 的引理 2.4 中得到证明，其中常数 C 仅依赖于 n 和 p。对于 $B \in \mathcal{B}_1$，我们将在下文给出证明（其依赖因素更多）。注意，不等式（3.19）在对 h进行重新缩放时保持不变。事实上，假设 $S > 0$

并令 $\bar{h}: S\Omega \to \Omega'$ 定义为 $\bar{h}(x) := h(S^{-1}x)$。对于这样的函数，我们有$\bar{j}(y) = S^n j(y)$，且 $\bar{g}(y) = S^{n-1}g(y)$。这使我们可以假设

$$\widetilde{C}\left(\int_{B\cap\Omega'} j(y)dy\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}, \tag{3.20}$$

因为我们可以适当地设定 S，从而得到3.19，对于 h成立，而这也意味着原函数 h同样成立。

我们首先证明，一旦有了这个估计，引理的结论便随之成立：先将函数 j 的定义与（2.3）结合，得到

$$\begin{aligned}\int_{B\cap\Omega'} j(y)dy &= \int_{B\cap\widetilde{\Omega}'} j(y)dy = \int_{h^{-1}(B\cap\widetilde{\Omega}')} j(h(x))J_h(x)dx \\ &= \int_{h^{-1}(B\cap\widetilde{\Omega}')} \frac{1}{J_h(x)} J_h(x)dx = \left|h^{-1}(B\cap\widetilde{\Omega}')\right| \le |\Omega|\,.\end{aligned}$$

这给出了一个辅助不等式

$$\begin{aligned}\int_{h^{-1}\left(\frac{1}{2}B\cap\Omega'\right)} \log^p\left(e+\frac{1}{J_h(x)}\right) &\le C\int_{h^{-1}\left(\frac{1}{2}B\cap\Omega'\right)} \log^p\left(e+\frac{|B\cap\Omega'|}{|\Omega|\,J_h(x)}\right)dx \\ &\le C\int_{h^{-1}\left(\frac{1}{2}B\cap\Omega'\right)} \log^p\left(e+\frac{1}{j_{B\cap\Omega'}\cdot J_h(x)}\right)dx,\end{aligned}$$

其中，常数 C 仅依赖于 p 和比值 $|B\cap\Omega'|/|\Omega|$（由于集合 $\mathcal{B}$ 是有限的，该比值有正的下界）。回顾一下，h 的雅可比行列式几乎处处为正，因此变量替换公式（2.2）给出

$$\int_{h^{-1}\left(\frac{1}{2}B\cap\Omega'\right)} \log^p\left(e+\frac{1}{j_{B\cap\Omega'}\cdot J_h(x)}\right)dx \le \int_{\frac{1}{2}B\cap\Omega'} j(y)\log^p\left(e+\frac{j(y)}{j_{B\cap\Omega'}}\right)dy.$$

利用（3.19）并在右侧进行变量替换，可得

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}B\cap\Omega'} j(y)\log^p\left(e+\frac{j(y)}{j_{B\cap\Omega'}}\right)dy &\le C\int_{B\cap\widetilde{\Omega}'} [g(y)]^{\frac{np}{n-1}}\,[j(y)]^{1-p}\,dy \\ &\le C\int_{h^{-1}(B\cap\Omega')} K_h^{\frac{p}{n-1}}(x)\,dx,\end{aligned}$$

另见 [37, 引理 2.2]。

现在我们回到估计式（3.19）的证明，其中 $B \in \mathcal{B}_1$ 的证明思路与 [37, 引理 1。4] 类似。首先，我们定义一个距离函数如下：

$$\mu(y) := \begin{cases}\operatorname{dist}(y, \mathbb{R}^n\setminus B) & \text{if } y\in\Omega',\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

令 $B_r\subset\mathbb{R}^n$ 为半径 r的球。我们证明

$$⨍_{B_r}\mu^n(y)j(y)dy \le C\left(⨍_{B_{2r}}\mu^{n-1}(y)g(y)dy\right)^{\frac{n}{n-1}} + \widetilde{C}\int_{B\cap\Omega'} j(y)dy, \tag{3.21}$$

~其中 C 仅取决于 n。由于对于每个 $y \in \mathbb{R}^n \setminus (B \cap \Omega')$，都有 $\mu(y) = 0$，我们可以假设 B_r 与 Ω' 的交集非空。根据 B_{3r} 是否包含于 $B \cap \Omega'$，我们区分三种情况。

情况1：我们假设 $B_{3r} \subset B \cap \Omega'$。通过简单的几何考察可得

$$\max_{y \in B_r} \mu(y) \leq 4 \min_{y \in B_{2r}} \mu(y).$$

应用（3.11）可得

$$\begin{aligned} \fint_{B_r} \mu^n(y) j(y) dy &\leq \max_{y \in B_r} [\mu(y)]^n \fint_{B_r} j(y) dy \\ &\leq C(n) \min_{y \in B_{2r}} [\mu(y)]^n \left(\fint_{B_{2r}} g(y) dy \right)^{\frac{n}{n-1}} \\ &\leq C(n) \left(\fint_{B_{2r}} [\mu(y)]^{n-1} g(y) dy \right)^{\frac{n}{n-1}}. \end{aligned}$$

情况2：我们假设 B_{3r} 不包含于 $B \cap \Omega'$，但包含于 B。回想一下，B_r 与 $B \cap \Omega'$相交。简单的几何论证表明

$$\max_{y \in B_r \cap \Omega'} \mu(y) \leq 4 \min_{y \in B_{2r} \cap \Omega'} \mu(y).$$

由于Ω' 是 Ahlfors，$\mu(y) = 0$ 对于 $y \notin B \cap \Omega'$ 且由（3.12），我们有

$$\begin{aligned} \fint_{B_r} \mu^n(y) j(y) dy &\leq \max_{y \in B_r \cap \Omega'} [\mu(y)]^n \frac{|B_r \cap \Omega'|}{|B_r|} \fint_{B_r \cap \Omega'} j(y) dy \\ &\leq C \min_{y \in B_{2r} \cap \Omega'} [\mu(y)]^n \left(\fint_{B_{2r} \cap \Omega'} g(y) dy \right)^{\frac{n}{n-1}} \\ &\leq C \left(\fint_{B_{2r}} [\mu(y)]^{n-1} g(y) dy \right)^{\frac{n}{n-1}}. \end{aligned}$$

这里的常数 C 取决于引理3.2中列出的所有参数。

情况3：我们假设 B_{3r} 不包含于 B。再次回想一下，B_r与 $B \cap \Omega'$相交。简单的几何论证表明

$$\max_{y \in B_r} \mu(y) \leq 4r.$$

由于对于 $y \notin B \cap \Omega'$，$\mu(y) = 0$，我们有

$$\begin{aligned} \fint_{B_r} [\mu(y)]^n j(y) dy &\leq \max_{y \in B_r} [\mu(y)]^n \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r \cap B \cap \Omega'} j(y) dy \\ &\leq C(n) \frac{r^n}{|B_r|} \int_{B \cap \Omega'} j(y) dy \\ &\leq C(n) \int_{B \cap \Omega'} j(y) dy. \end{aligned}$$

结合这三种情形即可证明不等式（3.21）。

现在我们将论证分为几个步骤。

步骤 1：使用极大算子。对于 $y \in \mathbb{R}^n$，估计式（3.21）推出（对所有 r 取上确界，并将所得不等式提升到 $1/n$次幂后）如下逐点估计

$$[\mathbf{M}[\mu^n j](y)]^{\frac{1}{n}} \leq C\left[\mathbf{M}[\mu^{n-1} g](y)\right]^{\frac{1}{n-1}} + \widetilde{C}\left(\int_{B\cap\Omega'} j(y)dy\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{3.22}$$

其中$\mathbf{M}$表示经典的 Hardy–Littlewood 极大算子。回顾一下，我们假设（3.20）成立，以简化后续计算；也就是说，右端的第二项不失一般性地等于 $1/2$。考虑到这一归一化，并应用（3.22），对于 $t > 1$，我们有

$$|\{y \in \mathbb{R}^n : \mathbf{M}[\mu^n j](y) > t^n\}| \leq \left|\left\{y \in \mathbb{R}^n : C\mathbf{M}[\mu^{n-1} g](y) > t^{n-1}\right\}\right|. \tag{3.23}$$

作为 Vitali 覆盖引理的一个经典应用（例如参见 [47]），对于每个$h \in L^1(\mathbb{R}^n)$和 $\lambda > 0$，我们有

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{M}[h](x) > \lambda\}| \leq \frac{C(n)}{\lambda}\int_{\{x\in\mathbb{R}^n : 2|h(x)|>\lambda\}} |h(y)|dy. \tag{3.24}$$

作为 Calderón-Zygmund 分解的直接推论（例如参见 [47]），反向不等式也成立。具体而言，对于每个 $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 和 $\lambda > 0$，我们有

$$C(n)\,|\{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{M}[h](x) > \lambda\}| \geq \frac{1}{\lambda}\int_{\{x\in\mathbb{R}^n : |h(x)|>\lambda\}} |h(y)|dx. \tag{3.25}$$

将不等式（3.24）和（3.25）应用于（3.23），可知存在一个常数 $\gamma > 1$，它仅取决于 n，使得对每个 $t > 1$

$$\int_{\{y\in\mathbb{R}^n : \mu^n(y)j(y)>t^n\}} \mu^n(y)j(y)dy \leq Ct\int_{\{y\in\mathbb{R}^n : \gamma\mu^{n-1}(y)g(y)>t^{n-1}\}} \mu^{n-1}(y)g(y)dy. \tag{3.26}$$

步骤 2：使用辅助对数函数。令 $1 \leq p < \infty$。定义辅助函数如下：

$$\Phi(t) := \frac{1}{p}\log^p t + \log^{p-1} t, \quad t \geq 1.$$

那么对于 $t > 1$，有

$$\Phi'(t) > 0 \quad \text{and} \quad \frac{d}{dt}\left(t\log^{p-1} t\right) = t\Phi'(t). \tag{3.27}$$

我们将不等式（3.26）两边乘以 $\Phi'(t)$，固定 $T > 2$，然后在 $[1, T]$上对所得不等式积分。将（3.27）应用于左侧，并利用

由 $\mu(y)=0$ （若 $y\notin B\cap\Omega'$）这一事实，富比尼定理可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\{y\in B\cap\Omega':1<[\mu(y)]^n j(y)<T^n\}}\mu^n(y)j(y)\cdot\left(\frac{1}{p}\log^p(\mu(y)[j(y)]^{1/n})\right)dy\\
&\quad\le\int_1^T\Phi'(t)\int_{\{y\in\mathbb{R}^n:\mu^n(y)j(y)>t^n\}}\mu^n(y)j(y)dy\,dt\\
&\quad\le C\int_1^T\Phi'(t)t\int_{\{y\in\mathbb{R}^n:\gamma[\mu(y)]^{n-1}g(y)>t^{n-1}\}}\mu^{n-1}(y)g(y)dy\,dt\\
&\quad\le C\int_{\{y\in B\cap\Omega':1<\gamma[\mu(y)]^{n-1}g(y)<T^{n-1}\}}[\mu(y)]^n[g(y)]^{\frac{n}{n-1}}\log^{p-1}\left(e+\gamma^{\frac{1}{n-1}}\mu(y)[g(y)]^{\frac{1}{n-1}}\right).
\end{aligned}\tag{3.28}$$

注意， $j(y)=0$ 必然意味着 $g(y)=0$。此外，对于每个 y，我们都有$g(y)\ge j(y)^{\frac{n-1}{n}}$。因此，

$$\left\{y\in B\cap\Omega':1<\gamma[\mu(y)]^{n-1}g(y)<T^{n-1}\right\}$$

是.....的子集

$$E:=\left\{y\in B\cap\Omega':T^n>[\mu(y)]^n j(y)\text{ and }j(y)>0\right\}.$$

于是我们有

$$\int_{\{y\in B\cap\Omega':1<\gamma[\mu(y)]^{n-1}g(y)<T^{n-1}\}}[\mu(y)]^n[g(y)]^{\frac{n}{n-1}}\log^{p-1}\left(e+\gamma^{\frac{1}{n-1}}\mu(y)[g(y)]^{\frac{1}{n-1}}\right)dy\le C(I_1+I_2)$$

with

$$I_1:=\int_E[\mu(y)]^n[g(y)]^{\frac{n}{n-1}}\log^{p-1}\left(e+\mu(y)[j(y)]^{\frac{1}{n}}\right)dy$$

and

$$I_2:=\int_E[\mu(y)]^n[g(y)]^{\frac{n}{n-1}}\log^{p-1}\left(e+[\gamma g(y)]^{\frac{1}{n-1}}[j(y)]^{-\frac{1}{n}}\right)dy.$$

由于 $g^{\frac{n}{n-1}}(y)\ge j(y)$，存在一个与 p 无关的常数 $C>1$，使得

$$\int_{\{y\in B\cap\Omega':[\mu(y)]^n j(y)<2\}}[\mu(y)]^n j(y)\log^p\left(e+\mu(y)[j(y)]^{\frac{1}{n}}\right)dy\le CI_1.\tag{3.29}$$

应用（3.28）得到

$$\int_{\{y\in B\cap\Omega':[\mu(y)]^n j(y)<T^n\}}[\mu(y)]^n j(y)\log^p\left(e+\mu(y)[j(y)]^{\frac{1}{n}}\right)dy\le C\left(I_1+I_2\right).\tag{3.30}$$

步骤 3：估计 I_1 和 I_2。 这里我们使用 $g(y)\ge[j(y)]^{\frac{n-1}{n}}$（使 I_2 中对数的自变量至少为 $e+1$）以及 $[\mu(y)]^n\le C\left|B\cap\Omega'\right|\chi_{B\cap\Omega'}(y)$。

对于 I_1，杨氏不等式给出

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_E \left[[\mu(y)]^{\frac{n}{p}} [g(y)]^{\frac{n}{n-1}} j(y)^{-\frac{p-1}{p}} \right] \cdot \left[[\mu(y)]^{\frac{n(p-1)}{p}} j(y)^{\frac{p-1}{p}} \log^{p-1} \left(e + \mu(y)[j(y)]^{\frac{1}{n}} \right) \right] dy \\
&\leq \frac{C\,|B \cap \Omega'|}{\varepsilon^p} \int_{B \cap \widetilde{\Omega'}} [g(y)]^{\frac{np}{n-1}} [j(y)]^{1-p} dy + C\varepsilon^{\frac{p}{p-1}} \int_E [\mu(y)]^n j(y) \log^p \left(e + \mu(y)[j(y)]^{\frac{1}{n}} \right) dy,
\end{aligned} \tag{3.31}
$$

其中 ε 表示一个稍后确定的小正常数。对于 I_2，我们有

$$
I_2 \leq C|B \cap \Omega'| \int_{B \cap \widetilde{\Omega'}} [g(y)]^{\frac{np}{n-1}} [j(y)]^{1-p} dy. \tag{3.32}
$$

现在，我们选取 ε 充分小，使得右端的第二项3.31可以吸收到3.30左端的项中（这是可行的，因为 ε 此时仅取决于与 C相同的参数）。令$T \to \infty$ 并应用单调收敛定理，可得

$$
\begin{aligned}
&\int_{B \cap \Omega'} [\mu(y)]^n j(y) \log^p \left(e + \mu(y)[j(y)]^{\frac{1}{n}} \right) dy \\
&\quad \leq C\,|B \cap \Omega'| \int_{B \cap \widetilde{\Omega'}} [g(y)]^{\frac{np}{n-1}} [j(y)]^{1-p} dy.
\end{aligned} \tag{3.33}
$$

因此，我们有

$$
\begin{aligned}
&\int_{\frac{1}{2}B \cap \Omega'} [\mu(y)]^n j(y) \log^p \left(e + |B \cap \Omega'| \, [j(y)]^{\frac{1}{n}} \right) dy \\
&\quad \leq C\,|B \cap \Omega'| \int_{B \cap \widetilde{\Omega'}} [g(y)]^{\frac{np}{n-1}} [j(y)]^{1-p} dy.
\end{aligned} \tag{3.34}
$$

这是因为对于每个 $y \in \frac{1}{2}B \cap \Omega'$，我们有

$$
[\mu(y)]^n \geq \left(\frac{1}{2} r_B \right)^n \geq C\,|B \cap \Omega'|,
$$

其中 $r_B > 0$ 表示球 B 的半径。

因此，

$$
\int_{\frac{1}{2}B \cap \Omega'} j(y) \log^p \left(e + |B \cap \Omega'| \, [j(y)]^{\frac{1}{n}} \right) dy \leq C \int_{B \cap \widetilde{\Omega'}} [g(y)]^{\frac{np}{n-1}} [j(y)]^{1-p} dy.
$$

最后，考虑到归一化条件（3.20），即可得到所需结果

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}B \cap \Omega'} j(y) \log^p \left(e + \frac{j(y)}{j_{B \cap \Omega'}} \right) dy &= \int_{\frac{1}{2}B \cap \Omega'} j(y) \log^p \left(e + C|B \cap \Omega'| j(y) \right) dy \\
&\leq C \int_{\frac{1}{2}B \cap \Omega'} j(y) \log^p \left(e + |B \cap \Omega'| j^{\frac{1}{n}}(y) \right) dy \\
&\leq C \int_{B \cap \widetilde{\Omega'}} [g(y)]^{\frac{np}{n-1}} [j(y)]^{1-p} dy.
\end{aligned}
$$

□

由于 $\mathcal{B}$的基数有限，因此存在一个足够大的常数 C，使不等式（3.18）成立，且该常数与球 B无关。现在，我们准备证明定理 1.1。

定理*1.1*的证明。 由于

$$\overline{\Omega'} \subset \bigcup_{B\in\mathcal{B}} \frac{1}{2}B$$

且 $h : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega'}$是一个同胚，我们有

$$\Omega \subset \bigcup_{B\in\mathcal{B}} h^{-1}\left(\frac{1}{2}B\right).$$

然后，将 3.18 中的不等式对 $\mathcal{B}$ 中的球求和，可得

$$\begin{aligned}\int_\Omega \log^p\left(e+\frac{1}{J_h(x)}\right)dx &\le \sum_{B\in\mathcal{B}}\int_{h^{-1}\left(\frac{1}{2}B\cap\Omega'\right)} \log^p\left(e+\frac{1}{J_h(x)}\right)dx\\ &\le C\sum_{B\in\mathcal{B}}\int_{h^{-1}(B\cap\Omega')} K_h^{\frac{p}{n-1}}(x)dx\\ &\le C\int_\Omega K_h^{\frac{p}{n-1}}(x)dx.\end{aligned}$$

□

4. 定理1.2的证明

设 ϕ 是 $(0, \infty)$ 上的正凸函数，且

$$\lim_{t\to 0^+}\phi(t) = \infty \text{ and } \phi(t) = \infty \text{ for } t \le 0. \tag{4.1}$$

另假设存在 $A > 0$，使得

$$A^{-1}\phi(t) \le \phi(2t) \le A\phi(t), \text{ for } t \in (0,\infty). \tag{4.2}$$

那么，对于属于类 $W^{1,\,n-1}(\Omega,\ \Omega')$ 的任意同胚 $h : \Omega \to \Omega'$（其定义在域 Ω、$\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ 之间），我们都有相应的能量

$$\mathcal{E}^{n-1}(h) := \int_\Omega \left(|Dh(x)|^{n-1} + \phi(J_h(x))\right)dx, \tag{4.3}$$

见（1.2）。以下结果引自 [17]。

定理 4.1. 设$\Omega,\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ 为满足 $n \ge 3$ 的 *Lipschitz* 区域。设 ϕ 为$(0,\infty)$ 上的正凸函数，满足 *(4.1)* 和 *(4.2)*。设 $\{h_k\}_{k=1}^\infty \subset W^{1,\,n-1}(\Omega,\,\Omega')$ 为同胚序列，且 $J_{h_k} > 0$ 几乎处处，并且

$$\sup_k \mathcal{E}^{n-1}(h_k) < \infty \text{ and } \sup_k \int_\Omega K_{h_k}^{\frac{1}{n-1}}(x)dx < \infty.$$

设 $\{h_k\}$ 在 $W^{1,n-1}(\Omega, \Omega')$ 中弱收敛至极限映射 h。进一步假设 h_k 是将Ω 映到 Ω' 上的同胚，且对所有 $k \in \mathbb{N}$，在 $\partial\Omega$ 上有 $h_k = h_1$ 。那么 h 满足(INV) 条件。

定理1.2 在以下意义上改进了这一结果：为了使弱极限(INV)满足条件 h，我们无需假设能量项一致有界。定理1.1 表明，对于雅可比项，这可由畸变函数的可积性 K_{h_k}推出；而导数项则由弱收敛保证有界。

定理*1.2*的证明。定义

$$\phi(t) := \begin{cases} \log\left(e + \frac{1}{t}\right), & \text{if } t \in (0, \infty), \\ \infty, & t \in (-\infty, 0]. \end{cases}$$

可以验证， ϕ 是定义在$(0, \infty)$ 上的正凸函数，满足条件（4.1）和（4.2）。设 $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是满足定理1.2假设的同胚序列。根据定理1.1，有

$$\sup_k \int_\Omega \phi(J_{h_k}(x))dx < \infty.$$

由于 h_k 在 W^1中弱收敛到 h，$^{n-1}(\Omega, \Omega')$，因此有

$$\sup_k \int_\Omega |Dh_k(x)|^{n-1}dx < \infty.$$

因此，序列 $\{h_k\}$ 满足定理4.1中的假设，因此 h满足条件(INV)。□

下一条注释的讨论表明， $L^{\frac{1}{n-1}}$-畸变函数可积性的条件是尖锐的。

注 4.1。 在 [17], 中，对每个 $0 < \alpha < 2$，都存在一个同胚序列$\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$，从 $B^3(0, 10)$ 映到 $B^3(0, 10)$，使得 $h_k \in W^{1,2}(B^3(0, 10)\ B^3(0, 10))$，且在边界 $\partial B^3(0, 10)$ 上满足 $h_k = id$，对每个 $k \in \mathbb{N}$ 以及

$$\sup_k \int_{B^3(0,10)} |Dh_k(x)|^2 + \frac{1}{J_{h_k}^{\alpha}(x)}dx < \infty.$$

然而， $\{h_k\}$ 的弱极限不满足(INV) 条件。取 $0 < \beta < 1/2$ 并选择 $\alpha = \frac{2\beta}{2-3\beta}$，则赫尔德不等式表明

$$\begin{aligned} \int_{B^3(0,10)} K_{h_k}^{\beta}(x)dx &= \int_{B^3(0,10)} \frac{|Dh_k(x)|^{3\beta}}{J_{h_k}^{\beta}(x)}dx \\ &\leq \left(\int_{B^3(0,10)} |Dh_k(x)|^2 dx\right)^{\frac{3\beta}{2}} \left(\int_{B^3(0,10)} \left(\frac{1}{J_{h_k}(x)}\right)^{\frac{2\beta}{2-3\beta}} dx\right)^{\frac{2-3\beta}{2}} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

当 $\alpha < 2$时， $\{h_k\}$ 的弱极限不满足(INV) 条件，这表明（至少对于 $n = 3$而言）不能降低（*1.4*）中的指数。

参考文献

[1] S. S. Antman，《弹性的非线性问题》。应用数学科学，第107卷。施普林格出版社，纽约，1995。[2] K. Astala，拟共形映射的面积畸变。《数学学报》173（1994），第1期，37–60。[3] K. Astala、D. Faraco、A. Guerra、A. Koski 和 J. Kristensen，下半连续性、Stoilow 分解与主映射，《纯粹与应用分析通讯》23（2024），第10期，1608–1645。[4] K. Astala、D. Faraco、A. Guerra、A. Koski 和 J. Kristensen，局部 Burkholder 泛函、拟凸性与几何函数论，arXiv:2309.03495。[5] K. Astala、T. Iwaniec 和 G. Martin，平面上的椭圆偏微分方程与拟共形映射，普林斯顿大学出版社，2009。[6] J. M. Ball，非线性弹性力学中的凸性条件与存在性定理，《数学力学分析档案》63（1976/77），第4期，337–403。[7] J. M. Ball，索伯列夫函数的全局可逆性与物质相互穿透，《爱丁堡皇家学会学报 A 辑》88（1981），315–328。[8] M. Barchiesi、D. Henao 和 C. Mora-Corral，索伯列夫空间中的局部可逆性及其在向列相弹性体与磁弹性中的应用。《理性力学与分析文档》224（2017），743–816。[9] M. Barchiesi、D. Henao、C. Mora-Corral 和 R. Rodiac，调和偶极子与新胡克能量在 $3D$ 弹性力学中的松弛，《理性力学与分析文档》247（2023）。[10] M. Barchiesi、D. Henao、C. Mora-Corral 和 R. Rodiac，论轴对称新胡克模型中的紧性缺失，《数学论坛：西格玛》12（2024）。[11] P. Bauman 和 D. Phillips，二维多凸泛函的单叶极小化子，《数学力学分析档案》126（1994），161–181。[12] P. Bauman、D. Phillips 和 N. Owen，非线性弹性力学中不可压缩材料的最大值原理与先验估计，《偏微分方程通讯》17（1992），第7–8期，1185–1212。[13] P. G. Ciarlet，《数学弹性力学》第一卷：三维弹性力学。数学及其应用研究，第20卷。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹，1988。[14] P. G. Ciarlet 和 J. Nečas，非线性弹性力学中的单射性与自接触，《数学力学分析档案》97（1987），第3期，171–188。[15] S. Conti 和 C. De Lellis，关于可压缩新胡克材料弹性理论的一些评注，《比萨高等师范学校科学年鉴》2（2003），521–549。[16] G. De Philippis 和 A. Pratelli，平面微分同胚在索伯列夫空间中的闭包，《亨利·庞加莱研究所非线性分析年刊》37（2020），第1期，181–224。[17] A. Doležalová、S. Hencl 和 J. Malý，满足 $W^{1,n-1}$ 及（INV）条件的同胚弱极限。《理性力学与分析文档》247（2023），第5期，第80篇，54页。[18] L. C. Evans 和 R. F. Gariepy，《测度论与函数的精细性质》。修订版。数学教科书。CRC 出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，2015。xiv+299 页。[19] H. Federer，《几何测度论》。数学科学基础丛书，第153卷。施普林格出版社，纽约，1969。xiv+676 页。[20] I. Fonseca 和 W. Gangbo，《分析与应用中的度理论》。牛津数学及其应用讲座系列，第2卷。牛津科学出版物。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，1995。[21] I. Fonseca 和 W. Gangbo，索伯列夫函数的局部可逆性，《工业与应用数学学会数学分析杂志》26（1995），第2期，280–304。

[22] F. W. Gehring，拟共形映射偏导数的 L^p可积性。《数学学报》130（1973），265–277。[23] J. Heinonen，《度量空间上的分析讲义》，Universitext Springer-Verlag，纽约，2001，x+140页。[24] J. Heinonen 和 P. Koskela，具有受控几何的度量空间中的拟共形映射，《数学学报》181（1998），第1期，1–61。[25] J. Heinonen、P. Koskela、N. Shanmugalingam 和 J. T. Tyson，度量测度空间上的索伯列夫空间，New Math. Monogr.，第27卷，剑桥大学出版社，剑桥，2015，xii+434页。[26] S. Hencl 和 P. Koskela，《有限畸变映射讲义》。数学讲义，第2096卷。施普林格，尚，2014。xii+176 页。[27] S. Hencl、A. Koski 和 J. Onninen，从二维到三维的索伯列夫同胚延拓，《泛函分析杂志》286（2024），第9期，论文编号110371，51页。[28] S. Hencl 和 J. Malý，索伯列夫同胚的雅可比行列式。《变分法与偏微分方程》38（2010），第1–2期，233–242。[29] T. Iwaniec 和 G. Martin，《几何函数论与非线性分析》，牛津数学专著，牛津大学出版社，（2001）。[30] T. Iwaniec、N.-T. Koh、L. V. Kovalev 和 J. Onninen，双连通域之间能量极小微分同胚的存在性，《数学发明》186（2011），第3期，667–707。[31] T. Iwaniec 和 J. Onninen，无牵引力能量极小变形的可逆性与拉格朗日方程，《变分法与偏微分方程》52（2015），第3–4期，489–496。[32] T. Iwaniec 和 J. Onninen，索伯列夫同胚的极限。《欧洲数学会杂志》19（2017），第2期，473–505。[33] T. Iwaniec 和 J. Onninen，单调霍普夫调和映射。《理性力学与分析文档》237（2020），第2期，743–777。[34] T. Iwaniec 和 J. Onninen，平面域与曲面上的单调索伯列夫映射，《理性力学与分析文档》219（2016），第1期，159–181。[35] P. Koskela、A. Koski 和 J. Onninen，映到约翰域上的索伯列夫同胚延拓，《泛函分析杂志》279（2020），第10期，108719，17页。[36] P. Koskela 和 J. Malý，有限畸变映射：雅可比行列式的零点集。《欧洲数学会杂志》5（2003），第2期，95–105。[37] P. Koskela、J. Onninen 和 K. Rajala，有限畸变映射：雅可比行列式的衰减。《几何分析杂志》22（2012），第4期，964–976。[38] A. Koski 和 J. Onninen，索伯列夫同胚延拓，《欧洲数学会杂志》23（2021），第12期，4065–4089。[39] A. Koski 和 J. Onninen，索伯列夫若尔当-舍恩弗利斯问题，《数学进展》413（2023），论文编号108795，32页。[40] M. W. Licht，平滑投影与混合边界条件。《数学计算》88（2019），第316期，607–635。[41] J. Malý、D. Swanson 和 W. Ziemer，索伯列夫映射的余面积公式。《美国数学会会刊》355（2003），第2期，477–492。[42] P. Monk，《麦克斯韦方程的有限元方法》，数值数学与科学计算，牛津大学出版社，纽约，2003。[43] C. B. Morrey，《（路径）曲面的拓扑学》，《美国数学杂志》57（1935），第1期，17–50。[44] S. Müller 和 S. J. Spector，一种允许空穴化的非线性弹性力学存在理论。《理性力学与分析文档》131，第1期（1995），1–66。[45] S. Müller、S. J. Spector 和 Q. Tang，索伯列夫映射的可逆性与一种拓扑性质。《工业与应用数学学会数学分析杂志》 27（1996），959–976。[46] S. Müller、Tang Qi 和 B. S. Yan，论一类不允许空穴化的新型弹性变形，《亨利·庞加莱研究所非线性分析年刊》11（2）（1994），217–243。

[47] E. M. Stein，奇异积分与函数的可微性。普林斯顿数学丛书第 30 卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1970 年，xiv+290 页。[48] Y. G. Reshetnyak，有界畸变空间映射，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1989 年。[49] V. Šverák，有限能量形变的正则性，《有理力学与分析档案》100 (1988)，第 2 期，105–127 页。

于韦斯屈莱大学数学与统计学系，芬兰于韦斯屈莱 40014，邮政信箱 35（MaD）；捷克科学院信息理论与自动化研究所决策理论系，Pod Vodárenskou věží 4，捷克共和国布拉格 8，邮编 182 00

电子邮箱：dolezalova@utia.cas.cz

雪城大学数学系，美国纽约州雪城，邮编 13244；于韦斯屈莱大学数学与统计学系，邮政信箱 35（MaD），40014 于韦斯屈莱，芬兰

电子邮箱地址: jkonnine@syr.edu

于韦斯屈莱大学数学与统计学系，邮政信箱 35（MaD），40014 于韦斯屈莱，芬兰电子邮箱地址: yizhe.y.zhu@jyu.fi

北京航空航天大学数学科学学院，中国北京市 102206电子邮箱地址: zhzhu@buaa.edu.cn