arXiv:2512.15522v1 [nlin.SI] 17 Dec 2025

高维向量场的刘维尔可积性

Waleed Aziz 数学系，理学院，萨拉赫丁大学，
埃尔比勒，库尔德斯坦地区，伊拉克
waleed.aziz@su.edu.krd

Colin Christopher 工程、计算与数学学院，普利茅斯大学，普利茅斯，PL4 8AA，英国C.Christopher@plymouth.ac.uk

Chara Pantazi 加泰罗尼亚理工大学数学系（EPSEB），Av. Doctor Maranon，44-50，08028，巴塞罗那，西班牙chara.pantazi@upc.edu

Sebastian Walcher 数学系，亚琛工业大学，52056 亚琛，
德国walcher@mathga.rwth-aachen.de

摘要

我们研究维数为 $n > 2$ 的复有理向量场（等价地，研究 n 个变量上的 $n-1$ 次微分形式），它们存在刘维尔第一积分。我们将 Singer 关于 $n = 2$ 的经典结果加以推广，主要结果指出，存在一个第一积分，它可由系数属于有理函数域的有限代数扩张中的一形式经过连续两次积分得到。证明以一种新颖的方式运用普伊瑟级数，从而简化计算。我们还应用此方法，给出了关于有理一形式的 Singer 定理，以及关于有理向量场初等可积性的 Prelle-Singer 定理的初等证明。

MSC (2020)：34A99 ，12H05 ，34M15
。关键词：微分形式、刘维尔函数、Darboux 函数、普伊瑟级数。

1 引言与结果概述

有限项积分的经典理论可追溯至刘维尔。关于 20 世纪的论述，可参阅 Risch [22, 23] 和 Rosenlicht [24, 25]的奠基性著作。刘维尔函数由有理函数通过有限次添加积分、指数函数和代数函数构造而成，详情见 [27, 9] 。它们在函数、向量场和微分形式的可积性问题中发挥着特殊作用。

刘维尔型 可积性不仅因其本身具有研究价值，也与应用密切相关。 re

已有许多出版物刻画了某些平面系统族的刘维尔第一积分；仅举几例，我们提及 Cairo 等人 [6], Oliveira 等人 [20]。我们还要指出，第一积分的存在会对系统的动力学产生重要影响；例如参见 Garc´ıa 和 Gin´e [15]。此外，还应提及有关刻画三维中某些系统族的刘维尔第一积分的研究；参见 Ollagnier [18, 19], ，以及近期关于某些三维系统可积性方面的研究；参见 Ferˇcec 等人 [14],，另见 [17]。

文献中已经提出了几种算法程序，用于求取二维向量场的刘维尔第一积分。例如，其中一些方法建立在经典的 Preller–Singer 方法之上[21]。参见 Avellar 等人 [2], Ch`eze 和 Combot [8], Duarte 以及 da Mota [13]。关于高维向量场刘维尔第一积分的计算算法，例如参见 Combot [11]。

在一篇有影响力的论文中， [27], Singer 证明了：二维多项式向量场存在刘维尔第一积分，当且仅当存在一个积分因子，其对数微分是闭有理 1-形式。如果 ω 是定义该系统等值曲线的多项式 1-形式，则存在一个闭有理 1-形式 α，使得 $\omega \cdot \exp(-\int \alpha)$是闭形式，因此存在刘维尔第一积分 $\int(\omega \cdot \exp(-\int \alpha))$。此外，这类 1-形式必然是 $Darboux$函数的对数微分，即形如 $\exp(g/f)\ \prod f_i^{a_i}$， 的函数，其中 f_i、 f 和 g 是坐标变量的多项式，而 a_i 是复常数。因此，根据 Singer 定理，Darboux 可积性涵盖了二维系统的所有闭形式解。

Singer 定理已通过多种方式得到推广，例如参见 Zo-l̨adek [29], Casale [4] 和 Zhang [28]。具体而言，Zo-l̨adek 在 [29] 中给出了 Singer 定理关于有理 1-形式的多维版本。Zhang [28] 将 Singer 定理推广至 n 维中具有 Darboux 型 Jacobi 乘子的向量场。

本文旨在将 Singer 定理扩展并修正，以适用于高维复多项式向量场或有理向量场。作为预备步骤，我们在定理 1 中陈述了 Singer 定理关于 n 个变量中的有理一形式的版本（由 Zo-l̨adek [29]给出）。因此，Singer 定理关于二维 1-形式的结论可以自然地扩展到高维。本文采用的视角使证明非常简洁；我们给出该证明，以便引出更一般的情形。

此外，我们还陈述并证明了有理函数域$K = \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$上闭 1-形式的一种刻画：它们是 K上 Darboux 函数的对数微分。

定理 3 是本文的主要结果。粗略地说，该定理表明，存在 K的一个有限代数扩张 $\tilde{K}$以及 K上的 1-形式 ω、 α，使得 $\omega \cdot \exp(-\int \alpha)$是一个闭 1-形式，因此存在形如 $\int(\omega \cdot \exp(-\int \alpha))$的 Liouvillian 第一积分。这是 Singer 定理关于 n 维 $\tilde{K}$向量场的推广。与二维情形不同，通常不能选取 $K = K$，而必须将有理函数域替换为一个有限代数扩张。

在三维情形中，我们进一步证明，如果不存在满足 Jacobi 乘子，参见定理 4。

我们的证明始终使用形式 Laurent 级数和普伊瑟级数。为展示这些技术的适用范围，我们在最后一节运用它们重新证明了关于初等第一积分的 Prelle-Singer 定理 [21] 。

2 背景与一些已知结果

2.1 刘维尔扩张

我们回顾微分代数中的一些基本概念和事实。更多详情请参见 Kolchin 的专著 [16]。域均假定为特征零。

一个微分域是一个对偶 (K, Δ)，其中 K 是一个域，并配有 K 的有限个导子 Δ 。因此，对于所有 $\partial \in \Delta$ 和所有 x, $y \in K$，都有恒等式 $\partial(x + y) = \partial x + \partial y$, $\partial(xy) = (\partial x)y + x(\partial y)$。我们将只讨论交换微分域，也就是说， Δ 中的导子彼此交换。

(K, Δ) 的常数是满足 $\partial x = 0$ 对所有 $\partial \in \Delta$ 均成立的那些元素 $x \in K$，而常数子域记为 C_K。

(K, Δ) 的扩张域 $\tilde{K}$ 是一个微分域 $(\tilde{K}, \tilde{\Delta})$，其中 $\tilde{\Delta}$ 中的每个导子 $\partial \in \Delta$ 都（唯一地）限制为一个元素 $\partial \in \Delta$。因此，自然可以记作 (K, Δ)。

我们主要关注有理函数域 $\mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$，其中 $\Delta = \{\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n\}$，以及它的扩张。[1] 此外，我们着重研究刘维尔扩张（另见 Singer [27]）：

定义 1。 微分域的扩张 $L \supset K$ 称为 K 的刘维尔扩张，如果 $C_K = C_L$，且存在如下形式的域塔

$$K = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_m = L, \tag{1}$$

使得对每个 $i \in \{0, \ldots, m-1\}$，以下条件之一成立：

(i) $K_{i+1} = K_i(t_i)$，其中对于所有 $\partial \in \Delta$，$t_i \neq 0$ 且 $\partial t_i / t_i \in K_i$；因此 t_i 是某个 K_i元素的积分的指数。

(ii) $K_{i+1} = K_i(t_i)$，其中对于所有 $\partial \in \Delta$，$\partial t_i \in K_i$；因此 t_i 是 K_i中某个元素的积分。

(iii) $K_{i+1} = K_i(t_i)$，其中 t_i 在 K_i上是代数的。

注 1. 根据本原元定理，条件 (iii) 等价于 K_{i+1} 是 K_i的有限代数扩张。此外，我们注意到，给定的 K 的刘维尔扩张 K 的导子可规范地延拓到 K的任意有限代数扩张。

我们将广泛使用微分形式，因为它们通常能使结果的陈述和证明都更加方便。如果 L 是 $K = \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$的微分扩张，那么我们用 L' 表示系数属于 L的微分 1-形式空间。也就是说，每个 1-形式 $\alpha \in L'$ 都可以写成 $\alpha = \sum a_i \, dx_i$，其中 $a_i \in L$。由于 x_i 代数独立，我们可以将dx_i 视为占位符，用于计算并跟踪各种导数。我们将自由使用外微分算子 d 和楔积的熟知性质，但不对 dx_i作更深入的代数解释。

回顾一下，当 $d\beta = 0$ 时，称微分形式 β 闭形式；而当 $\beta = d\theta$ 时，称其为恰当形式，其中 θ 是某个微分形式。

注 2. 如果 L 是 $K = \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$ 的一个微分扩张，那么可以用以下几种类型重新表述定义 1 中的条件 (i)–(iii)：

(i) $K_{i+1} = K_i(t_i)$，其中 $t_i \neq 0$ 和 $dt_i = \delta_i t_i$，且具有某个 $\delta_i \in K_i'$（必然是 $d\delta_i = 0$）。

(ii) $K_{i+1} = K_i(t_i)$，其中 $dt_i = \delta_i$ 满足 $\delta_i \in K_i'$（必然是 $d\delta_i = 0$）。

(iii) K_{i+1} 是 K_i 的有限代数扩张。

我们注意到，在有理函数域 K 的扩张这一语境下，常数上的条件 $C_K = C_L$ 总是可以满足的（见 Singer [27]）；因此，以下不再明确提及该条件，而是直接使用这样的推论：对于 $\phi \in L$，$d\phi = 0$ 意味着 $\phi \in C_K$。

2.2 Singer 关于一形式的定理

以下定义是标准的。

定义 2. 给定一个 1-形式 $\omega \in \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)'$，若存在某个刘维尔扩张 L，它是 $\mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$ 的扩张，并且其中有 ϕ 满足 $d\phi \wedge \omega = 0$，则称 ω 是刘维尔可积的。更具体地说，当定义域相关时，我们将称 ω 在 L 上刘维尔可积。

[1] 事实上，可以将 $\mathbb{C}$ 替换为任意特征为零的代数闭域。

注 3.

(a) 我们记录刘维尔可积性的一种便捷刻画：

- 若定义 2 中的条件成立，则对于某个 $m \in L$ 和 $d\omega = \alpha \wedge \omega$，有 $\omega = m\, d\phi$，且$\alpha = dm/m$，因此 $d\alpha = 0$。
- 反之，若存在 K 的刘维尔扩张 L，以及满足 $d\omega = \alpha \wedge \omega$ 和 $d\alpha = 0$ 的 $\omega \neq 0$， $\alpha \in L'$，则根据注 2 的 (i) 部分，存在 m，它属于 L 的一个刘维尔扩张 L_1，且满足 $\alpha = -dm/m$，因此

$$d(m\omega) = dm \wedge \omega + m d\omega = m(-\alpha \wedge \omega + d\omega) = 0,$$

这又意味着，对于某个 ϕ，有 $m\omega = d\phi$，其中 ϕ 属于刘维尔扩张 $L_2 \supset L_1$，因而也属于$\mathbb{C}(x_1, \ldots\ldots, x_n)$。称 m 为 ω 的反积分因子。

(b) 上述条件意味着 $d\omega \wedge \omega = 0$，因此 ω 在通常意义下是完全可积的（参见例如 Camacho 和 Lins Neto 的 [7], 附录 §3）。

下面的结果表明，Singer 定理中关于二维空间上 1-形式的结论，同样适用于任意维空间上的 1-形式。该结果及其首个证明归功于 Zo-l,adek，见 [29]。这里我们给出一个不同的初等证明。

定理 1 （Singer 定理：关于 1-形式）。设 ω 是域 $K = \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$ 上的有理 *1*-形式。那么， ω是刘维尔可积，当且仅当存在一个闭形式 *1*-形式 $\alpha \in \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)'$，使得 $d\omega = \alpha \wedge \omega$。

证明。 我们对域塔使用归纳法。设 K_{i+1} 是 K_i的一个刘维尔扩张，属于定义 1 中的类型 (i)–(iii) 之一，并考虑一个闭形式 1-形式 $\alpha \in K'_{i+1}$，使得 $d\omega = \alpha \wedge \omega$。我们必须证明存在 $\tilde{\alpha} \in K'_i$，使得 $d\omega = \tilde{\alpha} \wedge \omega$ 且 $d\tilde{\alpha} = 0$。我们分别讨论注 2 中的各种类型。

类型 (i)。我们可以假设 $t_i = t$ 在 K_i上是超越的，否则这属于类型 (iii)。于是（由引理 4），将 α 写成关于 t的降幂形式洛朗级数，

$$\alpha = \alpha_r t^r + \alpha_{r-1} t^{r-1} + \ldots, \quad \alpha_r \in K'_i, \quad \alpha_r \neq 0. \tag{2}$$

比较 $\alpha \wedge \omega = d\omega$ 和 $d\alpha = 0$中 t^0 的各次幂，可得 $d\omega = \alpha_0 \wedge \omega, \quad d\alpha_0 = 0.$。因此，我们可以取 $\tilde{\alpha} = \alpha_0 \in K_i$。

类型 (ii)。与上文一样，我们假设 $t_i = t$ 在 K_i上是超越的，并将 α 写成形式 (2)。由 $d\alpha = 0$ 可推出 $d\alpha_r = 0$。此外，由 $d\omega = \alpha \wedge \omega$，根据 r可分为三种情形：

- 若 $r > 0$，则 $\alpha_r \wedge \omega = 0$。在这种情况下，存在 $h \in K_i$ 使得 $\alpha_r = h\omega$，于是得到 $d\omega = -\frac{dh}{h} \wedge \omega$。我们可以取 $\tilde{\alpha} = -\frac{dh}{h}$。
- 若 $r = 0$，则有 $d\omega = \alpha_0 \wedge \omega$，并且可以取 $\tilde{\alpha} = \alpha_0$。
- 若 $r < 0$，则可知 $d\omega = 0$，并且可以取 $\tilde{\alpha} = 0$。

类型 (iii)。不失一般性，可假设该扩张是伽罗瓦扩张，其伽罗瓦群G 的阶为 N。分别对 $d\omega = \alpha \wedge \omega$ 和 $d\alpha = 0$ 两边取迹，得到

$$d\omega = \left(\frac{1}{N} \sum_{\sigma \in G} \sigma(\alpha)\right) \wedge \omega, \qquad d\left(\frac{1}{N} \sum_{\sigma \in G} \sigma(\alpha)\right) = 0.$$

因此，我们可以选择 $\tilde{\alpha} = \frac{1}{N} \sum_{\sigma \in G} \sigma(\alpha) \in K_i$。

□

此 pro 这说明了在扩张的生成元中使用幂级数的有效性。F or
下面我们主要的结 论则需要使用 Puiseux 展开。
一个关键作用将由 *Darboux* 函数承担。这类函数具有如下形式

$$\phi = \exp(g/f)\prod f_i^{a_i}, \tag{3}$$

其中， f_i、 g和 f是 $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$的元素，而 a_i是复数。给定一个 Darboux 函数 ϕ，其对数微分 $d\phi/\phi$显然是一个闭有理 1-形式。反过来，我们将证明，每个闭有理 1-形式都必定是某个 Darboux 函数的对数微分。下述定理的情形$n=2$ 由 Christopher [9] 给出；Schinzel [26]则在不同的背景下给出了这一情形。

定理 2。考虑一个 *1*-形式 $\alpha \in \mathbb{C}(x_1,\dots,x_n)'$。若 α是闭形式，则存在元素 g、 f、 $f_i \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ 以及常数 $a_i \in \mathbb{C}$，使得

$$\alpha = d\left(\frac{g}{f}\right) + \sum a_i \frac{df_i}{f_i}.$$

证明。 我们对 n 使用归纳法。 $n=1$ 的情形归结为一个众所周知的事实： x_1 中有理函数的原函数具有 $r(x_1) + \sum a_i \log(x_1 - b_i)$ 的形式，其中 $a_i, b_i \in \mathbb{C}$ 是有理函数 r。

¯现在假设 $n > 1$，并且定理对 $\mathbb{C}(x_1,\dots,x_{n-1})$ 成立。令 K 为 $\mathbb{C}(x_1,\dots,x_{n-1})$ 上的一个分裂域，它是 α的系数的公分母的分裂域，并将这个¯公分母的不同根记为 $b_1,\dots,b_r \in K$。于是，我们可以将 α 在 x_n 中表示为关于 $\mathbb{C}(x_1,\dots,x_{n-1})$ 的部分分式展开:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{a_{i,j}}{(x_n-b_i)^j}dx_n + \sum_{i=0}^{N} c_i x_n^i dx_n + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{\Omega_{i,j}}{(x_n-b_i)^j} + \sum_{i=0}^{M} x_n^i \omega_i,$$

其中 t he $\Omega_{i,j}$, ω_i 是 $\mathbb{C}(x_1,\dots,x_{n-1})'$ 中的元素，而 $a_{i,j}$ 和 c_i 是 $\mathbb{C}(x_1,\dots,x_{n-1})$ 中的元素 .

通过计算 $d\alpha = 0$ 并比较部分分式展开中的系数，我们得到以下结果，适用于所有 i， $j \geq 0$，其中约定$a_{i,\,0} = 0$ 且 $\Omega_{i,\,0} = 0$:

$$dc_i - (i+1)\omega_{i+1} = 0, \tag{4}$$
$$da_{i,j+1} + j a_{i,j} db_i - j\Omega_{i,j} = 0, \tag{5}$$
$$d\omega_i = 0, \tag{6}$$
$$d\Omega_{i,j+1} + j db_i \wedge \Omega_{i,j} = 0. \tag{7}$$

这些可以看作是 $\mathbb{C}(x_1,\dots,x_{n-1})'$中的恒等式。特别地， $da_{i,\,1} = 0$，因此$a_{i,\,1} \in \mathbb{C}$。由（6）$d\omega_0 = 0$ 可知，因此根据假设，我们可以写成

$$\omega_0 = d\left(\frac{\tilde{g}}{\tilde{f}}\right) + \sum \tilde{a}_i \frac{d\tilde{f}_i}{\tilde{f}_i},$$

˜ ˜对某些 $\tilde{g}$， f， $f_i \in \mathbb{C}(x_1,\dots,x_{n-1})$ 和 $\tilde{a}_i \in \mathbb{C}$。方程（4）—（7）允许我们写出

$$\begin{aligned} \alpha - \omega_0 \;=\; & \sum_i a_{i,1}\frac{d(x_n-b_i)}{(x_n-b_i)} + \sum_{j>1}\sum_i d\left(\frac{a_{i,j}}{(x_n-b_i)^{j-1}}\left(\frac{-1}{j-1}\right)\right) \\ & + \sum_i d\left(\frac{c_i\, x_n^{i+1}}{i+1}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

¯ ¯现在令 G 为 K 关于 $\mathbb{C}(x_1, \ldots\ldots, x_{n-1})$ 的伽罗瓦群。对于 K 上的任意微分形式 μ 和 $\sigma \in G$，我们用 $\sigma(\mu)$ 表示让 σ 作用于其系数后得到的微分形式。对方程（8）两边取迹，并注意到 σ 与外微分可交换，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\sigma(\alpha-\omega_0) &= \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\sum a_{i,1}\frac{d(x_n-\sigma(b_i))}{(x_n-\sigma(b_i))}\\ &+\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\sum\sum d\left(\frac{\sigma(a_{i,j})}{(x_n-\sigma(b_i))^{j-1}}\left(\frac{-1}{j-1}\right)\right)\\ &+\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\sum d\left(\frac{\sigma(c_i)\,x_n^{i+1}}{i+1}\right).\end{aligned} \tag{9}$$

¯由于 G 是所有固定 $\mathbb{C}$（$x_1, \ldots, x_{n-1}$）的 K 自同构所构成的集合，因此该方程的左边等于 $\alpha - \omega_0$，由此得到所需形式的 α。 □

注 4. 结合定理 1 和定理 2，我们可以看到，1-形式 ω 刘维尔可积，当且仅当它存在达布积分因子。

3 Singer 定理在高维向量场中的推广

现在我们考虑有理向量场

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{10}$$

在 $\mathbb{C}^n$ 上， $n \geq 3$；等价地，相应的（$n-1$）-形式

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} P_i \, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots dx_n \tag{11}$$

定义在 $K = \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$ 上。我们将陈述并证明一个较弱版本的 Singer 定理，该版本适用于任意维数 $n \geq 3$。

定义 3。 刘维尔扩张 $\mathbb{C}(x_1, \ldots\ldots, x_n)$ 中的非恒定元素 ϕ，若满足 $\mathcal{X}\phi = 0$，或等价地满足 $d\phi \wedge \Omega = 0$，则称其为向量场 $\mathcal{X}$ 的刘维尔第一积分。

注 5。 鉴于注 3，该性质等价于存在某个刘维尔扩张L of K 以及 L' 中的一形式 $\omega \neq 0$、 α，使得

$$\omega \wedge \Omega = 0, \quad d\omega = \alpha \wedge \omega, \quad d\alpha = 0. \tag{12}$$

在这种情况下，我们将简要地（并稍微不严谨地）称 Ω 在 L 上刘维尔可积。因此，我们有 Ω 的一个形如 $\int(\omega \cdot \exp(-\int\alpha))$ 的第一积分。

3.1 主要结果

我们的主要结果表明，Ω 在某个扩张 L上的刘维尔可积性，虽然未必意味着其在 K上的刘维尔可积性，却意味着其在 K的有限代数扩张上的刘维尔可积性。

定理 3 (Singer 定理的推广至 n 维)。 设Ω 是$K = \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$上的$(n-1)$–微分形式 ***(11)***。若$\Omega$存在刘维尔第一积分，则存在 K的有限代数扩张 K'，以及 ω、 $\alpha \in K'$、 $\omega \neq 0$，使得 ***(12)*** 成立。

在证明该定理之前，我们先陈述两个引理。第一个引理的证明是直接的。

引理 1. 设 L 是 $K = \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$的一个微分扩张，此外， $0 \neq \ell \in L$、 $0 \neq \omega \in L'$和$\alpha \in L'$ 满足 $d\omega = \alpha \wedge \omega$、 $d\alpha = 0$。则

$$d\left(\frac{\omega}{\ell}\right) = \left(\alpha - \frac{d\ell}{\ell}\right) \wedge \frac{\omega}{\ell}, \quad d\left(\alpha - \frac{d\ell}{\ell}\right) = 0. \tag{13}$$

引理 2. 设 L_0 是 $K = \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$的一个微分扩张， t 在 L_0 上是超越的，且$L_0(t)$ 在 L_0上是刘维尔可积的，而 L 是 $L_0(t)$的一个有限代数扩张。假设 L_0 和 L具有相同的常数。

若存在 ω、 $\alpha \in L'$，使得 $\omega \neq 0$、 $\omega \wedge \Omega = 0$、 $d\omega = \alpha \wedge \omega$、 $d\alpha = 0$ （因此 Ω 在 L上是刘维尔可积的），则存在 L_0的一个有限代数扩张 L_0，以及 $\widetilde{\omega}$、 $\widetilde{\alpha} \in L_0'$，使得 $\widetilde{\omega} \neq 0$、 $\widetilde{\omega} \wedge \Omega = 0$、$d\widetilde{\omega} = \widetilde{\alpha} \wedge \widetilde{\omega}$、 $d\widetilde{\alpha} = 0$ （因此 Ω 在 L_0上是刘维尔可积的）。

证明。根据引理 5（见附录），存在一个有限扩张 $L_0 \supset L_0$，使得我们可以将 ω， α 写成关于 $\tau = t^{1/m}$ 的降幂形式洛朗级数，其中 m 是某个正整数，因此

$$\omega = \omega_r \tau^r + \omega_{r-1}\tau^{r-1} \ldots, \quad \omega_k \in \widetilde{L}_0' \ (k \leq r), \quad \omega_r \neq 0, \tag{14}$$

且 $\alpha = 0$ 或者

$$\alpha = \alpha_s \tau^s + \alpha_{s-1}\tau^{s-1} \ldots, \quad \alpha_k \in \widetilde{L}_0' \ (k \leq s), \quad \alpha_s \neq 0. \tag{15}$$

由于 t 是超越的，我们有 $\omega \wedge \Omega = 0$，因此对于所有 k，都有 $\omega_k \wedge \Omega = 0$。
现在我们来考察定义 1 中的超越扩张类型。

- 类型 **(i)**。设 $dt = t\delta$ 满足 $d\delta = 0$，因此 $d\tau = \frac{1}{m}\tau\delta.$。由此我们得到最高次项

$$d\omega = \tau^r \left(\frac{r}{m}\delta \wedge \omega_r + d\omega_r\right) + \cdots, \quad d\alpha = \tau^s \left(\frac{s}{m}\delta \wedge \alpha_s + d\alpha_s\right) + \cdots$$

除非 $\alpha = 0$。比较 $\alpha \wedge \omega = d\omega$ 两边，得到以下三种情况：

– 当 $\alpha = 0$ 或 $s < 0$ 时（因此左边的最高次数为 $< r$），我们只需考虑 $d\omega_r + \frac{r}{m}\delta \wedge \omega_r = 0$。此时取 $\widetilde{\alpha} = -\frac{r}{m}\delta$ （其中 $d\widetilde{\alpha} = 0$）和 $\widetilde{\omega} = \omega_r$。– 当 $s = 0$ 时，我们得到 $\alpha_0 \wedge \omega_r = d\omega_r + \frac{r}{m}\delta \wedge \omega_r$。此时取 $\widetilde{\alpha} = \alpha_0 - \frac{r}{m}\delta$ （注意 $d\alpha_0 = 0$）和 $\widetilde{\omega} = \omega_r$。– 当 $s > 0$ 时，我们得到 $\alpha_s \wedge \omega_r = 0$，因此对于某个 $h \in L_0$，有 $\alpha_s = h\,\omega_r$。由于 $\omega_r \wedge \Omega = 0$，于是 $\alpha_s \wedge \Omega = 0$。此外，由 $d\alpha = 0$ 可得 $d\alpha_s + \frac{s}{m}\delta \wedge \alpha_s = 0$。因此我们可以取 $\widetilde{\alpha} = -\frac{s}{m}\delta$（其中 $d\widetilde{\alpha} = 0$）和 $\widetilde{\omega} = \alpha_s$。

- 类型 **(ii)**。这里， t在 $\widetilde{L}_0$, $dt = \delta$ 上是超越的，且 $d\delta = 0$。因此 $d\tau = \frac{1}{m}\tau^{1-m}\delta$，于是

$$d(\tau^r \omega_r) = \tau^r d\omega_r + \frac{r}{m}\tau^{r-m}\delta \wedge \omega_r,$$

这表明 $d\omega$ 的首项恰为 $\tau^r d\omega_r$。同理， $d\alpha$ 的首项等于$\tau^s d\alpha_s$，除非 $\alpha = 0$。比较 $\alpha \wedge \omega = d\omega$的首项，我们得到三种情况：

– 当 $s > 0$ 时，我们得到 $\alpha_s \wedge \omega_r = 0$，从而对于某个 $h \in L_0$ 有 $\alpha_s = h \cdot \omega_r$。由于 $\omega_r \wedge \Omega = 0$，因此$\alpha_s \wedge \Omega = 0$。由 $d\alpha = 0$ 可见 $d\alpha_s = 0$。在这种情况下，取 $\widetilde{\alpha} = 0$ 和 $\widetilde{\omega} = \alpha_s$。

– 当 $s=0$ 时，我们看到 $\alpha_0 \wedge \omega_r = d\omega_r$，并且由 $d\alpha = 0$ 得到 $d\alpha_0 = 0$。在这种情况下，取 $\widetilde{\alpha} = \alpha_0$ 和 $\widetilde{\omega} = \omega_r$。– 当 $\alpha = 0$ 或 $s < 0$ 时，则有 $d\omega_r = 0$。取 $\widetilde{\alpha} = 0$ 和 $\widetilde{\omega} = \omega_r$。

□

以下结论现在可由引理 2 直接推出。

定理 *3* 的证明。考虑一个塔

$$K = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_m = L,$$

如定义 1（或注 2）所述，并假设对于某个 $i > 1$，存在一个有限代数扩张 $K_{i+1} \supset K_i$，且 ω、$\alpha \in K'_{i+1}$ 满足式 (12) 中的条件。不失一般性，$K_i \supset K_{i-1}$ 此时是~超越的，而引理 2 表明存在一个有限代数扩张 K_{i-1}，它是 K_{i-1}的扩张，并且$\widetilde{\omega}$，$\widetilde{\alpha} \in K'_{i-1}$，如式 (12) 所要求。因此，通过下降法可以消去所有超越扩张。

□

因此，该向量场存在一个第一积分，它由对 1-形式 ω 和 α，~进行积分，再通过式 (12) 得到；这些微分形式定义在 K上。也就是说，存在一个形式为 $\phi = \int_{e^{\int \alpha}} \omega$的第一积分，其中 ω，$\alpha \in K'$。这样的积分通常是多值的。

若定理的结论对 $\widetilde{K} = K$成立，则根据定理 2，$e^{\int \alpha}$ 是 Darboux 型。（当 $\alpha = 0$时，我们只有一个形式为 $\int \omega$的第一积分。）如果在 K' 自身中不存在满足（12）的 ω 和 α，那么我们称 Ω 为例外的。Christopher 等人将在即将发表的论文 [10]中详尽讨论这些例外情形。这里我们只指出，这些情形确实存在，并且具有非常优美的群结构。特别是，当维数为 $n = 3$ 时，例外情形与球面的有限旋转群之间存在对应关系。

3.2 具有刘维尔第一积分的三维向量场

在例外情形中，根据向量场~的维数以及扩张 $[K$ 的大小：$K]$，还可以进一步化简。我们针对 $n = 3$这一特殊情形给出一些细节，而高维情形则留待即将发表的论文 [10]讨论。考虑向量场

$$\mathcal{X} = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} + R\frac{\partial}{\partial z} \tag{16}$$

与相应的 $\mathbb{C}^3$ 2-形式

$$\Omega = P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy. \tag{17}$$

根据定理 3，存在一个积分 $\omega \in L'$，其中 L是 K的有限代数扩张，满足 $d\omega = \alpha \wedge \omega$、$\alpha \in L'$、$d\alpha = 0$。不妨设 L 是 K 上的伽罗瓦扩张，其伽罗瓦群为 G。

首先假设对于所有 $\sigma \in G$，$\sigma(\omega) \wedge \omega = 0$。我们选取 η、$\theta \in K'$，使得 $\eta \wedge \Omega = \theta \wedge \Omega = 0$、$\eta \wedge \theta \neq 0$。于是存在 k、$\ell \in L$，使得 $\omega = k\eta + \ell\theta$。由引理 1 可知

$$\widetilde{\omega} := \frac{\omega}{k} = \eta + \widetilde{\ell}\theta$$

满足 $\widetilde{\omega} \wedge \Omega = 0$，且 $d\widetilde{\omega} = \widetilde{\alpha} \wedge \widetilde{\omega}$, $d\widetilde{\alpha} = 0$具有 $\widetilde{\alpha} = \alpha - dk/k \in L'$。由于对于所有 $\sigma \in G$，$\sigma(\widetilde{\omega}) \wedge \widetilde{\omega} = 0$，我们有~ ~ $\sigma(\widetilde{\omega}) \wedge \widetilde{\omega} = (\ell - \sigma(\ell))\ \eta \wedge \theta$，因此对于所有 $\sigma \in G$，$\sigma(\ell) = \ell$，且 $\widetilde{\omega} \in K'$。最后，对 $d\widetilde{\omega} = \widetilde{\alpha} \wedge \widetilde{\omega}$ 取迹可知，可以取 $\widetilde{\alpha} \in K'$。这种情形并非例外，因为我们可以选择 ω 和α 属于 K'。

现在假设对于某个 $\tau \in G$， $\tau(\omega) \wedge \omega \neq 0$。在这种情况下，存在两个线性无关的刘维尔第一积分，其微分形式为 ω和 $\tau(\omega)$。由于 $\tau(\omega) \wedge \Omega = \omega \wedge \Omega = 0$，我们必有对于某个 $\ell \in L$， $\tau(\omega) \wedge \omega = \ell\Omega$。取微分后，得到

$$d\Omega = (\alpha + \tau(\alpha) - \frac{d\ell}{\ell}) \wedge \Omega,$$

其中 $d(\alpha + \tau(\alpha) - \frac{d\ell}{\ell}) = 0$。由上述方程的迹可知，存在一个 $\beta \in K'$，使得 $d\Omega = \beta \wedge \Omega$ 且 $d\beta = 0$。因此，存在一个形如 $e^{\int \beta}$ 的 Jacobi 逆乘子。根据定理 2，它必为 Darboux 型。我们已证明：

定理 4（Singer 定理的推广：三维向量场）。设 $K = \mathbb{C}(x, y, z)$，且 Ω 为定义在 K 上的 *2*-形式 *(17)*。若 Ω 存在刘维尔第一积分，则以下情况之一成立：

（I）存在 *1*-形式 $\omega, \alpha \in K'$，使得

$$\omega \neq 0,\ \omega \wedge \Omega = 0,\ \alpha \wedge \omega = d\omega,\ d\alpha = 0.$$

也就是说， ω 在 K 上是 *Darboux* 可积的，并且 Ω 存在一个形如 $\phi = \int \frac{\omega}{m}$ 的第一积分，其中 $m = e^{\int \alpha}$ 是定义在 K 上的 *Darboux* 函数。

(II) 存在一个 *1*–微分形式 $\beta \in K'$，使得 $d\Omega = \beta \wedge \Omega$，其中 $d\beta = 0$。因此，Ω 在 $K = \mathbb{C}(x, y, z)$上具有一个 *Darboux* 型 *Jacobi* 逆乘子 $m = e^{\int \beta}$。 [2]

该定理的证明还表明：

推论 1. 设 $K = \mathbb{C}(x, y, z)$，并设 Ω 是定义在 K 上的 *2*–微分形式 *(17)*。如果Ω 存在一个刘维尔第一积分，但不存在两个相互独立的刘维尔第一积分，那么 *(I)* 成立。

4 Prelle-Singer 定理的证明

本节采用普伊瑟级数方法证明 Prelle 和 Singer 的一个著名定理，从而进一步展示该方法。我们考察定义在 $K = \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$ 上、次数为 $n - 1$ 的向量场 (10)，等价地，考察相应的微分形式 (11)。我们回顾一些概念和事实（例如参见 Rosenlicht [24]）。

定义 4。
微分扩域 L of K 称为 初等的，当且仅当 K 和 L 具有相同的常数，并且存在如下形式的域塔

$$K = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_N = L, \tag{18}$$

使得对于每个 $i \in \{0, \ldots, m-1\}$，我们都有以下情形之一：

(i) $K_{i+1} = K_i(t_i)$，其中 $t_i \neq 0$ 且 $dt_i/t_i = dR_i$，并满足某个 $R_i \in K_i$（添加一个指数函数 l);

(ii) $K_{i+1} = K_i(t_i)$，其中 $dt_i = dR_i/R_i$ 且 $R_i \in K_i$（添加一个对数）；

(iii) K_{i+1} 是 K_i 的有限代数扩张。

与刘维尔扩张的情形一样，在我们的语境中，对常数的条件不存在问题。

[2]关于 Jacobi 逆乘子的概念，参见 Berrone 和 Giacomini [4]。注意，我们也将非零常函数视为乘子。

定义 5. 域 K 的初等扩张中的非恒定元素 ϕ 称为向量场 $\mathcal{X}$ 的初等第一积分，如果它满足 $\mathcal{X}\phi = 0$，或者等价地，满足 $d\phi \wedge \Omega = 0$。

根据定义 5，存在初等第一积分等价于存在初等扩张 L of K and $v \in L$, $u_1, \ldots, u_M \in L^*$ and $c_1, \ldots, c_M \in \mathbb{C}$，使得

$$\left(\sum_{i=1}^{M} c_i \frac{du_i}{u_i} + dv \right) \wedge \Omega = 0, \quad \sum_{i=1}^{M} c_i \frac{du_i}{u_i} + dv \neq 0. \tag{19}$$

为验证这一不明显的蕴含关系，如有需要，可加入对数函数。
考虑 Prelle 和 Singer [21], 提出的主定理的以下版本，该版本针对有理 $(n-1)$-微分形式。

定理 5。 设 $K = \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$，并设 Ω 为 K 上的 $(n-1)$-微分形式 *(11)*。若存在初等扩张 L *of* K，使关系 *(19)* 对 $u_i, v \in L$ 成立，则存在一个有限的~~ ~~代数扩张 L *of* K, $L \subseteq L$，使得关系

$$\left(\sum_{i=1}^{\widetilde{M}} \widetilde{c}_i \frac{d\widetilde{u}_i}{\widetilde{u}_i} + d\widetilde{v} \right) \wedge \Omega = 0, \quad \sum_{i=1}^{\widetilde{M}} \widetilde{c}_i \frac{d\widetilde{u}_i}{\widetilde{u}_i} + d\widetilde{v} \neq 0.$$

~~对 $\widetilde{c}_i \in \mathbb{C}$ 成立，且 $\widetilde{u}_i, \widetilde{v} \in L$。

我们的证明（不同于 [21] 中的证明）表明，定理 3 是以下引理的直接推论（通过归纳法得到的）；而该引理又以附录中的引理 5 为基础。

引理 3。 设 L_0 是 K 的微分扩张，t 在 L_0 上是超越的，且 $L_0(t)$ 在 L_0 上是初等的；设 L 是 $L_0(t)$ 的有限代数扩张，使得 L 和 L_0 具有相同的常数。若存在 v、$u_i \in L$ 和 $c_i \in \mathbb{C}$ 使得（*19*）成立，则存在 L_0~~ ~~的有限代数扩张 L_0，以及 $\widetilde{v} \in L$、$\widetilde{u}_i \in L^*$ 和 $\widetilde{c}_i \in \mathbb{C}$，使得

$$\left(\sum \widetilde{c}_i \frac{d\widetilde{u}_i}{\widetilde{u}_i} + d\widetilde{v} \right) \wedge \Omega = 0, \quad \sum \widetilde{c}_i \frac{d\widetilde{u}_i}{\widetilde{u}_i} + d\widetilde{v} \neq 0. \tag{20}$$

~~证明。我们在 L 上考虑（19）。给定 v 和 u_i，由引理 5 可得到 L_0。我们使用 $\tau = t^{1/m}$ 的降幂整数展开式，并频繁利用 $\frac{d\tau}{\tau} = \frac{1}{m}\frac{dt}{t}$。因此 — ——

$$u_i = \alpha_i \tau^{r_i} + \text{l.o.t.}; \quad r_i \in \mathbb{Z}; \quad \alpha_i \in \widetilde{L}_0; \tag{21}$$

$$v = \sum_j \beta_j \tau^j; \quad j \in \mathbb{Z}; \quad \beta_j \in \widetilde{L}_0; \tag{22}$$

求和按降序排列；这里“l.o.t.”表示低阶项。我们可以并且将假设 $\alpha_i \neq 0$。若 $v \neq 0$，则令 s 为满足 $\beta_s \neq 0$ 的最大指标。

在[文定义4[[并]]，并且它保持微分形式[[1]] 不变。因此我们得到~~

$$\frac{du_i}{u_i} \in \widetilde{L}_0[[\tau^{-1}]]$$

对所有 i 都成立。同样，当 $v \neq 0$ 时，dv 中非零系数对应的最大指标至多为 s。我们可以假设 t，因此 τ 在 L 上是超越的；否则，引理显然成立。

1. 我们首先假设 $v \neq 0$，且 $s > 0$。

- 在情形（i）中，我们有

$$dv = \tau^s \left(d\beta_s + \frac{s}{m} \beta_s \, dR \right) + \text{l.o.t.}$$

比较各系数可得，

$$\left(\frac{d\beta_s}{\beta_s} + \frac{s}{m} \, dR \right) \wedge \Omega = 0.$$

这里 $\frac{d\beta_s}{\beta_s} + \frac{s}{m} \, dR \in \widetilde{L}_0'$ 非零，否则

$$d\tau/\tau = -\frac{1}{s} d\beta_s/\beta_s \quad \text{and hence} \quad \tau = c \cdot \beta_s^{-1/s},$$

对于某个常数 c。这是关于 L_0 的代数元；矛盾。因此，当 $s > 0$ 时，结论成立，并且在进一步讨论中，我们可以假设 $s \leq 0$。

- 在情形（ii）中，我们有

$$dv = \tau^s \, d\beta_s + \tau^{s-1} \left(d\beta_{s-1} + \frac{s}{m} \beta_s \, dR/R \right) + \text{l.o.t.},$$

对积分条件求值可得 $d\beta_s \wedge \Omega = 0$。若 β_s 非常数，则结论成立。若 β_s 为常数，且 $s > 1$，则

$$\left(d\beta_{s-1} + \frac{s}{m} \beta_s \, dR/R \right) \wedge \Omega = 0.$$

必有 $d\beta_{s-1} + \frac{s}{m}\beta_s \, dR/R \neq 0$，否则由此可得 $\beta_{s-1}^* = \beta_{s-1}/\beta_s$，$d\tau = \frac{1}{s} d\beta_{s-1}^*$，而这与上文一样，和 τ 的超越性矛盾。因此，对于 $s > 1$，情形（ii）中的断言成立。还需考虑 $s = 1$ 或 $s \leq 0$的情形。

2. 我们转而讨论（19）中的零次项，包括 $v = 0$的情况。首先证明可以选取 u_i和 v，使得 $r_i = 0$，其中 $\alpha_0 = 1$，且 $s < 0$。

- 在情形（i）中，我们得到

$$\left(\sum (c_i \frac{d\alpha_i}{\alpha_i} + r_i \, dR) + d\beta_0 \right) \wedge \Omega = 0. \tag{23}$$

若 $\omega := \sum (c_i \frac{d\alpha_i}{\alpha_i} + r_i \, dR) + d\beta_0 \neq 0$，则问题已解决。若 $\omega = 0$，则令

$$\widehat{u}_i := u_i/(\alpha_i \tau^{r_i}) \quad \text{and} \quad \widehat{v} := v - \beta_0.$$

From

$$d\widehat{u}_i = \tau^{-r_i} \alpha_i^{-1} \left(du_i - u_i (\frac{d\alpha_i}{\alpha_i} + \frac{r_i}{m} \, dR) \right)$$

可以看出

$$\frac{d\widehat{u}_i}{\widehat{u}_i} = \frac{du_i}{u_i} - \left(\frac{d\alpha_i}{\alpha_i} + \frac{r_i}{m} \, dR \right),$$

对所有 i，根据 $\omega = 0$，这意味着

$$\left(\sum c_i \, \frac{d\widehat{u}_i}{\widehat{u}_i} + d\widehat{v} \right) = \left(\sum c_i \, \frac{du_i}{u_i} + dv \right), \tag{24}$$

因此，

$$\left(\sum c_i \, \frac{d\widehat{u}_i}{\widehat{u}_i} + d\widehat{v} \right) \wedge \Omega = 0, \quad \sum c_i \, \frac{d\widehat{u}_i}{\widehat{u}_i} + d\widehat{v} \neq 0. \tag{25}$$

我们将在下文继续讨论。

- 在情形（ii）中，我们得到

$$\left(\sum c_i \frac{d\alpha_i}{\alpha_i} + d\beta_0 + \beta_1\, dR/R\right) \wedge \Omega = 0, \tag{26}$$

根据条目 1 中的讨论，我们可以假设 β_1 是常数（可能为零）。与情形（i）一样，若 $\omega := \sum c_i \dfrac{d\alpha_i}{\alpha_i} + d\beta_0 + \beta_1\, dR/R \neq 0$，则问题已解决。若 $\omega = 0$，则令

$$\widehat{u}_i := u_i/(\alpha_i \tau^{r_i}) \quad \text{and} \quad \widehat{v} := v - \beta_0 - t\beta_1,$$

使得 (24) 成立，从而 (25) 也成立，其中 u_i 和 v 具有所需的形式。

3. 因此，我们可以假设所有 u_i 的展开式都具有带有 $\alpha_i = 1$ 的 $r_i = 0$，并且 v 的展开式中在 $\widetilde{\ }$ 内有 $s < 0$。若 $z = 1 + \tau z^*$，且 $z^* \in L_0[[\tau]]$，那么利用 log(1 + x) 的形式展开，我们可以找到 $\lambda \in \tau^{-1}\widetilde{L}_0[[\tau^{-1}]]$，使得 $d\lambda = dz/z$。对每个 u_i 都这样做，我们便可得到一个表达式，

$$\phi = \sum \phi_k \tau^k \in \tau^{-1}\widetilde{L}_0[[\tau^{-1}]],$$

使得

$$d\phi = \sum c_i \frac{du_i}{u_i} + dv \neq 0, \quad d\phi \wedge \Omega = 0.$$

- 在情形（i）中，存在某个 $\ell \in \mathbb{Z}$ 使得

$$0 \neq d(\tau^\ell \phi_\ell) = \tau^\ell \left(\frac{d\phi_\ell}{\phi_\ell} + \frac{\ell}{m}\, dR\right)$$

and

$$\left(\frac{d\phi_\ell}{\phi_\ell} + \frac{\ell}{m}\, dR\right) \wedge \Omega = 0,$$

由此即可得出结论。

- 在情形（ii）中，我们考虑满足 $\phi_\ell \neq 0$ 的最高指标 ℓ。于是 $d\phi_\ell \wedge \Omega = 0$，若 ϕ_ℓ 为常数，则 $\tau^{\ell-1}$ 中的项给出

$$\left(d\phi_{\ell-1} + \frac{\ell}{m}\phi_\ell\, dR/R\right) \wedge \Omega = 0.$$

由于 $d\phi_{\ell-1} + \frac{\ell}{m}\phi_\ell\, dR/R \neq 0$，结论成立：否则，对于某个常数 c，我们有 $\tau = c - \frac{\phi_{\ell-1}}{\ell\phi_\ell} \in \widetilde{K}$，这与假设矛盾。

□

5 附录

5.1 Laurent 展开式与 Puiseux 展开式

这里我们汇总一些关于幂级数展开的相关事实。引理 4 和引理 5 都可视为标准结果。但为了便于查阅，也因为它们对我们的论证至关重要，我们仍将它们列出（并附上证明概要）。

引理 4. 设 L_0 是一个域，$L = L_0(t)$ 满足 t 在 L_0 上是超越的，且 $r \in L$ 非零。那么存在一个整数 m 以及 $c_j \in L_0$、$j \geq 0$，使得对于任意整数 $\ell \geq 0$，都存在 $r_\ell \in L$，满足 $r_\ell(0) \neq 0$，使得

$$t^m r = c_0 + tc_1 + \cdots + t^\ell c_\ell + t^{\ell+1} r_\ell.$$

此外，将 t 替换为 t^{-1} 后，该断言也成立。作相应修改后，这些陈述对于 L 上任意有限维向量空间中的元素也成立。

证明。存在一个整数 m，使得

$$t^m r = \frac{a_0 + ta_1 + \cdots}{b_0 + tb_1 + \cdots} \text{ with } a_0 \neq 0, b_0 \neq 0.$$

要确定 c_j，从 $c_0 = a_0/b_0$ 开始递归进行，并且

$$r_0 - \frac{a_0}{b_0} = \frac{a_0 + ta_1 + \cdots - a_0/b_0(b_0 + tb_1 + \cdots)}{b_0 + tb_1 + \cdots} = t\, r_1.$$

递归步骤是对 r_ℓ 应用相同的论证。

最后一个断言由 $L_0(t) = L_0(t^-)$ 立即得出。 [1] □

下面的引理是牛顿－普伊瑟定理的推论；参见 Abhyankar 的 [1], 第 12 讲。我们不能直接使用 [1] 中所述的定理（该定理假设基域是代数闭域），但我们将仔细追溯 Abhyankar 的证明。

引理 5. 设 L_0 是一个特征零域，t 在 L_0上超越；此外，设 q 在 $L_0(t)$上~代数的，且 $L = L_0(t, q)$。那么存在 L_0 的一个有限代数扩张 L_0 以及一个正整数m，使得 L 的每个元素都可表示为

$$\sum_{i=N}^{\infty} a_i \tau^i; \quad \tau = t^{1/m},$$

~，其中所有 $a_i \in L_0((t))$均成立。此外，这一结论对 L上的任意有限维向量空间中的所有元素也成立；将 τ 替换为 τ^{-1} 时，也有类似结论。

证明。只需证明 q的情形，因为 $L = L_0(t)[q]$；并且对于 q，q 中系数属于 $L_0(t)$的每个~多项式，都将具有所述的 $L_0((\tau))$中的表示。令 $Q(t, y) \in L_0(t)[y]$ 表示 q 在 $L_0(t)$上的最小多项式；

$$Q = y^n + c_1 y^{n-1} + \cdots + c_n,$$

其中所有 $c_j \in L_0(t) \subset L_0((t))$均成立。根据引理 4，我们可以假设 $n > 1$。我们将证明存在 ^ ^ L_0 的一个有限扩张 L_0，使得 Q 在 $L_0((\tau))$上可约。以下论证（归功于 Abhyankar）不依赖于 c_j的有理性，也不依赖于 Q的不可约性。

如果 $Q = y^n$ 可约性显而易见。否则，按照 Abhyankar 的证明，存在一个有理数 d 和一个正整数 m，使得取 $\tau = t^{1/m}$ 时有

$$Q(t, t^d(y + c_1/n)) =: \widehat{Q}(\tau, y) = y^n + \sum_{j=1}^{n} \widehat{c}_j(\tau)\, y^{n-j}$$

^具有所有 $\widehat{c}_j \in L_0[[\tau]]$，以及 $\widehat{c}_1 = 0$，某些 $\widehat{c}_j \neq 0$。注意 Q 与 Q之间的对应关系。^ ^ ^现在设 $Q_0 := Q(0, y)$，并令 L_0 为其在 L_0上的分裂域。根据 [1], 第 93 页中的论证，可得

$$\widehat{Q}_0 = \widehat{P}_{0,1} \cdot \widehat{P}_{0,2},$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$具有互素的 $P_{0,\ i} \in L_0[y]$。由亨泽尔引理（如 [1], 第 90 页所述）可得

$$\widehat{Q} = \widehat{P}_1 \cdot \widehat{P}_2$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$，其中 $P_i \in L_0[[\tau]]\,[y]$ 互素。根据 Q 与 Q 之间的对应关系，可以得到

$$Q = P_1 \cdot P_2; \quad P_i \in \widehat{L}_0((\tau))\,[y].$$

对次数进行归纳法（可能需要进一步进行域扩张并增大 m），可得到一个有限域扩张 L_0 以及一个分解 $\widetilde{\ }$

$$Q(t, y) = \prod (y - \eta_j)$$

作为线性因子的乘积，其中 $\eta_j \in \widetilde{L}_0((t^{1/m}))$。现在，$Q(t,\ q) = 0$ 表明，对于某个 k，有 $q = \eta_k$。为了证明 τ 的递减幂的情形，从 $s = t^{-1}$ 开始，并在 $L_0(s)$ 上重复该论证。推广到 L 上的有限维向量空间是直接的。

□

参考文献

[1] S.S. Abhyankar. 面向科学家和工程师的代数几何。 美国数学会，罗得岛州普罗维登斯（1990年）。[2] J. Avellar, L. G. S. Duarte and S. E. S. Duarte and L. A. C. P. da Mota. 平面动力系统的刘维尔第一积分的确定。 *Comput. Phys. Commun.*，177，584–596，2007年。[3] J. Avellar, M.S. Cardoso, L.G.S. Duarte and L.A.C.P. da Mota. 处理 Darboux 和 Lie 都难以求解的有理二阶常微分方程：S 函数方法*Comput. Phys. Commun.*，234，302–314，2019年。[4] L.R. Berrone and H. Giacomini. 逆雅可比乘子。 *Rend. Circ. Mat. Palermo*，52，77–130，2003年。[5] G. Casale. 微分方程的刘维尔第一积分。 *Banach Center Publ.*，94，153–161，2011 年。[6] L. Cair´o, H. Giacomini and L. Llibre. 平面 Lotka–Volterra 系统的刘维尔第一积分。*Rend. Circ. Mat. Palermo*，52，389–418，2003年。[7] C. Camacho and A. Lins Neto. 叶状结构几何理论。 Springer，1985年。[8] G. Ch`eze and T. Combot. 多项式向量场第一积分的符号计算。*Found. Comput. Math.*，20，681—752，2020年。[9] C. Christopher. 二阶多项式微分方程的刘维尔第一积分。 *Electron.J. Differ. Equ.*，1–7，1999年。[10] C. Christopher, C. Pantazi and S. Walcher. 有理向量场的刘维尔可积性：代数扩张情形。预印本，26 页，2025年。[11] T. Combot. 超指数一形式的符号积分。 *Proc. Int. Symp. Symb. Algebr.Comput. ISSAC*，98–105，2019年。[12] L.G.S. Duarte and L.A.C.P. da Mota. 具有初等第一积分的三维多项式动力系统。 *J. Phys. A: Math. Theor.*，43，17页，065204，2010年。

[13] L.G.S. Duarte and L.A.C.P. da Mota. 一种计算平面多项式向量场刘维尔第一积分的高效方法。微分方程杂志，300，356–385，2021年。[14]B. Ferˇcec, V.G. Romanovski, Y. Tang and L. Zhang. 三维电路微分系统的可积性与分岔。离散连续动力系统B辑，27，4573–4588，2022年。[15] I.A. Garc´ıa and Jaume Gin´e，具有特征方向和反积分因子的中心问题，非线性科学与数值模拟通讯，108，106276，2022年。[16] E.R. Kolchin. 微分代数与代数群。学术出版社，纽约—伦敦，1973年。[17] J. Llibre and C. Pantazi. 简化的B类激光系统的可积性与动力学。混沌，33，103119，2023年。[18] J. M. Ollagnier. 齐次三维多项式向量场的刘维尔第一积分。数学讨论会，70，195–217，1996年。[19] J. M. Ollagnier. 洛特卡–沃尔泰拉系统的刘维尔积分。定性理论与动力系统，2，307–358，2001年。[20] R. Oliveira, D. Schlomiuk and A.M. Travaglini. 具有不变双曲线的二次系统的几何与可积性。微分方程定性理论电子期刊，6，1–56，2021年。[21] M.J. Prelle and M.F. Singer. 微分方程的初等第一积分。美国数学会会刊，279，619–636，1983年。[22] R. H. Risch. 有限项积分问题。美国数学会会刊，139，167—189，1969年。[23] R. H. Risch. 有限项积分问题的解。美国数学会通报，76，605—608，1970年。[24] M. Rosenlicht. 关于某些超越方程的显式可解性。高等科学研究所数学出版物，36，15–22，1969年。[25] M. Rosenlicht. 有限项积分。美国数学月刊，79，963—972，1972年。[26] A. Schinzel，《特别关注可约性的多项式》。剑桥大学出版社，2014年。[27] M. Singer. 微分方程的刘维尔第一积分。美国数学会会刊，333(2)，673–688，1992年。[28] X. Zhang. 多项式微分系统的刘维尔可积性。美国数学会会刊，368(1)，607–620，2016年。[29] H. Zo̧l̨adek. 扩展单值群与刘维尔第一积分。动力系统与控制系统杂志，4，1–28，1998年。