arXiv:2512.15523v1 [nlin.SI] 17 Dec 2025

双同态李括号与Toda方程

盖博通[1],李传中[2 3],JIACHENG SUN[1], SHUANHONG WANG[4], 和朱浩然[5]

摘要。我们在 $\mathfrak{gl}(V)$上引入一种BiHom型斜对称括号，该括号由两个交换的内自同构 $\alpha = Ad_\psi$ 和 $\beta = Ad_\phi$构造而成，其中 ψ，$\phi \in \mathfrak{gl}(V)$，且 i，j为整数。我们证明$(\mathfrak{gl}(V), [\cdot,\ \cdot]^{(i,j)}_{(\psi,\ \phi)}\alpha, \beta)$是一个BiHom–Lie代数，并研究将有限非周期Toda格中的交换子替换为该括号后得到的Lax方程。对于对称选择 $\phi = \psi$，其中$(i,\ j) = (0,\ 0)$，变形流在共轭作用下保持等变，并可通过 $\widetilde{L} = \psi^{-1}L\psi$与一个具有共轭三角投影的Toda型Lax方程规范等价。特别地，标量变形相当于对时间进行常数缩放。对于嵌入的 2×2 块，我们推导出显式的三角函数和双曲函数公式，从而清楚地体现对称性约束（例如无迹性）。在非对称双曲情形中，我们给出一个迹障碍，表明右端通常不是交换子，这意味着等谱性质发生对称性破缺。我们还将这一构造推广到具有不定度量的弱耦合Toda格，并通过逆散射计算给出显式的 2×2 解，从而澄清并更正文献中的若干公式。在特殊参数值下，可恢复经典Toda动力学。

1. 引言

作为最早出现的非线性完全可积系统之一，Toda晶格层级一直受到数学家和物理学家的广泛关注。人们证明该晶格存在可用椭圆函数表示的解后不久，便发现它还具有发生弹性碰撞的多孤子解。这与KdV方程的相似之处，加之随后提出的Lax对表述，使其被确认为可积系统。对原有结构的数学研究和推广至今仍在继续。其中一条重要脉络，是无限维哈密顿和拉格朗日动力系统与无限维李代数之间的关系 [1, 3, 4]。本文也聚焦于这种代数观点，其中不变性、等变性和对称性约束共同组织着动力学。

李括号是编码非线性动力学背后代数内容的基本工具。因此，变形括号是组织非标准演化、追踪对称性与对称性破缺的一种自然方式。在共形场论（CFT）和量子代数的背景下，[16, 19, 20, 21, 22], Hom- [18] 与BiHom型 [7] 结构自然出现，例如在Virasoro型代数的变形中。受此启发，我们采用一种BiHom型变形，通过两个彼此交换的内自同构对交换子进行扭曲；背景介绍见 [6, 7, 11, 17]，量子代数和高能物理中的相关实例见 [8, 9, 10, 16, 19, 20, 21, 22] 。

鉴于此，我们提出有限非周期 Toda 格的一种变形（非标准）版本：将 Lax 方程中的交换子替换为 BiHom 型括号

日期：2025年12月18日。2020 数学主题分类。37K30, 37K10, 17B62, 17B70。关键词和短语。Toda 格、BiHom-Lie 括号、Miura 变换、耦合 Toda 方程。

该括号由 Makhlouf–Silvestrov 构造得到。具体而言，我们研究两个交换的一参数族

$$\psi, \phi : R_1 \longrightarrow \mathfrak{gl}(V),$$

并令 $\alpha_s := Ad_{\psi(s)}$, $\beta_s := Ad_{\phi(s)}$。对于两个整数 i 和 j，我们在一个自然的设定范围内确定唯一的斜对称双线性形式，使 BiHom–Jacobi 恒等式成立。该括号既是对已有形式的推广，并且当 $i + j \neq 1$时，还超出了 [17]中所考虑的 Hom 型双线性形式。除了抽象构造之外，我们还分析了三个显式变形族（即标量伸缩、平面旋转和平面双曲旋转），并详细计算了由此产生的 2×2 块动力学，特别关注无迹性、对称性/等变性以及（非）同谱性指标。

为进一步拓展研究范围，并遵循 Li 和 He 的方法 [14], ，我们构造了带不定度量的弱耦合 Toda 格及其非标准对应形式。在二维情形下，我们结合直接的 Lax 计算与 [15] 中的逆散射方案，得到统一的显式解，并澄清和修正了 [2]中的若干公式。

本文的结构安排如下。在第2节中，我们固定记号，回顾 BiHom–Jacobi 恒等式，并定义变形括号。我们还证明了双线性试设下斜对称算子的唯一性。在第3节中，我们用初等群论术语描述三种具体的单参数变形，供后文使用。在第4节中，我们将变形Lax方程具体化为三个族（标量、旋转、双曲旋转），提取其结构性结论，并给出闭合 2×2 公式，以明确呈现其内在的对称性约束。第5 节给出一种 Miura 型关系，阐明变形流何时与 Toda 型 Lax 方程共轭，以及非对称性何时会导致对称性破缺。第6 节讨论具有不定度量的弱耦合情形，在二维标准形下推导显式解，并解释前文提到的修正。

2. 李括号的变形

本节定义将在全文中使用的变形（BiHom）李括号，并给出相应的 Toda 格 Lax 方程。

令 $V = \mathbb{R}^n$，并令 $\mathfrak{gl}(V)$ 为所有实 $n \times n$ 矩阵构成的空间。对于 $L \in \mathfrak{gl}(V)$，我们用 $L_{>0}$ （分别用 $L_{<0}$）表示 L 的严格上三角（分别为严格下三角）部分，并令

$$B(L) := L_{>0} - L_{<0}.$$

注意， $B(L)$ 关于上/下三角分解是反对称的，即当 L 对称时， $B(L)^\top = -B(L)$。下文的 BiHom 型变形将体现这种反对称性。

我们考虑两个 C^1 （连续可微的）单参数映射

$$\psi, \phi : R_1 \longrightarrow \mathfrak{gl}(V), \qquad s \mapsto \psi(s),\ \phi(s),$$

其中 $R_1 \subseteq \mathbb{R}$ 是一个区间，并且对于每个 $s \in R_1$，矩阵 $\psi(s)$ 和 $\phi(s)$ 均可交换。我们将它们在 $\mathfrak{gl}(V)$ 上的伴随作用分别记作 $\alpha_s := \mathrm{Ad}_{\psi(s)}$ 和 $\beta_s := \mathrm{Ad}_{\phi(s)}$。对于整数指数，我们采用约定 $\psi(s)^{-1} = \psi(s)^{(-1)}$，其中前者表示 $\psi(s)$ 的逆，后者表示指数 −1。对 $\phi(s)$ 也采用相同约定。

为完整起见，我们用单个扭曲映射 α 重述 Hom-雅可比恒等式 ([6, 11]):

$$[\alpha(a), [b, c]] + [\alpha(b), [c, a]] + [\alpha(c), [a, b]] = 0. \tag{2.1}$$

此外，域 k 上的 BiHom-Lie 代数 ([7]) 是一个四元组 $(L,[\ ,\ ],\alpha,\beta)$，其中 L 是一个 k-线性空间， $\alpha: L\to L$, $\beta: L\to L$, $[\ ,\ ]: L\otimes L\to L$ 是线性映射，记作 $[\ ,\ ](a\otimes b)=[a,b]$，并满足以下条件，对所有 $a,b,c\in L$ 均成立:

$$\alpha\circ\beta=\beta\circ\alpha, \tag{2.2}$$

$$[\beta(a),\alpha(b)]=-[\beta(b),\alpha(a)], \tag{2.3}$$

$$\alpha([a,b])=[\alpha(a),\alpha(b)],\qquad \beta([a,b])=[\beta(a),\beta(b)], \tag{2.4}$$

$$[\beta^2(a),[\beta(b),\alpha(c)]]+[\beta^2(b),[\beta(c),\alpha(a)]]+[\beta^2(c),[\beta(a),\alpha(b)]]=0, \tag{2.5}$$

接下来，我们构造一个显式的括号 $[\cdot,\cdot]^{(i,j)}_{(\psi,\phi)}$，它相对于 (2.5) 满足条件（相对于 (α_s,β_s)），并且在 ψ-作用与 ϕ-作用之间具有所需的 BiHom 反对称性（关于双线性试设下唯一性的说明，见附录 7）。

固定 $s\in R_1$ 以及整数 $i,j\in\mathbb{Z}$。对于 $A,B\in\mathfrak{gl}(V)$，令

$$[A,B]^{(i,j)}_{(\psi,\phi)}(s):=\psi(s)\,A\,\psi(s)^i\phi(s)^j\,B\,\phi(s)^{-1}\ -\ \phi(s)\,B\,\psi(s)^{i+2}\phi(s)^{j-2}\,A\,\psi(s)^{-1}, \tag{2.6}$$

这就是附录 7中唯一性推导所采用的形式。为避免混淆，我们始终在记号中省略参数 s。基于此，我们陈述以下定理。

定理 1. 设 $\psi(s)\ \phi(s)\in\mathfrak{gl}(V)$ 对每个 $s\in R_1$ 以及 $i,j\in\mathbb{Z}$均可交换。那么，这个四元组

$$\Big(\mathfrak{gl}(V),[\cdot,\cdot]^{(i,j)}_{(\psi,\phi)}(s),\alpha_s,\beta_s\Big)$$

是一个 *BiHom-Lie* 代数。

在附录 7中考虑的双线性试设下，公式 (2.6) 由 i和 j的选取确定。

注 2.1（特化）。

- 若 $\psi(s)=\phi(s)$，则

$$[A,B]^{(i,j)}_{(\psi,\psi)}(s)=\psi(s)A\,\psi(s)^{i+j}B\,\psi(s)^{-1}-\psi(s)B\,\psi(s)^{i+j}A\,\psi(s)^{-1}.$$

  特别地，对于 $(i,\ j)=(-1,\ 0)$，这可简化为

$$[A,B]^{(-1,0)}_{(\psi,\psi)}(s)=\psi(s)A\psi(s)^{-1}\,B\,\psi(s)^{-1}-\psi(s)B\psi(s)^{-1}\,A\,\psi(s)^{-1},$$

  一般而言，这并不等于 $\psi(s)[A,B]\psi(s)^{-1}$。[17]中讨论了这种情形。特别地，对于 $(i,\ j)=(0,\ 0)$，这可化简为

$$[A,B]^{(0,0)}_{(\psi,\psi)}(s)=\psi(s)AB\,\psi(s)^{-1}-\psi(s)BA\,\psi(s)^{-1},$$

  这等于 $\psi(s)[A,B]\psi(s)^{-1}$。然而，在 Lax 方程层面，所得的流与带有共轭三角投影的 Toda 型方程规范等价；参见第 5 节。

- 若 $\psi(s)=\phi(s)=\mathrm{Id}_V$，我们便得到通常的交换子。

由此可知，[5, 12, 13]，（有限非周期）Toda 格可写为 Lax 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L=[B(L),L],\qquad B(L):=L_{>0}-L_{<0}. \tag{2.7}$$

此处 $B(L)$ 实现了关于上/下三角分解的经典反对称化。

固定 $s \in R_1$。将（2.7）中的交换子替换为 BiHom 型括号（2.6），我们得到变形的（*BiHom–Toda*）*Lax* 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L = [B(L), L]^{(i,j)}_{(\psi,\phi)}(s), \tag{2.8}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L = \psi(s)B(L)\,\psi(s)^{i}\phi(s)^{j}L\,\phi(s)^{-1} - \phi(s)L\,\psi(s)^{i+2}\phi(s)^{j-2}B(L)\,\psi(s)^{-1}. \tag{2.9}$$

这里的 s 是一个变形参数。值得记录两个重要的特殊情形:

- 若 $\psi(s) = \phi(s)$ 且 $(i,\ j) = (0,\ 0)$，则该流与带有共轭三角投影的 Toda 型方程规范等价（精确表述和证明见第5节）。
- 若 $\psi(s) = \phi(s) =$ 恒等于$_V$，（2.8）可化为（2.7）。

我们将在后续各节中以（2.8）为基础。

3. 通过共轭实现的单参数变形

本节给出具体的单参数矩阵族，其伴随作用将用于构造第2 节中的变形括号，以及相应的变形 Toda 流。

对于一个 2×2 矩阵 M，记作

$$\mathcal{E}(M) := \mathrm{diag}(I_{n-2}, M) \in \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n), \tag{3.10}$$

因此，$\mathcal{E}(M)$ 的共轭作用仅在最后一个 2×2块上非平凡，而在$(n-2)\times(n-2)$ 单位块上平凡。

我们将 我使用以下交换的一参数族 $\psi,\ \phi:\ R_1 \to \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)$.

- **（标量伸缩）**。对于 $r \in \mathbb{R}^\times$ 和 $p,\ q \in \mathbb{R}$，令

$$\psi(r) := r^p I_n, \qquad \phi(r) := r^q I_n. \tag{3.11}$$

于是 $\psi(r_1)\psi(r_2) = \psi(r_1 r_2)$、$\psi(r)^{-1} = \psi(r^{-1})$，$\phi$也类似；此外，$\mathrm{Ad}_{\psi(r)} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ 作用于 $\mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)$。这一族体现了括号动力学的一致缩放对称性。

- **（平面旋转（欧几里得情形））**。对于 $\theta \in \mathbb{R}$，定义

$$R_2(\theta) := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \psi(\theta) := \mathcal{E}\big(R_2(\theta)\big), \qquad \phi(\theta) := \mathcal{E}\big(R_2(\pm\theta)\big). \tag{3.12}$$

我们有 $R_2(\theta_1)R_2(\theta_2) = R_2(\theta_1+\theta_2)$，以及 $R_2(\theta)^{-1} = R_2(-\theta)$，因此 $\psi(\theta_1)\psi(\theta_2) = \psi(\theta_1+\theta_2)$；对于任一符号选择，$\psi(\theta)$都与 $\phi(\theta)$交换。我们区分对称选择 $\phi(\theta) = \psi(\theta)$和非对称选择 $\phi(\theta) = \mathcal{E}(R_2(-\theta))$:

– 对称选择 $\phi(\theta) = \psi(\theta)$。对于 $i,\ j \in \mathbb{Z}$，有恒等式

$$[A,B]^{(i,j)}_{(\psi,\psi)}(\theta) = \psi(\theta)\,A\,\psi(\theta)^{i+j}\,B\,\psi(\theta)^{-1} - \psi(\theta)\,B\,\psi(\theta)^{i+j}\,A\,\psi(\theta)^{-1}. \tag{3.13}$$

特别地，对于 $(i,\ j) = (0,\ 0)$，这化简为

$$[A,B]^{(0,0)}_{(\psi,\psi)}(\theta) = \psi(\theta)AB\,\psi(\theta)^{-1} - \psi(\theta)BA\,\psi(\theta)^{-1}.$$

相应的变形拉克斯流与一个带共轭三角投影的 Toda 型方程规范等价，见定理2。它与经典的

Toda 流当且仅当 $\psi(\theta)$ 保持上/下三角分解（例如，当 $\psi(\theta)$ 为对角矩阵时）。– 非对称选择 $\phi(\theta) = \mathcal{E}(R_2(-\theta))$。这会产生一个真正不同的括号，其 2×2- 块效应将在第4节进行分析。

- **（平面双曲旋转（洛伦兹情形））**。对于 $\lambda \in \mathbb{R}$，定义

$$H_2(\lambda) := \begin{pmatrix} \cosh\lambda & \sinh\lambda \\ \sinh\lambda & \cosh\lambda \end{pmatrix}, \qquad \psi(\lambda) := \mathcal{E}\big(H_2(\lambda)\big), \qquad \phi(\lambda) := \mathcal{E}\big(H_2(\pm\lambda)\big). \tag{3.14}$$

则 $H_2(\lambda_1)H_2(\lambda_2) = H_2(\lambda_1+\lambda_2)$，并且 $H_2(\lambda)^{-1} = H_2(-\lambda)$，因此对于 ψ，可加性和可逆性成立，ϕ 如（3.12）中所示。再次，$\psi(\lambda)$ 与 $\phi(\lambda)$ 对任一符号选择均可交换。类似地，我们区分：

– 对称选择 $\phi(\lambda) = \psi(\lambda)$。特别地，对于 $(i,j) = (0,0)$，变形Lax流与带有共轭三角投影的 Toda 型方程规范等价（见定理 2）；当且仅当$\psi(\lambda)$保持上/下三角分解时，它才与经典 Toda 流重合（例如，$\psi(\lambda)$为对角矩阵）。– 非对称选择 $\phi(\lambda) = \mathrm{E}(H_2(-\lambda))$。这将导致非共轭变形；有关 2×2 分块公式和迹性质，请参见第4节。

回顾（2.6）中的括号，前述各族给出了以下将反复使用的特化：

(A′) 标量伸缩。 如果 $\psi(r) = r^p I_n$ 且 $\phi(r) = r^q I_n$，则

$$[A,B]^{(i,j)}_{(\psi,\phi)}(r) = r^{\,p(i+1)+q(j-1)}\,[A,B]. \tag{3.15}$$

因此，在变形Lax方程 $\dot L = [B(L)\ L]^{(i,j)}_{(\psi,\ \phi)}(r)$ 中，右端是经典方程的常数倍。

（B′）旋转。设 $\psi(\theta) = \mathrm{E}(R_2(\theta))$，且 $\phi(\theta) = \psi(\theta)$ 或 $\phi(\theta) = \mathrm{E}(R_2(-\theta))$，则公式（2.6）特化为显式的三角函数组合。在对称情形 $(i,j) = (0,0)$ 下，相应的拉克斯流与带有共轭投影的 Toda 型方程规范等价（定理 2）；非对称情形的 2×2 块公式见第4节。

(C′) 双曲旋转。情况与第 3 节类似。双曲余弦和双曲正弦的恒等式保证所需的推导可以原样沿用。在对称情形下，若 $(i,j) = (0,0)$，该流与一个带共轭投影的 Toda 型方程规范等价；非对称选择则给出第 4 节讨论的非共轭变形。

注3.1。在这三类情形中，我们都有 $\psi(0) = \phi(0) = I_n$（或 $\psi(1) = \phi(1) = I_n$，在乘法标量情形下（3.11））。因此，参数 s控制着一种锚定于恒等元的变形，并保持了第 *2* 节所设定的框架要求的自然对称性，即变形为零时的对称性。

4. 三种典范变形中的行为与解

现在，我们将变形Lax方程（2.8）专门应用于第 3 节所列的三个单参数族，并推导其对动力学的影响。以下始终设 $i,\ j \in \mathbb{Z}$ 以及$B(L) = L_{>0} - L_{<0}$。冗长的 2×2 分块计算留待附录 8；此处陈述后文将用到的结构性事实。

4.1. 情形 I：标量伸缩。在这种情形下，变形仅使经典 Toda 流发生恒定的时间重标度。所有守恒量均得以保留，相图也与经典系统完全相同——除演化速度有所调整外，对称性、可积性或定性动力学均无变化。

令 $\psi(r) = r^p I_n$, $\phi(r) = r^q I_n$ ，其中 $r \in \mathbb{R}^\times$。由 (2.6) 可得

$$[B(L), L]^{(i,j)}_{(\psi,\phi)}(t) = \alpha\,[B(L), L](t), \qquad \alpha := r^{\,p(i+1)+q(j-1)}. \tag{4.16}$$

命题 4.1。 设 $L_{\mathrm{Toda}}(t)$ 是经典 *Toda* 流 $L = [B(L)\ L](t)$ 在初始数据 $L(0) = L_0$下的解。那么变形流的解

$$\dot{\widehat{L}} = \frac{dL(\alpha^{-1}t)}{dt} = [B(L), L]^{(i,j)}_{(\psi,\phi)}(\alpha^{-1}t)\alpha^{-1}$$

具有相同初始数据的解为

$$\widehat{L}(t) = L_{\mathrm{Toda}}(\alpha^{-1}\,t), \qquad \alpha = r^{\,p(i+1)+q(j-1)}.$$

特别地，所有经典守恒量（例如 $\mathrm{tr}(L^k)$）均保持不变，相图除常数时间缩放外保持不变。

证明。 方程（4.16）给出 $L = \alpha\,[B\ （L）\ \ L]\ （t）$ 。于是我们有

$$\frac{d\widehat{L}}{dt} = \frac{dL(\alpha^{-1}t)}{dt} = \alpha[B(L), L](\alpha^{-1}t)\alpha^{-1} = [B(L), L](\alpha^{-1}t),$$

满足 $\widehat{L}(0) = L_0$。因此， $\widehat{L}(t) = L_{\mathrm{Toda}}(\alpha^{-1}t)$ 即为解。 □

4.2. 情形 II：平面旋转。 在此情形下，令 $\psi(\theta) = \mathcal{E}(R_2(\theta))$，并分析对称与非对称这两种子情形。我们断言，对于满足 $(i, j) = (0,0)$ 的对称选择，该流与经典 Toda 规范等价，并保持无迹性和同谱性。

（a）对称选择。 $\phi\ （\theta）\ = \psi\ （\theta）$ 。于是（2.6）给出，对于 $i,\ \ j \in \mathbb{N}$,

$$[B(L), L]^{(i,j)}_{(\psi,\psi)}(\theta) = \psi(\theta)\,B(L)\,\psi(\theta)^{i+j}\,L\,\psi(\theta)^{-1} - \psi(\theta)\,L\,\psi(\theta)^{i+j}\,B(L)\,\psi(\theta)^{-1}. \tag{4.17}$$

I特别地，当 $(i, j) = (0,0)$ 时，可以将外部共轭分解为

$$[B(L), L]^{(0,0)}_{(\psi,\psi)}(\theta) = \Big[\psi(\theta)B(L)\psi(\theta)^{-1},\ \psi(\theta)L\psi(\theta)^{-1}\Big]. \tag{4.18}$$

.转到规范变量 $\widetilde{L} = \psi\ （\theta）\ ^{-1}L\psi\ （\theta）$ 后，该流为 $\widetilde{L} = [\,B\ （L）\ \ L\,]$ （见第 5节）。因而~它是等谱的，并保持 L的对称性。

命题 4.2 (关于 2×2块中的迹与平衡点。在 2×2块中， $L = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$

有：(1) $\mathrm{tr}\Big([B(L)\ \ L]^{(0,0)}{}_{(\psi,\ \psi)}(\theta)\Big) = 0$ 对所有 θ；(2) 当(4.17)

的右端恒等于零时

$$\theta = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} + k\pi, & i + j\ \ is\ \ odd, k \in \mathbb{Z}, \\ \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, & i + j\ \ is\ \ even\ \ and\ i + j \neq 0, k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

那么，在这些参数值下，每个对称的 L 都是一个平衡态。

证明。 1. 由式（4.18）和 $\mathrm{tr}[X,Y]=0$. 可知。对于 2，直接进行 2×2 计算（附录 8和附录 11）可知，在此处，对角项和非对角项均为零

$$\theta=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}+k\pi, & i+j \text{ is odd}, k\in\mathbb{Z},\\ \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}, & i+j \text{ is even and } i+j\neq 0, k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

□

注 4.3. 注意，当 $(i,j)=(0,0)$ 时，流 $[B(L)\ L]^{(0,0)}(\psi,\psi)(\theta)$（如命题 4.2 所示）是无迹且等谱的。另一方面，当 $(i,j)\neq(0,0)$ 时，流$[B(L)\ L]^{(i,j)}(\psi,\psi)(\theta)$仍然是无迹的（见附录 8），但不再是等谱的。

(b) 非对称选择。 $\phi(\theta)=\mathcal{E}(R_2(-\theta))$. 在这种情况下， 2×2 右端的块变为 (8.39) 中所示的三角组合（推导见附录8）；在 2×2 情形下，它是对称且无迹的。我们不声称一般的 θ具有全局等谱性。

4.3. 情形 III：平面双曲旋转。在此情形下，令 $\psi(\lambda)=\mathrm{E}(H_2(\lambda))$。此时，该流与经典 Toda 流规范等价，并在对称选择下 $(i,j)=(0,0)$ 时保持无迹性和同谱性。在不对称的情形下，同谱性将被破坏，并产生经典 Toda 中不存在的真正新动力学。(a) 对称选择。 $\phi(\lambda)=\psi(\lambda)$。如式（4.17）所示，对于 $(i,j)=(0,0)$，变形右端可写成式（4.18）的形式，其中 θ 替换为 λ，因此它是无迹的。在~规范变量 $L=\psi(\lambda)^{-1}L\psi(\lambda)$ 下，有 $L=[B(L)\ L]$，这是一个等谱 Lax 方程。然而，当 $(i,j)\neq(0,0)$ 时，变形右端仍然是无迹的，但不再具有同谱性。

（b）非对称选择。 $\phi(\lambda)=\mathcal{E}(H_2(-\lambda))$。在 2×2块中，含有 $L=\begin{pmatrix}a & c\\ c & b\end{pmatrix}$的右端可以像（8.41）中那样明确写出（见附录8）。一个关键障碍出现在迹的层面：

命题 4.4. 对于非对称双曲选择和一般的 (a,b,c,λ)，有

$$\mathrm{tr}\Big([B(L)\ L]^{(i,j)}{}_{(\psi,\phi)}(\lambda)\Big)\neq 0 \tag{4.19}$$

当 双曲正弦$\big((i-j+2)\lambda\big)\neq 0$ 和 $c(a-b)\neq 0.$

那么，变形右端无法 表示为交换子 $[M(L)\ L]$ 与任意矩阵 $M(L)$的交换子，因此一般而言，该演化并非等谱。

证明。 显式的 2×2 公式表明，除非 $\sinh\big((i-j+2)\lambda\big)=0$或 $c(a-b)=0$，否则两个对角元素之和不为零。由于对所有 X,Y，$\mathrm{tr}[X,Y]=0$，非零的迹排除了交换子表示。□

推论 4.5。 在非对称双曲情形下，对于一般的初始数据和参数，标准 *Toda* 积分$\mathrm{tr}(L^k)$ 不守恒。参数取值 $\lambda=0$ 时为退化情形，此时恢复为未变形括号。

注记 4.6。 对称选取 $(\phi=\psi)$ 和限制 $(i,\ j)=(0,\ 0)$ 在~规范变量 $L=\psi^{-1}L\psi$下导出 Toda 型 Lax 方程 $L=[B(L)\ L]$，该方程是等谱的。除非通过 ψ 的共轭保留定义 $B(\cdot)$ 的上/下三角分解，否则原变量 L 中的流未必是经典 Toda 演化的直接共轭

（见第 5节）。非对称选择展现出真正新颖的动力学；在双曲情形下，对于一般参数，它们不属于交换子型。

5. Miura型变换

在对称情形下 $\phi(s) = \psi(s)$ 和 $(i,j) = (0,0)$，括号 (2.6) 具有如下具体形式

$$[A,B]^{(0,0)}_{(\psi,\psi)}(s) = \psi(s)\,AB\,\psi(s)^{-1} - \psi(s)\,BA\,\psi(s)^{-1},$$

分析该流的一种便捷方法是结合使用规范映射和共轭三角投影。

固定 $s \in R_1$，令

$$\Phi_\psi : \ \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(V), \qquad \Phi_\psi(L) := \psi(s)^{-1} L\,\psi(s), \tag{5.20}$$

并定义共轭后的上/下三角投影

$$B_\psi(X) := \psi(s)\,B(X)\,\psi(s)^{-1}, \qquad B(X) = X_{>0} - X_{<0}. \tag{5.21}$$

定理 2 (条件规范约化)。 设 $\phi(s) = \psi(s)$ 和 $(i,j) = (0,0)$ 并考虑变形*Lax*方程

$$\dot{L} = [B(L), L]^{(0,0)}_{(\psi,\psi)}(s).$$

当 $L := \Phi_\psi(L)$时，以下等价关系成立：

$$\dot{\tilde{L}} = [\,B(L),\,L\,](s) \quad \Longleftrightarrow \quad B\Big(\Phi_\psi(X)\Big) = B_{\psi^{-1}}(X) \ \ \textit{for all } X \in \mathfrak{gl}(V).$$

特别地，规范变量 L 满足带有投影 B_ψ（此时 $B_\psi(L) = B(L)$) 的 *Toda* 型 *Lax* 方程，当且仅当 ψ 保持上/下三角分解（例如 ψ 为对角矩阵）。若不存在这种对称性，一般而言就不存在这样的全局约化。

证明。我们有

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{L}} &= \frac{d\Phi_\psi(L)}{dt} \\
&= [B(\Phi_\psi(L)), \Phi_\psi(L)]^{(0,0)}_{(\psi,\psi)} \\
&= [B(\psi(s)^{-1}L\psi(s)), \psi(s)^{-1}L\psi(s)]^{(0,0)}_{(\psi,\psi)} \\
&= \psi(s)B(\psi(s)^{-1}L\psi(s))\psi(s)^{-1}L - L\psi(s)B(\psi(s)^{-1}L\psi(s))\psi(s)^{-1} \\
&= [\psi(s)B(\psi(s)^{-1}L\psi(s))\psi(s)^{-1}, L].
\end{aligned}$$

因此，$\dot{\tilde{L}} = [\,B(L)\ \ L\,]$ 当且仅当 $B(L) = \psi(s)B(\psi(s)^{-1}L\psi(s))\psi(s)^{-1}$，也就是说，对于任意 $L \in \mathfrak{gl}(V)$，$B\Big(\Phi_\psi(L)\Big) = B_{\psi^{-1}}(L)$。□

注记 5.1。 保持该分解不变的典型情况包括标量伸缩 $\psi = r^p I_n$ 和对角符号/置换矩阵。对于一般的稠密旋转或双曲旋转，该分解不会保持不变；因此，通常无法直接进行规范约化以得到 Toda 型交换子方程。

接下来，我们记录嵌入式 $n \times n$ 块上的分块 Miura 型关系；这些关系独立于全局分解性质，并将用于给出显式公式。

对于对称块 $L = (a_{ij})_{n\times n}$ 和旋转 $\mathcal{E}(R_2(\theta)) = \mathrm{diag}(I_{n-2}, R_2(\theta))$，我们设

$$\mathcal{M}_\theta(L) := \mathcal{E}(R_2(\theta))\,L\,\mathcal{E}(R_2(\theta))^{-1}.$$

那么 $\{\mathbf{a}_{ij} \mid 1 \le i,j \le n\}$ 中的元素 $\mathcal{M}_\theta(L)$ 为

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}_{ij} &= a_{ij}, \quad 1 \le i,j \le n-2,\\
\mathbf{a}_{in-1} &= a_{in-1}\cos(\theta) - a_{in}\sin(\theta), \quad 1 \le i \le n-2,\\
\mathbf{a}_{n-1i} &= a_{in-1}\cos(\theta) - a_{in}\sin(\theta), \quad 1 \le i \le n-2,\\
\mathbf{a}_{in} &= a_{in-1}\sin(\theta) + a_{in}\cos(\theta), \quad 1 \le i \le n-2,\\
\mathbf{a}_{ni} &= a_{in-1}\sin(\theta) + a_{in}\cos(\theta), \quad 1 \le i \le n-2,\\
\mathbf{a}_{n-1n-1} &= a_{n-1n-1}\cos^2\theta + a_{nn}\sin^2\theta - a_{n-1n}\sin(2\theta),\\
\mathbf{a}_{nn} &= a_{n-1n-1}\sin^2\theta + a_{nn}\cos^2\theta + a_{n-1n}\sin(2\theta),\\
\mathbf{a}_{n-1n} &= \tfrac{1}{2}(a_{n-1n-1} - a_{nn})\sin(2\theta) + a_{n-1n}\cos(2\theta),\\
\mathbf{a}_{nn-1} &= \tfrac{1}{2}(a_{n-1n-1} - a_{nn})\sin(2\theta) + a_{n-1n}\cos(2\theta).
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

类似地，对于双曲旋转 $\mathcal{E}(H_2(\lambda)) = \mathrm{diag}(I_{n-2}, H_2(\lambda))$，我们定义

$$\mathcal{N}_\lambda(L) := \mathcal{E}(H_2(\lambda))\, L\, \mathcal{E}(H_2(\lambda))^{-1}.$$

其各项 $\{\widehat{a}_{ij} \mid 1 \le i,j \le n\}$ 为

$$
\begin{aligned}
\widehat{a}_{ij} &= a_{ij}, \quad 1 \le i,j \le n-2,\\
\widehat{a}_{in-1} &= a_{in-1}\cosh\lambda - a_{in}\sinh\lambda, \quad 1 \le i \le n-2,\\
\widehat{a}_{n-1i} &= a_{in-1}\cosh\lambda + a_{in}\sinh\lambda, \quad 1 \le i \le n-2,\\
\widehat{a}_{in} &= -a_{in-1}\sinh\lambda + a_{in}\cosh\lambda, \quad 1 \le i \le n-2,\\
\widehat{a}_{ni} &= a_{in-1}\sinh\lambda + a_{in}\cosh\lambda, \quad 1 \le i \le n-2,\\
\widehat{a}_{n-1n-1} &= a_{n-1n-1}\cosh^2\lambda - a_{nn}\sinh^2\lambda,\\
\widehat{a}_{nn} &= -a_{n-1n-1}\sinh^2\lambda + a_{nn}\cosh^2\lambda,\\
\widehat{a}_{n-1n} &= a_{n-1n} + \tfrac{1}{2}(a_{nn} - a_{n-1n-1})\sinh(2\lambda),\\
\widehat{a}_{nn-1} &= a_{n-1n} + \tfrac{1}{2}(a_{n-1n-1} - a_{nn})\sinh(2\lambda).
\end{aligned}
\tag{5.23}
$$

命题5.2（$n \times n$中的分块*Miura*共轭）。固定 $\phi = \psi$ 和 $(i,j) = (0,0)$。令 F表示由 $L = [B(L)\ L]$ 在对称块 $(a_{ij})_{n\times n}$ 上诱导的 $n \times n$ 经典*Toda*向量场，而令 F_θ（分别为 F_λ）表示第4节旋转（分别为双曲）情形所产生的 $n \times n$ 变形向量场，则

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathcal{F}_\theta(u) \iff \dot{u} = \mathcal{F}(u) \ \ with \ \ \mathbf{u} = \mathcal{M}_\theta u,$$

$$\dot{\widehat{u}} = \mathcal{F}_\lambda(u) \iff \dot{u} = \mathcal{F}(u) \ \ with \ \ \widehat{u} = \mathcal{N}_\lambda u,$$

其中 $u = (a_{ij})_{n\times n}$，$\mathbf{u} = (\mathbf{a}^{ij})_{n\times n}$，以及 $\widehat{u} = (\widehat{a}_{ij})_{n\times n}$。等价地，

$$\mathcal{M}_\theta \circ \mathcal{F} = \mathcal{F}_\theta, \qquad \mathcal{N}_\lambda \circ \mathcal{F} = \mathcal{F}_\lambda,$$

也就是说，*Miura*变换 M_θ 和 N_λ 在 $n \times n$ 块上交织了未变形与变形向量场。

证明。 直接验证见附录 10。 □

注5.3. 在 $n\times n$ 块上，经典Toda系统可通过两种透明的方式从变形模型中恢复出来：(i) 取未变形参数（$\theta = 0$ 或 $\lambda = 0$），此时$\mathcal{M}_\theta$ 和$\mathcal{N}_\lambda$ 化为恒等元；(ii) 在分裂对称性得以保留的情形下

从而适用定理2 中的规范约化。特别是，在情形(ii)下，谱数据得以保留。

6. 不定度量下的弱耦合托达格

我们研究具有不定符号的弱耦合（有限、非周期）托达格及其变形对应物。我们着重于简洁的拉克斯表述、半直积结构，以及精炼的 2×2 标准形。符号矩阵 $S=\mathrm{diag}(s_1,\ \dots\dots,\ s_N)$ 编码了一种底层度量对称性，该对称性在拉克斯流过程中保持不变。

固定符号 $s_k\in\{\pm 1\}\,(k=1,\ \dots\dots,\ N)$，令 $S=\mathrm{diag}(s_1,\ \dots\dots,\ s_N)$。我们考虑实对称三对角矩阵

$$L=\begin{pmatrix} s_1a_1 & s_2b_1 & & & & 0\\ s_1b_1 & s_2a_2 & s_3b_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & s_{N-2}b_{N-2} & s_{N-1}a_{N-1} & s_Nb_{N-1} & \\ 0 & & & s_{N-1}b_{N-1} & s_Na_N & \end{pmatrix},$$

$$\widehat{L}\ \text{defined likewise with}\ (a_k,b_k)\rightsquigarrow(\widehat{a}_k,\widehat{b}_k),$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$满足边界条件 $b_0=b_0=b_N=b_N=0$。与之前一样，我们记 $B(X):=X_{>0}-X_{<0}$并设

$$B:=\tfrac{1}{4}\big(L_{>0}-L_{<0}\big),\qquad \widehat{B}:=\tfrac{1}{4}\big(\widehat{L}_{>0}-\widehat{L}_{<0}\big). \tag{6.24}$$

注 6.1 （归一化）。式（6.24）中的因子 1-4 只是一种无害的系数归一化，可简化下文的分量公式；与约定 $B(X)=X_{>0}-X_{<0}$相比，它相当于对时间作常数缩放。

定义 6.2。 弱耦合系统是定义在 $\mathfrak{T}\ltimes\mathfrak{T}$（对称三对角矩阵的向量空间 $\mathfrak{T}$）上的 Lax 对，其形式为

$$\dot{L}=[B,L],\qquad \dot{\widehat{L}}=[\widehat{B},L]+[B,\widehat{L}]. \tag{6.25}$$

注 6.3。 第一个分量按照 Toda 型 Lax 方程自主演化，第二个分量则由 L 通过伴随作用线性驱动，同时还受到其自身的$\widehat{\ }$投影 B影响。这种结构称为弱耦合，由扩展托达方程描述，其中各分量之间的相互作用较弱，彼此更加解耦。相比之下，在“强”耦合情形中，两个分量都会对第一个方程作出贡献，变量变换及其相互作用也更加纠缠在一起，从而导致方程更复杂、更敏感。下文的公式澄清并纠正了文献中混淆这两种情形之处，参见例如 [2, 15]。

由（6.25）可读出分量形式（对于 $k=1,\ \dots\dots,\ N$）：

$$\dot{a}_k=\tfrac{1}{2}\big(s_{k+1}b_k^2-s_{k-1}b_{k-1}^2\big), \tag{6.26}$$

$$\dot{b}_k=\tfrac{1}{4}\,b_k\big(s_{k+1}a_{k+1}-s_ka_k\big), \tag{6.27}$$

$$\dot{\widehat{a}}_k=s_{k+1}b_k\widehat{b}_k-s_{k-1}b_{k-1}\widehat{b}_{k-1}, \tag{6.28}$$

$$\dot{\widehat{b}}_k=-\tfrac{1}{4}\Big[\big(s_ka_k-s_{k+1}a_{k+1}\big)\,\widehat{b}_k+\big(s_k\widehat{a}_k-s_{k+1}\widehat{a}_{k+1}\big)\,b_k\Big]. \tag{6.29}$$

注 6.4。与（6.27）–（6.28）中的符号模式相比，（6.29）中的负号至关重要（见下面的 2×2 检验）。

命题 6.5. 对于弱耦合系统 (6.25)，有 $\frac{d}{dt}\operatorname{tr}(L^m)=0$ 对所有 $m\geq 1$ 均成立。特别地，L 的谱保持不变。对于涉及 $\widehat{\ }$ 的混合量，不作类似的一般性断言 L。

证明。由迹的循环性可得 $\frac{d}{dt}\operatorname{tr}(L^m)=m\operatorname{tr}(L^{m-1}[B,L])=0$。 □

6.1. **二维标准形**。我们以 6.25) 为例说明 $N=2$ 和 $S=\operatorname{diag}(1,-1)$，即

$$L_2=\begin{pmatrix} a_1 & -b_1\\ b_1 & -a_2\end{pmatrix},\qquad \widehat{L}_2=\begin{pmatrix} \widehat{a}_1 & -\widehat{b}_1\\ \widehat{b}_1 & -\widehat{a}_2\end{pmatrix}.$$

直接计算表明，(6.26)–(6.29) 化为

$$\dot a_1=-\tfrac12 b_1^2,\qquad \dot a_2=-\tfrac12 b_1^2,\qquad \dot b_1=-\tfrac14 b_1\,(a_1+a_2), \tag{6.30}$$

$$\dot{\widehat{a}}_1=-b_1\widehat{b}_1,\qquad \dot{\widehat{a}}_2=-b_1\widehat{b}_1,\qquad \dot{\widehat{b}}_1=-\tfrac14\Big[(a_1+a_2)\widehat{b}_1+(\widehat{a}_1+\widehat{a}_2)b_1\Big]. \tag{6.31}$$

这里 $B_2:=\frac14\big((L_2)_{>0}-(L_2)_{<0}\big)$ 且 $\widehat{B}_2:=\frac14\big((\widehat{L}_2)_{>0}-(\widehat{L}_2)_{<0}\big)$（与 (6.24) 一致）。

注 6.6。(i). 方程 (6.30) 对 L_2 不包含 b_1 和 $\widehat{a}_k$。(ii). 任何此类项都会与自治拉克斯方程 $\dot L=[B,L]$ 矛盾。参见 [2, 15]。

谱数据与分类。对于

$$L_2=\begin{pmatrix} a_1 & -b_1\\ b_1 & -a_2\end{pmatrix},\qquad \operatorname{tr}L_2=a_1-a_2,\quad \det L_2=-a_1a_2+b_1^2,$$

特征多项式为 $\lambda^2-(a_1-a_2)\lambda+(-a_1a_2+b_1^2)=0$. 于是

$$\lambda_{1,2}=\frac{(a_1-a_2)\pm\sqrt{(a_1-a_2)^2-4(-a_1a_2+b_1^2)}}{2}. \tag{6.32}$$

特别地，当且仅当判别式 $\Delta=(a_1-a_2)^2-4(-a_1a_2+b_1^2)$ 非负时，谱为实数。仅用 $m:=a_2-a_1$ 进行的任何分类只有在进行诸如 $b_1\equiv 1$ 和 $a_1+a_2\equiv 0$ 的归一化之后才成立，此时 (6.32) 化简为 $\lambda_{1,2}=\frac12(-m\pm\sqrt{m^2-4})$。一般情形下，我们将使用不变量 $\operatorname{tr}L_2$ 和 $\det L_2$。

对于第二个分量，(6.31) 是定义在 $\widehat{L}_2$ 上的如下形式的

$$\dot{\widehat{L}}_2-[B_2,\widehat{L}_2]=[\widehat{B}_2,L_2].$$

它具有常数变易表示

$$\widehat{L}_2(t)=U(t)\left(\widehat{L}_2(0)+\int_0^t U(\tau)^{-1}\,[\widehat{B}_2(\tau),L_2(\tau)]\,U(\tau)\,d\tau\right)U(t)^{-1},\quad \dot U=B_2U,\ U(0)=I, \tag{6.33}$$

这阐明了耦合的半直积性质。

6.2. **变形弱耦合系统与规范约化**。 现在，我们将（6.25）中的对易子替换为（2.6）中引入的 BiHom 型括号。在对称情形 $\phi(s) = \psi(s)$ 和 $(i,j) = (0,0)$，第 5 节的推前机制可原样推广到耦合情形，并得到一个 扭曲的 半直积系统。

命题 6.7 （规范映射下的扭曲弱耦合）。 设 $\phi(s) = \psi(s)$ 和 $(i, j) = (0, 0)$。定义

$$\widetilde{L} := \psi(s)^{-1} L \psi(s), \qquad \widetilde{\widehat{L}} := \psi(s)^{-1} \widehat{L} \psi(s).$$

那么 (L, L) 是变形弱耦合系统的解

$$\dot{L} = [B, L]^{(0,0)}_{(\psi,\psi)}(s), \qquad \dot{\widehat{L}} = [\widehat{B}, L]^{(0,0)}_{(\psi,\psi)}(s) + [B, \widehat{L}]^{(0,0)}_{(\psi,\psi)}(s)$$

$\widetilde{\ }$ 当且仅当 (L, L) 是扭曲弱耦合系统的解

$$\begin{cases} \dot{\widetilde{L}} &= B(L)L - LB(L), \\ \dot{\widetilde{\widehat{L}}} &= B(\widehat{L})L - LB(\widehat{L}) + B(L)\widehat{L} - \widehat{L}B(L). \end{cases}$$

证明。 证明与定理2的证明相同，分别应用于每个括号 $[\widehat{B}, L]^{(0,0)}{}_{(\psi,\ \psi)}(s)$ 和 $[B, \widehat{L}]^{(0,0)}{}_{(\psi,\ \psi)}(s)$，并利用 $\widehat{B} = B(\widehat{L})$、 $B = B(L)$。□

6.3. 二维 Miura 型公式。在嵌入的 2×2 情形下，第 5 节的规范映射化为第 5 节中的显式公式：对于旋转 $R_2(\theta)$，定义 $\mathrm{M}_\theta(L) := R_2(\theta)\ L\, R_2(\theta)^{-1}$；对于双曲旋转 $H_2(\lambda)$，令 $\mathrm{N}_\lambda(L) := H_2(\lambda)\ L\, H_2(\lambda)^{-1}$。于是

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{c} \\ \mathbf{c} & \mathbf{b} \end{pmatrix} = \mathcal{M}_\theta \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \widehat{a} & \widehat{c}_1 \\ \widehat{c}_2 & \widehat{b} \end{pmatrix} = \mathcal{N}_\lambda \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

其分量由 (5.22) 给出，$\mathcal{N}_\lambda$ 的分量则类似地由 (5.23) 给出。这为对称情形下扭曲弱耦合系统的解与变形系统的解之间提供了清晰的分块 Miura 型关系。

注 6.8。若 $\phi \neq \psi$，第 4.3 节讨论的迹障碍会在第一个分量层面就已重现，而且交换子型结构通常会丧失。

7. 附录 I：斜对称 BiHom 括号的推导与唯一性

假设变形括号具有一般的双线性形式

$$[A, B]_{(\psi,\phi)} = x\, A\, y\, B\, z - \overline{x}\, B\, \overline{y}\, A\, \overline{z}, \tag{7.34}$$

其中 $x,\ \bar{x},\ y,\ \bar{y},\ z,\ \bar{z} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{gl}(V))$ 是先验未知的自同构。我们寻找六个未知量均为 $\psi,\ \phi$ 的单项式的解：

$$x = \psi^{\alpha_x}\phi^{\beta_x}, \quad \bar{x} = \psi^{\alpha_{\bar{x}}}\phi^{\beta_{\bar{x}}}, \quad y = \psi^{\alpha_y}\phi^{\beta_y}, \quad \bar{y} = \psi^{\alpha_{\bar{y}}}\phi^{\beta_{\bar{y}}}, \quad z = \psi^{\alpha_z}\phi^{\beta_z}, \quad \bar{z} = \psi^{\alpha_{\bar{z}}}\phi^{\beta_{\bar{z}}}.$$

为便于后文参考，我们记录下文将用到的两个结构条件。*BiHom–Jacobi* 恒等式 为

$$\begin{aligned} [Ad^2_\phi(A), [Ad_\phi(B), Ad_\psi(C)]_{(\psi,\phi)}]_{(\psi,\phi)} + [Ad^2_\phi(B), [Ad_\phi(C), Ad_\psi(A)]_{(\psi,\phi)}]_{(\psi,\phi)} \\ + [Ad^2_\phi(C), [Ad_\phi(A), Ad_\psi(B)]_{(\psi,\phi)}]_{(\psi,\phi)} = 0, \end{aligned} \tag{7.35}$$

而 *BiHom*-斜对称性 为

$$[Ad_\phi(A), Ad_\psi(B)]_{(\psi,\phi)} = -[Ad_\phi(B), Ad_\psi(A)]_{(\psi,\phi)}. \tag{7.36}$$

将 (7.34) 代入 (7.35)。展开第一项,

$$\begin{aligned}
&[Ad_\phi^2(A), [Ad_\phi(B), Ad_\psi(C)]_{(\psi,\phi)}]_{(\psi,\phi)} \\
&= [\phi^2 A\phi^{-2},\ x\phi B\phi^{-1}y\psi C\psi^{-1}z - \bar{x}\,\psi C\psi^{-1}\bar{y}\,\phi B\phi^{-1}\bar{z}]_{(\psi,\phi)} \\
&= x\phi^2 A\phi^{-2}\, y\,(x\phi B\phi^{-1}y\psi C\psi^{-1}z - \bar{x}\,\psi C\psi^{-1}\bar{y}\,\phi B\phi^{-1}\bar{z})\, z \\
&\quad - \bar{x}\,(x\phi B\phi^{-1}y\psi C\psi^{-1}z - \bar{x}\,\psi C\psi^{-1}\bar{y}\,\phi B\phi^{-1}\bar{z})\,\bar{y}\,\phi^2 A\phi^{-2}\,\bar{z} \\
&= x\phi^2 A\phi^{-2}\, y\, x\phi B\phi^{-1}y\psi C\psi^{-1}z^2 - x\phi^2 A\phi^{-2}\, y\,\bar{x}\,\psi C\psi^{-1}\bar{y}\,\phi B\phi^{-1}\bar{z}\, z \\
&\quad - \bar{x}\, x\phi B\phi^{-1}y\psi C\psi^{-1}z\,\bar{y}\,\phi^2 A\phi^{-2}\bar{z} + \bar{x}^2\,\psi C\psi^{-1}\bar{y}\,\phi B\phi^{-1}\bar{z}\,\bar{y}\,\phi^2 A\phi^{-2}\bar{z}.
\end{aligned}$$

另外两个循环项的展开方式类似:

$$\begin{aligned}
&[Ad_\phi^2(B), [Ad_\phi(C), Ad_\psi(A)]_{(\psi,\phi)}]_{(\psi,\phi)} \\
&= x\phi^2 B\phi^{-2}yx\phi C\phi^{-1}y\psi A\psi^{-1}z^2 - x\phi^2 B\phi^{-2}y\bar{x}\psi A\psi^{-1}\bar{y}\phi C\phi^{-1}\bar{z}\, z \\
&\quad - \bar{x}\, x\phi C\phi^{-1}y\psi A\psi^{-1}z\,\bar{y}\,\phi^2 B\phi^{-2}\bar{z} + \bar{x}^2\psi A\psi^{-1}\bar{y}\,\phi C\phi^{-1}\bar{z}\,\bar{y}\,\phi^2 B\phi^{-2}\bar{z},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[Ad_\phi^2(C), [Ad_\phi(A), Ad_\psi(B)]_{(\psi,\phi)}]_{(\psi,\phi)} \\
&= x\phi^2 C\phi^{-2}yx\phi A\phi^{-1}y\psi B\psi^{-1}z^2 - x\phi^2 C\phi^{-2}y\bar{x}\psi B\psi^{-1}\bar{y}\phi A\phi^{-1}\bar{z}\, z \\
&\quad - \bar{x}\, x\phi A\phi^{-1}y\psi B\psi^{-1}z\,\bar{y}\,\phi^2 C\phi^{-2}\bar{z} + \bar{x}^2\psi B\psi^{-1}\bar{y}\,\phi A\phi^{-1}\bar{z}\,\bar{y}\,\phi^2 C\phi^{-2}\bar{z}.
\end{aligned}$$

通过比较三种展开中的算子单项式（并利用非交换符号 A、B、C 的独立性），我们得到以下两个约束方程组，分别按 ψ 指数和 ϕ 指数逐分量读取:

$$\begin{cases} x\phi^2 = \bar{x}\, x\, \phi, \\ \phi^{-2}yx\phi = \phi^{-1}y\psi, \\ \phi^{-1}y\psi = \psi^{-1}z\,\bar{y}\,\phi^2, \\ \psi^{-1}z^2 = \phi^{-2}\bar{z}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x\phi^2 = \bar{x}^2\psi, \\ \phi^{-2}y\bar{x}\psi = \psi^{-1}\bar{y}\phi, \\ \psi^{-1}\bar{y}\phi = \phi^{-1}\bar{z}\,\bar{y}\,\phi^2, \\ \phi^{-1}\bar{z}z = \phi^{-2}\bar{z}. \end{cases} \tag{7.37}$$

Lemm命题 7.1。 在自同构交换假设下，(7.37) 推出

$$x = \psi, \qquad \bar{x} = \phi, \qquad z = \phi^{-1}, \qquad \bar{z} = \psi^{-1}, \qquad y = \psi^i\phi^j, \qquad \bar{y} = \psi^{i+2}\phi^{j-2}.$$

证明。 记 $x = \psi^{\alpha_x}\phi^{\beta_x}$, $\bar{x} = \psi^{\alpha_{\bar{x}}}\phi^{\beta_{\bar{x}}}$, $y = \psi^{\alpha_y}\phi^{\beta_y}$, $\bar{y} = \psi^{\alpha_{\bar{y}}}\phi^{\beta_{\bar{y}}}$, $z = \psi^{\alpha_z}\phi^{\beta_z}$, $\bar{z} = \psi^{\alpha_{\bar{z}}}\phi^{\beta_{\bar{z}}}$。由 $x\phi^2 = \bar{x}x\phi$，可得（对 ψ 指数而言） $\alpha_x = \alpha_{\bar{x}} + \alpha_x$，因此 $\alpha_{\bar{x}} = 0$。对于 ϕ 指数：有 $\beta_x + 2 = \beta_{\bar{x}} + \beta_x + 1$，因此 $\beta_{\bar{x}} = 1$。所以 $\bar{x} = \phi$。由 $x\phi^2 = \bar{x}^2\psi$，得到$\alpha_x = 2\alpha_{\bar{x}} + 1 = 1$ 和 $\beta_x + 2 = 2\beta_{\bar{x}}$，这表明 $\beta_x = 0$，因此 $x = \psi$。对于$\phi^{-2}yx\phi = \phi^{-1}y\psi$，此结果同样成立。

由 $\psi^{-1}z^2 = \phi^{-2}\bar{z}$ 和 $\phi^{-1}\bar{z}z = \phi^{-2}\bar{z}$，$\psi$ 指数给出 $-1+2\alpha_z = \alpha_{\bar{z}}$ 和 $\alpha_{\bar{z}}+\alpha_z = \alpha_{\bar{z}}$，由此得出 $\alpha_z = 0$ 和 $\alpha_{\bar{z}} = -1$。ϕ 指数给出 $2\beta_z = \beta_{\bar{z}} - 2$ 和 $-1 + \beta_{\bar{z}} + \beta_z = \beta_{\bar{z}} - 2$，由此得出 $\beta_z = -1$ 和 $\beta_{\bar{z}} = 0$。因此， $z = \phi^{-1}$ 和 $\bar{z} = \psi^{-1}$。对于 $\psi^{-1}\bar{y}\phi = \phi^{-1}\bar{z}\bar{y}\phi^2$，结论仍然成立。

由关系式 $\phi^{-1}y\psi = \psi^{-1}z\bar{y}\phi^2$，比较 ψ 的指数可得 $\alpha_y+1 = -1+\alpha_{\bar{y}}$，比较 ϕ 的指数可得 $-1+\beta_y = -1+\beta_{\bar{y}}+2$。令 $\alpha_y = i$ 和 $\beta_y = j$，其中 $i,\ j \in \mathbb{Z}$，得到 $y = \psi^i\phi^j$ 和 $\bar{y} = \psi^{i+2}\phi^{j-2}$。当 $\phi^{-2}y\bar{x}\psi = \psi^{-1}\bar{y}\phi$ 时，同样的结论也成立。□

引理 7.2。 设 $y=\psi^i\phi^j$ 且 $\bar{y}=\psi^{i+2}\phi^{j-2}$。则 (7.36) 成立。

证明。 直接计算可得

$$[Ad_\phi(A),Ad_\psi(B)]_{(\psi,\phi)}=\psi\phi A\phi^{-1}\psi^i\phi^j\psi B\psi^{-1}\phi^{-1}-\phi\psi B\psi^{-1}\psi^{i+2}\phi^{j-2}\phi A\phi^{-1}\psi^{-1},$$

and

$$[Ad_\phi(B),Ad_\psi(A)]_{(\psi,\phi)}=\psi\phi B\phi^{-1}\psi^i\phi^j\psi A\psi^{-1}\phi^{-1}-\phi\psi A\psi^{-1}\psi^{i+2}\phi^{j-2}\phi B\phi^{-1}\psi^{-1}.$$

利用 $\phi\psi=\psi\phi$ 对易幂，并比较交换（A， B）$\leftrightarrow$（B， A）时两个中间因子的总 ψ-权和 ϕ-权，可知 BiHom-斜对称性成立。□

命题 7.3。 在上述假设下，满足 (7.34) 以及 (7.35) 和 (7.36)的 形式括号中，唯一的一个是

$$[A,B]_{(\psi,\phi)}=\psi(A)\,\psi^i\phi^j(B)\,\phi^{-1}-\phi(B)\,\psi^{i+2}\phi^{j-2}(A)\,\psi^{-1},\qquad i,j\in\mathbb{Z}. \tag{7.38}$$

证明。结合引理 7.1 以及（7.37）第二行和第三行中的等式，可推出 $\bar{y}=\psi^{i+2}\phi^{j-2}$ 只要 $y=\psi^i\phi^j$。引理 7.2确保了 BiHom-斜对称性的性质。□

公式（7.38）正是（2.8）中使用的非标准括号，它给出了一个 BiHom-Lie 代数 $\big(\mathfrak{gl}(V),[\cdot,\cdot]_{(\psi,\phi)},\ Ad_\psi,\ Ad_\phi\big)$。

8. 附录 II：旋转与双曲旋转的详细 2×2 计算

我们记录第 4 节中使用的所有中间步骤。为求完整起见，本节总结了第 2×2 6.1 节中标准形的详细代数推导。

预备知识。设

$$L=\begin{pmatrix}a&c\\c&b\end{pmatrix},\qquad B=L_{>0}-L_{<0}=\begin{pmatrix}0&c\\-c&0\end{pmatrix}.$$

对于角度，令

$$\psi(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}=R_2(\theta),\qquad \phi(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}=R_2(-\theta).$$

于是 $\psi(\theta)^i\phi(\theta)^j=R_2((i-j)\theta)$，且 $\phi(\theta)^{-1}=R_2(-\theta)=\psi(\theta)$。我们将使用以下恒等式

$$\cos\alpha\cos\beta\pm\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha\mp\beta),\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha\pm\beta).$$

旋转情形：显式右端项。非对称旋转情形下的变形 2×2 演化为

$$\dot{L}=\cos\Big((i-j+2)\theta\Big)\cos(2\theta)\begin{pmatrix}2c^2&bc-ac\\bc-ac&-2c^2\end{pmatrix}+\cos\Big((i-j+2)\theta\Big)\sin(2\theta)\begin{pmatrix}bc-ac&2c^2\\2c^2&ac-bc\end{pmatrix}. \tag{8.39}$$

由（7.38）直接推导如下。将 $[\ ,\ ]_{(\psi,\phi)}$ 按（7.38）写为:

$$\dot{L}=[B,L]_{(\psi(\theta),\phi(\theta))}=\psi(\theta)\,B\,\psi(\theta)^i\phi(\theta)^j\,L\,\phi(\theta)^{-1}-\phi(\theta)\,L\,\psi(\theta)^{i+2}\phi(\theta)^{j-2}\,B\,\psi(\theta)^{-1}.$$

By u对 $\psi(\theta)^i\phi(\theta)^j=R_2((i-j)\theta)$ 和 $\phi(\theta)^{-1}=\psi(\theta)$ 求和，上述方程变为 s

$$\dot{L}=\psi(\theta)\,B\,R_2((i-j)\theta)\,L\,\psi(\theta)-\phi(\theta)\,L\,R_2((i-j+4)\theta)\,B\,\phi(\theta)^{-1}.$$

计算

$$\psi(\theta)\,B=\begin{pmatrix} c\sin\theta & c\cos\theta\\ -c\cos\theta & c\sin\theta\end{pmatrix},\qquad B\,\phi(\theta)^{-1}=B\,\psi(\theta)=\begin{pmatrix} -c\sin\theta & c\cos\theta\\ -c\cos\theta & -c\sin\theta\end{pmatrix},$$

代入这两个旋转，展开并利用上述三角恒等式化简，得到（8.39）。详细证明如下。

$$\begin{aligned}
\dot L &= \psi(\theta)\,B\,\psi(\theta)^i\phi(\theta)^j\,L\,\phi(\theta)^{-1}-\phi(\theta)\,L\,\psi(\theta)^{i+2}\phi(\theta)^{j-2}\,B\,\psi(\theta)^{-1}\\
&= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & c\\ -c & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}^i\\
&\quad\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}^j\begin{pmatrix} a & c\\ c & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}^{-1}\\
&\quad-\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c\\ c & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}^{i+2}\\
&\quad\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}^{j-2}\begin{pmatrix} 0 & c\\ -c & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}^{-1}\\
&= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & c\\ -c & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}^i\\
&\quad\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}^j\begin{pmatrix} a & c\\ c & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\\
&\quad-\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c\\ c & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}^{i+2}\\
&\quad\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}^{j-2}\begin{pmatrix} 0 & c\\ -c & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & c\\ -c & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos((i-j)\theta) & -\sin((i-j)\theta)\\ \sin((i-j)\theta) & \cos((i-j)\theta)\end{pmatrix}\\
&\quad\begin{pmatrix} a & c\\ c & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\\
&\quad-\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c\\ c & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos((i-j+4)\theta) & -\sin((i-j+4)\theta)\\ \sin((i-j+4)\theta) & \cos((i-j+4)\theta)\end{pmatrix}\\
&\quad\begin{pmatrix} 0 & c\\ -c & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} c\sin(\theta) & c\cos(\theta)\\ -c\cos(\theta) & c\sin(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos((i-j)\theta) & -\sin((i-j)\theta)\\ \sin((i-j)\theta) & \cos((i-j)\theta)\end{pmatrix}\\
&\quad\begin{pmatrix} a\cos(\theta)+c\sin(\theta) & -a\sin(\theta)+c\cos(\theta)\\ c\cos(\theta)+b\sin(\theta) & -c\sin(\theta)+b\cos(\theta)\end{pmatrix}\\
&\quad-\begin{pmatrix} a\cos(\theta)+c\sin(\theta) & c\cos(\theta)+b\sin(\theta)\\ -a\sin(\theta)+c\cos(\theta) & -c\sin(\theta)+b\cos(\theta)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \cos((i-j+4)\theta) & -\sin((i-j+4)\theta) \\ \sin((i-j+4)\theta) & \cos((i-j+4)\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c\sin(\theta) & c\cos(\theta) \\ -c\cos(\theta) & -c\sin(\theta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c\sin((i-j+1)\theta) & c\cos((i-j+1)\theta) \\ -c\cos((i-j+1)\theta) & c\sin((i-j+1)\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\cos(\theta)+c\sin(\theta) & -a\sin(\theta)+c\cos(\theta) \\ c\cos(\theta)+b\sin(\theta) & -c\sin(\theta)+b\cos(\theta) \end{pmatrix} \\
&- \begin{pmatrix} a\cos(\theta)+c\sin(\theta) & c\cos(\theta)+b\sin(\theta) \\ -a\sin(\theta)+c\cos(\theta) & -c\sin(\theta)+b\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\sin((i-j+3)\theta) & c\cos((i-j+3)\theta) \\ -c\cos((i-j+3)\theta) & c\sin((i-j+3)\theta) \end{pmatrix} \\
&= (\cos((i-j)\theta)+\cos((i-j+4)\theta)) \begin{pmatrix} c^2 & 0 \\ 0 & -c^2 \end{pmatrix} \\
&+ (\sin((i-j)\theta)-\sin((i-j+4)\theta)) \begin{pmatrix} 0 & c^2 \\ c^2 & 0 \end{pmatrix} \\
&+ (\sin((i-j+1)\theta)\sin(\theta)+\cos((i-j+3)\theta)\cos(\theta)) \begin{pmatrix} 0 & -ac \\ bc & 0 \end{pmatrix} \\
&+ (\cos((i-j+1)\theta)\cos(\theta)-\sin((i-j+3)\theta)\sin(\theta)) \begin{pmatrix} 0 & bc \\ -ac & 0 \end{pmatrix} \\
&+ (\sin((i-j+1)\theta)\cos(\theta)-\sin((i-j+3)\theta)\cos(\theta)) \begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix} \\
&+ (\cos((i-j+1)\theta)\sin(\theta)+\cos((i-j+3)\theta)\sin(\theta)) \begin{pmatrix} bc & 0 \\ 0 & ac \end{pmatrix} \\
&= \cos((i-j+2)\theta)\cos(2\theta) \begin{pmatrix} 2c^2 & bc-ac \\ bc-ac & -2c^2 \end{pmatrix} \\
&+ \cos((i-j+2)\theta)\sin(2\theta) \begin{pmatrix} bc-ac & 2c^2 \\ 2c^2 & ac-bc \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

对称旋转情形下的变形 2×2 演化表示为

$$
\dot{L} = \cos((i+j)\theta)\cos(2\theta)\begin{pmatrix} 2c^2 & bc-ac \\ bc-ac & -2c^2 \end{pmatrix} + \cos((i+j)\theta)\sin(2\theta)\begin{pmatrix} ac-bc & 2c^2 \\ 2c^2 & bc-ac \end{pmatrix}. \tag{8.40}
$$

该表达式的推导过程与前一种情形类似，系统地应用了旋转对称性及相应的矩阵变换。通过考虑适当的旋转角和符号，可推导出上述演化方程。

双曲旋转：右端的显式表达式。在非对称双曲情形下，我们有

(8.41)

$$\begin{aligned}\dot{L} = &\cosh((i-j+2)\lambda)\cosh(2\lambda)\begin{pmatrix}2c^2 & 0\\ 0 & -2c^2\end{pmatrix} + \cosh((i-j+2)\lambda)\sinh(2\lambda)\begin{pmatrix}0 & -2c^2\\ 2c^2 & 0\end{pmatrix}\\ &+\cosh((i-j+2)\lambda)\cosh(4\lambda)\begin{pmatrix}0 & bc-ac\\ bc-ac & 0\end{pmatrix}\\ &+\sinh((i-j+2)\lambda)\sinh(2\lambda)\begin{pmatrix}0 & -bc-ac\\ bc+ac & 0\end{pmatrix}\\ &+\sinh((i-j+2)\lambda)\sinh(3\lambda)\sinh\lambda\begin{pmatrix}-2bc & 0\\ 0 & 2ac\end{pmatrix}\\ &+\sinh((i-j+2)\lambda)\cosh(3\lambda)\cosh\lambda\begin{pmatrix}2ac & 0\\ 0 & -2bc\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

上述过程是通过使用（7.38）进行直接计算得出的 d

$$\psi(\lambda) = \begin{pmatrix}\cosh\lambda & \sinh\lambda\\ \sinh\lambda & \cosh\lambda\end{pmatrix}, \quad \phi(\lambda) = \begin{pmatrix}\cosh\lambda & -\sinh\lambda\\ -\sinh\lambda & \cosh\lambda\end{pmatrix},$$

$$\psi(\lambda)B = \begin{pmatrix}-c\sinh\lambda & c\cosh\lambda\\ -c\cosh\lambda & c\sinh\lambda\end{pmatrix}, \quad B\phi(\lambda) = \begin{pmatrix}-c\sinh\lambda & c\cosh\lambda\\ -c\cosh\lambda & c\sinh\lambda\end{pmatrix},$$

以及双曲余弦、双曲正弦的恒等式。详细证明如下。

$$\begin{aligned}\dot{L} &= \psi(\lambda)\,B\,\psi(\lambda)^i\phi(\lambda)^j\,L\,\phi(\lambda)^{-1} - \phi(\lambda)\,L\,\psi(\lambda)^{i+2}\phi(\lambda)^{j-2}\,B\,\psi(\lambda)^{-1}\\ &= \begin{pmatrix}\cosh(\lambda) & \sinh(\lambda)\\ \sinh(\lambda) & \cosh(\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & c\\ -c & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cosh(\lambda) & \sinh(\lambda)\\ \sinh(\lambda) & \cosh(\lambda)\end{pmatrix}^{i-j}\\ &\quad\begin{pmatrix}a & c\\ c & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cosh(\lambda) & \sinh(\lambda)\\ \sinh(\lambda) & \cosh(\lambda)\end{pmatrix}\\ &\quad-\begin{pmatrix}\cosh(\lambda) & -\sinh(\lambda)\\ -\sinh(\lambda) & \cosh(\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & c\\ c & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cosh(\lambda) & \sinh(\lambda)\\ \sinh(\lambda) & \cosh(\lambda)\end{pmatrix}^{i-j+4}\\ &\quad\begin{pmatrix}0 & c\\ -c & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cosh(\lambda) & -\sinh(\lambda)\\ -\sinh(\lambda) & \cosh(\lambda)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cosh(\lambda) & \sinh(\lambda)\\ \sinh(\lambda) & \cosh(\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & c\\ -c & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cosh((i-j)\lambda) & \sinh((i-j)\lambda)\\ \sinh((i-j)\lambda) & \cosh((i-j)\lambda)\end{pmatrix}\\ &\quad\begin{pmatrix}a & c\\ c & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cosh(\lambda) & \sinh(\lambda)\\ \sinh(\lambda) & \cosh(\lambda)\end{pmatrix}\\ &\quad-\begin{pmatrix}\cosh(\lambda) & -\sinh(\lambda)\\ -\sinh(\lambda) & \cosh(\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & c\\ c & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cosh((i-j+4)\lambda) & \sinh((i-j+4)\lambda)\\ \sinh((i-j+4)\lambda) & \cosh((i-j+4)\lambda)\end{pmatrix}\\ &\quad\begin{pmatrix}0 & c\\ -c & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cosh(\lambda) & -\sinh(\lambda)\\ -\sinh(\lambda) & \cosh(\lambda)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} -c\sinh(\lambda) & c\cosh(\lambda) \\ -c\cosh(\lambda) & c\sinh(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh((i-j)\lambda) & \sinh((i-j)\lambda) \\ \sinh((i-j)\lambda) & \cosh((i-j)\lambda) \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} a\cosh(\lambda)+c\sinh(\lambda) & a\sinh(\lambda)+c\cosh(\lambda) \\ c\cosh(\lambda)+b\sinh(\lambda) & c\sinh(\lambda)+b\cosh(\lambda) \end{pmatrix} \\
&- \begin{pmatrix} a\cosh(\lambda)-c\sinh(\lambda) & c\cosh(\lambda)-b\sinh(\lambda) \\ c\cosh(\lambda)-a\sinh(\lambda) & b\cosh(\lambda)-c\sinh(\lambda) \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} \cosh((i-j+4)\lambda) & \sinh((i-j+4)\lambda) \\ \sinh((i-j+4)\lambda) & \cosh((i-j+4)\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c\sinh(\lambda) & c\cosh(\lambda) \\ -c\cosh(\lambda) & c\sinh(\lambda) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c\sinh((i-j-1)\lambda) & c\cosh((i-j-1)\lambda) \\ -c\cosh((i-j-1)\lambda) & -c\sinh((i-j-1)\lambda) \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} a\cosh(\lambda)+c\sinh(\lambda) & a\sinh(\lambda)+c\cosh(\lambda) \\ c\cosh(\lambda)+b\sinh(\lambda) & c\sinh(\lambda)+b\cosh(\lambda) \end{pmatrix} \\
&- \begin{pmatrix} a\cosh(\lambda)-c\sinh(\lambda) & c\cosh(\lambda)-b\sinh(\lambda) \\ c\cosh(\lambda)-a\sinh(\lambda) & b\cosh(\lambda)-c\sinh(\lambda) \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} -c\sinh((i-j+5)\lambda) & c\cosh((i-j+5)\lambda) \\ -c\cosh((i-j+5)\lambda) & c\sinh((i-j+5)\lambda) \end{pmatrix} \\
&= \cosh((i-j+2)\lambda)\cosh(2\lambda) \begin{pmatrix} 2c^2 & 0 \\ 0 & -2c^2 \end{pmatrix} \\
&+ \cosh((i-j+2)\lambda)\sinh(2\lambda) \begin{pmatrix} 0 & -2c^2 \\ 2c^2 & 0 \end{pmatrix} \\
&+ \cosh((i-j+2)\lambda)\cosh(4\lambda) \begin{pmatrix} 0 & bc-ac \\ bc-ac & 0 \end{pmatrix} \\
&+ \sinh((i-j+2)\lambda)\sinh(2\lambda) \begin{pmatrix} 0 & -bc-ac \\ bc+ac & 0 \end{pmatrix} \\
&+ \sinh((i-j+2)\lambda)\sinh(3\lambda)\sinh(\lambda) \begin{pmatrix} -2bc & 0 \\ 0 & 2ac \end{pmatrix} \\
&+ \sinh((i-j+2)\lambda)\cosh(3\lambda)\cosh(\lambda) \begin{pmatrix} 2ac & 0 \\ 0 & -2bc \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

9. 附录 III：谱数据、 τ-函数与 2×2 逆散射公式

本附录将针对6 节中的弱耦合情形，对 2×2维情形所用公式作出完整推导。

固定 $S=\mathrm{diag}(1,\ -1)$，并考虑

$$L_2=\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & -a_2 \end{pmatrix}, \qquad \widehat{L}_2=\begin{pmatrix} \widehat{a}_1 & -\widehat{b}_1 \\ \widehat{b}_1 & -\widehat{a}_2 \end{pmatrix}.$$

在特定的种子选择下

$$a_1=\widehat{a}_1=\widehat{b}_1=0, \quad b_1=\widehat{a}_2=1, \quad a_2=m,$$

我们得到特征值和特征向量

$$\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}\Big(\mp \sqrt{m^2-4} - m\Big), \qquad \widehat{\lambda}_1 = 0, \;\; \widehat{\lambda}_2 = -1,$$

$$\Phi_2^0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \widehat{\Phi}_2^0 = I_2.$$

我们将括号 $\langle\cdot\rangle$ 解释为定义在集合 $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ 上的有限谱配对，并采用典范权重；具体而言，对于标量函数 $F(\lambda)$ 和向量（值）符号 v^0，

$$\left\langle v^0 v^0 e^{\lambda t} \right\rangle := \sum_{k=1}^{2} v^0(\lambda_k)\, v^0(\lambda_k)^{\top}\, e^{\lambda_k t}.$$

定义 τ-函数

$$D_0(t) \equiv 1, \qquad D_1(t) = \left\langle \phi_1^0 \phi_1^0 e^{\lambda t} \right\rangle, \qquad D_2(t) = \det \begin{pmatrix} \left\langle \phi_1^0 \phi_1^0 e^{\lambda t} \right\rangle & \left\langle \phi_1^0 \phi_2^0 e^{\lambda t} \right\rangle \\ -\left\langle \phi_2^0 \phi_1^0 e^{\lambda t} \right\rangle & -\left\langle \phi_2^0 \phi_2^0 e^{\lambda t} \right\rangle \end{pmatrix},$$

$\widehat{\tau}$-函数满足 $D_1(0) = D_2(0) = 1$，且 $\dot{D}_1(0) = \dot{D}_2(0) = 0$（与种子一致）。

令

$$\Phi_2(t) = \frac{1}{e^{(\lambda_2+2\lambda_1)t}} \begin{pmatrix} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \\ -e^{\lambda_1 t} & -e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix},$$

并将 $\Phi_2(t)$ 定义为下式的唯一解

$$\dot{\Phi}_2 = [B_2, \Phi_2], \qquad \dot{\widehat{\Phi}}_2 = [\widehat{B}_2, \Phi_2] + [B_2, \widehat{\Phi}_2],$$

初始数据为 $\Phi_2(0) = \Phi_2^0$, $\widehat{\Phi}_2(0) = \widehat{\Phi}_2^0$. 直接验证可知，这些选择给出了第 6.1 节中的弱耦合 2×2 系统。

定义 Jost 型函数

$$\phi_1(\lambda, t) = \frac{e^{\lambda t}}{\sqrt{D_1(t) D_0(t)}} \left\langle \phi_1^0 \phi_1^0 e^{\lambda t} \right\rangle, \qquad \phi_2(\lambda, t) = \frac{e^{\lambda t}}{\sqrt{D_2(t) D_1(t)}} \det \begin{pmatrix} \left\langle \phi_1^0 \phi_1^0 e^{\lambda t} \right\rangle & \phi_1^0 \\ \left\langle \phi_2^0 \phi_1^0 e^{\lambda t} \right\rangle & \phi_2^0 \end{pmatrix}.$$

$\widehat{\phi}_1$, $\widehat{\phi}_2$ 类似的构造可得 ϕ_1, ϕ_2 用 D_i 表示。代入这些定义即可得到闭式表达式

$$L_2(t) = \begin{pmatrix} \lambda_2 e^{2(\lambda_1+\lambda_2)t} + \lambda_1 e^{4\lambda_1 t} & -e^{2(\lambda_1+\lambda_2)t} - e^{4\lambda_1 t} \\ -e^{2(\lambda_1+\lambda_2)t} - e^{4\lambda_1 t} & \lambda_1 e^{2(\lambda_1+\lambda_2)t} + \lambda_2 e^{4\lambda_1 t} \end{pmatrix},$$

$$\widehat{L}_2(t) = e^{-(\lambda_2+2\lambda_1)t} \begin{pmatrix} \widehat{a}_{11}(t) & \widehat{a}_{12}(t) \\ \widehat{a}_{21}(t) & \widehat{a}_{22}(t) \end{pmatrix},$$

其中的各项 $\widehat{a}_{ij}(t)$ 直接由上述谱表示得出（其表达式虽为显式形式但较为冗长，为使表述简洁，故在此略去）。

10. 附录 录 IV：Miura 变换的验证（第 5)

设 $u=(a_{ij})_{n\times n}$。线性映射 $\mathcal{M}_\theta\in\mathfrak{gl}(V)$ 定义为

$$\mathcal{M}_\theta u=\psi(\theta)u\psi(\theta)^{-1}.$$

那么，第 5 =（$\mathbf{a}_{ij}$）$_{n\times n}$ 中的 Miura 变量 u 为

$$\mathbf{u}=\mathcal{M}_\theta\, u.$$

对时间求导，并利用由 $L=[B,L]$ 诱导的 $(n\times n)$ 未变形流 $\dot u=\mathcal{F}(u)$，得到

$$\dot{\mathbf{u}}=\mathcal{M}_\theta\,\mathcal{F}(u)=\mathcal{F}_\theta(u),$$

其中 $\mathcal{F}_\theta$ 恰好是变形系统（2.6）的右端。中间的等式来自显式的矩阵恒等式（通过直接相乘验证）

$$\mathcal{M}_\theta\,(\text{commutator coefficients of }\mathcal{F})=(\text{deformed coefficients in }(2.6)).$$

当 $n=2$时，这对应于附录 8中所述的特定三角重分配。相同的论证也适用于第 6 节中的耦合情形（将 u （或 $\mathbf{u}$）替换为^三元组（a_1, a_2, b_1）（或（$\hat a_1$, $\hat a_2$, b_1））, 并使用 R_2（θ）的分块对角作用。

11. 附录 V：一致性检验与极限情形

由（8.40）可知，导数 $\dot L$ 是两个具有公因子 cos（$(i+j)\,\theta$)的项之和。于是$L\equiv 0$ 当且仅当

$$\cos\big((i+j)\theta\big)=0,$$

（因为当 8.39）中的第一个矩阵通常非零时，只要 $c\neq 0$）。该条件产生三种情形，

(1) $\theta=\frac{\pi}{2}+k\pi$ 和 $i+j$ 是奇数。(2) $\theta=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ 和 $i+j$ 是偶数，$i+j\neq 0$.(3) θ 不存在且 $i+j=0$.

情形 1 和 2对第 4节的注释作了进一步说明。

对于等谱拉克斯流，必须满足 $\frac{d}{dt}\operatorname{tr}(L^p)=0$ 对所有 $p\geq 1$均成立。特别是，$\frac{d}{dt}\operatorname{tr}L=0$ 和 $\frac{d}{dt}\operatorname{tr}L^2=0$。根据（8.41），

$$\frac{d}{dt}\operatorname{tr}L=2(ac-bc)\,\sinh((i-j+2)\lambda)\cosh(4\lambda).$$

除非 $\lambda=0$ （或退化情形 $ac=bc$），否则一般而言该值非零，因此该流并非等谱。当 $\lambda=0$时，括号退化为未变形的括号，我们便恢复标准的 Toda动力学；这证明了第 4 节中“当且仅当”的断言，这里采用的是拉克斯流可积性的自然（等谱）概念。

对于 $\psi(r)=r^pI_n$ 和 $\phi(r)=r^qI_n$，式（2.8）变为 $\dot L=r^{p(i+1)+q(j-1)}[B,L]$，这是一种统一的时间重标度。因此，正如第 4 节所述，解集除一个标量因子外保持不变。

两种变形均随参数连续变化：

$$\theta\to 0\ \text{or}\ \lambda\to 0\quad\Longrightarrow\quad[\cdot,\cdot]_{(\psi,\phi)}\to[\cdot,\cdot].$$

因此，经典Toda格可视为我们参数空间中的一个特殊点，而本文中的公式则量化了该模型作为统一推广的具体含义。

致谢 本工作部分得到国家自然科学基金委员会（NSFC）项目资助，项目编号为12071237、12271089和11871144。

参考文献

[1] *Y. Billig*，源于环面李代数表示的 *Korteweg-de Vries* 层级的扩展，《代数杂志》*, 217(1), 40-64 (1999).*[2] *X. Bi, C. Li*，*Hom-Lie*代数与不定矩阵的耦合 *Toda* 方程，《非线性数学物理杂志》*, 29, No. 4, 896-904, (2022).*[3] *A. De Sole, V. Kac, D. Valeri*，经典李代数的经典仿射 W -代数及其相关的可积哈密顿层级，《数学物理通讯》*360(3), 851-918, (2018).*[4] *B. Dubrovin, D. Valeri, D. Yang*，仿射*Kac-Moody*代数与*Drinfeld-Sokolov*层级的*τ*函数：矩阵预解式方法，*SIGMA, 18: 077, (2022).*[5] *H. Flaschka*，*Toda* 格 *I*，《物理评论*B*辑》*, 9: 1924-1925, (1974).*[6] *J. Hartwig, D. Larsson, S. Silvestrov*，利用 σ-导子对李代数进行变形。《代数杂志》*295, 314-361 (2006).*[7] *G. Graziani, A. Makhlouf, C. Menini* 等，*BiHom*结合代数、*BiHom-Lie* 代数和 *BiHom* 双代数，*SIGMA., 11: 086, (2015).*[8] *N. Hussain, S. S.-T. Yau, H. Zuo*，少项式奇点的导子李代数，《澳大利亚数学会通报》*98(1), 77-88, (2018).*[9] *N. Hussain, S. S.-T. Yau, H. Zuo*，孤立超曲面奇点的第 k 个 *Yau*数及一个不等式猜想，《澳大利亚数学会杂志》（即将出版）。[10] *N. Hussain, S. S.-T. Yau, H. Zuo*，关于孤立超曲面奇点的新 k 个 *Yau*代数，《数学杂志》*, 294 (1-2), 331-358, (2020).*[11] *J. Jiang, S.K. Mishra, Y. Sheng*，*Hom-Lie*代数与*Hom-Lie*群、积分与微分，*SIGMA. 16: 137, (2020).*[12] *Y. Kodama, K. McLaughlin*，对完整对称*Toda*层级的显式积分及其排序性质，《数学物理快报》*, 37: 37-47, (1996).*[13] *Y. Kodama, J. Ye*，一般矩阵的等谱变形及其在李代数上的约化，《数学物理通讯》*, 178: 765-788, (1996).*[14] *C. Li, J. He*，扩展的 Z_N-*Toda* 层级，《理论数学物理》*185, 289-312 (2015)*[15] *J. Li, C. Li*，不定度量下有限非周期 *Toda* 格的扩展，《统计物理杂志》*179, 901-919, (2020).*[16] *S. Mishra, A. Naolekar*，*Hom-Lie*代数上的 *O*-算子。《数学物理杂志》*, 61 (12): 121701, (2020).*[17] *Y. Sheng, Z. Xiong*，关于*Hom-Lie*代数。《线性与多重线性代数》*63: 2379-2395, (2015)*[18] *J. Sun, S. Wang, C. Zhang, H. Zhu*，*Hom-*（余）代数和*Hom-*（余）模的*Sweedler*对偶，《非线性数学物理杂志》*, 32 (1):51, (2025)* 。[19]*J. Sun, S. Wang, H. Zhu*，作为分次*BiHom*代数的矩阵及其分解，预印本，*arXiv:2505.02191 (2025).*[20] *D. Yau*，*Hom*量子群 *I*：拟三角*Hom*双代数，《物理学杂志*A*：数学与理论》*, 45(6): 065203, (2012).*[21]*D. Yau*，*Hom*量子群 *II*：共辫*Hom*双代数与*Hom*量子几何，预印本，*arXiv:0907.1880 (2009).*[22] *D. Yau*，*Hom*量子群 *III*：表示与模*Hom*代数，预印本，*arXiv:0911.5402 (2009).*

[1]东南大学数学学院，中国南京 211189电子邮箱： 230228425@seu.edu.cn

[2]山东科技大学数学与系统科学学院，中国青岛 266590

22 盖博通[1] , 李传中[2 3], JIACHENG SUN[1], SHUANHONG WANG[4], 和朱浩然[5]

[3]西北大学马菲肯校区材料科学、创新与建模研究重点领域，南非姆马巴托2735电子邮箱地址：lichuanzhong@sdust.edu.cn

[1]东南大学数学学院，中国南京211189电子邮箱地址： 220242018@seu.edu.cn

[4]丘成桐中心，东南大学数学学院，中国南京210096电子

*mail add*邮件： shuanhwang@seu.edu.cn

[5]南洋理工大学物理与数学科学学院，新加坡南洋径21号，637371电子邮箱地址：haoran.zhu@ntu.edu.sg