arXiv:2512.15591v1 [math.GR] 17 Dec 2025

关于特殊逆幺半群的右单位

IGORDOLINKA[1] 和 ROBERT D. GRAY[2]

Abstract. 我们研究这样一类幺半群：它们是有限呈示特殊逆幺半群的右单位子幺半群。马卡宁的经典结果表明，有限表示特殊幺半群的右单位幺半群可分解为单位群与有限秩自由幺半群的自由积。Gray 和 Ruˇskuc（2024年）给出了首个例子：某个有限呈示特殊逆幺半群的右单位子幺半群无法作此类分解，这使得确定这类幺半群的结构这一问题悬而未决。本文的第一部分证明了一般性结果，表明有限呈示特殊逆幺半群的右单位能够作此类自由积分解的唯一情形，是其单位群为有限表示群。这意味着右单位通常无法作此类自由积分解。为证明这一点，我们建立了关于特殊逆幺半群子群的有限生成性与可表示性的一些一般性结果。具体而言，我们给出了任意子群何时有限生成的精确刻画，条件是其陪集在该子群所属的 $\mathscr{R}$-类中的并集具备某些连通性；我们也刻画了任意子群何时为有限表示群。此外，我们还给出了一个充分条件，用称为边界宽度的几何有限性性质来判定任意子群的有限生成性与可表示性。由此，我们证明，有限呈示特殊逆幺半群的右单位幺半群类与有限表示群的前缀幺半群类互不包含。本文第二部分证明，有限 RC-呈示幺半群的每个有限生成子幺半群，都同构于某个有限呈示特殊逆幺半群的子幺半群 N；该特殊逆幺半群 M 满足：N 是 M的右单位子幺半群，且 N 包含 M的单位群。这一结果推广并拓展了 Gray 和 Kambites（2025）最近获得的关于有限呈示特殊逆幺半群单位群的分类。基于此，我们推导出右消去幺半群的 RC-表示具有若干令人意外的性质，这些性质与经典幺半群表示理论形成对照。

1. 引言

马格努斯 [29, 30] 近一个世纪前证明了单关系群字问题的可判定性问题具有肯定解（关于更近代的论述，见 [28] ），这也是组合群论的基石之一。单关系群的研究在当代几何群论中仍是一个十分活跃的领域；例如，见 [22, 23, 26, 27]。马格努斯对字问题的解答立即引出了一个问题：类似的结果是否也适用于单关系幺半群 $\mathrm{Mon}\langle A \mid u = v\rangle$（其中 u, v 是自由幺半群 A^* 中的两个词）？令人惊讶的是，这个问题至今仍未解决。人们为实现这一目标取得了诸多进展，其中尤以 S.I. 阿江 [1] 及其学生 [2], 的工作最为显著；此外，人们还发现了这一问题与其他代数结构的各种判定问题之间的诸多联系，其中一些稍后将会提及。例如，阿江给出了字问题解答的一个重要情形，

2010 *Mathematics Subject Classification.* 20M05；20M18，20F05。*Key words and phrases.* 特殊逆幺半群；右单位；右消去幺半群；RC-表示。第一作者的研究由塞尔维亚科学与艺术学院的个人资助项目 F-121“组合半群与群论问题”资助。第二作者的研究由EPSRC研究员资助项目 EP/V032003/1“无限群、幺半群和逆半群的算法、拓扑与几何方面”资助。[1]诺维萨德大学数学与信息学系，Trg Dositeja Obradovi´ca 4，21101 诺维萨德，塞尔维亚。*Email address:* dockie@dmi.uns.ac.rs。[2]东英吉利大学工程、数学与物理学院，诺里奇 NR4 7TJ，英国。*Email address:* Robert.D.Gray@uea.ac.uk。

即特殊的 单关系元 $\mathsf{Mon}\langle A \mid w = 1\rangle$（例如，关于这一结果更简短、更新的证明，见 [24, 44, 45] ），如今人们对这类幺半群的结构有了更深入的了解。为解决单关系元的可判定性问题所做的努力，为组合／几何半群理论作为一个研究领域的兴起与确立铺平了道路。关于单关系元字问题的最新进展综述，见 [35] 。

一个相对微小却影响深远的认识，彻底改变了人们解决单关系幺半群问题的探索进程。它出现在世纪之交，由 Ivanov、Margolis 和 Meakin [21]提出。他们指出，除了群与半群之外，还有另一类在这一领域发挥不可或缺作用的代数：逆半群／幺半群。逆幺半群是在幺半群上赋予一种额外的一元运算 $^{-1}$ ，并满足以下定律（ab）$^{-1} = b^{-1}a^{-1}$、（a^{-1}）$^{-1} = a$、$aa^{-1}a = a$ 和$aa^{-1}bb^{-1} = bb^{-1}aa^{-1}$；最后一条实际上说明幂等元彼此可交换，从而使每个元素的（半群论意义上的）逆元唯一（但这并不必然意味着 $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$；后一条件描述的是逆幺半群的单位群中的元素）。逆幺半群这一类具有自由对象，Munn [33] 和 Scheiblich [40], 对其作出了优雅的描述，这使得逆幺半群表示成为可能。关于逆半群／逆幺半群理论的背景知识，可参阅专著 [25, 36] ； 一般半群理论则可参阅 [8, 20]。

鉴于论文 [2]将一般的单关系幺半群问题归结为两类特殊的表示，即 $\mathsf{Mon}\langle a, b \mid aub = ava\rangle$ 和 $\mathsf{Mon}\langle a,\ b \mid aub = a\rangle$ （二者都生成右消去幺半群），文献 [21] 证明，例如，第一类幺半群的字问题可归结为特殊逆幺半群 $\mathsf{Inv}\langle a,\ b \mid auba^{-1}v^{-1}a^{-1} = 1\rangle$的字问题，因为初始幺半群嵌入了后者。第二类幺半群也有类似结果。如今，既然单关系群 $\mathsf{Gp}\langle A \mid w = 1\rangle$ 和特殊单关系元 $\mathsf{Mon}\langle A \mid w = 1\rangle$ 的字问题都是可判定的，人们便很容易猜想，特殊单关系逆幺半群 $\mathsf{Inv}\langle A \mid w = 1\rangle$ 也有类似结果（这将立即解决单关系幺半群问题）。令人惊讶的是，本文第二作者近期在 [13], 中证明这一猜想是错误的；不过，由于反例具有特定形式，这一结果仍未推翻 [21]提出的方法。此外，正如 [17], 所示，有限呈示特殊逆幺半群的结构远不如特殊（普通）幺半群那样良好。右单位幺半群再次在 [13], 中发挥了关键作用：所构造的反例中，该子幺半群的成员资格问题是算法不可判定的，因此字问题也不可判定（因为此时不存在算法，能够判断给定的生成元上的字 w 是否在我们的逆幺半群中满足 $ww^{-1} = 1$ ）。

回到群这一主题，由一个表示给出的逆幺半群可同态映射到由相同表示给出的群，而该自然同态将初始逆幺半群的右单位幺半群映射到该群的前缀幺半群 ： 即由关系词各前缀所表示的所有元素生成的子幺半群。当初始特殊逆幺半群具有 E-单性 这一优良结构特征时，该同态在右单位幺半群上的限制实际上是一个同构，而相关逆幺半群的字问题便归约为对应群的前缀幺半群的成员问题 [21]。此外，对于单关系幺半群问题剩余情形中的第二种情况，Guba [19]构造了另一个群（与刚才描述的群不同，它与初始表示之间并无明显联系），使得初始幺半群的字问题归约为该群的前缀成员问题。关于上述类型的幺半群、群和逆幺半群之间诸多联系的综述，读者可参阅 [32, 10] 。然而，显而易见的是，在理解单关系幺半群问题的复杂性与本质的过程中，有限呈示特殊逆幺半群的右单位幺半群以及有限表示群的前缀幺半群都是极其重要的研究对象。

本文的主要出发点是作者此前的工作 [11]，以及相当近期的工作 [15]。具体而言，每个有限表示群的前缀幺半群必然是有限生成且可嵌入群的（因而是一个递归呈现且可嵌入群的幺半群；这里的含义参见 Higman 嵌入定理，见 [11, 28]）。然而，并非每个具有这些性质的幺半群都能成为前缀幺半群：例如，一个群是前缀幺半群，当且仅当它是有限表示群 [11, 引理 3.4]。尽管如此， [11], 中的一项主要结果（下文定理 2.6 回顾该结果）指出，当有限表示群的一个有限生成子幺半群 M不能成为前缀幺半群时，只需将一个有限秩自由幺半群作为自由因子添入，便可“修正”这一问题；而从某个下界起的所有秩μ_M 都适用。接着，在 [11, 第 5] 节中，我们汇集了关于有限呈示特殊逆幺半群的右单位幺半群的一些部分结果，并（隐含地）希望这一类也能有类似——即使不完全相同——的结果。特别是，根据 [11, 定理 5.3]，这一类包含所有有限 RC 表示幺半群（关于右消去幺半群的 RC 表示基础知识，见下一节）；而一个有限生成群属于这一类，当且仅当它是有限表示群 [11, 引理 5.2]。特别地，这表明并非有限 RC 表示幺半群的每个有限生成子幺半群都能成为某个有限呈示特殊逆幺半群的右单位幺半群：任何递归呈现但非有限表示的有限生成群，都是一个反例。

在本文的第一部分，我们表明这类猜想会以惊人的方式失效：也就是说，事实证明（见下文定理 4.1），若 G 是有限生成群，且 T 是单位群平凡的有限生成幺半群（其中包括有限秩自由幺半群的情形），那么自由积 $G * T$ 能够作为某个有限表示特殊逆幺半群的右单位幺半群出现，当且仅当 G 是有限表示的。换言之，除非其群具有有限表示，否则这些右单位幺半群不能相对于其单位群作自由分解。我们将在第 4 节证明这一结果；为此，首先必须建立关于特殊逆幺半群子群的有限生成性与可表示性的一些一般结果。第3节所给出的这些结果，是用 Sch¨utzenberger 图的几何性质来表述的。因此，有限表示特殊逆幺半群的右单位幺半群类与有限表示群的前缀幺半群类彼此独立，即两者互不包含。此外，这也提供了大量非群的例子：它们是有限生成的子幺半群，嵌在有限 RC-呈示的（右消去的）幺半群中，却不能作为某个有限表示特殊逆幺半群的右单位幺半群出现。

在第5节中，我们证明，有限 RC 表示幺半群的有限生成子幺半群这一类，与有限呈示特殊逆幺半群的右单位元幺半群这一类仍然密切交织：我们证明，对于前一类中的每个幺半群 T ，后一类中都存在一个幺半群 R ，具有这样的性质： R 包含一个子幺半群，该子幺半群包含 R 的整个单位群，并且与 T同构。这推广并扩展了 [15, 定理4.1], 中给出的有限呈示特殊逆幺半群的单位群分类；事实上，我们借鉴论文 [15]中的方法来证明这一点。我们首先推广 [15] 中的一个关键构造，继而明确确定相关特殊逆幺半群的右单位幺半群的 RC 表示。

在结论部分，我们利用这一 RC-表示证明，有限呈示特殊逆幺半群的右单位幺半群这一类确实包含一些并非有限 RC-呈示的右消去幺半群，并给出一个具体例子。此外，我们重新考察了 [17, Section 6] 中的一项构造（该论文启发了本研究 [15]），并确定了其右单位幺半群。结果表明，这个幺半群总是有限 RC-呈示的，尽管如 [17], 所示，它作为幺半群未必是有限呈示的。此外，我们还得出进一步结论，揭示普通幺半群表示理论与 RC-表示理论之间的鲜明差异。

2. Basic notions and summary of results

2.1. 半群理论基础。 研究半群结构的一项基本工具是五种等价关系 $\mathscr{R}$，$\mathscr{L}$，$\mathscr{J}$，$\mathscr{H}$，$\mathscr{D}$，它们称为*Green*关系。这里我们给出它们在幺半群 S中的定义：

$$a\,\mathscr{R}\,b \Leftrightarrow aS = bS, \quad a\,\mathscr{L}\,b \Leftrightarrow Sa = Sb, \quad a\,\mathscr{J}\,b \Leftrightarrow SaS = SbS.$$

此外，$\mathscr{H} = \mathscr{R} \cap \mathscr{L}$和 $\mathscr{D} = \mathscr{R} \vee \mathscr{L}$，这正是 $\mathscr{R} \circ \mathscr{L}$，因为可以证明 $\mathscr{R}$和 $\mathscr{L}$可交换。若存在某个 $x \in S$使得 $a = axa$，我们就称 $a \in S$ 为正则元；此外，每个正则元 $a \in S$ 都有一个逆元 $x \in S$，使得 $axa = a$ 和 $xax = x$。在同一个 $\mathscr{D}$-类中，要么所有元素都是正则元，要么没有一个是；在前一种情况下，元素 a 的所有逆元都包含在 D_a中，即 a 的 $\mathscr{D}$-类中（其他关系的类也使用类似记法）。若 x是 a 的逆元，则 $ax \in R_a$ 和 $xa \in L_a$ 是幂等元，而 $\mathscr{D}$-类中的所有幂等元都以这种方式产生；因此，在正则 $\mathscr{D}$-类中，每个 $\mathscr{R}$-类和每个 $\mathscr{L}$-类都至少包含一个幂等元。可以将 $\mathscr{D}$-类想象成一个矩形结构，其中行表示$\mathscr{R}$-类，列表示 $\mathscr{L}$-类，而各个方格表示 $\mathscr{H}$-类。每个这样的“方格”至多包含一个幂等元；若包含幂等元，则它恰好是所讨论的幺半群/半群的一个极大子群。每个极大子群都由此产生。

幺半群 S 的元素 a 若满足 $ax = 1$，其中 $x \in S$，则称为右单位；左单位则对偶地定义。既是左单位又是右单位的元素称为单位，所有这类元素构成一个群，称为幺半群 S 的单位群。S 的右单位集合构成一个子幺半群。根据定义显然可知，单位群等于单位元 1 所在的 $\mathscr{H}$-类，而右单位幺半群等于 1 所在的$\mathscr{R}$-类。容易看出，任意幺半群的右单位子幺半群都是右消去幺半群。

若幺半群 S 的每个元素都有唯一的逆元，则称 S 为逆幺半群。在这种情况下，所有 $\mathscr{D}$-类都是正则的，因此它们必定是方形的，即每个 $\mathscr{D}$-类包含数量相同的 $\mathscr{R}$-类和 $\mathscr{L}$-类，并且每个 $\mathscr{R}$-/$\mathscr{L}$-类恰好包含一个幂等元。另一种方法是将逆幺半群视为签名为 (2,1, 0) 的代数结构，用 a^{-1} 表示 a 的唯一逆元；由此可以证明，逆幺半群构成由恒等式 $(x^{-1})^{-1} = x$、$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$、$xx^{-1}x = x$ 和 $xx^{-1}yy^{-1} = yy^{-1}xx^{-1}$ 定义的一元幺半群簇。现在，逆幺半群 S 的元素 a 是 S 的右单位，当且仅当 $aa^{-1} = 1$；而 S 的 a 是单位，当且仅当 $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$。

若 S 是逆幺半群，则满足 S/ρ 是群的 S 上的同余 ρ 这一族必定非空（因为其中包含全关系），且不难证明它对任意交封闭。因此，按包含关系存在一个最小同余 σ，于是 S/σ 就是 S的最大群像。显然，在 σ 中（事实上，在所考虑的这一族中的所有同余 ρ 中），S 的所有幂等元都必须包含在同一个类中。当 σ 是幂等纯时，也就是说，当 $E(S)$（S的所有幂等元组成一个σ-类，即 S 中不存在与幂等元 σ-相关的非幂等元）时，我们称S 是 E-单位。

2.2. 表示。 设 A 是一个非空字母表。所有词（字母的有限序列）的集合 A^* 因而是以 A 为基的自由幺半群，其运算为连接，空词为单位元。为定义自由群和自由逆幺半群，我们先将字母表“加倍”为 $A = A \cup A^{-1}$。以 A 为基的自由群 $FG(A)$ 定义在 A^* 的子集上，该子集由约化词构成，也就是说，这些词不含形如 aa^{-1}、$a^{-1}a$、$a \in A$ 的子词。给定 $w \in A^*$，我们可以得到 w 的约化形式 $\mathsf{red}(w)$：通过从 w 中依次删除此类子词（如果存在）而得到。因此，$FG(A)$ 中的运算定义为 $u \cdot v = \mathsf{red}(uv)$ 和 $(a_1 \dots a_k)^{-1} = a_k^{-1} \dots a_1^{-1}$，对所有 a_1、.....、$a_k \in A$ 均成立，其中 $(a^{-1})^{-1} = a$ 对所有 $a \in A$ 均成立。最后，自由逆幺半群 $FIM(A)$ 是自由幺半群 A^* 关于所谓的瓦格纳同余所得的商，该同余由所有 u、$v \in A^*$ 对应的数对 $(uu^{-1}u, u)$ 和 $(uu^{-1}vv^{-1}, vv^{-1}uu^{-1})$ 生成。关于 $FIM(A)$ 的优雅几何描述，

其元素表示为 $FG(A)$ 的凯莱图中有限的连通双根子图。Munn [33] 给出了这种描述（另见 Scheiblich [40]）；这类图通常称为*Munn*树。

通过表示来定义代数结构，其背后的思想是：指定一组生成元，作为相应自由对象的字母表，然后通过定义关系（或关系词）确定该结构，即对由这些关系自然确定的同余取自由对象的商。例如，若 $M \cong A^*/\theta$，且 θ 是由词对集合 $\{(u_i, v_i) : \ i \in I\}$ 生成的自由幺半群 A^* 上的同余，则我们记作 $M = \mathrm{Mon}\langle A \,|\, u_i = v_i (i \in I)\rangle$。类似地， $T = \mathrm{Inv}\langle A \,|\, u_i = v_i (i \in I)\rangle$ 表示自由逆幺半群 $FIM(A)$ 对 $FIM(A)$ 上由词对集合 $\{(u_i, v_i) : \ i \in I\}$ 生成的同余取商；而若 N 是由词 w_i、 $i \in I$（作为正规子群）生成的 $FG(A)$ 的正规子群，则有 $G = \mathrm{Gp}\langle A \,|\, w_i = 1 (i \in I)\rangle$ if $G \cong FG(A)/N$。如果一个幺半群、逆幺半群或群具有一种相应类型的表示，且其中生成元和定义关系的数量均有限，我们就称它是有限呈示的。如果一个幺半群或逆幺半群具有一种表示，其中所有定义关系均为 $w = 1$ 这种形式，我们就称它是特殊的。

定义 2.1。设 G 是一个有限表示群。若存在 G的一个有限表示，使得 M，我们称 M 为 G中的前缀幺半群，

$$G = \mathrm{Gp}\langle A \,|\, w_i = 1 \ (i \in I)\rangle,$$

其中 M 同构于群 G 的子幺半群，该子幺半群由 w_i、 $i \in I$的前缀所表示的所有元素生成。若幺半群 M 是某个有限表示群中的前缀幺半群，则称其为前缀幺半群。我们用 $\mathcal{P}$ 表示所有前缀幺半群所组成的类。

定义 2.2。设 M 是一个有限表示特殊逆幺半群，

$$M = \mathrm{Inv}\langle A \,|\, w_i = 1 \ (i \in I)\rangle.$$

则 RU(M) $= \{m \in M : \ mm^{-1} = 1\}$ 是 M 中 M 的右单位所组成的（普通）子幺半群（或称为 M的*RU*-幺半群）。如果一个幺半群同构于某个有限表示特殊逆幺半群的右单位幺半群，则称其为*RU*-幺半群。我们用 $\mathcal{RU}$ 表示所有 RU-幺半群所组成的类。

如前所述， $\mathcal{P}$ 中的所有成员都是可嵌入群的且有限生成的，而 $\mathcal{RU}$ 中的所有成员都是右消去的。此外， $\mathcal{RU}$ 中的每个幺半群都是有限生成的，这一点可通过使用 [21, 命题 4.2], 证明中的论证来说明，该论证表明， $M = \mathrm{Inv}\langle A \,|\, w_i = 1 (i \in I)\rangle$ 的 RU-幺半群由所有可表示为关系词 w_i、 $i \in I$的前缀的元素组成的集合生成。因此，由于很容易推出， M 的最大群像是由与 M相同的表示给出的群，即 $G = \mathrm{Gp}\langle A \,|\, w_i = 1 (i \in I)\rangle$，在自然（满射）同态 $M \to G$下，M 的 RU-幺半群映射到关于该表示的 G 前缀幺半群上。请注意，前缀幺半群通常会因特定群的表示选择不同而有所变化。由 [21]的结果还可推出，当 M 是 E-单位的时，自然同态 $M \to G$ 在 M 的 RU-幺半群上的限制，是 RU(M) 与该前缀幺半群之间的一个同构。

鉴于 RU-幺半群是右消去的，在研究类 $\mathcal{RU}$ 时，还有另一种非常实用且方便的表示。这就是所谓的 *RC*-表示 [5, 6]（由 Adjan [1] 引入，他称之为右消去表示）。具体来说，对于字母表 A 和一族有序对 $\mathfrak{R} = \{(u_i, v_i)$，其中 $i \in I\}$ 是来自 A^* 的词，我们记作

$$M = \mathrm{MonRC}\langle A \,|\, u_i = v_i, \ i \in I\rangle$$

如果 $M \cong A^*/\mathfrak{R}^{\mathrm{RC}}$ 其中 $\mathfrak{R}^{\mathrm{RC}}$ 是 A^* 中所有包含 $\mathfrak{R}$ 且满足 A^*/ρ是右消去的性质的同余 ρ 的交。与逆幺半群的最大群像情形类似，不难证明，具有相应商为右消去的性质的一族同余的交也具有相同性质。

论文 [6] 还给出了与这一概念相对应的句法规则。具体而言，两个词 u，$v \in A^*$ 表示 M 的同一元素，当且仅当存在一条从 u 到 v的右消去的$\mathfrak{R}$链：

$$u = u_0 \to u_1 \to \cdots \to u_l = v$$

其中 u_0，u_1，.....，$u_l \in (A \cup A^{\mathsf{R}})^*$（$A^{\mathsf{R}}$是 A的不相交副本），使得对于所有 $0 \leq i < l$，都有 $u_i = p_i q_i r_i$ 和 $u_{i+1} = p_i q_i' r_i$，其中存在某些 $p_i \in A^*$、$r_i \in (A \cup A^{\mathsf{R}})^*$，满足以下情况之一：

（a）要么 $(q_i, q_i') \in \mathfrak{R}$，要么 $(q_i', q_i) \in \mathfrak{R}$；（b）
q_i 为空，而对于某个 $a \in A$，有 $q_i' = aa^{\mathsf{R}}$；（c）
对于某个 $a \in A$，有 $q_i = aa^{\mathsf{R}}$，而 q_i' 为空。

这些步骤分别称为 $\mathfrak{R}$-步骤、（右）插入和（右）删除。注意，由于 u，$v \in A^*$，对于每个引入字母 a^{R} 的插入步骤 $u_i \to u_{i+1}$，都有一个删除步骤 $u_{i\delta} \to u_{i\delta+1}$ 与之对应，其中 $i < i\delta$，在该步骤中移除了字母 a^{R}。相应的插入和删除步骤形成一种栈式结构，即如果 $u_i \to u_{i+1}$ 和 $u_j \to u_{j+1}$ 都是插入步骤，且 $i < j$，那么 $j\delta < i\delta$。

定义 2.3。我们用 $\mathcal{RC}_1$ 表示所有有限生成右消去幺半群所成的类，这些幺半群都能嵌入某个有限 RC 表示幺半群。另一方面，如果

$$S = \mathrm{MonRC}\langle A \,|\, u_i = v_i,\ i \in I\rangle$$

对于一个有限集 A，我们称 S 是递归 *RC*-呈示的，如果 $\{(u_i, v_i) : i \in I\} \subseteq A^* \times A^*$ 是一个词对的递归可枚举集。我们用 $\mathcal{RC}_2$ 表示所有递归 RC-呈示的右消去幺半群所成的类。不难看出（既可以利用前面对右消去 $\mathfrak{R}$-链的定义，也可以利用例如 [20, 练习 2.6.12] 以及递归论的一些基本技巧），$\mathcal{RC}_1 \subseteq \mathcal{RC}_2$。事实上，[20, 练习 2.6.12] 的单边类比可用于证明，每个有限 RC 表示幺半群作为幺半群都是递归呈示的。因此，任意幺半群 T 属于 $\mathcal{RC}_1$，都能嵌入一个递归呈示的幺半群。由于递归呈示幺半群的每个有限生成子幺半群本身也是递归呈示的，因此右消去幺半群 T 作为幺半群是递归呈示的。于是，我们可以取 T 的任意递归表示，而该表示也将是 T的递归 RC-表示，因此 T 是递归 RC-呈示的。

显然，“递归呈现的”这一概念可以直接推广到有限生成群、幺半群和逆幺半群。

注 2.4：不难看出，我们有 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{RC}_1$。事实上，根据定义，每个前缀幺半群 M 都是有限生成的，并且嵌入到一个有限表示群 G中。因此，M 是右消去的。另一方面，有限表示群 G 也具有有限幺半群表示，即 $G = \mathrm{Mon}\langle A \,|\, \mathfrak{R}\rangle$。但于是同样有 $G = \mathrm{MonRC}\langle A \,|\, \mathfrak{R}\rangle$，这表明 $M \in \mathcal{RC}_1$。

备注 2.5。前面提到的 Higman嵌入定理 [28] 指出，一个有限生成群嵌入某个有限表示群，当且仅当它是递归呈现的。Murskiĭ [34], 为幺半群及其幺半群表示证明了一个类似结果，Belyaev [3]则为逆幺半群及其逆幺半群表示证明了类似结果。然而，目前尚无关于右消去幺半群及其 RC-表示的此类结果，因此我们不知道 $\mathcal{RC}_1 = \mathcal{RC}_2$ 是否成立，还是这两个类之间存在真包含。不过可以证明，$\mathcal{RC}_2$ 与那些恰好是右消去幺半群的递归呈示幺半群构成的类相同。因此，我们必有 $\mathcal{RU} \subseteq \mathcal{RC}_2$。事实上，若 T 是一个 RU-幺半群，那么 T 是有限生成的，并且根据定义嵌入某个有限表示逆幺半群；众所周知（而且再次可以不难证明），任何这样的逆幺半群M 作为普通幺半群都是递归呈现的，这意味着根据 [34]，M 嵌入某个有限表示幺半群。由此可知，T 作为幺半群是递归呈现的，而 T 的任意递归幺半群呈示也将是 T的递归 RC-呈示。因此，T 属于$\mathcal{RC}_2$。

2.3. 结果摘要。 研究有限表示特殊幺半群时，一个关键事实（见 [35]）是，它们的右单位可分解为 $U * X^*$，其中 U 是单位群，而 X^* 是有限秩自由幺半群。关于右单位的这一结构信息已被用于证明特殊幺半群的诸多结果，例如其拓扑和同调有限性性质 [18]。在 [11] 中，人们发现，有限表示群的前缀幺半群与形如 $S * X^*$的幺半群之间存在类似联系。稍作改述后，相关的主要结果如下。

定理 2.6. 设 S 是一个嵌入某个有限表示群的有限生成幺半群。

(1) 若 S 是有限呈示的，则 $S \in \mathcal{P}$ （见 [11, 命题 3.5]）。(2) 若 S 不是有限呈示的，则存在一个有限集 C，使得 $S * C^* \in \mathcal{P}$ （见[11,定理 3.6]）。

根据 [11] 中的结果，我们知道，在上述第二种情形下，并非总能取 $C = \varnothing$：例如，所有非有限表示群都是这种情况 [11, 引理 3.4]。因此，有限呈示特殊幺半群的右单位元幺半群以及有限表示群的前缀幺半群，都可以分解为某个特定类中的幺半群与一个有限秩自由幺半群的自由积。

接下来一个自然的问题是：对于 RU-幺半群，同样的结论在多大程度上成立？也就是说，对于 RU-幺半群（相对于其单位群），是否存在类似的“自由积分解”描述？事实证明，从范畴论意义上说，答案是“否”。我们将证明，只有在单位群是有限表示群时，才可能有这种描述；因此，定理 2.6 对 RU-幺半群而言完全失效。

本文将阐明 $\mathcal{P}$ 与 $\mathcal{RU}$ 这两类之间的关系。显然，$\mathcal{RU} \not\subseteq \mathcal{P}$，因为根据 [11, 定理 5.3]，所有有限 RC 表示幺半群都是 RU-幺半群；而且存在一个不可嵌入群的右消去幺半群，因此它不属于 $\mathcal{P}$（参见 [11] 中推论 5.4 后的例子）。一个远不那么显而易见的事实是，根据本文证明的结果可知，$\mathcal{P} \not\subseteq \mathcal{RU}$，因此所讨论的这两类在包含关系下互不可比。具体而言，第 4 节的主要结果——定理 4.1——将证明：如果 M 是一个有限呈示的特殊逆幺半群，其单位群为 U，且它是满足 $R \cong U * T$ 的 RU-幺半群 R，其中 T 是一个具有平凡单位群的有限生成幺半群，那么 U 必定是有限呈示的。特别地，当 T 是有限秩自由幺半群时，这一结论也成立。因此，当 H 是一个非有限呈示的有限生成群时，存在一个有限集 C，使得 $H * C^* \in \mathcal{P}$，但 $H * C^* \notin \mathcal{RU}$。此外，这还带来了许多例子：有限 RC 表示幺半群的有限生成子幺半群（包括非群的例子）并不属于 $\mathcal{RU}$。

为证明这一点，我们将在第3节中建立一些关于特殊逆幺半群子群的有限生成性和可表示性的一般结果。近年来，人们对特殊逆幺半群的子群结构颇感兴趣，尤其关注其单位群，以及更一般地说，其极大子群；参见例如[15] 和 [17]。这些结果特别表明，有限呈示的特殊逆幺半群的单位群未必是有限呈示的，而且这类幺半群的极大子群甚至未必是有限生成的。因此，对于有限呈示的特殊幺半群，人们关注的是：在什么条件下，有限生成性和可表示性会从有限呈示的特殊逆幺半群传递到其（极大）子群，尤其是单位群。文献中确实存在一些确保这一点的充分条件，例如，在 $\mathscr{R}$-类中只有有限多个 $\mathscr{H}$-类；但这些结果对于研究特殊逆幺半群毫无用处，因为这一条件实际上几乎从不成立；关于这一点的更精确解释，见下文第3节的第一段。因此，研究特殊逆幺半群的子群时，需要其他较弱的充分条件。在这里，我们确定了一种称为 **边界宽度** 的几何条件，它：(a) 推广了例如 [39], 中的有限指数结果；并且 (b) 足以保证有限生成性和可表示性得以传递。具体而言，我们给出：

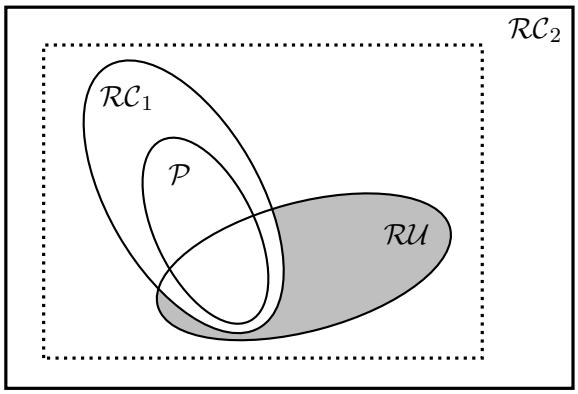


FIGURE 1. 关于 $\mathcal{P}$ （定义 2.1）、 $\mathcal{RU}$ （定义 2.2）以及定义 2.3 中有限生成右消去幺半群的 $\mathcal{RC}_1$和 $\mathcal{RC}_2$ 这些类的维恩图。代表 $\mathcal{RU}$ 的椭圆内阴影区域是否为空尚不得而知，$\mathcal{RC}_1$ 与 $\mathcal{RC}_2$之间的空间也同样如此。代表 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{RC}_1$ 的椭圆内白色区域确定非空。虚线表示定理 5.1 中考察的类：包含其单位群的 $\mathcal{RU}$ 的成员的有限生成子幺半群。

- 关于任意子群何时为有限生成的精确刻画，该刻画以其所在 $\mathscr{R}$-类中若干 $\mathscr{H}$-类之并的连通性性质为依据；
- 利用在前一点所述图上构造的（维耶托里斯–）里普斯复形，精确刻画任意子群何时为有限呈示的；

- 给出了一个充分条件，用于判定任意子群是否有限生成且可表示；该条件以一种称为边界宽度的几何有限性性质来表述，描述前述要点中的图嵌入施岑伯格图的方式；

- 一个关于右单位的凯莱图几何与恒等式的 Sch¨u- tzenberger 图 $S\Gamma(1)$ 之间关系的结果；更准确地说，我们证明这两个空间是拟等距的。

上述结果表明， $\mathcal{RU}$ 并不等于 $\mathcal{RC}_1$ 所有有限生成的有限 RC 表示幺半群的子幺半群所构成的类。（这些不同类之间关系的示意图见图 1。）这些结果还表明，给定幺半群 N，通常不存在有限集 C 使得 $N*C^* \in \mathcal{RU}$。然而，我们将在第5节表明，类 $\mathcal{RC}_1$ 与 $\mathcal{RU}$ 之间仍有非常密切的联系，前者在后者中“稠密”，具体而言：我们将证明，每个有限 RC 表示幺半群的有限生成子幺半群都同构于某个有限呈示特殊逆幺半群 M 的子幺半群 N，并且满足：（a） N 是 M的右单位子幺半群；（b） N 包含 M的单位群。为此，我们将 [15] 中构造有限呈示特殊逆幺半群的一项关键方法加以推广：将一对 $(S,\ T)$ 作为输入数据，其中 S 是有限 RC 表示（右消去）幺半群， T 是其有限生成子幺半群，而不是一对 $(G,\ H)$，其中 G 是有限表示群，H是其有限生成子群。随后，我们将为它们的 RU-幺半群找到一个显式的 RC-表示。通过这种方式，我们能够在第6节证明， $\mathcal{RU}$ 确实包含并非有限 RC 表示的幺半群。此外，在这一最后一节中，我们还确定了$M_{Q,\ W}$ 所引入的特殊逆幺半群的右单位幺半群的一个表示；该构造始于 [17, 第 6], 节，输入为有限表示群 K_Q 及其有限生成子幺半群 T_W。结果表明，所讨论的右单位幺半群恰好是类 HNN 的 Otto-Pride 扩张关于嵌入

[37, 18] 的最大右可消像。由此，我们出乎意料地证明，存在一个有限呈示的 E-酉特殊逆幺半群，其右单位子幺半群是有限 RC 表示的，但作为幺半群却不是有限呈示的。

3. Boundary width: a sufficient condition for finite presentability

本节给出一个充分条件：若极大子群 H 满足该条件，则可推出 H 是有限呈示的。文献中沿此思路的结果只有 [39]（另见 [42]，其中给出了拓扑证明），该结果表明，若 H 的 $\mathscr{R}$-类只有有限多个 $\mathscr{H}$-类，则 H 将是有限呈示的。然而，在研究特殊逆幺半群时，这个条件过强：根据标准半群理论，[8, 20] 若 $M = \mathrm{Inv}\langle A \mid w_1 = 1,\ \ldots, w_k = 1\rangle$ 中的 R_1 的 $\mathscr{R}$-类只有有限多个 $\mathscr{H}$-类，那么它必定只有一个 $\mathscr{H}$-类；在这种情况下（见 [16, 命题 2.5]），M 是一个群与一个自由逆幺半群的自由积。换言之，在任何有意义的例子中，特殊逆幺半群的单位群都不会满足其 $\mathscr{R}$-类有限性条件中「只有有限多个 $\mathscr{H}$-类」这一要求。

因此，为了弥补这一不足，我们对群 $\mathscr{H}$-类引入一个有限性条件，它更适合用于研究特殊逆幺半群。我们在此引入的概念将恰当地推广有限个 $\mathscr{H}$-类这一条件：任何在其 $\mathscr{R}$-类中仅含有限个 $\mathscr{H}$-类的群 $\mathscr{H}$-类都满足该条件。此外，本文所述理论适用于任意逆幺半群，而不仅限于由特殊呈示定义的逆幺半群。

在下一节中，我们将看到如何运用本文发展的普遍理论，证明关于 RU-幺半群可能结构的结果。

对于无向图 Γ 及其顶点 $x,\ y \in V(\Gamma)$，我们用 $d(x,\ y)$表示 x 和 y 在 Γ 中按通常方式视为度量空间时的距离。我们将图Γ 中的边视为成对出现（即 Serre [41]意义下），图中的路径是相容的边序列，并用 ι 和 τ 表示边和路径的起始顶点与终止顶点。通常，我们将图记作 $\Gamma = \Gamma(V,\ E,\ \iota,\ \tau)$，其中 V是顶点集，E是边集，而 ι 和 τ 是映射 $E \to V$。

定义 3.1（无向图的边界宽度）。设 $X \subseteq V(\Gamma)$ 是图 Γ 中的顶点集。如果存在一条路径 $\pi = e_1 e_2 \ldots e_m$，满足以下性质：$\iota e_1 = x$、$\tau e_m = y$ 和 $\iota e_2,\ \iota e_3$、.....、ιe_m 均属于 $V(\Gamma) \setminus X$，则称 $(x,\ y) \in X \times X$ 为 X 的一个边界对。在此情况下，称 π 为与边界对 $(x,\ y)$ 相关联的边界路径。定义

$$\beta(X) = \sup\{d(x,y) :\ (x,y) \text{ is a boundary pair}\}$$

其中，$d(x,\ y)$ 表示图 Γ 中 x 与 y 之间的距离。称 $\beta(X)$ 为 X 的边界宽度。如果 $\beta(X)$ 是有限的，则称 X 具有有限边界宽度。

注意，如果 $X \subseteq V(\Gamma)$ 具有有限边界宽度，这意味着：若 π 是一条从 X 开始、在 X 结束且所有中间顶点都位于 X 之外的任意路径，那么它重新进入X 的位置 π 必须与其离开的位置相近（即由 $\beta(X)$ 在全局上界定）。

定义 3.2（有限球覆盖）。设 $\Gamma = \Gamma(V, E, \iota, \tau)$ 是一个图，且 Δ 是 V 的子集。令

$$\Delta_r = \bigcup_{v \in \Delta} \mathcal{B}_r(v)$$

其中 $\mathcal{B}_r(v) = \{u \in V :\ d(u,v) \le r\}$ 表示以 v 为中心、半径为 r 的球。若存在 $r \ge 0$ 使得 Δ_r 具有有限边界宽度，则称 Δ 具有有限边界宽度的有限球覆盖。若存在 $r \ge 0$ 使得 Δ 中由 Δ_r 诱导的子图是连通图，则称 Δ 具有连通有限球覆盖。

需要有限球覆盖这一概念，因为有些例子中，子集 Δ 的边界宽度是无限的，但它存在一个边界宽度有限的有限球覆盖。因此，在我们的应用中，有必要转而考虑有限球覆盖。

在证明下文的关键结果引理 3.6 之前，我们先陈述两个预备引理，它们将在该引理的证明中用到。

引理 3.3。设 Γ 是一个图，并设 $\Delta \subseteq V(\Gamma)$。

（1）如果 Δ 具有有限边界宽度，那么 Δ 的任意有限球覆盖也具有有限边界宽度。更一般地，如果 $\Omega \subseteq \Delta \subseteq \Gamma$ 和 Δ 具有有限边界宽度，那么对于 Ω 的任意有限球覆盖，若该覆盖是 Ω 的，并且 $\Delta \subseteq \Omega$，则 Ω 具有有限边界宽度。（2）如果 Δ 具有连通有限球覆盖，那么 Δ 的任意有限球覆盖也具有连通有限球覆盖。

证明。（1）设 Δ 具有有限边界宽度，并设 Δ 是用半径为 r 的球对 Δ 的覆盖。设 π 是集合 Δ 的一条边界路径，其端点为 x 和 y，且位于 Δ 中。固定 x'、$y' \in \Delta$，使得 $d(x,x') \leq r$ 且 $d(y,y') \leq r$。设 σ 是一条从 x' 到 x 的路径，其长度至多为 r，并设 τ 是一条从 y 到 y' 的路径，其长度至多为 r。复合路径 $\sigma\pi\tau$ 是一条从 $x' \in \Delta$ 到 $y' \in \Delta$ 的路径，并且由于 π 的所有顶点（端点除外）都属于 $\Gamma \setminus \Delta$，因此可知这些 π 的顶点也属于 $\Gamma \setminus \Delta$。由此可知，存在 σ 的子路径 σ_1 和 τ 的子路径 τ_1，使得 $\sigma_1\pi\tau_1$ 是 $\sigma\pi\tau$ 的一条子路径，其中 $\sigma_1\pi\tau_1$ 是 Δ 的一条边界路径。由于 Δ 具有有限边界宽度，因此存在一个全局上界 K，使得在 Γ 中，$\sigma_1\pi\tau_1$ 的初始顶点与终止顶点之间的距离至多为 K。于是可得

$$d(x,y) \leq 2r + K.$$

由于 π 是 Δ的任意一条边界路径，因此 Δ的边界宽度有限，且上界为 $2r + K$。

更一般的结论可以用完全相同的论证证明。事实上，假设 $\Omega \subseteq \Delta \subseteq \Gamma$ 和 Δ 具有有限边界宽度，并令 Ω 为 Ω 的一个有限球覆盖 Ω，其中球的半径为 r，且满足 $\Delta \subseteq \Omega$。令 π 为集合 Ω 的一条边界路径，其端点 x和 y属于 Ω。取 x'、$y' \in \Omega \subseteq \Delta$，使得 $d(x,x') \leq r$ 且 $d(y,y') \leq r$。令 σ 为一条从 x'到x 、长度至多为 r的路径，并令 τ 为一条从 y 到 y' 、长度至多为 r的路径。复合$\sigma\pi\tau$ 是一条从 $x' \in \Delta$ 到 $y' \in \Delta$ 的路径；由于 π 上除端点外的所有顶点都属于 $\Gamma \setminus \Omega$，因此，由于 $\Delta \subseteq \Omega$，这些 π 上的顶点也属于 $\Gamma \setminus \Delta$。由此可知，存在 σ 的子路径 σ_1 以及 τ 或 τ_1 的子路径，使得 $\sigma_1\pi\tau_1$ 是 $\sigma\pi\tau$ 的子路径，其中 $\sigma_1\pi\tau_1$ 是 Δ的一条边界路径。由于 Δ 具有有限边界宽度，因此存在一个统一上界K，使得 $\sigma_1\pi\tau_1$ 的起始顶点与终止顶点之间在 Γ 中的距离至多为 K。于是

$$d(x,y) \leq 2r + K.$$

由于 π 是 Ω 的任意边界路径，因此 Ω 的边界宽度有限，且上界为 $2r + K$。

(2) 设 Δ 是由半径为 r 的球构成的 Δ 的连通有限球覆盖。设 Ω 是由半径为 n 的球构成的 Δ 的覆盖。若我们选择 m，使得 $n + m > r$，并取 Ω 的球半径为 m 的覆盖 Q，则我们断言 Q 是 Ω 的连通有限球覆盖。事实上，根据定义，Q 是有限球覆盖，因此只需证明它是连通的。对于任意 $x \in Q$，在 Q 中存在一条长度至多为 m 的路径，从 x 到 Ω 中的一个顶点 x'。接着，从 x' 出发，在 Ω 中存在一条路径（它也是 Q 中的一条路径），长度至多为 n，到达 Δ 中的一个顶点 x''。因此，在 Q 中存在一条长度至多为 $n+m$ 的路径，从 x 到 $x'' \in \Delta$。此外，对于任意两个顶点 y、$z \in \Delta$，根据定义，Δ 中存在一条从 y到 z 的路径。但由于 $n + m > r$，可知 Δ 包含于 Q。由此，对于任意两个顶点 x_1、$x_2 \in Q$，都存在一条从 x_1 到 $x_1'' \in \Delta$ 的路径、一条从 x_2 到 $x_2'' \in \Delta$ 的路径，随后还有一条在 Q 中连接 x_1'' 和 x_2'' 的路径。因此 Q 是连通的，证毕。□

下一个结果表明，增大球覆盖的半径不会破坏它们所具有的任一良好性质。

引理 3.4. 设 Γ 为一个图，并设 $\Delta \subseteq V(\Gamma)$。

(1) 如果 Δ 有一个边界宽度有限的有限球覆盖，那么 Δ 的任何由更大有限半径球构成的覆盖也具有有限边界宽度。

(2) 如果 Δ 有一个连通有限球覆盖，那么 Δ 的任何由更大有限半径球构成的覆盖也是连通有限球覆盖。

证明。(1) 假设半径为 r 的球 Δ_1 覆盖具有有限边界宽度，并令 Δ_2 为半径为 $r+s$ 的球覆盖。我们需要证明 Δ_2 具有有限边界宽度。令 Δ_3 为以半径为 $r+s$ 的球覆盖 Δ。我们断言 $\Delta_3 = \Delta_2$。

($\Delta_3 \subseteq \Delta_2$) 如果 $x \in \Delta_3$，则存在一条从 x 到 Δ 中某个顶点、长度至多为 $r+s$ 的路径。随后我们可以将这条路径分成两段：先是一条从 x 到 Δ_1 中某个顶点、长度至多为 s 的路径，接着是一条从该顶点（位于 Δ_1 中）到 Δ 中某个顶点、长度至多为 r 的路径。因此 $x \in \Delta_2$。

($\Delta_2 \subseteq \Delta_3$) 如果 $x \in \Delta_2$，则存在一条从 x 到某个顶点 $y \in \Delta_1$、长度至多为 s 的路径。于是存在一条从 y 到某个顶点 $z \in \Delta$、长度至多为 r 的路径。将这两条路径连接起来，我们得出 $x \in \Delta_3$。

由于 $\Delta_2 = \Delta_3$，可知 Δ_2 是 Δ的有限球覆盖。因此，根据引理 3.3，可知 Δ_2 具有有限边界宽度，证毕。

(2) 设 Δ_1 是由半径为 r的球构成的 Δ的连通有限球覆盖，且设 Δ_2 是由半径为 $r+s$的球构成的 Δ 的覆盖。则对于 Δ_2 中的任意两个顶点 x，y，存在一条从 x 到某个顶点 $x_1 \in \Delta$的路径，以及一条从 y 到某个顶点 $y_1 \in \Delta$的路径。于是 Δ_1中存在一条路径，并且由于 $r+s \geq r$，Δ_2 中也存在一条路径，该路径从 x_1 到 y_1。将这些路径连接起来，可知 Δ_2中存在一条从 x到 y 的路径，证毕。□

对于下一个结果，我们需要介绍图和度量空间的拟等距的一些术语和记号。我们沿用 [12]中的术语和记号。

所谓 (λ, ϵ, μ)-拟等距 $f\colon (X,d) \to (X',d')$，若满足以下条件，且 $\lambda \geq 1$ 和 $\epsilon, \mu \geq 0$，则称其为

$$\frac{1}{\lambda} d(x,y) - \epsilon \leq d'(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x,y) + \epsilon$$

且 $f(X) \subseteq X'$ 是常数为 μ 的 μ-拟稠密。

根据 [12, 练习 10.6]，我们注意到，若两个空间 X 和 X' 拟等距，则存在一对拟等距映射 $f\colon X \to X'$ 和 $g\colon X' \to X$，它们都满足上述不等式，并且还满足 $d(g(f(x)), x) \leq \mu$ 以及 $d'(f(g(x')), x') \leq \mu$。因此，$f$和 g互为拟逆。注意，f 和 g 都不必是单射或满射。

引理 3.5。设 $f\colon \Gamma \to \Gamma'$ 和 $g\colon \Gamma' \to \Gamma$ 是 (λ, ϵ, μ)-拟等距映射，且互为拟逆，并满足 $d(g(f(x)), x) \leq \mu$ 和 $d'(f(g(x')), x') \leq \mu$。若 $X \subseteq V(\Gamma)$ 具有有限边界宽度，则 $Y = g^{-1}(X) \subseteq V(\Gamma')$ 有一个有限球覆盖 Y，且具有有限边界宽度。

证明。令 $Y \subseteq V(\Gamma')$ 为 Y 的一个球覆盖，其中球的半径为 $M = \lambda(\lambda + 2\epsilon) + 1$。我们断言 Y 具有有限边界宽度。设 $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ 是 Y 的一条边界路径中顶点的序列，且 $x_0, x_k \in Y$。我们需要给 $d'(x_0, x_k)$ 设定一个上界。对每个 i，令 p_i 为一条从 $g(x_i)$ 到 $g(x_{i+1})$、长度为 $|p_i| \leq \lambda + \epsilon$ 的路径。这是可能的，因为 $d'(x_i, x_{i+1}) = 1$，这意味着 $d(g(x_i), g(x_{i+1})) \leq \lambda \cdot d'(x_i, x_{i_1}) + \epsilon = \lambda + \epsilon$。对于每个顶点 $y \in Y$ 以及所有 i，我们有 $d'(x_i, y) \geq M$。事实上，$x_1, \ldots, x_{k-1}$ 中的每一个到 y 的距离都大于 M，这进而意味着 x_0 和 x_k 到 y 的距离都至少为 M。应用 g，这意味着

$$d(g(x_i), g(y)) \geq \frac{M}{\lambda} - \epsilon > \frac{\lambda(\lambda + 2\epsilon)}{\lambda} - \epsilon = \lambda + \epsilon.$$

由于 $X = g(Y)$，可知对于所有 i 和所有 $x \in X$，都有 $d(g(x_i), x) > \lambda + \epsilon$。也就是说，$d(g(x_i), X) > \lambda + \epsilon$。由于 $|p_i| = \lambda + \epsilon$，可知对于所有 i，路径 p_i 与 X 的交集为空。选取 $z \in Y$，使得 $d'(z, x_0) \leq M$，并选取 $t \in Y$，使得 $d'(t, x_k) \leq M$；这是可行的，因为 $x_0, x_k \in Y$。现在

$$d(g(x_0), g(z)) \leq \lambda \cdot M + \epsilon = \lambda(\lambda(\lambda + 2\epsilon) + 1) + \epsilon$$

and

$$d(g(x_k), g(t)) \leq \lambda \cdot M + \epsilon = \lambda(\lambda(\lambda + 2\epsilon) + 1) + \epsilon.$$

由此可知，存在顶点 $\alpha, \beta \in X$ 和路径 π，从 α 到 $g(x_0)$，以及 σ，从 $g(x_k)$ 到 β，使得 π 和 σ 的长度均至多为 $\lambda(\lambda(\lambda+2\epsilon)+1)+\epsilon$，且复合路径 $\pi \circ p_1 \circ p_2 \circ \ldots \circ p_k \circ \sigma$ 是图 X 在 Γ 中从 $\alpha \in$ 到 $\beta \in X$ 的一条边界路径。由于 X 的有限边界宽度上界为 κ，不妨设为此值，因此可知 $\delta(\alpha, \beta) \leq \kappa$。但这意味着

$$\begin{aligned} d(g(x_0), g(x_k)) &\leq |\pi| + \kappa + |\sigma| \\ &\leq 2 \cdot (\lambda(\lambda(\lambda+2\epsilon)+1)+\epsilon) + \kappa. \end{aligned}$$

于是可以如下界定 $d'(x_0,\ x_k)$:

$$2 \cdot (\lambda(\lambda(\lambda+2\epsilon)+1)+\epsilon) + \kappa \geq d(g(x_0), g(x_k)) \geq \frac{1}{\lambda} d(x_0, x_k) - \epsilon$$

这意味着

$$d(x_0, x_k) \leq \lambda \cdot (2 \cdot (\lambda(\lambda(\lambda+2\epsilon)+1)+\epsilon) + \kappa) + \lambda\epsilon = K.$$

由于 $(x_0,\ x_1,\ \ldots\ldots,\ x_k)$ 是 Y 的任意一条边界路径上的顶点序列，我们得出 Y 具有有限边界宽度，其固定上界为上方显示的等式中给出的 K。引理的证明至此完成。□

引理 3.6. 设 $f: \Gamma \to \Gamma'$ 是图之间的一个拟等距。设 $\Delta \subseteq V(\Gamma)$。则以下结论成立:

(1) 如果图 Δ 在 Γ 中有有限边界宽度的有限球覆盖，那么 $f(\Delta)$ 在 Γ' 中也有有限边界宽度的有限球覆盖。(2) 如果图 Δ 在 Γ 中有连通有限球覆盖，那么 $f(\Delta) \subseteq \Gamma'$ 在 Γ' 中也有连通有限球覆盖。

证明。令 $f: \Gamma \to \Gamma'$ 和 $g: \Gamma' \to \Gamma$ 为互为拟逆的（$\lambda,\ \epsilon,\ \mu$）拟等距，并满足 $d(g(f(x)),\ x) \leq \mu$ 且 $d'(f(g(x')),\ x') \leq \mu$。

(1) 令 $\overline{\Delta}$ 为 Δ 的有限球覆盖，使得 Δ 具有有限边界宽度。令 Δ 为 Δ 的有限球覆盖，其半径取得足够大，使得 $g(f(\Delta)) \subseteq \Delta$。由于拟稠密常数 μ，这是可行的。然后，由引理 3.4 (1) 可知，Δ具有有限边界宽度。令 $\Omega = g^{-1}(\Delta) \subseteq \Gamma'$，并注意到 $F(\Delta) \subseteq \Omega$。

由于 Δ 具有有限边界宽度，应用引理 3.5 可得，$\Omega = g^{-1}(\Delta) \subseteq \Gamma'$具有有限覆盖 Ω 有限边界宽度。

为完成本引理第 (1) 部分的证明，选取 $f(\Delta)$ 的有限球覆盖 $f(\Delta)$，使得 $\overline{\Omega} \subseteq f(\Delta)$。根据定义，以及 f 和 g 互为拟逆拟等距变换这一事实，这样的选择是可能的。由于 Ω 具有有限边界宽度，根据引理 3.3(1) 中的一般结论，利用集合 $f(\Delta) \subseteq \Omega \subseteq f(\Delta)$，可知 $f(\Delta)$ 具有有限边界宽度，证毕。

(2) 设 $\overline{\Delta}$ 是 Δ 的连通有限球覆盖。令 Ω 为用半径为 $\lambda+\epsilon$ 的球覆盖 $\overline{f(\Delta)}$ 所得的覆盖，并令 $f(\Delta)$ 为 $f(\Delta)$ 的有限球覆盖，使得 $\Omega \subseteq f(\Delta)$。根据定义以及 f 和 g 的拟等距性质，这是可能的。对于 Δ 中任意一条边 e，其端点为 x 和 y，有 $d'(f(x),\ f(y)) \leq \lambda d(x,\ y) + \epsilon = \lambda + \epsilon$。因此，$\Omega$ 中存在一条从 $f(x)$ 到 $f(y)$ 的路径。

由此可知，对于每个 $u, v \in f(\Delta) \subseteq f(\overline{\Delta})$，$\Omega$ 中都存在一条从 u 到 v 的路径。根据定义，对于每个 $z \in f(\Delta)$，$f(\Delta)$ 中都存在一条从 z 到 $f(\Delta)$ 中某个顶点的路径。结合这些事实，我们得出 $f(\Delta)$ 是连通的，因此它是 $f(\Delta)$ 的一个连通有限球覆盖，正如所需。□

有限边界宽度性质在拟等距下具有良好的行为，这一点在我们往返于右单位幺半群的凯莱图与 Sch¨utzenberger图 $S\Gamma(1)$的性质之间时将十分重要；二者不同构，但拟等距（这一点将在下文证明）。

现在我们引入一些定义，以便将上述概念应用于逆幺半群。

在下面的定义中， H 是 M 的任意子群（不只是一个群 $\mathscr{H}$-类），而陪集 的定义与 [39]中的相同：它是 H 的一个右平移 Hs ，同时也是幺半群中包含 H的 $\mathscr{R}$-类的子集。如果 H 是一个群 $\mathscr{H}$-类，那么这些陪集恰好是包含 H的 $\mathscr{R}$-类中的 $\mathscr{H}$-类。

此外，此处方便回顾（例如参见 [21, 15]）逆幺半群 M 关于指定生成集 A的（右）凯莱图，以及元素 $m \in M$的（右）施¨岑伯格图的概念。具体而言，右凯莱图 $\Gamma_A(M)$的顶点集为 M，并且对所有 $s \in M$，都有一条从 s 指向 sa、标记为 $a \in A = A \cup A^{-1}$ 的有向边。于是，元素 $m \in M$ 的（右）施¨岑伯格图 $S\Gamma_A(m)$是右凯莱图 $\Gamma_A(M)$中包含 m的强连通分量。由此立即可得， $S\Gamma_A(m_1) = S\Gamma_A(m_2)$（即它们的顶点底集作为 M的子集相等）当且仅当 $m_1 \mathscr{R} m_2$；因此，在此意义下，我们可以讨论 $\mathscr{R}$-类 R的施¨岑伯格图 $S\Gamma_A(R)$。若R 是幺半群 M 的一个 $\mathscr{R}$-类，我们记 $S\Gamma_A(R)$表示该 $\mathscr{R}$-类 R的施¨岑伯格图。特别地， $S\Gamma_A(1)$的顶点恰好是 S的右单位。施¨岑伯格图 $S\Gamma_A(m)$具有自然的度量空间结构，其中 x与 $y \in S\Gamma_A$（m）之间的距离定义为满足$xw = y$的字 w在（$A \cup A^{-1}$）*中的最短长度。它确实定义了一个度量空间，因为由 $x \mathscr{R} y$ 可得 $x = xww^{-1} = yw^{-1}$。

定义 3.7. 设 M 是由有限集 A生成的逆幺半群。设 H 是 M的一个子群。若 $\{H_i\colon\ i \in F\}$ 是 H 的一个有限右陪集集，且 H 是 $\Delta = \bigcup_{i\in F} H_i$ 的子集，则称 Δ 是子群 H 的**有限覆盖**。若 Δ 作为包含 H的 $\mathscr{R}$-类 R 的 Sch¨utzenberger 图 $S\Gamma_A(R)$ 中的子集具有这一性质，则称其具有**有限边界宽度**。类似地，若 Δ 在 $S\Gamma_A(R)$ 中诱导出的、以集合 Δ 为顶点集的子图是连通图，则称 Δ 是**连通** 的。

注记 3.8. 在定义 3.7 中，有限覆盖 Δ是否连通，可能取决于逆幺半群 M的有限生成集 A 的选择。类似地， Δ 是否具有有限边界宽度，也可能取决于有限生成集 A的选择。相反，我们将在注记 3.12 和下文定理 3.13 的证明中看到， H 是否存在某个具有有限边界宽度的有限覆盖 Δ，与 M的有限生成集的选择无关；同样， H 是否存在一个连通的有限覆盖 Δ，也与 M的有限生成集的选择无关。

引理 3.9。设 M 是由有限集 A生成的逆幺半群， H 是M的子群，并假设 $\Delta = \bigcup_{i\in J} H_i$ 是 H 的有限覆盖，且具有有限边界宽度。那么

(1) 对于任意有限集 $J' \supseteq J$，如果陪集的并集 $\Delta' = \bigcup_{i\in J'} H_i$是连通的，那么 Δ'具有有限边界宽度。(2) 对于每个有限集 $J' \supseteq J$，都存在一个有限集 $J'' \supseteq J'$，使得陪集的并集 $\Delta'' = \bigcup_{i\in J''} H_i$ 是连通的。

证明。 (1) 设 $\Gamma = \Gamma_A(R)$ 是包含群 H 的 $\mathscr{R}$-类 R 的 Sch¨utzenberger 图。由假设可知，存在常数 K，使得对于每个顶点$v \in \Delta'$，都有 $d(v, \Delta) \leq K$。现在， Δ'的每条边界路径 $\tau = (x_0, x_1, \ldots, x_k)$ 都可以利用 Δ' 中的路径 π， σ 延伸，并满足 $|\pi| \leq K$ 和 $|\sigma| \leq K$，从而 $\pi \circ \tau \circ \sigma$ 是 Δ的一条边界路径。由于 Δ具有有限边界宽度，记为 κ，可知 $d(x_0, x_k)$ 至多为 $\kappa + 2K$。因此，Δ' 具有有限边界宽度，其上界为 $\kappa + 2K$。

(2) 令 $\Gamma = \Gamma_A(R)$ 为包含群H的 $\mathscr{R}$-类 R 的 Sch¨utzenberger 图。假设 Δ 的边界宽度有上界 κ。令 Δ_κ 为用半径为 κ 的球覆盖 Δ。令 $J \supseteq J$ 为集合 Δ_κ 相交的陪集的有限集，并定义 $\Delta = \bigcup_{i\in J} H_i$。我们声称 Δ 诱导出 Γ 的一个连通子图。为此，注意到 $\Delta \subseteq \Delta_\kappa \subseteq \Delta$。给定任意两个顶点 x， $y \in \Delta$，我们可以取 Γ 中一条从 x 到 y 的任意路径 π，并将其分解为 $\pi = \pi_1 \ldots \pi_m$，其中每个 π_i 要么是 Δ 中的一条路径，要么 π_i 是 Δ 的一条边界

路径。这只需沿着路径 π 追踪，并记录我们离开集合 Δ 的点以及重新进入 Δ的点。每条边界路径 π_i 都可以替换为 Γ 中连接 Δ 的两个顶点的一条路径，其长度至多为 κ。因此，整条路径都在 Δ_κ中。对每个 π_i 都这样处理后，我们便可得出结论：存在一条完全位于 Δ_κ 中的路径，从 x 到 y。最后，根据定义，对于每个顶点 $z \in \Delta$， Δ 中都存在一条从 z 到 Δ中某个顶点的路径。这就完成了 Δ 连通的证明。 —

现在取一个 Δ_υ，它是由半径为 υ 的 Δ 个球构成的覆盖，其中 $\upsilon > \kappa$ 选得足够大，使得 Δ_υ 与所有陪集 $J \cup J'$ 都相交；然后令 J'' 为与 Δ_υ 相交的有限陪集集。接着按照前一段中的论证，我们得出 $\Delta'' = \bigcup_{i\in J''} H_i$ 是连通的。□

推论 3.10. 设 M 是一个有限生成逆幺半群， H 是 M 的一个子群。若 H 有一个具有有限边界宽度的有限覆盖，则 H 的每个有限覆盖本身都有一个具有有限边界宽度的有限连通覆盖。

证明。设 $\Delta = \bigcup_{i\in J} H_i$ 是 H 的一个具有有限边界宽度的有限覆盖。设 $\Delta_1 = \bigcup_{i\in J_1} H_i$ 是 H 的另一个有限覆盖。然后应用引理 3.9，并取 $J' = J \cup J_1$，我们得出存在一个有限集 $J'' \supseteq J'$，使陪集 $\Delta'' = \bigcup_{i\in J''} H_i$ 的并集是连通的。由引理 3.9(1) 可知， Δ'' 是 $\Delta \cup \Delta_1$ 的一个具有有限边界宽度的有限连通覆盖；这里所说的是， Δ'' 是 H 的一个具有有限边界宽度的有限连通覆盖，并且 $\Delta \cup \Delta_1 \subseteq \Delta''$。□

综合以上结果，我们得到以下关键命题。

命题 3.11。 设 M 是有限生成逆幺半群， H 是M的一个子群。那么以下条件等价：

(1) H （作为其 *Sch¨utzenberger* 图的子集）有一个边界宽度有限的有限球覆盖；(2) H （作为其 *Sch¨utzenberger* 图的子集）有一个边界宽度有限的连通有限球覆盖；(3) H 有一个边界宽度有限的有限覆盖；(4) H 有一个边界宽度有限的连通有限覆盖。

证明。 (3) ⇒(4)：由推论 3.10 可得。

(4) ⇒ (2)：若 $\Delta = \bigcup_{i\in J} H_i$ 是一个边界宽度有限的连通有限覆盖，那么我们可以取 H 的一个有限球覆盖 Ω，使得 $\Omega \supseteq \Delta$，那么根据引理 3.3(1)，Ω 是H 的一个连通有限球覆盖，且 Ω 的边界宽度有限。

(2) ⇒ (1)：这直接由定义可得。

(1) ⇒ (3)：若 $\Omega \subseteq \Gamma$（其中 Γ 是 Sch¨utzenberger 图）是 H 的一个具有有限边界宽度的有限球覆盖，那么令 $\Delta = \bigcup_{i\in J} H_i$ 为 Ω 与 H 相交的陪集的有限集合，则可以验证， Δ是 H 的一个具有有限边界宽度的有限覆盖。□

注记 3.12。 对于包含逆幺半群 M 的子群 H 而言，命题 3.11 的陈述中给出的四个等价条件是否成立（因此也包括它们是否全部成立），与所选取的有限生成集无关，具体来说如下。若 A 和 B 是 M 的两个有限生成集，那么根据 [14, 命题 5]，若 R 是包含 H 的 $\mathscr{R}$-类，则 $S\Gamma_A(R)$ 与 $S\Gamma_B(R)$ 拟等距，其中 R 上的恒等映射是一个拟等距。又由于恒等映射固定子集 H，根据引理 3.6(1)，可知命题 3.11 的条件 (1) 相对于生成集 A 成立，当且仅当它相对于生成集 B成立。这意味着，该命题的等价条件之一是关于有限生成逆幺半群的抽象子群，因此我们可以在不提及逆幺半群的任何特定有限生成集的情况下讨论它。

在考察有限可呈性问题之前，我们先处理有限生成的问题。我们给出逆幺半群的结果，但采用类似的证明也可以证明该结果对一般幺半群同样成立。

以下结果尤其值得关注，因为最近已经证明，特殊逆幺半群的极大子群未必是有限生成的。[15]

定理 3.13. 设 M 是有限生成逆幺半群， H 是 M的一个子群。设 Γ 是包含 H的施*ützenberger* 图。那么， H 是有限生成的，当且仅当 H有有限连通覆盖；也就是说，存在一个有限覆盖 $H \subseteq \Delta = \bigcup_{i\in F} H_i$ ，使得 Γ 中由 Δ 诱导的子图是连通的。在这种情况下，由 Δ 诱导的图与群 H的凯莱图拟等距。

证明. (⇒) 假设 H 是有限生成的。那么我们可以选取 M的一个生成集 A，其中包含一个子集 $X \subseteq A$ ，使得 X 是 H的有限生成集。于是，相对于生成集 X ，集合 H 本身就是 H的一个有限覆盖。正如我们在注记 3.12 中提到的， [14] 的结果表明，对于 M 的任意生成集 B ，相对于 B 考察的、包含 H 的施ützenberger 图 Γ_B ，与相对于 A考察的同一图拟等距；恒等映射 M 诱导出一个拟等距。由此，根据引理 3.6(2)，对于任意有限生成集 B ，群 H 在 Γ_B 中都有有限连通覆盖；结合命题 3.11，即可完成证明。

(⇐) 这可通过与证明 [14, 定理 2 和定理 3]完全类似的论证得到。事实上，假设 $H \subseteq \Delta = \bigcup_{i\in F} H_i$ 是 H的有限连通覆盖。那么 H通过左乘作用在图 Δ 上；由于该覆盖是有限的，因此这是一个由等距变换给出的恰当余紧作用。由 Švarc–Milnor 引理 [4] 可知，H 是有限生成的，且与 Δ拟等距。□

推论 3.14。 设 H 是由有限集 A生成的逆幺半群 M 的一个子群。若 H是有限生成的，则 $S\Gamma_A(H)$ 包含一个与 H 的凯莱图拟等距的副本，且该副本是一个诱导子图。

注 3.15。 由于特殊逆幺半群的单位群是有限生成的，这表明，对于任意有限呈示的特殊逆幺半群，其单位群的凯莱图在 $S\Gamma(1)$ 中都有一个拟等距副本。

由于有限可呈性是一种几何性质（见 [12, 命题 10.18]），我们可以将定理 3.13 扩展为关于有限可呈性的陈述。

定理 3.16. 设 M 是一个有限生成逆幺半群， H 是 M的一个子群。设 Γ 是包含 H的 *Sch¨utzenberger* 图。那么， H 有限生成，当且仅当 H存在有限连通覆盖；也就是说，存在一个有限覆盖 $H \subseteq \Delta = \bigcup_{i\in F} H_i$ ，使得 Γ 中由 Δ 诱导的子图是连通的。在这种情况下，由 Δ 诱导的图与群 H的凯莱图拟等距。此外，群 H 有限呈示，当且仅当图 Γ 具有以下性质：

$L(k)$ 生成基本群 $\pi_1(\Delta)$ ，其中 k 足够大，

其中 $L(k)$ 是 Δ 中所有以幂等元 $e \in H$ 为基点、形如 pqp^{-1} 的环的集合，并且 q 是一个长度至多为 k的环。

注记 3.17。 上一条定理中涉及 $L(k)$ 的条件，也可以表述为：当 r 足够大时， Δ 的里普斯复形 $\mathrm{Rips}_r(\Delta)$ 是单连通的；参见 [9,第 4] 章。

现在我们证明这一关键结果：如果命题 3.11 中的等价条件之一（从而全部条件）成立，那么这就足以证明该子群继承幺半群 M 的有限生成性或有限表示性。

定理 3.18. 设 M 是一个有限生成的逆幺半群， H 是 M的一个子群，且它具有有限边界宽度的有限覆盖。那么 H 是有限生成的。此外，若M 是有限呈示的（作为逆幺半群），则群 H 是有限呈示的。

本节其余部分将用于证明定理 3.18。设 $M = \mathrm{Inv}\langle A \mid \mathfrak{R}\rangle$，其中 A 是一个有限集；若 M 是有限呈示的，我们还取 $\mathfrak{R}$ 为一个有限集。于是，作为幺半群， M 由以下无限幺半群表示定义：

$$\mathrm{Mon}\langle A, A^{-1} \mid \mathfrak{R},\ \alpha\alpha^{-1}\alpha = \alpha,\ \alpha\alpha^{-1}\beta\beta^{-1} = \beta\beta^{-1}\alpha\alpha^{-1}\ (\alpha, \beta \in (A \cup A^{-1})^*)\rangle.$$

设 $\{H_i :\ i \in I\}$ 为包含 H 的 $\mathscr{R}$-类 R 中所有 H 的集合。根据命题 3.11 以及定理中的假设，存在有限个右陪集$\{H_j :\ j \in J\}$，其中 $J \subseteq I$ 是一个有限集，且满足 $1 \in J$ 和 $H_1 = H$，使得并集$X = \bigcup_{j\in J} H_j$ 具有有限边界宽度，记为 κ；此外，Sch¨utzenberger 图在 X 上诱导的子图是一个连通图。（这里我们注意到，虽然有 $1 \in I$，并记作 $H = H_1$，但这并不意味着 H 是 M 的单位元所在的整个 $\mathscr{H}$-类，也就是说， H不一定是这里 M 的单位群。）

不难证明， M在 $R\cup\{0\}$ 上的右乘作用会在集合 $I \cup \{0\}$ 上诱导出 M的一个作用集，我们将其记作 $(i,\ m) \mapsto i \cdot m \in I \cup \{0\}$。需要注意的是， $J \cup \{0\}$ 不一定是这个作用集的子作用集，因为通常我们可以将来自X 的陪集右乘，从而得到一个属于 R 而非 X的陪集。

对于每个 i，我们选取某个字 $r_i \in (A\cup A^{-1})^*$，使得 $Hr_i = H_i$；特别地，我们为 $Hr_1 = H_1r_1 = H_1 = H$ 选取$r_1 = 1$。另设 $r_i' = r_i^{-1} \in (A \cup A^{-1})^*$。注意，对于任意 $h \in H$、$i \in I$ 和满足 $i \cdot s \in I$ 的 $s \in M$，都有 $h\mathscr{R}hr_i\mathscr{R}hr_is$，这意味着 $hh^{-1} = hr_i(hr_i)^{-1} = hr_is(hr_is)^{-1}$，因此

$$\begin{aligned} hr_iss^{-1} &= hr_i(hr_i)^{-1}hr_iss^{-1} = hr_iss^{-1}r_i^{-1}h^{-1}hr_i \\ &= hr_is(hr_is)^{-1}hr_i = hh^{-1}hr_i = hr_i \end{aligned}$$

在 M 中成立。特别地，对所有 $h \in H$、 $i \in I$， $hr_ir_i' = h$ 均成立。元素 r_i， r_i' 称为 H 的陪集代表元 。注意，由此还可得，对所有 $k \in H_i$ ，都有 $kr_i'r_i = k$。事实上，我们可以将 $k = hr_i$ 写成某个 $h \in H = H_1$ 的形式，然后

$$kr_i'r_i = hr_ir_i'r_i = hr_i = k.$$

接下来，我们的目标是定义一个由 $A \cup A^{-1}$ 上的字构成的词集，

$$W = \{w_{x,y} :\ x, y \in X,\ (x, y) \text{ is a boundary pair }\},$$

使得 $w_{x,y}$ 标记施温岑贝格图$S\Gamma(R)$中从 x 到 y 的可能最短长度路径。根据我们的假设， W 中的所有字长度均为 $\leq \kappa$，因此集合W 必然是有限的。我们将证明，可以假设集合 W 还具有一些其他良好性质，这将大大方便后续工作。

引理 3.19. 可以选取字集 W，使其具有以下两条性质 ：

(1) 每当 w_{x_1,y_1}和 w_{x_2,y_2}属于 W，且 $x_1, x_2 \in H_j$和 $y_1, y_2 \in H_k$满足某个 $j, k \in J$，并且存在一个元素 $s \in M$，使得 $x_1s = y_1$ 和 $x_2s = y_2$ （从而 $j \cdot s = k$），那么 M中就成立，其中 e 是 M 的幂等元，且是子群H的单位元；(2) $w_{y,x} \equiv w_x^{-1},_y$ 对所有边界对 (x, y)均成立。

$$er_jw_{x_1,y_1} = er_jw_{x_2,y_2}$$

证明。 我们先为任意一对 $(j,\ s)$、$(j \in J, s \in M)$（满足 $j \cdot s \in J$）选取一个词$\beta_{j,\ s} \in (A \cup A^{-1})^*$，它标记了 $S\Gamma(R)$ 中从 $er_j \rightsquigarrow er_js$ 出发的一条最短路径。在整个证明过程中，这些词都固定不变。

接下来，我们在集合 X 上定义一个线性序 $<$ ：先在集合 J 中固定一个线性序 $\prec$，在陪集 H_j、 $j \in J$ 上分别固定线性序 $<_j$，然后相对于 $(J,\ \prec)$，取有序集 $(H_j,\ <_j)$ 的有序和。

现在假设 $(x, y) \in X \times X$ 是一个边界对。如果 $x = y$，那么我们令 $w_{x,x} = 1$ 为该空词。否则，首先假设 $x < y$。由于 $x\mathscr{R}y$，对于某个 $s \in M$，我们有 $y = xs$，

因此，如果 $x \in H_j$，那么 $y \in H_{j\cdot s}$。在这种情况下，我们令 $w_{x,y} \equiv \beta_{j,s}$。然而，如果 $x > y$，那么我们定义$w_{x,y}$ 为字 $w_{y\,x,}^{-1}$。由于 $ys^{-1} = xss^{-1} = hr_jss^{-1} = hr_j = x$，后一个字恰好是 $\beta_{j\cdot s\ ,s^{-1}}^{-1}$。我们需要证明这个定义在逻辑上是正确的，即它不依赖于 $s \in M$ 的具体选择，并且还满足所要求的性质 (1)（性质 (2) 根据定义可立即得出）。

事实上，首先假设我们还有 $y = xt$ 对于某个 $t \in M$（因此 $j \cdot t = j \cdot s$）。由于我们假设 $x \in H_j$，可知 $x = hr_j$ 对于某个 $h \in H = H_1$。因此，$y = xs = xt$ 蕴含 $hr_jt = hr_js$，所以 $er_jt = h^{-1}hr_jt = h^{-1}hr_js = er_js$。于是我们有 $\beta_{j,\ t} \equiv \beta_{j,\ s}$。正如我们已经观察到的，$ys^{-1} = xss^{-1} = hr_jss^{-1} = hr_j = x$，类似地我们有 $x = yt^{-1}$，因此还可以得出 $\beta_{j\cdot t,\ t^{-1}} \equiv \beta_{j\cdot s,\ s^{-1}}$，从而 $\beta_{j\cdot t\ ,\ t^{-1}}^{-1} \equiv \beta_{j\cdot s\ ,\ s^{-1}}^{-1}$。因此，字 $w_{x,\ y}$ 的定义并不取决于“中间”元素 s。

此外，$w_{x,\ y}$ 确实标记了 $ST(R)$ 中一条从 x 到 y 的路径，因为根据定义，$er_j\beta_{j,\ s} = er_js$在 M 中成立，因此，若 $x < y$，则 $xw_{x,\ y} = hr_j\beta_{j,\ s} = her_j\beta_{j,\ s} = her_js = xs = y$。另一方面，若 $x > y$，那么将 $y = kr_{j\cdot s}$ 写成某个 $k \in H$，我们有

$$xw_{x,y} = ys^{-1}\beta_{j\cdot s,s^{-1}}^{-1} = ker_{j\cdot s}s^{-1}\beta_{j\cdot s,s^{-1}}^{-1} = ker_{j\cdot s}\beta_{j\cdot s,s^{-1}}\beta_{j\cdot s,s^{-1}}^{-1} = kr_{j\cdot s} = y.$$

显然，在这两种情况下，由 $w_{x,\ y}$ 标记的路径必定是 x 与 y 之间的最短路径之一，否则就会存在一条长度小于 $\beta_{j,\ s}$ 的路径 $er_j \rightsquigarrow er_js$（或一条长度小于 $\beta_{j\cdot s\ ,\ s^{-1}}^{-1}$ 的路径 $er_{j\cdot s} \rightsquigarrow er_{j\cdot s}s^{-1}$）。

现在假设 x_1，x_2，y_1，y_2 如性质 (1) 所述。若 $j \prec k$，或 $j = k$ 和 $x_1 <_j y_1$，$x_2 <_j y_2$，则词 $w_{x_1,\ y_1}$ 和 $w_{x_2,\ y_2}$ 都等于 $\beta_{j,\ s}$；若 $k \prec j$，或 $j = k$ 和 $y_1 <_j x_1$，$y_2 <_j x_2$，则它们都等于 $\beta_{j\cdot s\ ,\ s^{-1}}^{-1}$。因此，令 $j = k$，其中 $x_1 <_j y_1$，$y_2 <_j x_2$，或 $y_1 <_j x_1$，$x_2 <_j y_2$。于是 $\{w_{x_1,y_1}, w_{x_2,y_2}\} = \{\beta_{j,s}, \beta_{j,s^{-1}}^{-1}\}$。由于根据假设 $er_js = er_j\beta_{j,\ s} \in H_j$，我们有某个 $h \in H$ 使得 $er_js = hr_j$，因此

$$er_js\beta_{j,s^{-1}} = her_j\beta_{j,s^{-1}} = her_js^{-1} = er_jss^{-1} = er_j.$$

因此，

$$er_j\beta_{j,s^{-1}}^{-1} = her_j\beta_{j,s^{-1}}\beta_{j,s^{-1}}^{-1} = her_j = er_js = er_j\beta_{j,s}$$

在 M 中成立，这意味着在 M 中，$er_jw_{x_1,\ y_1} = er_jw_{x_2,\ y_2}$ 在所有情况下都成立，正如所需。 □

在下一个引理中，我们为群 H 确定一个自然的有限幺半群生成集 Y。这就处理了定理 3.18 陈述中的有限生成部分。

引理 3.20。设 $M = \mathrm{Inv}\langle A \mid \mathfrak{R}\rangle$，其中 A 是有限集，且 H 是 M 的一个子群，其幂等元为 $e \in H$。假设 H 有一个有限覆盖，且边界宽度有限。那么，采用上述定义和记号，

$$Y = \{er_jwr'_{j\cdot w} : w \in W, j \in J \text{ and } j \cdot w \in J\}$$

是群 H 的有限幺半群生成集。特别地，群 H 是有限生成的。

证明。现在我们将证明 Y 是子群 H 的有限生成集。证明 Y 生成 H 的过程也将揭示，在有限可呈现性证明中需要如何定义改写映射。

设 $h \in H$。记 $h = \gamma \in (A \cup A^{-1})^+$，使得 $h = e\gamma$ 属于 M。注意，对于 γ 的每个分解 $\gamma \equiv \gamma'\gamma''$，都有 $e\gamma' \in X$ 当且仅当 $1 \cdot \gamma' \in J$。现在将字 $\gamma \equiv \gamma_1 \dots \gamma_k$ 唯一地分解，使得每个 γ_i 都非空，且对于所有 $1 \leq n \leq k$，都有 $e\gamma_1 \dots \gamma_n \in X$；而对于 γ 的其他每个非空前缀 γ'，都有 $e\gamma' \notin X$。

接下来注意，每一对 $(e,\ e\gamma_1)$ 和 $(e\gamma_1 \dots \gamma_m,\ e\gamma_1 \dots \gamma_{m+1})$ 都是边界对。由定义可知，$(er_1,\ er_1\gamma_1) = (e,\ e\gamma_1)$ 是边界对，并且对于所有 m，$(er_{1\cdot\gamma_1\dots\gamma_m},\ er_{1\cdot\gamma_1\dots\gamma_m}\gamma_{m+1})$ 也是边界对。

现在，对于每个 m，我们定义

$$\overline{\gamma_{m+1}} = w_{er_{1\cdot\gamma_1\dots\gamma_m}, er_{1\cdot\gamma_1\dots\gamma_m}\gamma_{m+1}},$$

and

$$\overline{\gamma_1} = w_{er_1, er_1\gamma_1},$$

于是，根据定义可得

$$h = \gamma = e\gamma = e\gamma_1 \dots \gamma_k$$

and

$$\begin{aligned} e\gamma_1 \dots \gamma_k &= er_1\gamma_1 r'_{1\cdot\gamma_1} r_{1\cdot\gamma_1}\gamma_2 \dots \gamma_k \\ &= \left(er_1\gamma_1 r'_{1\cdot\gamma_1}\right) er_{1\cdot\gamma_1}\gamma_2 \dots \gamma_k \\ &= \dots \\ &= \left(er_1\gamma_1 r'_{1\cdot\gamma_1}\right)\left(er_{1\cdot\gamma_1}\gamma_2 r'_{1\cdot\gamma_1\gamma_2}\right)\dots\left(er_{1\cdot\gamma_1\dots\gamma_{k-1}}\gamma_k r'_{1\cdot\gamma_1\dots\gamma_k}\right) \\ &= \left(er_1\overline{\gamma_1} r'_{1\cdot\gamma_1}\right)\left(er_{1\cdot\gamma_1}\overline{\gamma_2} r'_{1\cdot\gamma_1\gamma_2}\right)\dots\left(er_{1\cdot\gamma_1\dots\gamma_{k-1}}\overline{\gamma_k} r'_{1\cdot\gamma_1\dots\gamma_k}\right) \in \langle Y\rangle, \end{aligned}$$

如所要求。由此完成了证明： Y 是 H的有限生成集。 □

现在我们转向定理 3.18 陈述中的有限可呈性证明。同样，按照 [39] 中的证明，我们需要为此引入一个与生成元 Y 相对应的新字母表 B ，然后建立所谓的改写映射和表示映射，以便应用半群 Reidemeister–Schreier 改写理论。

为此，我们定义

$$B = \{[j, w] : w \in W, j \in J \text{ and } j \cdot w \in J\}$$

并定义改写映射

$$\phi : \{(j, u) : j \in J, u \in (A \cup A^{-1})^* \text{ and } j \cdot u \in J\} \to (B \cup B^{-1})^*$$

按以下方式归纳定义。当 $u = \epsilon$ 为空词时，我们定义 $\phi(j, \epsilon) = 1$。当 u 不为空词时，我们将 $u \equiv u'u''$ 分解为 u' ，其中 u' 是 u 的最短非空前缀，且具有如下性质： $j \cdot u' \in J$。（注意，此处 u' 只是 u 的一个前缀，而短横线记法与上文定义陪集代表元时所用的 r'_i 记法无关。）然后我们归纳定义

$$\phi(j, u) = \phi(j, u'u'') = \phi(j, u')\phi(j \cdot u', u'') = [j, \overline{u'}]\phi(j \cdot u', u'')$$

这里的横线映射按照上述有限生成证明中的方式定义如下。根据定义，$(er_j, er_j u')$ 是一个边界对，因此我们定义

$$\overline{u'} = w_{er_j, er_j u'} \in W.$$

注意，在特殊情形 $er_j = er_j u'$ in M 下，根据定义可得

$$\overline{u'} = w_{er_j, er_j u'} = 1,$$

空词。特别注意，横线映射将 u' 映射为满足以下条件的一个字 $u' \in W$ $^{-}$

$$er_j u' = er_j \overline{u'}$$

在逆幺半群 M 中。注意，这个横线的定义与引理 3.20 的证明中横线映射的定义完全一致。

接下来我们要用到论文 [7] 中的定理 2.1，为此还需要定义所谓的表示映射。我们将表示映射定义为

$$\psi : B^* \to A^*$$

为将映射扩张得到的唯一同态

$$[j, w] \mapsto er_j w r'_{j\cdot w}$$

对每个 $[j, w] \in B$，其中 e 现在表示 $A \cup A^{-1}$ 上某个固定的字，它代表包含 H 的 $\mathscr{H}$-类中的唯一幂等元。

接下来，我们给出一个由定义推得的有用公式，它表明映射 ϕ 的行为类似于同态。设 $j \in J$，并设 $w_1,\ w_2 \in (A \cup A^{-1})^*$，满足 $j \cdot w_1 \in J$ 且 $j \cdot w_1 w_2 \in J$。那么 $j \cdot w_1 \in J$ 且 $(j \cdot w_1) \cdot w_2 \in J$，因此 $\phi(j \cdot w_1,\ w_2) \in B^*$ 有定义，并且我们有

$$\phi(j, w_1 w_2) \equiv \phi(j, w_1)\phi(j \cdot w_1, w_2) \tag{3.1}$$

在 B^* 中。

令 $\mathcal{L}(A,\ H)$ 表示由 $(A \cup A^{-1})^*$ 中所有表示 H 中某个元素的词构成的集合。我们定义映射 $\phi : \mathcal{L}(A,\ H) \to B^*$，令 $\phi(w) = \phi(1,\ w)$。随后不难验证，ϕ 和 ψ 是按照 [7] 中定义的意义所说的改写映射和表示映射。也就是说，对于所有 $\gamma \in \mathcal{L}(A,\ H)$，在 M 中都有 $\psi\phi(\gamma) = \gamma$，这可通过验证 $\psi\phi(\gamma)$ 恰好等于引理 3.20 证明中最后一个显示公式末行出现的表达式来证明。因此，可利用 [7, 定理 2。1] 写出群 H 的一个无限幺半群表示。写出该无限表示后，证明的其余部分将致力于证明，在 H 中存在一个有限关系集，使得该无限表示中的所有定义关系都是这些关系的推论。

根据 [7, 定理 2.1] 群 H 由以B 为生成集的幺半群表示及以下无限族定义关系定义：

(1) $b = \phi(\psi(b))$ 对所有 $b \in B$ 均成立，且 $\phi(e) = 1$；(2) $\phi(w_1 u w_2) = \phi(w_1 v w_2)$，其中 $w_1,\ w_2 \in (A \cup A^{-1})^*$，$(u = v) \in \mathfrak{R}$, $w_1 u w_2 \in \mathcal{L}(A, H)$；(3) $\phi(w_1 \alpha\alpha^{-1}\alpha w_2) = \phi(w_1 \alpha w_2)$，其中 $w_1, w_2, \alpha \in (A \cup A^{-1})^*$ 且 $w_1 \alpha w_2 \in \mathcal{L}(A, H)$；(4) $\phi(w_1 \alpha\alpha^{-1}\beta\beta^{-1} w_2) = \phi(w_1 \beta\beta^{-1}\alpha\alpha^{-1} w_2)$，其中 $w_1, w_2, \alpha \in (A \cup A^{-1})^*$，并且有$w_1 \alpha\alpha^{-1}\beta\beta^{-1} w_2 \in \mathcal{L}(A, H)$；(5) $\phi(w_1 w_2) = \phi(w_1)\phi(w_2)$，其中 $w_1, w_2 \in \mathcal{L}(A, H)$。

现在，我们将依次考察这五个关系族，证明在每种情况下，它们都可以被替换，并进而由另一有限定义关系集推出。在此之前，我们先陈述并证明两个有助于证明的引理。

引理 3.21。设 $j \in J$ *and* $\alpha \in (A \cup A^{-1})^*$ 使得 $j \cdot \alpha \in J$。那么，$\phi(j, \alpha) \in B^*$ 和$\phi(j \cdot \alpha, \alpha^{-1}) \in B^*$ 均有定义，并且

$$\phi(j, \alpha)\phi(j \cdot \alpha, \alpha^{-1}) = 1.$$

在 H 中成立。此外，所有这些关系都可由以下在 H 中成立的有限关系集推出：对于满足 $\psi(b_1) = \psi(b_2)$ *in* M 的 $b_1, b_2 \in B$，有 $b_1 = b_2$；对于满足 $\psi(b_1 b_2) = 1$ *in* M 的 $b_1, b_2 \in B$，有 $b_1 b_2 = 1$。

证明。利用映射 ϕ 的归纳定义，按字 $\phi(j, \alpha) \in B^*$ 的长度对该引理进行归纳证明。基例是：对于 α 的任意真非空前缀 α'，$j \cdot \alpha' \notin J$。这意味着，对于 α^{-1} 的任意真非空前缀 γ，$(j \cdot \alpha) \cdot \gamma \notin J$。在这种情况下，$\phi(j, \alpha) = [j, w_{er_j, er_j\alpha}]$ 并

$$\phi(j \cdot \alpha, \alpha^{-1}) = [j \cdot \alpha, w_{er_{j\cdot\alpha}, er_{j\cdot\alpha}\alpha^{-1}}] = [j \cdot \alpha, w^{-1}_{er_{j\cdot\alpha}\alpha^{-1}, er_{j\cdot\alpha}}]$$

根据定义 词 $w_{k,\ l}$ 的定义以及引理 3.19。在表示映射下，我们有 ve

$$\psi([j, w_{er_j, er_j\alpha}]) = er_j w_{er_j, er_j\alpha} r^{-1}_{j\cdot\alpha}$$

and

$$\psi([j \cdot \alpha, w^{-1}_{er_{j\cdot\alpha}\alpha^{-1}, er_{j\cdot\alpha}}]) = er_{j\cdot\alpha} w^{-1}_{er_{j\cdot\alpha}\alpha^{-1}, er_{j\cdot\alpha}} r^{-1}_j$$

由于 $er_j\alpha\alpha^{-1} = er_j$ and $er_{j\cdot\alpha}\alpha^{-1}\alpha = er_{j\cdot\alpha}$ 在 M 中成立，根据引理 3.19，我们有

$$er_{j\cdot\alpha} w^{-1}_{er_{j\cdot\alpha}\alpha^{-1}, er_{j\cdot\alpha}} = er_{j\cdot\alpha} w^{-1}_{er_j\alpha\alpha^{-1}, er_j\alpha} = er_{j\cdot\alpha} w^{-1}_{er_j, er_j\alpha}$$

在 M 中。将 $\psi([j, w_{er_j, er_j\alpha}])$ 的表达式右端、前一个等式的右端以及 r_j^{-1} 相乘，得到逆幺半群 M 中的下列等式：

$$\begin{aligned} er_j w_{er_j,er_j\alpha} r_{j\cdot\alpha}^{-1} er_{j\cdot\alpha} w_{er_j,er_j\alpha}^{-1} r_j^{-1} &= er_j w_{er_j,er_j\alpha} r_{j\cdot\alpha}^{-1} r_{j\cdot\alpha} w_{er_j,er_j\alpha}^{-1} r_j^{-1} \\ &= er_j w_{er_j,er_j\alpha} r_{j\cdot\alpha}^{-1} r_{j\cdot\alpha} w_{er_j,er_j\alpha}^{-1} r_j^{-1} = e. \end{aligned}$$

根据映射 ϕ的定义，通过直接的归纳论证即可得到该引理。注意到这两个关系族

$$[j\cdot\alpha, w_{er_{j\cdot\alpha}\alpha^{-1},er_{j\cdot\alpha}}^{-1}] = [j\cdot\alpha, w_{er_j,er_j\alpha}^{-1}]$$

and

$$[j, w_{er_j,er_j\alpha}][j\cdot\alpha, w_{er_j,er_j\alpha}^{-1}] = 1$$

属于引理陈述中给出的有限关系集，便可得到引理的最后一句。证明至此完成。□

引理 3.22. 设 $j \in J$和 $\alpha \in (A\cup A^{-1})^*$，使得对$\alpha$ 的每个非空真前缀 α'，都有 $j\cdot\alpha' \notin J$。此外，假设 $er_j\alpha = er_j$。则 $\phi(j,\alpha) = 1$ 在群H中成立。此外，存在一个在 H 中成立的有限关系集，由此可推出所有这些关系。

证明。 根据定义可知

$$\phi(j,\alpha) = [j, w_{er_j,er_j\alpha}] = [j, 1].$$

于是，在定义关系中应用 (3.1)，并注意到 $1\cdot e = 1$，可得

$$[j,1] = \phi\psi([j,1]) = \phi(er_j 1 r_j') = \phi(1, er_j r_j^{-1}) = \phi(1,e)\phi(1,r_j)\phi(j,r_j^{-1}).$$

$\phi(1, r_j)\phi(j, r_j^{-1}) = 1$ 成立且可由有限关系集推出，这由引理 3.21 可知。此外，$\phi(1, e) = 1$ 是该表示中的一个定义关系。引理的证明至此完成。□

现在一切就绪，可以证明定理 3.18 了。

定理 *3.18* 的证明。根据上述讨论，并沿用上述记号，群H 由一个无限幺半群表示定义，该表示的有限生成集为 B，并包含上文列出的五个关系族 (1)–(5)。为了证明该定理，只需依次考察这五个关系族，并证明对每个关系族，都存在一个关于 B 的有限关系集在 H 中成立，且所有该族中的关系都可由此作为推论导出。

(1) 由于 B 是有限的，因此这是一个有限定义关系集。

(2) 考虑关系 $\phi(w_1uw_2) = \phi(w_1vw_2)$，其中 $w_1, w_2 \in (A\cup A^{-1})^*$、$(u = v) \in \mathfrak{R}$、$w_1uw_2 \in \mathcal{L}(A, H)$。将字 w_1uw_2 分解为

$$w_1uw_2 \equiv w_1'w_1''uw_2'w_2''$$

使得 w_1' 是满足 $1\cdot w_1' \in J$ 的 w_1 的最长前缀，而 w_2' 是满足 $1\cdot w_1uw_2' \in J$ 的 w_2 的最短前缀。由于 $u = v$ 属于 M 意味着 $w_1u = w_1v$ 属于 M，因此，当我们以相同的方式分解字 w_1vw_2 时，实际得到

$$w_1vw_2 \equiv w_1'w_1''vw_2'w_2''$$

其 $w_1 \equiv w_1'w_1''$ 和 $w_2 \equiv w_2'w_2''$ 的分解相同。由此以及 (3.1)，我们得出

$$\phi(w_1uw_2) \equiv \phi(1, w_1')\phi(1\cdot w_1', w_1''uw_2')\phi(1\cdot w_1uw_2', w_2'')$$

and

$$\phi(w_1vw_2) \equiv \phi(1, w_1')\phi(1\cdot w_1', w_1''vw_2')\phi(1\cdot w_1vw_2', w_2'').$$

但 $u = v$在 M中蕴含 $1\cdot w_1uw_2' = 1\cdot w_1vw_2'$，因此 $\phi(1\cdot w_1uw_2', w_2'') \equiv \phi(1\cdot w_1vw_2', w_2'')$。因此，关系 $\phi(1\cdot w_1', w_1''uw_2') = \phi(1\cdot w_1', w_1''vw_2')$ 在 H中成立，并且关系 $\phi(w_1uw_2) =$

$\phi(w_1vw_2)$ 是由它推出的。此外，根据 w_1' 和 w_2' 的定义可得$|\phi(1\cdot w_1',\ w_1''uw_2')| \le |u|$ 以及 $|\phi(1\cdot w_1',\ w_1''vw_2')| \le |v|$。因此，这给出了一个关于 B 的有限关系集，它们在 H 中成立，而族 (2) 中的所有关系均可由此推出。

（5）暂且来看关系集（5），这些实际上都是平凡关系（即作为词的等式），因为由等式（3.1）可得

$$\phi(w_1w_2) \equiv \phi(1,w_1)\phi(1\cdot w_1,w_2) \equiv \phi(1,w_1)\phi(1,w_2) \equiv \phi(w_1)\phi(w_2).$$

因此，我们可以从表示中删除所有关系（5）。

这样只剩下关系族（3）和（4）需要考虑。

（3） $\phi(w_1\alpha\alpha^{-1}\alpha w_2) = \phi(w_1\alpha w_2)$，其中 $w_1,w_2,\alpha \in (A\cup A^{-1})^*$ 以及 $w_1\alpha w_2 \in \mathcal{L}(A,H)$。

我们分解

$$w_1\alpha w_2 \equiv w_1'w_1''\alpha w_2'w_2''$$

使得 $w_1 \equiv w_1'w_1''$, $w_2 \equiv w_2'w_2''$； w_1' 是 w_1 的最长前缀，使得 $ew_1' \in X$ （或等价地 $1\cdot w_1' \in J$）；w_2' 是 w_2 的最短前缀，使得 $ew_1\alpha w_2' \in X$。

首先，假设对 α 的每个前缀 α'，都有 $ew_1\alpha' \notin X$。那么

$$\phi(w_1\alpha w_2) \equiv \phi(1,w_1')\phi(1\cdot w_1', w_1''\alpha w_2')\phi(1\cdot w_1\alpha w_2', w_2''),$$

而

$$\begin{aligned}\phi(w_1\alpha\alpha^{-1}\alpha w_2) &\equiv \phi(1,w_1')\phi(1\cdot w_1', w_1''\alpha\alpha^{-1}\alpha w_2')\phi(1\cdot w_1\alpha\alpha^{-1}\alpha w_2', w_2'')\\ &\equiv \phi(1,w_1')\phi(1\cdot w_1', w_1''\alpha\alpha^{-1}\alpha w_2')\phi(1\cdot w_1\alpha w_2', w_2''),\end{aligned}$$

其中 $\phi(1\cdot w_1', w_1''\alpha w_2') \in B$，且 $\phi(1\cdot w_1', w_1''\alpha\alpha^{-1}\alpha w_2') \in B$。因此，在这种情况下，该关系是引理 3.21 陈述中给出的、在 H 中成立的有限关系集的推论。

否则，我们将其分解为

$$\alpha \equiv \alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

使得 α_1 是 α 的最短前缀，使得 $ew_1\alpha_1 \in X$，而 $\alpha_1\alpha_2$ 是 α 的最长前缀，使得 $ew_1\alpha_1\alpha_2 \in X$。注意，现在 w_2' 也是 w_2 的最短前缀，使得 $ew_1\alpha\alpha^{-1}\alpha w_2' \in X$。现在我们可以利用这个分解计算 $\phi(w_1\alpha\alpha^{-1}\alpha w_2)$ 和$\phi(w_1\alpha w_2)$，并对它们进行比较。计算前者可得

$$\begin{aligned}\phi(w_1\alpha\alpha^{-1}\alpha w_2) \equiv\ & \phi(1,w_1')\phi(1\cdot w_1', w_1''\alpha_1)\phi(1\cdot w_1\alpha_1,\alpha_2)\\ & \phi(1\cdot w_1\alpha_1\alpha_2,\alpha_3\alpha_3^{-1})\phi(1\cdot w_1\alpha\alpha_3^{-1},\alpha_2^{-1})\\ & \phi(1\cdot w_1\alpha\alpha_3^{-1}\alpha_2^{-1},\alpha_1^{-1}\alpha_1)\phi(1\cdot w_1\alpha\alpha^{-1}\alpha_1,\alpha_2)\\ & \phi(1\cdot w_1\alpha\alpha^{-1}\alpha_1\alpha_2,\alpha_3w_2')\phi(1\cdot w_1\alpha\alpha^{-1}\alpha w_2', w_2'').\end{aligned}$$

接下来注意，由定义可知，可以应用引理 3.22 得出$\phi(1\cdot w_1\alpha_1\alpha_2,\alpha_3\alpha_3^{-1}) = 1$ 和 $\phi(1\cdot w_1\alpha\alpha_3^{-1}\alpha_2^{-1},\alpha_1^{-1}\alpha_1) = 1$，而这两个关系都是引理 3.22 的陈述中给出的、在 H 中成立的有限关系集的推论。此外，由定义可知，可以应用引理 3.21 推出

$$\phi(1\cdot w_1\alpha_1,\alpha_2)\phi(1\cdot w_1\alpha\alpha_3^{-1},\alpha_2^{-1}) = 1$$

在 H 中成立，并且它是引理 3.21 的陈述中指出的、在 H 中成立的有限关系集的推论。我们还有

$$\phi(1\cdot w_1\alpha\alpha^{-1}\alpha_1,\alpha_2) \equiv \phi(1\cdot w_1\alpha_1,\alpha_2),$$

$$\phi(1\cdot w_1\alpha\alpha^{-1}\alpha_1\alpha_2,\alpha_3w_2') \equiv \phi(1\cdot w_1\alpha_1\alpha_2,\alpha_3w_2')$$

and

$$\phi(1\cdot w_1\alpha\alpha^{-1}\alpha w_2', w_2'') \equiv \phi(1\cdot w_1\alpha w_2', w_2'').$$

因此，根据上述所有观察和断言，将引理 3.22 和 3.21 中有限多个关系加入我们的表示后，所有类型 (3) 的关系都将

由这个有限集合推出，因为根据上述观察，我们可以利用这些关系推导出：

$$\begin{aligned}\phi(w_1\alpha\alpha^{-1}\alpha w_2) = \phi(1, w_1')\phi(1\cdot w_1', w_1''\alpha_1)\phi(1\cdot w_1\alpha_1, \alpha_2)\\ \phi(1\cdot w_1\alpha_1\alpha_2, \alpha_3 w_2')\phi(1\cdot w_1\alpha w_2', w_2'')\\ \equiv \phi(w_1\alpha w_2).\end{aligned}$$

这涉及关系族 (3)。

(4) $\phi(w_1\alpha\alpha^{-1}\beta\beta^{-1}w_2) = \phi(w_1\beta\beta^{-1}\alpha\alpha^{-1}w_2)$ 其中 $w_1,\ w_2,\ \alpha \in (A\cup A^{-1})^*$ 且我们有 $w_1\alpha\alpha^{-1}\beta\beta^{-1}w_2 \in \mathcal{L}(A,\ H)$。

对于每个这样的关系，我们将证明，存在一个 B 上的关系，它涉及一对长度均不超过三的词；将该关系与引理 3.22 和 3.21 中的有限关系族结合起来，便可推出原关系。由于 B 是有限的，因此我们可以用有限关系族替换这个无限关系族。根据 α 是否有满足 $ew_1\alpha' \in X$ 的前缀 α'，以及 β 是否有满足 $ew_1\beta' \in X$ 的前缀 β'，可分为若干种情况。我们将证明 α' 和 β' 这两个前缀均存在时的情形。其他情形可参照上文 (3) 的证明类似处理。

考虑字 $w_1\alpha\alpha^{-1}\beta\beta^{-1}w_2$。我们将这个字分解为

$$w_1'w_1''\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_3^{-1}\alpha_2^{-1}\alpha_1^{-1}\beta_1\beta_2\beta_3\beta_3^{-1}\beta_2^{-1}\beta_1^{-1}w_2'w_2''$$

其中 $w_1 \equiv w_1'w_1''$、$w_2 \equiv w_2'w_2''$、$\alpha \equiv \alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 和 $\beta \equiv \beta_1\beta_2\beta_3$；$w_1'$ 是 w_1 的最长前缀，使得 $ew_1' \in X$（或等价地，$1\cdot w_1' \in J$）；w_2' 是 w_2 的最短前缀，使得 $ew_1\alpha\alpha^{-1}\beta\beta^{-1}w_2' \in X$；$\alpha_1$ 是 α 的最短前缀，使得 $ew_1\alpha_1 \in X$；$\alpha_1\alpha_2$ 是 α 的最长前缀，使得 $ew_1\alpha_1\alpha_2 \in X$；$\beta_1$ 是 β 的最短前缀，使得 $ew_1\alpha\alpha^{-1}\beta_1 \in X$；$\beta_1\beta_2$ 是 β 的最长前缀，使得 $ew_1\alpha\alpha^{-1}\beta_1\beta_2 \in X$。

根据定义和假设可知，β_1 也是 β 的最短前缀，使得$ew_1\beta_1 \in X$，因为在幺半群中 $ew_1\alpha\alpha^{-1} = ew_1$，而根据假设 $w_1\alpha\alpha^{-1}\beta\beta^{-1}w_2 \in \mathcal{L}(A,\ H)$，因此字 $w_1\alpha\alpha^{-1}\beta\beta^{-1}w_2$ 的所有前缀 p 都具有 $ep\mathscr{R}e$这一性质。根据定义和假设还可知，$\beta_1\beta_2$ 是 β 的最长前缀，使得 $ew_1\beta_1\beta_2 \in X$，因为在幺半群中 $ew_1\alpha\alpha^{-1} = ew_1$。最后，注意到根据定义和假设可知，$w_2'$ 也是 w_2 的最短前缀，使得 $w_1w_2' \in X$，同时也是 w_2 的最短前缀，使得 $w_1\beta\beta^{-1}\alpha\alpha^{-1}w_2' \in X$。现在我们可以用这个分解来计算$\phi(w_1\alpha\alpha^{-1}\beta\beta^{-1}w_2)$和 $\phi(w_1\beta\beta^{-1}\alpha\alpha^{-1}w_2)$，并比较二者。我们有

$$\begin{aligned}\phi(w_1\alpha\alpha^{-1}\beta\beta^{-1}w_2) \equiv \phi(1, w_1')\phi(1\cdot w_1', w_1''\alpha_1)\phi(1\cdot w_1\alpha_1, \alpha_2)\\ \phi(1\cdot w_1\alpha_1\alpha_2, \alpha_3\alpha_3^{-1})\phi(1\cdot w_1\alpha\alpha_3^{-1}, \alpha_2^{-1})\\ \phi(1\cdot w_1\alpha\alpha_3^{-1}\alpha_2^{-1}, \alpha_1^{-1}\beta_1)\phi(1\cdot w_1\alpha\alpha^{-1}\beta_1, \beta_2)\\ \phi(1\cdot w_1\alpha\alpha^{-1}\beta_1\beta_2, \beta_3\beta_3^{-1})\phi(1\cdot w_1\alpha\alpha^{-1}\beta\beta_3^{-1}, \beta_2^{-1})\\ \phi(1\cdot w_1\alpha\alpha^{-1}\beta\beta_3^{-1}\beta_2^{-1}, \beta_1^{-1}w_2')\\ \phi(1\cdot w_1\alpha\alpha^{-1}\beta\beta^{-1}w_2', w_2'').\end{aligned}$$

接下来注意，根据定义可知，可以应用引理 3.22 来证明 $\phi(1\cdot w_1\alpha_1\alpha_2,\ \alpha_3\alpha_3^{-1}) = 1$ 和 $\phi(1\cdot w_1\alpha\alpha^{-1}\beta_1\beta_2,\ \beta_3\beta_3^{-1}) = 1$，并且这两个关系都是引理 3.22 的陈述中给出的、在 H 中成立的有限关系集的推论。此外，根据定义可知，可以应用引理 3.21 推得

$$\phi(1\cdot w_1\alpha_1, \alpha_2)\phi(1\cdot w_1\alpha\alpha_3^{-1}, \alpha_2^{-1}) = 1$$

以及

$$\phi(1\cdot w_1\alpha\alpha^{-1}\beta_1, \beta_2)\phi(1\cdot w_1\alpha\alpha^{-1}\beta\beta_3^{-1}, \beta_2^{-1}) = 1$$

在 H 中成立，并且它们是 H 中成立的有限关系集的推论；该有限关系集已在引理 3.21 的陈述中指出。

由此可得等式

$$\phi(w_1\alpha\alpha^{-1}\beta\beta^{-1}w_2) = \phi(1, w_1')\phi(1\cdot w_1', w_1''\alpha_1)\phi(1\cdot w_1\alpha\alpha_3^{-1}\alpha_2^{-1}, \alpha_1^{-1}\beta_1)$$
$$\phi(1\cdot w_1\alpha\alpha^{-1}\beta\beta_3^{-1}\beta_2^{-1}, \beta_1^{-1}w_2')\phi(1\cdot w_1\alpha\alpha^{-1}\beta\beta^{-1}w_2', w_2'')$$

在 H 中成立，并且是我们表示中的引理 3.22 和 3.21 所给出的有限关系的推论。

然后，根据上述定义和观察可知，如果对字 $w_1\beta\beta^{-1}\alpha\alpha^{-1}w_2$ 执行相同的过程，我们将得到

$$\phi(w_1\beta\beta^{-1}\alpha\alpha^{-1}w_2) = \phi(1, w_1')\phi(1\cdot w_1', w_1''\beta_1)\phi(1\cdot w_1\beta\beta_3^{-1}\beta_2^{-1}, \beta_1^{-1}\alpha_1)$$
$$\phi(1\cdot w_1\beta\beta^{-1}\alpha\alpha_3^{-1}\alpha_2^{-1}, \alpha_1^{-1}w_2')\phi(1\cdot w_1\beta\beta^{-1}\alpha\alpha^{-1}w_2', w_2'')$$

在 H 中成立，并且是我们表示中的引理 3.22 和 3.21 所给出的有限关系的推论。根据定义可知

$$\phi(1\cdot w_1\alpha\alpha^{-1}\beta\beta^{-1}w_2', w_2'') \equiv \phi(1\cdot w_1\beta\beta^{-1}\alpha\alpha^{-1}w_2', w_2'')$$

在 B^* 中。因此，我们有关系

$$\phi(1\cdot w_1', w_1''\alpha_1)\phi(1\cdot w_1\alpha\alpha_3^{-1}\alpha_2^{-1}, \alpha_1^{-1}\beta_1)\phi(1\cdot w_1\alpha\alpha^{-1}\beta\beta_3^{-1}\beta_2^{-1}, \beta_1^{-1}w_2')$$
$$= \phi(1\cdot w_1', w_1''\beta_1)\phi(1\cdot w_1\beta\beta_3^{-1}\beta_2^{-1}, \beta_1^{-1}\alpha_1)\phi(1\cdot w_1\alpha\beta^{-1}\alpha\alpha_3^{-1}\alpha_2^{-1}, \alpha_1^{-1}w_2')$$

在群 H 中成立，而关系 $\phi(w_1\alpha\alpha^{-1}\beta\beta^{-1}w_2) = \phi(w_1\beta\beta^{-1}\alpha\alpha^{-1}w_2)$ 是它的推论。但根据定义，该关系两边作为字母表 B 上的字时，长度都至多为三。由于 B 是有限集，这意味着：取出所有在 H 中成立且长度不超过六的关系（连同由引理 3.22 和 3.21 产生的有限关系集），我们将得到一个在 H 中成立的有限关系集，并且集合（4）中的所有关系都是该关系集的推论。

这涵盖了群 H 的无限表示中的所有关系，从而完成了 H 作为幺半群是有限呈示的证明，也就完成了 H 是有限表示群这一结果的证明。□

注 3.23。这里有一个定理 3.18 的类似结果： S 是一个有限表示的幺半群，可以使用类似的方法证明。由于本文的重点是逆幺半群表示，我们不在此处纳入该结果。注意，由于有限呈示的逆幺半群未必作为幺半群是有限呈示的，因此这两个结果需要分别证明，就像 [39] 中相应的一对结果一样。事实上，对于任意有限表示的特殊幺半群 M，如果 H 是 M 的单位群，那么 H 具有有限边界宽度。这为马卡宁 [31] 的一个结果提供了另一种证明，即有限表示的特殊幺半群的单位群是有限表示群。特殊逆幺半群理论与特殊幺半群理论之间的一个关键区别是，一般而言，单位群不具有有限边界宽度，因为一般而言它未必是有限表示群。

注记 3.24。定理 3.18 推广了 [39, 推论 4.7]，因为如果某个子群按照其中定义的意义具有有限指数，那么就可以将其完整的右陪集集合作为具有有限边界宽度的有限覆盖。

4. Finite presentability of the group of units in the case when the right units admit a free product decomposition

现在，我们应用前一节中的一般结果，证明下面这一早先宣布的结果。

定理 4.1。设 M 是一个有限呈示的特殊逆幺半群，其单位群为 U。假设对于某个单位群平凡的有限生成幺半群 T，有 $\mathrm{RU}(M) \cong U * T$。那么 U 必须是有限呈示的。

推论 4.2。 设 M 是一个有限呈示的特殊逆幺半群，其单位群为 U。假设对于某个有限集 X，有 $\mathrm{RU}(M) \cong U * X^*$。那么 U（因此 $\mathrm{RU}(M)$）必须是有限呈示的。

正如我们在前一节中提到的，给定一个特殊逆幺半群

$$M = \mathrm{Inv}\langle A \,|\, w_1 = 1, \ldots, w_k = 1\rangle$$

可以自然地关联到右单位 RU(M) 的图有两种（它与 R_1 中 1 的 $\mathscr{R}$-类重合）。首先是 $S\Gamma_A$ (1)，即 1 的右 Sch¨utzenberger 图（由 M 的生成元及其逆元标记）。其次，由于如定义 2.2 后的段落所述，右单位 RU(M) 由所有可表示关系词前缀的元素组成的集合有限生成，因此存在幺半群 RU(M) 关于该有限生成集的凯莱图。这里，幺半群 T 关于有限生成集 B 的右凯莱图，其顶点集为 T，并且对于所有 $t \in T$ 和 $b \in B$，都存在从 t 到 tb 的有向边。事实上，我们只想研究这些有向标记图各自的底层无向图。

我们希望证明以下关键结果，它揭示了这两类图的几何结构之间的密切关系。

引理 4.3。 设 M 是一个有限表示特殊逆幺半群

$$M = \mathrm{Inv}\langle A \,|\, w_1 = 1, \ldots, w_k = 1\rangle.$$

设 Γ 是 $S\Gamma_A$（1）的底层无向图，并设 Δ是右单位子幺半群 $R_1 = \mathrm{RU}(M)$ 关于有限生成集 X （即所有定义关系 w_i、 $1 \leq i \leq k$的所有前缀）的右凯莱图的底层无向图。那么，恒等映射 ι： $R_1 \to R_1$ 定义了一个拟等距映射 ι： $\Gamma \to \Delta$。

证明。由于 ι 是一个双射，映射 ι ： $\Gamma \to \Delta$ 显然是拟稠密的，其拟稠密常数为 $\mu = 0$。

接下来，考虑 Δ中的一对相邻顶点。这一对顶点的形式为 $\{x, xp\}$ ，其中 $x \in R_1$，且 p 是某个定义关系的前缀。因此， $d_\Gamma(x,\ xp) \leq \lambda$ ，其中 λ 是 M的有限表示中定义关系词的最大长度。于是，通过归纳法，对于任意一对顶点 $x,\ y \in R_1$ ，我们有

$$d_\Gamma(x, y) \leq \lambda \cdot d_\Delta(x, y).$$

对于另一个方向的不等式，最好考虑通过 Stephen 构造构造 $S\Gamma$(1)。令 T 为如下得到的有向标记图：从单个顶点开始，在该顶点上添加由 w_i 标记的环（对每个 $1 \leq i \leq k$），然后对每个新创建的顶点重复这一过程。由此根据 [43] 可知， $S\Gamma$(1) 是通过对图 T进行双确定化而得到的图。这意味着，对于图 $S\Gamma$(1) 中的每条边 e ，我们都可以在 T 中选择某条原像边 e' ，使得在对 T进行双确定化后， e' 映射到 e 。这是因为对 T 进行双确定化时不会创建新的边，因此 $S\Gamma$(1) 中的每条边在 T 中至少有一条原像。现在，我们可以在球树中读取定义关系前缀的乘积，该乘积以遍历 e 作为其最后一条边。于是，对于 $\Gamma = S\Gamma$(1) 中的任意一条边 $e = \{x, xa\}$ ，我们可以将其写成

$$x =_M p_1 p_2 \ldots p_k$$
$$xa =_M p_1 p_2 \ldots (p_k a)$$

其中所有的 p_i 和 $p_k a$都是定义关系词的前缀。由此可得

$$d_\Delta(x, xa) \leq 2.$$

由于在 Δ中，我们有边

$$p_1 \ldots p_{k-1} p_k \xleftarrow{p_k} p_1 \ldots p_{k-1} \xrightarrow{p_k a} p_1 \ldots p_{k-1} p_k a$$

其中 p_k， $p_k a \in X$ 是定义关系词的前缀。由归纳法可得

$$d_\Delta(x, y) \leq 2 \cdot d_\Gamma(x, y).$$

结合这两个不等式以及拟稠密性的观察，便完成了证明：恒等映射定义了 Γ与 Δ之间的拟等距。□

引理 4.4. 设 M 是由有限生成集 A和 B生成的幺半群。那么， M 上的恒等映射定义了一个拟等距，它将相对于 A 的 M 无向右凯莱图映到相对于 B的 M 无向右凯莱图。

证明。 使用与 [14, 命题 4]的证明类似的论证即可直接证明。 □

剩下的一步如下。

引理 4.5. 设 $S = U * V$ 是两个有限生成幺半群 U 和 V 的自由积，并设 Γ 是 S 相对于生成集 $X \cup Y$ 的无向凯莱图，其中 $X \subseteq U$生成 U，且 $Y \subseteq V$ 生成 V。那么 $U \subseteq \Gamma$ 具有有限边界宽度。

证明。 由自由积 $S = U * V$的正规形可知，如果 $(x_0, \ldots, x_k)$ 是 U 在 Γ 中的一条边界路径，且 x_0, $x_k \in U$，那么必有 $x_0 = x_k$。因此，在这种情况下， U 的边界宽度为 0，故其边界宽度有限。□

定理 *4.1* 的证明。 设 $R = \mathrm{RU}(M)$，并固定一个同构 $\phi\colon U * T \to R$。由假设， T的单位群是平凡的，因此 $U * T$ 的单位群为 U。于是， ϕ 将 $U * T$ 的第一个因子 U 同构地映到 R的单位群 U 。令 Ω 为 R 关于某个形如 $\phi(Y) \cup \phi(X)$ 的有限生成集的右凯莱图的底层无向图，其中 U 的有限生成集为 Y， T 的有限生成集为 X，且 $1 \notin X$。令 $\Gamma = S\Gamma_A(1)$ 为 R 的 Sch¨utzenberger 图。结合引理 4.3 和引理 4.4， R 上的恒等映射 ι 定义了 Ω 与 Γ之间的拟等距。现在， ι将 $U = H_1 \subseteq R_1$ 映到 $U * T$的因子 U；而在 Ω 中，因子 U的边界宽度有限（由自由积结构 $U * T$以及引理 4.5 可知），故由引理 3.6 和命题 3.11 可得， $U = H_1 \subseteq \Gamma$ 有一个边界宽度有限的有限覆盖。进而由定理 3.18 可知， U 是有限呈示的，证毕。□

由于任何有限表示群也有有限幺半群表示，我们便得到了引言中宣布的结果。

推论 4.6。 如果 H 是有限生成但非有限表示的群，那么对于任意有限集 C， $H * C^* \notin \mathcal{RU}$。

5. The right unit monoids in the Gray-Kambites construction

正如我们先前所述，本节的主要目标是证明以下结果，它推广了 [15,定理 4.1]。

定理 5.1。 有限 *RC* 表示幺半群的每个有限生成子幺半群都同构于某个有限表示特殊逆幺半群的子幺半群 N M，并且满足

(a) N 是 M 的右单位的子幺半群，且(b) N 包含 M 的单位群。

注意，当 N 是群时，定理 5.1 中的性质 (a) 和 (b) 表明， N 是逆幺半群 M 的单位群。由于每个有限表示群显然都是有限 RC 表示幺半群，定理 5.1 便得出了结果 [15, 定理 4.1]。

注 5.2。 请注意，定理 5.1 陈述中的条件意味着，我们构造的子幺半群N 是 M 中若干 $\mathscr{H}$类的并，而这些类本身都包含在 M中 1 的 $\mathscr{R}$类里。

注 5.3。 请注意，若 M 是有限呈示特殊逆幺半群，且 N 是 M 的右单位构成的有限生成子幺半群，并且 N 包含 M的单位群，那么$N \in \mathcal{RC}_2$。因此，若 $\mathcal{RC}_1 = \mathcal{RC}_2$，则由定理 5.1 可知，包含单位群的有限呈示特殊逆幺半群的右单位的有限生成子幺半群这一类，实际上等于递归 RC-表示幺半群这一类。

我们首先回顾论文 [15]，中基于群的有限幺半群表示和有限生成子群的原始构造。设 G 是一个有限表示群，$H \leq G$ 是一个有限生成子群。可以假设 G 由一个有限幺半群表示给出

$$G = \mathrm{Mon}\langle A \,|\, r_1 = 1, \ldots, r_k = 1\rangle,$$

其中 H 由子集 $B \subseteq A$ 生成，而且，对于任意字母 $a \in A$，我们都有一个形式逆元 $\overline{a} \in A$，满足 $\overline{\overline{a}} = a$；同时，关系 $a\overline{a} = 1$ 包含在 G 的定义关系集合中。在这些假设下，作者在 [15]中引入了一个由 A 和 p_0，p_1、…、p_k，z，d 生成、并由以下关系定义的特殊逆幺半群 $M_{G,\,H}$

$$\begin{aligned}
&p_i a p_i^{-1} p_i \overline{a} p_i^{-1} = 1 && (a \in A,\quad i = 0,\ 1,\ \ldots,\ k)\\
&p_i r_i d^{-1} p_i^{-1} = 1 && (i = 0,1,\ldots,k)\\
&p_0 d p_0^{-1} = 1\\
&z b z^{-1} z \overline{b} z^{-1} = 1 && (b \in B)\\
&z\left(\prod_{i=0}^{k} p_i^{-1} p_i\right) z^{-1} = 1.
\end{aligned}$$

在 [15] 中已证明，$M_{G,\,H}$ 的单位群与 H 同构，并且它恰好由可表示为以下形式的字所对应的元素组成：zwz^{-1}、$w \in B^*$，其中

$$(zuz^{-1})(zvz^{-1}) = zuvz^{-1}$$

对于所有 u，$v \in B^*$，$M_{G,\,H}$ 中均成立。这是确立如下结果的关键步骤：有限呈示特殊逆幺半群的单位群类与有限生成递归表示群相一致。

此外，同一篇论文构造了一个以 $M_{G,\,H}$ 的生成符号为边标记的有向确定图 Ω，后来发现它是 $M_{G,\,H}$ 的 Sch¨utzenberger 图 $S\Gamma(1)$ 的一个副本。（事实上，[15] 中指出，尽管论文实际上证明了 $S\Gamma(1)$ 的许多相关性质，但要证明这一标记图同构还需要多做一些工作。）

现在，我们将推广先前的构造：该构造以一个有限 RC-表示的右消去幺半群和一个有限生成子幺半群为对象。在这一更一般的框架下，我们确定相应右单位幺半群的一个 RC-表示，并证明它通常不一定是有限的。

定义 5.4. 设 S 为有限 RC 表示幺半群，T 为 S的有限生成子幺半群。设

$$S = \mathrm{MonRC}\langle A \,|\, u_i = v_i\ (1 \leq i \leq k)\rangle$$

是 S 的有限 RC-表示，使得 T 由 A的有限子集 B 生成。通过加入在 S中成立的形如 $b = w_b \in A^*$ 的关系（对每个$b \in B$各加入一个），总能实现这一点；这会将原 RC-表示转换为具有所需性质的表示。

然后，我们定义 $M_{S,\ T}$ 为由 $\Sigma = A \cup \{p_0, p_1, \ldots, p_k, z, d\}$ 生成、满足以下定义关系的有限表示特殊逆幺半群

$$\begin{aligned}
&p_i a p_i^{-1} p_i a^{-1} p_i^{-1} = 1 && (a \in A,\ i = 0, 1, \ldots, k)\\
&p_i u_i d^{-1} v_i^{-1} p_i^{-1} = 1 && (i = 1, \ldots, k)\\
&p_0 d p_0^{-1} = 1 &&\\
&z b z^{-1} z b^{-1} z^{-1} = 1 && (b \in B)\\
&z \left(\prod_{i=0}^{k} p_i^{-1} p_i \right) z^{-1} = 1. &&
\end{aligned}$$

由 [21, 17] 可知，特殊逆幺半群的所有关系词的所有前缀所表示的元素构成了其右单位幺半群的一个生成集。应用 [13,推论 3.2]，用关系词的约简形式替换其前缀，再结合以下事实：若 $uv = 1$ 是一个定义关系，则前缀 u 在幺半群中等于 v^{-1}，可以证明，关系词的每个前缀在 $M_{S,T}$ 中都等于以下某个词：

$$\begin{aligned}
&p_i, p_i a p_i^{-1} && (a \in A,\ 0 \le i \le k),\\
&p_i \xi_i && (\xi_i \in \mathrm{pref}(u_i) \cup \mathrm{pref}(v_i),\ 1 \le i \le k),\\
&z, z b z^{-1} && (b \in B),\\
&z p_i^{-1} && (0 \le i \le k).
\end{aligned}$$

由此可知，这是一组词，它们表示 RU($M_{S,T}$) 的生成集中的元素。注意，在这个生成集中，z 是冗余的，因为 $z = (z p_0^{-1}) p_0$ 在 $M_{S,T}$ 中成立。还要注意，由 $p_i \xi_i$, $\xi_i \in$ pref(u_i) $\cup$pref(v_i) 形式的词所表示的元素是冗余生成元，因为每当 $\xi_i = a_{1,i} \ldots a_{l_i,i}$ 时，我们有

$$p_i \xi_i = (p_i a_{1,i} p_i^{-1}) \ldots (p_i a_{l_i,i} p_i^{-1}) p_i$$

在 $M_{S,T}$ 中成立，并且在 RU($M_{S,T}$) 中也成立。总之，前面的讨论得出以下结果。

引理 5.5。在 $M_{S,T}$ 中，由词 $p_i, z p_i^{-1}, p_i a p_i^{-1} (0 \le i \le k,\ a \in A)$ 和 $z b z^{-1} (b \in B)$ 表示的元素构成 $\mathrm{RU}(M_{S,T})$ 的一个生成集。

这是本节的主要技术结果。它给出了 RU($M_{S,T}$) 关于前一个引理中确定的生成集的一个表示。

定理 5.6。设 S 是有限 *RC*-呈示的幺半群，T 是 S 的有限生成子幺半群，并设 $M_{S,T}$ 是上文定义的有限表示特殊逆幺半群。设 Q 是由生成元 $p_i, q_i\ (0 \le i \le k)$，$a^{(i)}\ (a \in A, 0 \le i \le k)$，$b^{(z)}\ (b \in B)$ 及以下关系 *RC*-呈示的右消去幺半群

$$\begin{aligned}
&q_i w^{(i)} p_i = q_0 w^{(0)} p_0 && (w \in A^*,\ 1 \le i \le k)\\
&q_i u^{(i)} = q_i v^{(i)} && (u, v \in A^* \ \textit{such that}\ u = v \ \textit{holds in}\ S,\ 0 \le i \le k)\\
&q_i b^{(i)} = b^{(z)} q_i && (b \in B,\ 0 \le i \le k)
\end{aligned}$$

其中，字 $w^{(i)}$ 是通过将每个字母 $a \in A$ 替换为 $a^{(i)}$，从字 $w \in A^*$ 得到的；同样，字 $u^{(z)}$ 是通过将每个字母 $b \in B$ 替换为 $b^{(z)}$，从字 $u \in B^*$ 得到的。于是$\mathrm{RU}(M_{S,T}) \cong Q$ 和元素 $b^{(z)}$、$b \in B$生成的子幺半群与 T同构。特别地，T 嵌入到$\mathrm{RU}(M_{S,T})$中。

首先，我们提出一个一般性观察，它与普通幺半群表示理论中的一个著名事实相对应。

引理 5.7. 设 $M = \mathrm{MonRC}\langle A \mid u_i = v_i\,(i \in I)\rangle$，且 $\xi\colon A^* \to N$ 是一个幺半群同态，其中 N 是右消去幺半群，并且对所有 $i \in I$， $u_i\xi = v_i\xi$ 都成立。那么存在一个同态 $\xi'\colon M \to N$，使得 $\xi = \nu\xi'$；若典范同态 $A^* \to M$，则 ν。

证明。设 $\overline{M} = \mathrm{Mon}\langle A \mid u_i = v_i\,(i \in I)\rangle$。那么 M 是 M 的同态像。事实上，Exercise 2.6.12] 的单侧右消去版本表明，所有满足以下性质的关系 $\alpha = \beta$，$\alpha,\ \beta \in \underline{A^*}$：对于某个 $\gamma \in A^*$， $\alpha\gamma = \beta\gamma$ 在 M 中成立，都给出 M 的幺半群表示。特别地，这包括所有形如 $u_i = v_i$, $i \in I$ 的关系。

现在假设 (α, β) 是来自 A^* 的一对词，并且对于某个 $\gamma \in A^*$， $\alpha\gamma = \beta\gamma$ 在 M 中成立。那么

$$(\alpha\xi)(\gamma\xi) = (\alpha\gamma)\xi = (\beta\gamma)\xi = (\beta\xi)(\gamma\xi)$$

在 N 中成立；由于它是右消去的，我们得出 $\alpha\xi = \beta\xi$。例如，由 [38, Proposition 1.2.1] 可立即得到该引理。□

作为一个直接的初步应用，我们得到以下结论。

命题 5.8. 由引理 *5.5* 给出的从 Q 的生成符号集合到 $\mathrm{RU}(M_{S,T})$ 的生成元的映射 ψ_0，定义为

$$p_i \mapsto p_i, \quad q_i \mapsto zp_i^{-1}, \quad a^{(i)} \mapsto p_i a p_i^{-1}, \quad b^{(z)} \mapsto zbz^{-1} \tag{5.1}$$

($0 \le i \le k$, $a \in A$, $b \in B$)，可延拓为满同态 $\psi\colon Q \to \mathrm{RU}(M_{S,T})$.

证明. 容易验证，若 ψ_0' 是

$$\Sigma_0^* \to \mathrm{RU}(M_{S,T})$$

延拓 ψ_0的同态，其中

$$\Sigma_0 = \{p_i, q_i\,(0 \le i \le k),\ a^{(i)}\,(a \in A, 0 \le i \le k),\ b^{(z)}\,(b \in B)\},$$

那么在 ψ_0' 下， Q 的每个定义关系都会变为 $M_{S,T}$ 中成立的等式。（我们反复运用 [13, 推论 3.2] 来看出这一点。）该命题现由前面的引理得出。□

在本节余下部分中，将固定同态 $\psi\colon Q \to \mathrm{RU}(M_{S,\ T})$（其延拓为 ψ_0），以及字母表 Σ_0。为证明定理的第一部分，我们需要证明ψ 实际上是单射。为使论述更加清晰， ψ 的单射性证明将在接下来的五个小节中完成；随后，本节余下的两个小节将分别讨论定理的第二部分（证明 T 嵌入 $\mathrm{RU}(M_{S,\ T})$）以及定理 5.1 的证明完结。

5.1. **图 Ω。** 在证明 [15, 定理 4.1], 时，以递归方式定义了一个边标记为 Σ 的图 Ω。事实证明，它是 $S\Gamma(1)$ 的一个态射像；后者是该定理中定义的特殊逆幺半群的右单位的 Sch¨utzenberger 图（但实际上，它与这里所讨论的 Sch¨utzenberger 图相同）。这里我们以递归方式定义一个类似的无限图，也记作 Ω，定义如下。

图 Ω 有一个根顶点，从该顶点出发，对每个 $x \in \{z, p_0, \ldots, p_k\}$ 都有一条标记为 x 的边，通向下文定义的图 Ω_x 的一个副本。对于每个 $0 \le i \le k$，一个 p_i-区 Ω_{p_i} 由自由幺半群 A^*（关于生成集 A）的凯莱图构成，其根顶点为空词，此外还包括：

- 在每个顶点处，对每个 $x \in \{z, p_0, \ldots, p_k\}$ 都有一条标记为 x 的边向外延伸，边的另一端连接着 Ω_x 的一个副本；
- 在每个非根顶点处都有一条标记为 p_i 的入边，其另一端连接着 $\Omega_{p_i^{-1}}$ 的一个副本；
- 如果 $i = 0$ 每个顶点上都有一个标记为 d 的环；并且

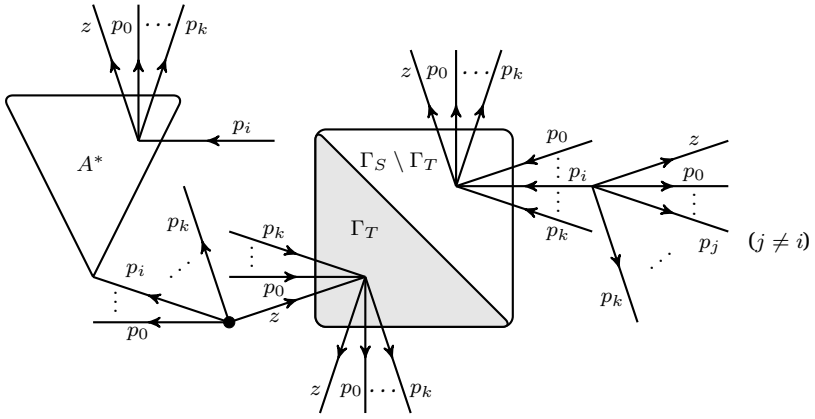


FIGURE 2. 本小节中构造的图 Ω 的典型部分示意图，其中黑色标出了根顶点。正方形表示一个z-区（在此例中是根顶点的z-区），其中凯莱图Γ_S 的副本 S 被划分，使得阴影三角形对应子幺半群 T。左侧的三角形表示一个 p_i-区。此图省略了标记为 d的边。

- 如果 $1 \leq i \leq k$对于每一对顶点 W'，W''（通常，本节用大写字母表示图的顶点，以便与词区分），存在这个 p_i-区域中的一个顶点W，具有这样的性质：W'，W''分别是从 W出发、分别标记为 u_i和 v_i的路径的端点，并且有一条从 W''到 W'、标记为 d的边。

令 Γ_S 表示 S 关于生成集 A的有向标记右凯莱图 Γ_S 。一个 z-区域 Ω_z 由一个 Γ_S 副本以及

- 在每个顶点处，以及对每条 $x \in \{z, p_0, \ldots, p_k\}$，都有一条标记为 x 的边向外延伸，其远端有一个 Ω_x 副本；
- 在每个顶点处，以及对每条 $x \in \{p_0, \ldots, p_k\}$，都有一条标记为 x 的边向内延伸，其远端有一个 $\Omega_{x^{-1}}$ 副本；
- 在 Γ_S 副本中对应于 T 的每个顶点处，都有一条标记为z 的边向内延伸，其远端有一个 $\Omega_{z^{-1}}$ 副本；并且
- 在每个顶点处都有一个标记为 d的环。

最后，对于 $x \in \{z, p_0, \ldots, p_k\}$一个 x^{-1}-区域 $\Omega_{x^{-1}}$由一个单独的根顶点以及

- 对于满足 $y \in \{z, p_0, \ldots, p_k\}$且 $y \neq x$有一条标记为 y的边向外延伸，并在远端带有 Ω 的一个副本y 的每个 $y \in \{z, p_0, \ldots, p_k\}$。

图 2 展示了图 Ω 的一部分。

引理 5.9。 上文构造的图 Ω 具有以下性质：

(i) Ω 是双确定的，即没有顶点有两条向外延伸且标记相同的边，也没有顶点有两条向内延伸且标记相同的边。(ii) 除根之外，Ω 的每个顶点要么属于某个 p_i-区域（其中 $0 \leq i \leq k$ 满足相应条件），要么属于某个 z-区域，要么属于某个 x^{-1}-区域（其中 $x \in \{z, p_0, \ldots, p_k\}$ 满足相应条件）。(iii) Ω 的定义中所有区域均互不相交。(iv) 一个顶点属于某个 z-区域，当且仅当它有以 p_i 和 p_j 为标记、并且对于某些指标 $i \neq j$ 从其进入的边。

证明。 性质 (i) 是 S 的右消去性的结果，而性质 (ii)– (iv) 可通过直接检查 Ω 的定义得出。□

与 [15, 定理 4.1], 的证明大致相同，我们论证：定义$M_{S,T}$ 的每个关系词都能在 Ω 中从任意顶点沿一条闭合路径读出。对于所有不涉及字母

d的关系，这一点很容易验证。对于$M_{S,T}$的表示中的第二族关系，如果沿着标记为 p_i 的边从给定顶点出发会进入一个z-区域，那么我们将在 S的凯莱图的一个副本内到达；因此，从后一个顶点读出 u_i 和 v_i 会到达同一个顶点，而且该顶点还有一条标记为 d 的环。换言之，存在一条从我们进入 z-区域时所在顶点开始的闭合路径，沿其可以读出 $u_i d^{-1} v_i^{-1}$；读出p_i^{-1}则会回到初始顶点。另一方面，如果沿着某条标记为 p_i 的边 traversing 后落入一个 p_i-区域，设到达顶点 W，那么 Ω 中从 W 出发、分别标记为 u_i 和 v_i 的路径p_i会分别将我们带到某些顶点 W' 和 W''；而 Ωp_i 的定义p_i 规定，从 W'' 到W'存在一条标记为 d 的边。因此，与上面类似，存在一条从 W 开始的圈，沿其读出 $u_i d^{-1} v_i^{-1}$，而读出 p_i^{-1}会将我们带回出发时所在的顶点。形式为 $p_0 d p_0^{-1}$ 的关系词同样可以证明：从任意顶点出发，都能在 Ω 中沿一条圈读出。因此，作为 [15,引理 3.3]的直接推论，我们得到以下结论。

命题 5.10. 对于Ω 的每个顶点 U，都存在一个从 *Sch ¨u- tzenberger* 图 $S\Gamma(1)$ （属于 $M_{S,T}$ ）到 Ω 的标记图态射，它将 $S\Gamma(1)$ 的根顶点映射到 U。

5.2. **调整 的凯莱图**。 令 Γ为定理 5.6 陈述中给出的 Q 表示对应的右凯莱图。由于 Q具有右消去性，这是一个 Σ_0 标记的双确定图。

我们的最终目标是证明 RU($M_{S,T}$) 与 Q 同构。为证明这一点，我们将首先比较 Q 的右凯莱图 Γ 与 Sch¨utzenberger 图$S\Gamma$(1)。我们将在本小节中完成这一工作：通过添加和删除边来修改图 Γ，得到一个记为 Γ′ 的 Σ 标记图；随后我们将证明它与 $S\Gamma$(1) 同构。为了描述这一过程，我们先定义图 Γ中的几类顶点。

- $U \in V(\Gamma)$ 属于类型-z，如果在 Γ 中存在一条从其根到 U 的游走，其标签是形如 $uq_i w_{(i)} p_i$ 的字，其中某个 $w \in A^*$ 和某个 $u \in \Sigma_0^*$ 满足条件（并且对任意 $0 \leq i \leq k$ 都成立，注意 $q_i w_{(i)} p_i = q_0 w_{(0)} p_0$ 在 Q 中成立）。令 $\mathcal{Z}$ 为所有属于此类型的顶点构成的集合。
- $U \in V(\Gamma)$ 属于类型-p_i $(0 \leq i \leq k)$，如果在 Γ 中存在一条从其根到 U 的游走，其标签是形如 $vw_{(i)}p_i$ 的字，其中某个 $w \in A^*$ 和某个 $v \in \Sigma_0^*$ 满足条件，且该字要么为空词，要么以字母 $\alpha \notin \{q_i\} \cup \{a_{(i)}$ 结尾： $a \in A\}$。令 Π_i 为所有属于此类型的顶点构成的集合。

对 Γ 的某些顶点进行这种类型划分，其主要思路是在 Γ 中“模拟”图 Ω 的 z-区域和 p_i-区域。为了能够定义图 Γ′，即连贯地描述将图 Γ 转变为 Γ′ 的过程，我们需要验证刚刚引入的顶点集的若干性质，其中最重要的是它们两两不相交。我们先给出一个简单的观察。

引理 5.11. 对于任意 $0 \leq i \leq k$，图 Γ 的顶点 W 有一条以 p_i 为标记的入边，当且仅当 $W \in \mathcal{Z} \cup \Pi_i$。

证明。 根据 $\mathcal{Z}$ 和 Π_i 的定义，逆向蕴含显然成立，因此假设存在边 $U \xrightarrow{p_i} W$。任取一条从 Γ 的根顶点到 U 的游走，并令 $u_0 \in \Sigma_0^*$ 为该游走的标记。若 u_0 为空，则显然有 $U \in \Pi_i$。否则，考虑 u_0 中不属于集合 $\{a^{(i)}$ 的最右侧字母 α： $a \in A\}$。若 $\alpha = q_i$，则我们可以将其写作 $u_0 = u q_i w^{(i)}$，其中 $u \in \Sigma_0^*$ 和 $w \in A^*$ 是某些字，故有 $W \in \mathcal{Z}$。若情况并非如此，则 $W \in \Pi_i$。 □

为了能够连贯地定义图 Γ′，有必要证明 Γ 的顶点类 $\mathcal{Z}$、Π_0、Π_1..... Π_k 两两不相交。为此，我们证明两个辅助结果。

引理 5.12。 令 $w \in A^*$、 u、 $v \in \Sigma_0$ 和 $0 \leq i \leq k$ 为任意元素。则：

(1) $w^{(i)}\psi = p_i w p_i^{-1}$，(2) ($uq_i w^{(i)} p_i)\psi =$($u\psi$)$zw$，(3) ($vw^{(i)} p_i)\psi =$($v\psi$)$p_i w$在RU($M_{S,\ T}$)中成立。

证明。(1) 如果字 w 为空，那么左边和右边都化为$1 = p_i p_i^{-1}$。否则，假设 $w = a_1 \dots a_m$。于是 $w^{(i)} = a_1^{(i)} \dots a_m^{(i)}$。因此，

$$w^{(i)}\psi = (p_i a_1 p_i^{-1}) \dots (p_i a_m p_i^{-1}),$$

由 [13, 推论 3.2] 可知，它在 RU($M_{S,T}$) 中等于 $p_i a_1 \dots a_m p_i^{-1} = p_i w p_i^{-1}$。

(2) 考虑到 (1) 和 [13,推论 3.2], ，我们有

$$(uq_i w^{(i)} p_i)\psi = (u\psi)(q_i w^{(i)} p_i)\psi = (u\psi) z p_i^{-1} p_i w p_i^{-1} p_i = (u\psi) z w,$$

因为 zp_i^{-1}、 $p_i w p_i^{-1}$ 和 p_i 是 $M_{S,T}$ 的右单位。

(3) 我们有

$$(vw^{(i)} p_i)\psi = (v\psi)(w^{(i)} p_i)\psi = (v\psi) p_i w p_i^{-1} p_i = (v\psi) p_i w,$$

最后一步成立的理由与（2）中的类似。 □

引理 5.13. 设 $\xi : S\Gamma(1) \to \Omega$ 是一个图态射，它将 $M_{S,T}$ 的 ***Sch ¨utzenberger*** 图 $S\Gamma(1)$ 的根映射到 Ω 的根；设 $0 \le i \le k$，并设 $w_0 \in \Sigma_0^*$ 和 $v \in A^*$ 是两个字，使得顶点 $(w_0 v^{(i)} p_i)\psi\xi$ （其中 $(w_0 v^{(i)} p_i)\psi \in \mathrm{RU}(M_{S,T})$ 与 $S\Gamma(1)$ 中相应的顶点视为同一顶点）属于 Ω 的某个 z-区域。如果 w_0 的最后一个字母不属于 $\{a^{(i)} : a \in A\}$，那么 w_0 非空，且其最后一个字母必为 q_i。

证明。 首先请注意，根据前一个引理的第（3）项，我们有

$$(w_0 v^{(i)} p_i)\psi = (w_0\psi) p_i v$$

这在 RU($M_{S,T}$) 中成立。因此，在 Ω 中，从标记为字 $p_i v$ 的顶点 $U = (w_0\psi)\xi$ 出发的游走会到达一个顶点 V，该顶点属于某个 z-区域 Ω_z。

为导出矛盾，先假设 w_0 为空。于是，在 Ω 中存在一条从其根到 V、标记为 $p_i v$ 的游走。但由此很容易推出，顶点 V 属于根顶点的 p_i-区，这与引理 5.9(iii)矛盾。因此， w_0 不可能是空词，我们接下来分析其末字母的各种可能情形。

情形 *1*： w_0 的末字母是 $a^{(t)}$，其中 $a \in A$ 和 $t \ne i$。这意味着 ($w_0\psi$)$p_i v =$$x \cdot p_t a p_t^{-1} \cdot p_i v$ 在 M_S中成立，T其中某个 $x \in$ 属于 RU($M_{S,T}$)，因此存在一条游走

$$U_1 \xrightarrow{p_t} U_2 \xrightarrow{a} U_3 \xleftarrow{p_t} U$$

在 Ω 中，其中 $U_1 =$($x\psi$)ξ。由 Ω 的构造可知，若 U 属于某个 p_j-区（其中某个 $0 \le j \le k$），或属于一个 z-区，或属于某个 p_j^{-1}-区（其中某个 $j \ne t$），又或者是 Ω 的根，那么 U_3 就是边 $U \xrightarrow{p_t} U_3$ 另一端的 p_t-区的根。否则， U 就是 U_3的p_t^{-1}-区中的唯一顶点。前一种情形不可能，因为那样一来， U_3 就是 A^* 的凯莱图某个副本的根顶点，因此它不可能有一条标记为 a的入边。在后一种情形中，从 U 出发、标记为 p_i 的边将我们带到一个 p_i-区，因为 $i \ne t$，而标记为字 v 的游走使我们始终处于同一个 p_i-区。因此， V 属于同一个 p_i-区，这与引理 5.9(iii)矛盾。

情形 *2*： w_0 的最后一个字母是 $b^{(z)}$，其中 $b \in B$。那么在 $M_{S,\ T}$ 我们有 ($w_0'\psi$)$p_i v =$ $x \cdot zbz^{-1} \cdot p_i v$，其中某个 $x \in$ RU($M_{S,\ T}$)，这意味着存在一条游走

$$U_1 \xrightarrow{z} U_2 \xrightarrow{b} U_3 \xleftarrow{z} U$$

在 Ω 中，其中 $U_1 =$ ($x\psi$)ξ。因此， U_2，U_3 位于同一个 z-区域（事实上，位于“阴影部分”——子图 Γ_T 的一个副本中，且有来自 U_1和 U的输入 z-边）。再次根据 Ω 的构造，这种设置意味着从 U伸出的 p_i-边的远端存在一个 p_i-区域

从该区域的根出发、标记为 v 的游走始终处于该区域内，这就迫使 V 也位于同一区域，与引理 5.9(iii) 矛盾。

情形 *3*：的最后一个字母 w_0 是 p_t，对某个 $0 \leq t \leq k$。在这种情形下，$(w_0'\psi)p_i v = x \cdot p_t \cdot p_i v$在 M_S 中成立，T 其中某个 $x \in \mathrm{RU}(M_{S,T})$。因此，$U$ 有一条标记为 p_t 的入边。现在，与前几种情形类似，只需简单检查 Ω 的定义，即可知顶点 V 位于某个 p_i-区域中。

情形 *4*：的最后一个字母 w_0 是 q_t，对某个 $t \neq i$。现在，我们有 $(w_0'\psi)p_i v = x \cdot z p_t^{-1} \cdot p_i v$ 在 M_S 中，T 其中某个 $x \in \mathrm{RU}(M_{S,T})$，从而存在如下游走

$$U_1 \xrightarrow{z} U_2 \xleftarrow{p_t} U$$

在 Ω 中，其中 $U_1 = (x\psi)\xi$。因此，U_2 属于一个 z-区域（并且再次属于其“阴影部分”），而 U 必须是 U_2 的 p_t^{-1}- 区域中的唯一顶点。再一次，由于 $i \neq t$，我们必须得出结论：标记为 $p_i v$ 的游走 $U \rightsquigarrow V$ 终止于一个 p_i-区域中，这就产生了矛盾。

因此，剩下的唯一可能是 w_0 的最后一个字母为 q_i，引理得证。□

现在我们可以陈述并证明已宣布结果的第一部分，该部分涉及所讨论各类之间的互不相交性。

引理 5.14. 对于任意 $0 \leq i \leq k$，$\mathcal{Z}$ 和 Π_i 互不相交。

证明。为导出矛盾，假设 Γ 中存在一个顶点，它同时属于类型-z 和类型-p_i，其中某个 $0 \leq i \leq k$。于是，对某些词 $w_1, w_2 \in A^*$ 和 $u, v \in \Sigma_0^*$，有 $uq_i w_1^{(i)} p_i = v w_2^{(i)} p_i$ 属于 Q，并且 v 要么为空，要么以一个既非 q_i 也非 $a^{(i)}$（$a \in A$）的字母结尾。然而，这意味着 $(uq_i w_1^{(i)} p_i)\psi = (v w_2^{(i)} p_i)\psi$ 在 $M_{S,T}$ 中成立；根据引理 5.12，它可写成如下形式：

$$(u\psi) z w_1 = (v\psi) p_i w_2.$$

应用前一个引理中的图态射 $\xi : S\Gamma(1) \to \Omega$ 后，我们得到 Ω 的两个顶点，即 $U_1 = (u\psi)\xi$ 和 $U_2 = (v\psi)\xi$，使得从 U_1, U_2出发、分别标记为 zw_1 和 $p_i w_2$的游走最终到达同一个顶点 V。由于游走 $U_1 \rightsquigarrow V$ 以一条 z-边开始，随后沿着标记为来自 A中字母的边前进，因此顶点 $V = (v w_2^{(i)} p_i)\psi\xi$必定属于 Ω 的某个 z-区域。但这样一来，前一个引理立即推出字 v 必须以字母 q_i 结尾。这与 v的假设形式矛盾。□

我们的下一个目标是证明 $\Pi_i \cap \Pi_j = \varnothing$ 当 $i \neq j$时成立。然而，首先我们将证明一个关于右消去幺半群 Q的凯莱图 Γ 的稍强结果，因为这一结果在我们后续论证的一个阶段也至关重要（具体而言，在第5.5小节中）。

引理5.15. 设 Γ 的两个顶点 $0 \leq i \neq j \leq k$, $v \in A^*$ 和 U_1, U_2 满足：从U_1, U_2 出发、分别由 $v^{(i)} p_i$ 和 $v^{(j)} p_j$ 标记的游走，终止于 Γ 的同一个顶点 V。那么，存在 Γ 的一个顶点 W 和一个字 $u \in A^*$，使得从 W 出发、由 $q_i u^{(i)}$ 标记的游走终止于U_1，而从 W 出发、由 $q_j u^{(j)}$ 标记的游走终止于 U_2。特别地，Γ 中任何具有由 p_i 和 p_j 标记的入边（其中 $i \neq j$）的顶点都属于 $\mathcal{Z}$。

证明. 根据引理的条件，存在词 $w', w'' \in \Sigma_0^*$，使得 $w' v^{(i)} p_i = w'' v^{(j)} p_j$ 在 Q 中成立；此外，Γ 中还有从其根顶点到 U_1, U_2 的游走，分别由 w', w'' 标记。

由引理5.12(3)，我们得到 $(w' v^{(i)} p_i)\psi = (w'\psi) p_i v$ 和 $(w'' v^{(j)} p_j)\psi = (w''\psi) p_j v$，因此

$$(w'\psi) p_i v = (w''\psi) p_j v$$

在 $M_{S,\,T}$ 中成立。因此，在 $M_{S,\,T}$ 的 Sch¨utzenberger 图 $S\Gamma(1)$ 中，从顶点 $w'\psi$ 和 $w''\psi$ 出发、分别标记为 $p_i v$ 和 $p_j v$ 的游走会到达同一个顶点。但是，根据命题 5.10，如果 $U' = (w'\psi)\xi$ 和 $U'' = (w''\psi)\xi$（其中 $\xi : S\Gamma(1) \to \Omega$

是引理 5.13 中的图态射），则 Ω 中从 U'，U'' 出发、分别标记为 p_iv 和 p_jv 的游走会到达同一个顶点 V_1。然而，Ω 是双确定的，因此我们可以得出，Ω 中存在一个顶点 V_0'，其边

$$U' \xrightarrow{p_i} V_0' \xleftarrow{p_j} U''$$

以及由字 v 标记的游走 $V_0' \rightsquigarrow V_1$。特别地，根据引理 5.9(iv)，顶点 V_0' 属于某个 z-区域 Ω_z，且所考虑游走 $V_0' \rightsquigarrow V_1$ 上的所有顶点都属于同一个 z-区域。

令 $u^{(i)}$ 现在是 w' 的最长后缀，且完全由来自 $\{a$的字母组成 $(i) : a \in A\}$，因此以便我们可以写成

$$w' = w_0' u^{(i)}.$$

这里，$w_0' \in \Sigma_0^*$ 要么为空，要么其最后一个字母不具有 $a^{(i)}$ $(a \in A)$ 的形式。与上文类似，我们有

$$(w'v^{(i)}p_i)\psi = (w_0'u^{(i)}v^{(i)}p_i)\psi = (w_0'\psi)p_iuv.$$

这意味着在 Ω 中，我们有一条游走 $V_0 = ((w_0'\psi)p_i)\xi \rightsquigarrow V_0'$，其标记为字 $u \in A^*$；然而，只有当后一条游走也属于与 $V_0' \rightsquigarrow V_1$ 相同的 z 区域时，这才可能。综合起来，得到一条游走 $V_0 \rightsquigarrow V_1$，其标记为 uv，且属于单个 z 区域。特别地，顶点

$$V_1 = (w_0'u^{(i)}v^{(i)}p_i)\psi\xi,$$

属于 Ω 的一个 z 区域。于是，根据前一个引理，字 w_0' 非空，且其最后一个字母是 q_i。

因此，我们得出结论：

$$w'v^{(i)}p_i = w_0q_iu^{(i)}v^{(i)}p_i = w_0q_ju^{(j)}v^{(j)}p_j$$

对某个 $w_0 \in \Sigma_0^*$，Q 成立。由于 $w'v^{(i)}p_i = w''v^{(j)}p_j$ 在 Q 中成立，且 Q 是右消去的，我们必有 $w'' = w_0q_ju^{(j)}$ 在 Q 中成立。令 Γ 的 W 为 Γ 中一条游走的终止顶点，该游走从其根顶点出发，标记为 w_0，则引理得证。最后一个陈述只是 v 为空词时的特殊情形。□

引理 5.16. 对于任意 $0 \le i \ne j \le k$、Π_i 和 Π_j，它们两两不相交。

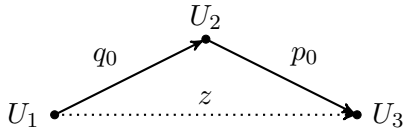
证明。假设 $V \in \Pi_i \cap \Pi_j$。那么 V 有两条入边，分别标记为 p_i 和 p_j，因此由前面的结果可知 $V \in \mathcal{Z}$。然而，这与引理 5.14 矛盾。□

推论 5.17。(1) Γ 中的顶点 W 属于 $\mathcal{Z}$，当且仅当对于所有 $0 \le i \le k$，它都有一条标记为 p_i 的入边。

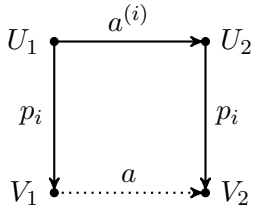
(2) Γ 中的顶点 W 对某个 $0 \le i \le k$ 属于 Π_i，当且仅当它有一条标记为 p_i 的入边，但对于任意 $0 \le j \le k$、$j \ne i$，都没有标记为 p_j 的入边。

那么现在，我们来看看如何变换图 Γ。

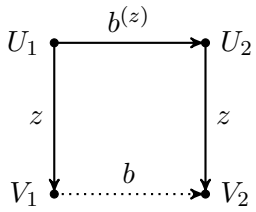
- 对于任意三个 U_1、U_2、$U_3 \in Q$，若存在一条标记为 q_0 的边 $U_1 \to U_2$ 和一条标记为 p_0 的边 $U_2 \to U_3$（在 w 为空词的情况下，对 Q 的表示应用第一条关系，因为任意 $1 \le i \le k$ 都存在从 U_1 到 U_3、标记为 q_ip_i 的游走），则添加一条标记为 z 的边 $U_1 \to U_3$。添加这些 z-边后，请注意，每个顶点都将有一条唯一的 z-边从它出发，因为从 Γ 中的每个顶点出发，都存在一条标记为 q_0p_0 的唯一路径。



- 对于任意 $U_1, U_2 \in Q$，若存在一条标记为 $a_{(i)}$（其中 $a \in A$,$0 \le i \le k$ 取某些值）的边 $U_1 \to U_2$，则添加一条标记为 a 的边 $V_1 \to V_2$，其中 V_1, V_2 分别是从 U_1, U_2 出发、标记为 p_i 的唯一边的端点。

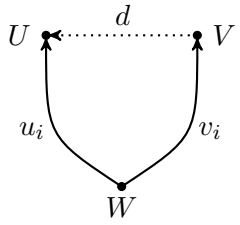


• 对于任意 $U_1, U_2 \in Q$，若存在一条标记为 $b_{(z)}$（其中 $b \in B$ 取某个值）的边 $U_1 \to U_2$，则添加一条标记为 b 的边 $V_1 \to V_2$，其中 V_1, V_2 分别是从 U_1, U_2 出发、标记为 z 的唯一边的端点。



• 完成前面的步骤后，移除所有标记为任意字母q_i $(0 \leq i \leq k)$、 $a_{(i)}$ $(a \in A, 0 \leq i \leq k)$、 $b_{(z)}$ $(b \in B)$ 的边。这样得到的图的边均标记为 $\Sigma \setminus \{d\}$。

• 通过添加某些标记为 d 的边来完成修改。首先，在任意顶点 $U \in \mathcal{Z} \cup \Pi_0$ 处添加一个标记为 d 的环。此外，对于任意满足以下条件的 $U, V, W \in \Pi_i (1 \leq i \leq k)$：存在一条从 W 到 U、标记为 u_i 的游走，以及一条从 W 到 V、标记为 v_i 的游走；其中 $u_i = v_i$ 是 S 的定义关系，且标记为 i，添加一条 d-边 $V \to U$。



这一过程的结果是图 Γ'。

5.3. **核心思想**。 以下是我们证明计划的要点。假设我们能够证明图 Γ' 具有以下两个性质：

(i) 对于表示 $M_{S,T}$ 中作为关系词出现的任意字 $r \in \Sigma^*$，以及任意 $U \in Q = V(\Gamma')$，都存在一条以 U 为起点、由 r 标记的闭游走；(ii) Γ' 是双确定的。

我们声称，这两个性质意味着命题 5.8 中的同态 $\psi\colon Q \to \mathrm{RU}(M_{S,T})$ 必须是单射。在本小节余下部分，我们将说明事实确实如此。

首先，[15, 引理 3.3] 意味着，对于任意 $W \in Q$，都存在一个 Σ-标记图态射$S\Gamma(1) \to \Gamma'$（其中 $S\Gamma(1)$ 是相对于 $M_{S,T}$ 而取的），它将 $S\Gamma(1)$ 的根顶点映到 W。特别地，令 ϕ 为这样一个态射，它将 $S\Gamma(1)$ 的根映到 Γ' 中代表 Q 的单位元的顶点。

因此，现在假设对某些 $U, V \in Q$，有 $U\psi = V\psi = X \in \mathrm{RU}(M_{S,T})$。于是存在词 $u, v \in \Sigma_0^*$，使得在凯莱图 Γ 中，存在从表示 1 的顶点到 U 和 V 的游走，其标签分别为 u 和 v。但在 $S\Gamma(1)$ 中，存在两条（相同或不同的）从根到 X 的游走，其标签分别为词 $u\psi, v\psi \in \Sigma^*$，其中 $\psi\colon \Sigma_0^* \to \Sigma^*$ 是由同一个代换（5.1）诱导的自由幺半群态射，而该代换定义了 ψ。因此，在 Γ' 中，存在从 1 到 $Y = X\phi$ 的游走，其标签分别为 $u\psi$ 和 $v\psi$。考虑到映射 ψ 的形式、图 Γ' 的构造及其双确定性，可知在 Γ'

存在从 1 到 Y 的游走，其标签为 u 和 v。由于假设 Γ' 是双确定的，因此可得 $U = Y = V$，这表明 ψ 是单射。

因此，要证明定理 5.6，只需验证图 Γ' 确实具有性质 (i) 和 (ii)。

5.4. 性质 (i) 的证明。在整个证明过程中，设 U 是 Γ'的任意顶点。我们分析 $M_{S,T}$的五类关系词。

(1) $r = p_i a p_i^{-1} p_i a^{-1} p_i^{-1} (0 \le i \le k)$ 显然，Γ中存在唯一一条形如 $U \to V$、标记为 $a^{(i)}$ 的边。若 U', V' 分别是 Γ 中从 U, V 出发、标记为 p_i的边的端点，那么根据构造，Γ' 包含一条标记为 a的边 $U' \to V'$。但是

$$U \xrightarrow{p_i} U' \xrightarrow{a} V' \xleftarrow{p_i} V \xrightarrow{p_i} V' \xleftarrow{a} U' \xleftarrow{p_i} U$$

这是 Γ' 中一条以 U 为起点、标记为 r的闭游走。

(2) $r = p_i u_i d^{-1} v_i^{-1} p_i^{-1} (1 \le i \le k)$

首先，在 Γ 中，分别存在由 $u_i^{(i)}$ 和 $v_i^{(i)}$ 标记的唯一游走 $U \to U_1 \to \cdots \to U_q$ 和 $U \to V_1 \to \cdots \to V_s$。设 W、$U_1', \ldots, U_q'$、$V_1', \ldots, V_s'$是 Γ 中由 p_i 标记、且分别从 U、$U_1, \ldots, U_q$、$V_1, \ldots, V_s$出发的边的端点。那么，W 有一条由 p_i标记的入边。由引理 5.11 可知，$W \in \mathcal{Z} \cup \Pi_i$。此外，根据 Γ'的构造，存在游走 $W \to U_1' \to \cdots \to U_q'$和 $W \to V_1' \to \cdots \to V_s'$（在 Γ'中），分别由 u_i 和 v_i标记。

(a) 首先假设 $W \in \mathcal{Z}$。那么，根据定义，Γ 中存在一条游走，其终点为 W，且由形如 $q_i w^{(i)} p_i$ 的字标记，其中$w \in A^*$是某个字。由于 Γ 是右消去幺半群的凯莱图，且 Γ 中存在一条从 U 到 W、由 p_i标记的边，因此 Γ 中存在一条游走，其终点为 U，并由 $q_i w^{(i)}$标记。于是，立即可知，对每个$1 \le j \le q$，Γ 中都有一条游走，其终点为 U_j，由 $q_i(wy_j)^{(i)}$ 标记，其中y_j 是 u_i 的长度为 j的前缀。由此可得，Γ 中存在一条由 $q_i(wy_j)^{(i)} p_i$标记、终点为 U_j'的游走，这表明 $U_j' \in \mathcal{Z}$。类似地，我们证明所有顶点 V_1'、.....、V_s'也都是z型。由于 $wu_i = wv_i$在 S中成立，我们有$q_i(wu_i)^{(i)} = q_i(wv_i)^{(i)}$ 在 Q中成立，因此可得 $U_q = V_s$和 $U_q' = V_s'$，而后一个顶点有一个 d-环。

(b) 现在令 $W \in \Pi_i$。那么，在 Γ 中存在一条游走，从顶点 W_0 到 W，其标签为某个形如 $w^{(i)} p_i$ 的字，其中存在某个字 $w \in A^*$，使得 W_0 可以通过一个字 v 从 Γ 的根到达，而 v 要么为空，要么不以 q_i 或 $a^{(i)}$ 中的任何一个结尾（$a \in A$）。于是，运用与 (a) 中类似的论证，存在一条从 W_0 到 U 的游走，其标签为 $w^{(i)}$，从而存在一条从 W_0 到 U_j、$1 \le j \le q$ 的游走，其标签为 $(wy_j)^{(i)}$（其中 y_j 的含义与 (a) 中相同）。这表明$U_1', \ldots, U_q' \in \Pi_i$，同样地，$V_1', \ldots, V_s' \in \Pi_i$。根据 Γ'的构造，存在一条标记为 d 的边 $V_s' \to U_q'$。

在这两种情况下，我们都在 Γ' 中完成了一条以 U 为基点、标记为关系词 r的闭游走。

(3) $r = p_0 d p_0^{-1}$

令 $U \to V$为从 U 出发、标记为 p_0的唯一一条边。由引理 5.11 可得$V \in \mathcal{Z} \cup \Pi_0$，因此根据 Γ' 的构造，存在一条以 V为基点、标记为 d的环，所以

$$U \xrightarrow{p_0} V \xrightarrow{d} V \xleftarrow{p_0} U$$

这就是我们在此要找的闭游走。

(4) $r = zbz^{-1}zb^{-1}z^{-1}$ $(b \in B)$

考虑 Γ 中唯一一条形式为 $U \to V$、标记为 $b^{(z)}$ 的边，并设 Γ 中标记为 $q_0 p_0$ 的游走为 $U \to U' \to U''$和 $V \to V' \to V''$。那么 Γ' 将包含边

$U \to U''$ 和 $V \to V''$，标记为 z，此外还有一条标记为 b 的边 $U'' \to V''$。因此，

$$U \xrightarrow{z} U'' \xrightarrow{b} V'' \xleftarrow{z} V \xrightarrow{z} V'' \xleftarrow{b} U'' \xleftarrow{z} U$$

构成了 Γ' 中由 r 标记的所需闭游走。

(5) $r = z\left(\prod_{i=0}^{k} p_i^{-1} p_i\right) z^{-1}$设 $U \to U' \to U''$ 是 Γ 中由 $q_0 p_0$ 标记的游走。那么，在 Γ' 中存在一条由 z 标记的边 $U \to U''$。然而，由于对所有 $1 \le i \le k$， $q_0 p_0 = q_i p_i$ 在 Q 中成立，因此对所有 $0 \le i \le k$，顶点 U'' 都有一条由 p_i 标记的入边。因此，从 U 出发，经由所考虑的由 z 标记的边到达 U''，再沿着上述入边来回 traversing，最后返回 U，便构成了 Γ' 中由 r 标记的闭游走。

5.5. 性质（ii）的证明。首先注意， Γ' 关于字母 p_i、 $0 \le i \le k$ 是双确定的：每个顶点至多有一条由这些字母中的每个字母标记的出边，也至多有一条入边，因为 Γ 具有这一性质，而且我们没有添加或删除任何带有此类标签的边。

证明 Γ' 相对于 z 是双确定的，论证很直接。事实上，假设存在两条 z边 $U \to V_1$ 和 $U \to V_2$。那么存在两个顶点 V_1' 和 V_2'，使得在 Γ 中有 q_0边 $U \to V_1'$ 和 $U \to V_2'$，以及 p_0 边 $V_1' \to V_1$ 和 $V_2' \to V_2$。Γ 的双确定性首先意味着 $V_1' = V_2'$，进而意味着 $V_1 = V_2$。类似地，不可能存在两条 z边 $U_1 \to V$ 和 $U_2 \to V$。

关于字母 d，注意，由于 Γ' 的构造以及引理 5.14 和 5.16， Γ' 关于该字母不具双确定性有两种可能。一种可能是，对于某些顶点 U、V_1、$V_2 \in V$，存在不同的 d-边 $V_1 \to U$ 和 $V_2 \to U$ （Γ） $= V$（Γ'）。于是我们得出，对于某个 $1 \le i \le k$， U、V_1、$V_2 \in \Pi_i$，并且存在 W_1、 $W_2 \in \Pi_i$，使得在 Γ' 中存在从 W_1、 W_2 到 U 的游走，且这些游走都标记为 u_i。由 Γ' 中标记为 p_i 的边具有双确定性，以及 Γ' 的定义可知，在 Γ 中存在标记为 $p_i^{-1} v_i^{(i)} p_i$ 的游走，分别从 W_1 到 V_1 以及从 W_2 到 V_2。类似地，在 Γ 中存在标记为 $p_i^{-1} u_i^{(i)} p_i$ 的游走，分别从 W_1 和 W_2 到 U。由于 Γ 是双确定的，假设 V_1、V_2 不同，就意味着 W_1、W_2 也必定不同。设 W_1'、W_2' 和 U' 是 V（Γ） $= V$（Γ'）中唯一满足 $W_1' \xrightarrow{p_i} W_1$、 $W_2' \xrightarrow{p_i} W_2$ 和 $U' \xrightarrow{p_i} U$ 的顶点。由于 W_1、W_2 不同， W_1'、W_2' 也不同。于是，在 Γ 中存在从 W_1'、W_2' 到 U' 的游走，且这些游走都标记为 $u_i^{(i)}$。然而，这与 Γ 的双确定性相矛盾。另一种可能是，

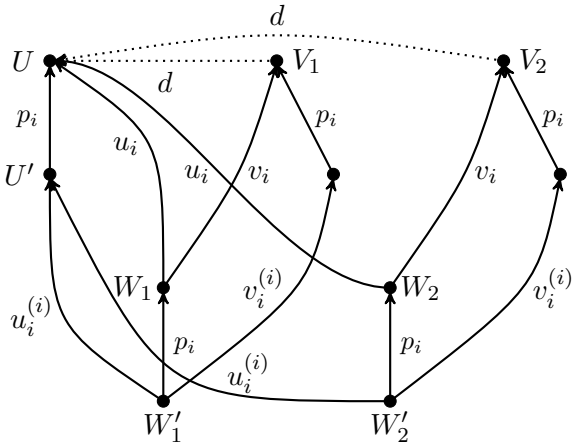


FIGURE 3. Γ' 相对于d边的双确定性证明示意图

对于某些顶点 U_1，U_2，$V \in V$，存在 d-边 $V \to U_1$ 和 $V \to U_2$（Γ）$= V$（Γ'），这种情况可用类似的方法处理。此论证的示意图见图3。

因此，Γ' 的双确定性仅剩的挑战来自标记为字母 $a \in A$的边。考虑到这些边在 Γ'中的产生方式，我们分为六种情形。

(1) 在 Γ'中有两条 a-边 $U \to V_1$ 和 $U \to V_2$，它们源自顶点 U_1、U_2、V_1'、V_2'以及边 $U_1 \to U$、$V_1' \to V_1$的存在；这些边分别标记为 p_i、标记为 $U_1 \to V_1'$的 $a^{(i)}$、$U_2 \to U$、$V_2' \to V_2$标记为p_j、标记为 $U_2 \to V_2'$的 $a^{(j)}$。显然，若 $i = j$，则由 Γ 的双确定性可迅速推出 $U_1 = U_2$，进而得到 $V_1' = V_2'$，因此 $V_1 = V_2$；所以我们可以假设 $i \neq j$。现在，将引理5.15应用于游走 $U_1 \xrightarrow{p_i} U$ 和 $U_2 \xrightarrow{p_j} U$，可保证存在一个顶点 W，使得存在从 W 到 U_1、U_2 的游走，它们分别标记为 $q_i w^{(i)}$ 和 $q_j w^{(j)}$，其中 $w \in A^*$。但随后在 Γ 中存在从 W 到 V_1、V_2 的游走，它们分别标记为 $q_i w^{(i)} a^{(i)} p_i$ 和 $q_j w^{(j)} a^{(j)} p_j$。然而，由于后两个词在 Q 中表示同一元素，我们得出 $V_1 = V_2$。

(2) 在 Γ' 中有两条 a-边 $U_1 \to V$ 和 $U_2 \to V$，它们的存在源于顶点 U_1'、U_2'、V_1、V_2 以及边 $U_1' \to U_1$、$V_1 \to V$，这些边分别标记为 p_i、$U_1' \to V_1$、$a^{(i)}$、$U_2' \to U_2$、$V_2 \to V$、p_j、$U_2' \to V_2$ 和 $a^{(j)}$。同样，情形 $i = j$显然成立，因此设 $i \neq j$。将引理5.15应用于这对游走

$$U_1' \xrightarrow{a^{(i)}} V_1 \xrightarrow{p_i} V \quad \text{and} \quad U_2' \xrightarrow{a^{(j)}} V_2 \xrightarrow{p_j} V,$$

这意味着存在一个顶点 W，以及分别指向 U_1' 和 U_2'、标记为 $q_i w^{(i)}$ 和 $q_j w^{(j)}$ 的 Γ-游走。然而，从 W 到 U_1，U_2 有分别标记为 $q_i w^{(i)} p_i$ 和 $q_j w^{(j)} p_j$ 的游走。由于在 Q 中这两个词等价，我们得出结论 $U_1 = U_2$。

(3) $a = b \in B$ 并且在 Γ' 中存在 $U \to V_1$ 和 $U \to V_2$ 这两条 b-边，因为存在顶点U_1、U_2、V_1'，以及 z-边 $U_1 \to U$、$V_1' \to V_1$、$U_2 \to U$、$V_2' \to V_2$ 和 $b^{(z)}$-边 $U_1 \to V_1'$、$U_2 \to V_2'$。首先，这立即推出 $U_1 = U_2$（因为已证明 Γ' 关于 z 具有双确定性），进而迫使 $V_1' = V_2'$（因为 Γ 关于字母 $b^{(z)}$ 具有双确定性），最后得到 $V_1 = V_2$（同样因为 Γ' 关于 z具有双确定性）。

(4) $a = b \in B$ 并且在 Γ' 中存在 $U_1 \to V$ 和 $U_2 \to V$ 这两条 b-边，因为存在顶点U_1'、U_2'、V_1、V_2，以及 z-边 $U_1' \to U_1$、$V_1 \to V$、$U_2' \to U_2$、$V_2 \to V$ 和 $b^{(z)}$-边 $U_1' \to V_1$、$U_2' \to V_2$。这与前一个子情形类似。

(5) $a = b \in B$，且在 Γ' 中存在 b-边 $U \to V_1$ 和 $U \to V_2$，因为存在顶点U_1、U_2，以及 V_1'、V_2'、z-边 $U_1 \to U$、$V_1' \to V_1$、p_i-边 $U_2 \to U$、$V_2' \to V_2$，一条 $b^{(z)}$-边$U_1 \to V_1'$ 和一条 $b^{(i)}$-边 $U_2 \to V_2'$。设 U_1' 为 Γ 中从 U_1出发、标记为 q_i 的边的端点。由于 $q_i p_i = q_0 p_0$ 在 Q 中成立，且由边 $U \xrightarrow{z} U_1$以及此前已证明的关于 z 的确定性可知，从 U_1' 出发的（唯一）p_i-边的端点是 U。然而，由于此前已证明 Γ' 关于字母 p_i 具有双确定性，我们得出 $U_1' = U_2$。因此，Γ 中的游走$U_1 \to U_2 \to V_2'$ 标记为 $q_i b^{(i)}$。另一方面，设 V_1'' 为 Γ 中从 V_1' 出发、标记为 q_i 的唯一边的端点。通过与刚才所述完全类似的论证，从 V_1'' 出发的（唯一）p_i-边的端点是 V_1。此外，Γ 中的游走 $U_1 \to V_1' \to V_1''$ 标记为 $b^{(z)} q_i$。由于 $q_i b_i = b^{(z)} q_i$ 在 Q 中成立，我们必有 $V_1'' = V_2'$。但这样一来，V_2' 就有标记为 p_i 的边分别通向 V_2 和 V_1；根据 Γ' 关于字母 p_i 的双确定性，这意味着 $V_1 = V_2$。

(6) $a = b \in B$ 并且存在 b-边 $U_1 \to V$和 $U_2 \to V$于 Γ' 中，因为存在顶点U_1'、U_2'、V_1、V_2、z-边 $U_1' \to U_1$、$V_1 \to V_1$、p_i-边 $U_2' \to U_2$、$V_2 \to V$、一条 $b^{(z)}$-边$U_1' \to V_1$以及一条 $b^{(i)}$-边 $U_2' \to V_2$。这与前一种情况类似。

此时我们可以得出结论：同态 $\psi : Q \to \mathrm{RU}(M_{S,T})$ 是单射，因而是同构，这意味着（如第 5.3 小节所述）定理 5.6 的第一部分成立。

5.6. **将 T 嵌入右单位中。**

引理 5.18. 元素 $b^{(z)}\psi = zbz^{-1}$, $b \in B$ 生成 $\mathrm{RU}(M_{S,T})$ 的一个与 T 同构的子幺半群。

证明。注意，对于任意 $u, v \in B^*$，我们有 $zuz^{-1}zvz^{-1} = zuvz^{-1}$ 在 $M_{S,T}$ 中成立。这意味着 $w \mapsto zwz^{-1}$ 是从 B^* 到 $\mathrm{RU}(M_{S,T})$ 的幺半群同态。现在，我们需要证明的命题如下：

$$\text{we have } zuz^{-1} = zvz^{-1} \text{ in } M_{S,T} \text{ if and only if } u = v \text{ in } T \tag{5.2}$$

对所有 $u, v \in B^*$。

($\Rightarrow$) 从 Ω 的根顶点出发，标记为 z 的边将我们带入一个 z-区域，该区域是 S 的凯莱图 Γ_S 的一个副本。更准确地说，我们现在位于这个 Γ_S 副本的根顶点 U_0。分别读取词 u 和 v 时，我们始终留在 Γ_T 内；它是相对于 B 的 T 的凯莱图，在此处表现为 Γ_S 的一个子图。如果这导致 Γ_T 中出现两个不同的顶点 $U_1 \neq U_2$，那么，逆向沿着分别以 z 标记、进入 U_1 和 U_2 的入边行进，我们将从 Ω 的根顶点分别读取 zuz^{-1} 和 zvz^{-1}，到达 Ω 中两个不同的顶点，记作 V_1 和 V_2。然而，由于根据命题 5.10，存在一个从 $S\Gamma(1)$ 到 Ω 的标记图态射，它将前者的根顶点映射到后者的根顶点，这就意味着 $zuz^{-1} \neq zvz^{-1}$（因为二者都是右单位），与我们的假设矛盾。因此我们必有 $U_1 = U_2$。但这意味着，在 Γ_T 内从其根顶点出发，标记为词 u 和 v 的游走的端点相同；也就是说，$u = v$ 在 T 中成立。

($\Leftarrow$) 假设 $u, v \in B^*$ 满足 $u = v$ 在 T 中成立。然后，注意到 [13,Corollary 3.2], $zu = zuz^{-1} \cdot z$ 和 $zv = zvz^{-1} \cdot z$ 是 $M_{S,T}$ 的右单位。再次应用 [13,Corollary 3.2] 以及引理 5.12(i)，可得

$$zu = zp_0^{-1} \cdot p_0 u p_0^{-1} \cdot p_0 = q_0\psi \cdot u^{(0)}\psi \cdot p_0\psi = (q_0 u^{(0)} p_0)\psi$$

在 $\mathrm{RU}(M_{S,T})$ 中成立。类似地，$zv = (q_0 v^{(0)} p_0)\psi$。然而，根据给定条件，$q_0 u^{(0)} = q_0 v^{(0)}$ 是 Q 的表示中的一个定义关系。因此，$zu = zv$ 在 $M_{S,T}$ 中成立，故 $zuz^{-1} = zvz^{-1}$。□

此引理完成了定理 5.6 的证明。

5.7. **定理 5.1 的证明。**

引理 5.19。 一个元素是 $M_{S,T}$ 的单位，当且仅当它由一个字 zuz^{-1} 表示，其中 $u \in B^*$ 表示 T 的一个单位。

证明。($\Leftarrow$) 假设字 $u \in B^*$ 表示 T 中的一个单位。因此，存在一个字 $v \in B^*$，使得 $uv = vu = 1$ 在 T 中成立。但由 [13, 推论 3.2] 以及 (5.2) 中的逆向蕴含可知，

$$(zuz^{-1})(zvz^{-1}) = zuvz^{-1} = zz^{-1} = 1$$

在其中成立 $M_{S,\ T}$，以及 $(zvz^{-1})(zuz^{-1}) = 1$，这表明 zuz^{-1} 表示 $M_{S,\ T}$ 中的一个单位。

($\Rightarrow$) 根据 [17, 定理 1.3] 和 [21, 命题 4.2]，，对于每个特殊逆幺半群（因此尤其对于 $M_{S,\ T}$），都存在其关系词的一个因式分解，使得这些因子在所讨论的逆幺半群中表示单位，并生成其整个单位群。因此，为了实现我们的目标，只需证明：如果一个关系词可以写成 $v_1 w v_2$，其中 v_1，w，v_2 表示 $M_{S,\ T}$ 的单位，那么对于某个表示 T 的单位的词 $u \in B^*$，$w = zuz^{-1}$ 在 $M_{S,\ T}$ 中成立。

为了分析这类因式分解的可能性，正如在 [15, 定理 4.1], 中一样，我们考虑由 p_0，.. .， p_k， z 生成、满足以下关系的特殊逆幺半群 N

$$p_i p_i^{-1} = 1 \ (0 \le i \le k), \quad zz^{-1} = 1, \quad z\left(\prod_{i=0}^{k} p_i^{-1} p_i\right) z^{-1} = 1.$$

在 [15, 定理 4.1]的证明中已经表明， N 的单位群是平凡的，并且它的任何生成元都不表示 N 的一个单位。此外，显然可以看出（将d 以及 A 的所有生成元都认作 1），存在一个从$M_{S,T}$ 到 N上的自然同态。由于$M_{S,T}$ 的单位显然必须映射为 N的单位，因此可知，在这样的同态下，$M_{S,T}$ 的所有单位都映射为 1。

因此，只需证明：对于$M_{S,T}$ 的一个关系词的任意因式分解 $v_1 w v_2$ （其中v_1, v_2可以为空），若 v_1, w, v_2都映射为 N的单位元，则 w 所表示的元素要么不是$M_{S,T}$的单位，要么对于某个表示 T中一个单位的 $u \in B^*$， $w = zuz^{-1}$ 成立。直接检查$M_{S,T}$ 的定义关系可知，唯一符合条件的此类因式分解是（$p_i a p_i^{-1}$）（$p_i a^{-1} p_i^{-1}$）$= 1$ 和（zbz^{-1}）（$zb^{-1}z^{-1}$）$= 1$，分别源自$M_{S,T}$的第一类和倒数第二类关系。

我们断言，$p_i a p_i^{-1}$不能表示$M_{S,T}$中的单位。注意，在图 Ω 中，无法将字ap_i^{-1}读入 Ω 的根顶点，因为任意 p_i-区域的根顶点都没有标记为来自 A 的任何字母的入边。由于 Ω 是 $S\Gamma(1)$ 的态射像，后一个图中也同样如此。因此，由 ap_i^{-1}表示的元素不可能是左可逆的，从而阻止了 $p_i a p_i^{-1}$成为$M_{S,T}$中的单位。

另一方面，假设对于某个 $b \in B$， zbz^{-1} 表示$M_{S,T}$ 中的一个单位。那么，特别地，zbz^{-1} 表示一个左可逆元素，这意味着在 $S\Gamma(1)$中存在一条由该字标记、终止于其根的游走。然而，由于态射 $S\Gamma(1) \to \Omega$ 将前一个图的根映射到后一个图的根（其存在性由命题 5.10 保证），Ω 中存在一条游走 $U_3 \xrightarrow{z} U_2 \xrightarrow{b} U_1 \xleftarrow{z} U_0$，其中 U_0 是 Ω 的根。由于U_2 具有一条标记为 z 的入边，它属于 z-区域，该区域的根顶点是 U_1；事实上，它属于该 z-区域内 T 的凯莱图 Γ_T 的副本。因此，在这个副本 Γ_T 中存在一条由字 $x \in B^*$ 标记的游走 $U_1 \rightsquigarrow U_2$，记作 $x \in B^*$。这条游走与边 $U_2 \xrightarrow{b} U_1$ 一起，在 Γ_T 中构成一条从 U_1 开始、标记为 xb 的闭游走。因此，$xb = 1$ 在 T中成立。由（5.2）的逆向蕴含，我们得到

$$(zxz^{-1})(zbz^{-1}) = zxbz^{-1} = zz^{-1} = 1$$

在 $M_{S,T}$ 中成立。将前一个等式右乘 $zb^{-1}z^{-1}$ 后，我们得到 $zb^{-1}z^{-1} = zxz^{-1}$ 在 $M_{S,T}$ 中成立。因此，我们推得

$$z \cdot 1 \cdot z^{-1} = 1 = (zbz^{-1})(zb^{-1}z^{-1}) = (zbz^{-1})(zxz^{-1}) = zbxz^{-1},$$

根据 (5.2) 的直接蕴含，这意味着 $bx = 1$ 在 T 中成立。因此， b 必须是 T 的一个可逆元素。

由于 $zb^{-1}z^{-1}$ 是 $M_{S,T}$ 的单位，当且仅当 zbz^{-1} 表示一个单位，因此假设 $zb^{-1}z^{-1}$ 在 $M_{S,T}$ 中可逆，也意味着 b 在 T 中可逆。因此，存在一个字 $b_1 \dots b_r \in B^*$，它表示 b 在 T 中的逆元，也就是说， $b \cdot b_1 \dots b_r = b_1 \dots b_r \cdot b = 1$ 在 T 中成立。根据 [11, 命题 4.2(i)]，，右消去幺半群中单位群的补集总是一个理想，因此所有 $b_1, \dots, b_r$ 都必须表示 T 的单位。我们已经证明，此时所有 $zb_1z^{-1}, \dots, zb_rz^{-1}$ 都必须表示 $M_{S,T}$ 的单位。(5.2) 的逆向蕴含和 [13, 推论 3.2] 得出

$$(zbz^{-1})(zb_1 \dots b_r z^{-1}) = (zb_1 \dots b_r z^{-1})(zbz^{-1}) = zz^{-1} = 1.$$

由此可迅速得出 $zb^{-1}z^{-1} = zb_1 \dots b_r z^{-1} = (zb_1z^{-1}) \dots (zb_rz^{-1})$.

我们已经看到，这意味着所有 b_s 都在 T 中可逆。因此，

$$\{zbz^{-1} : \ b \text{ is invertible in } T\}$$

是 $M_{S,\ T}$ 的单位群的幺半群生成集。由此，引理的直接推论便显而易见。□

定理 *5.1* 的证明。 设 S 是一个有限 RC 表示幺半群，且 T 是 S的有限生成子幺半群。选取一个满足定义 5.4 中假设的 S 表示后，令 $M = M_{S,\ T}$。若 N 是由 zbz^{-1}、 $b \in B$所表示的元素生成的 M 的子幺半群，那么根据引理 5.18，我们有 $T \cong N$。结合引理 5.18 和 5.19 可得，N 包含 M的单位群。定理得证。□

6. The question of finite RC-presentability

6.1. 来自类 $\mathcal{RU}$ 的幺半群的（非）有限可呈性。 观察定理 5.6 以及 M_S的右单位幺半群的 RC-表示，T后，自然会想到以下一般性问题。

问题 6.1： 对于由有限 RC-表示的右消去幺半群 S 及其有限生成子幺半群 T 组成的哪些对（S，T），RU($M_{S,\ T}$) 不是有限 RC-表示的?

鉴于这种 RC-表示的形式，可以合理地猜想，它无法等价于任何有限 RC-表示的情况应当相当常见。在本小节中，我们展示这样一个例子；此外，该例还具有平凡单位群。

定理 6.2。 存在一个有限呈示的特殊逆幺半群，其右单位子幺半群不是有限 *RC*-表示的。

证明。 令 $S = \{a\}^*$ 和 $B = \varnothing$，使得 T 是 S 的平凡子幺半群。我们希望有 $k = 1$；为此，只需用一个平凡关系来定义自由幺半群 S，例如 $a = a_0$。于是，$M_{S,\ T}$ 的生成元为 a，p_0，p_1，z，d（尽管很容易看出，d 在这里不会发挥重要作用，因为 $S\Gamma(1)$ 中所有的 d- 边都是环，而且大多数顶点都有这样的环 —— 事实上，除了根以及 p_i-区域的根之外，所有顶点都有这样的环）。于是，根据我们的定理 5.6，

$$\mathrm{RU}(M_{S,T}) = \mathrm{MonRC}\langle a_0, a_1, p_0, p_1, q_0, q_1 \mid q_0 a_0^m p_0 = q_1 a_1^m p_1 \ (m \geq 0)\rangle,$$

其中 a_0 表示 $p_0 a p_0^{-1}$， a_1 表示 $p_1 a p_1^{-1}$，而 q_0，q_1 分别是 zp_0^{-1}和 zp_1^{-1}。（由此不难推出，$M_{S,\ T}$的单位群是平凡群；既可由 [39, 推论 2.15] 得出，也可由我们的引理 5.19 得出。）我们断言，上述 RC-表示不等价于任何有限 RC-表示。

要看出这一点，请注意，由关系 $q_0 a_0^m p_0 = q_1 a_1^m p_1$ 产生的重写规则必然互不重叠。对于字母表 $\{a_0, a_1, p_0, p_1, q_0, q_1\}$上的任意字 w，使用这些规则时，我们所能做的只有取出一个由形如$qa^m p$ 的字所确定的子词（这里的含义与引理5.15证明中的遗忘指标映射 ξ 相同），并将该子词中所有字母的指标从 0 改为 1，或从 1 改为 0。（事实上，这完全描述了所考虑表示的字问题。）这一推理表明，由与上述相同的表示给出的幺半群，即

$$\mathrm{Mon}\langle a_0, a_1, p_0, p_1, q_0, q_1 \mid q_0 a_0^m p_0 = q_1 a_1^m p_1 \ (m \geq 0)\rangle$$

已经是（右）可消去的，因此在这种情况下，RU($M_{S,\ T}$)由与普通幺半群相同的表示给出。

现在考虑以下有限表示幺半群序列：

$$M_r = \mathrm{Mon}\langle a_0, a_1, p_0, p_1, q_0, q_1 \mid q_0 a_0^m p_0 = q_1 a_1^m p_1 \ (0 \leq m \leq r)\rangle$$

对于 $r \geq 0$。与上述类似，我们证明这些幺半群都是（右）可消去的，因此，相同的生成元和关系构成了 M_r 的有限 RC-表示。由 [6] （即右消去链的定义）可知，若 RU($M_{S,\ T}$) 有限 RC-表示，那么它就同构于某个 r 的 M_r。然而，尽管这里讨论的是普通幺半群表示，但根据上述评述，很容易证明

$$q_0 a_0^{r+1} p_0 \neq q_1 a_1^{r+1} p_1$$

在 M_r 中，因为我们也可以这样描述 M_r 的字问题： $u = v$ 当且仅当 $u\xi = v\xi$ 和 u 与 v 仅在某些基于 qa^kp 且满足 $k \leq r$ 的块的下标上有所不同。这就产生了矛盾。□

6.2. Gray-Ruˇskuc 构造中的右单位幺半群。 设字母表为$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$，字母为 $t \notin A$。令 $Q = \{r_i : i \in I\}$ 为 A^*中的一个（不一定有限的）词集，并令 $K_Q = \mathrm{Gp}\langle A \mid r_i = 1 (i \in I)\rangle$ 和 $G_Q = K_Q * FG(t)$。我们始终假设 I 非空。

此外，令 $W = \{w_j : 1 \leq j \leq k\}$ 为 A^*的有限子集，并用 T_W 表示由群 K_Q 中可由 W中的词表示的元素生成的子幺半群。对于词列表 $u_1, \ldots\ldots, u_m \in A^*$，定义

$$e(u_1, \ldots, u_m) = u_1 u_1^{-1} \cdots u_m u_m^{-1}.$$

定义如下特殊逆幺半群:

$$M_{Q,W} = \mathrm{Inv}\langle A, t \mid fr_1 = 1,\ r_i = 1\ (i \in I \setminus \{1\})\rangle, \tag{6.1}$$

其中 $1 \in I$ 是一个指定指标，并且

$$f = e(a_1, \ldots, a_n, tw_1t^{-1}, \ldots, tw_kt^{-1}, a_1^{-1}, \ldots, a_n^{-1}).$$

[17] 中指出，这总是一个 E-幺正逆幺半群，其最大群像为 G_Q，并且它也可以等价地由以下定义关系给出:

$$\begin{aligned} r_i &= 1 && (i \in I),\\ a_p a_p^{-1} &= a_p^{-1} a_p = 1 && (1 \leq p \leq n),\\ tw_j t^{-1} tw_j^{-1} t^{-1} &= 1 && (1 \leq j \leq k)。 \end{aligned}$$

通过对参数作适当选择， [17]中利用这一构造证明了以下结果:

(a) 存在一个单关系特殊逆幺半群，其单位群不是单关系群（这与普通幺半群的情形形成鲜明对比）。(b) 存在一个单关系特殊逆幺半群，其单位群是有限呈示的，但其右单位幺半群不是有限呈示的（作为普通幺半群）。(c) 存在一个有限呈示的特殊逆幺半群，其单位群不是有限呈示的。

下面给出本小节的主要结果。

定理 6.3。 设 $M_{Q,W}$ 是由(6.1)定义的特殊逆幺半群。设 $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ 是与 $A \cup \{t\}$ 不相交的字母表，并令

$$\begin{aligned} R_{Q,W} = \mathrm{MonRC}\langle \overline{A}, B, t \mid aa^{-1} = a^{-1}a = 1\ (a \in A),\\ r_i = 1\ (i \in I),\\ tw_j = b_j t\ (1 \leq j \leq k)\rangle. \end{aligned}$$

$M_{Q,W}$ 的右单位幺半群同构于 $R_{Q,W}$。

注 6.4。 注意，由普通 幺半群表示给出的这类幺半群称为*Otto-Pride* 扩张 [18] （名称源自论文 [37]），其中输入是一个幺半群同态。当该同态是单射时（此处包含映射 $T_W \hookrightarrow K_Q$ 即为如此），这种扩张称为类 *HNN*扩张。因此，前述定理表明，$M_{Q,W}$ 的右单位幺半群同构于 $R_{Q,W}$，后者是由群 K_Q 和子幺半群 T_W 产生的类 HNN 的 Otto-Pride 扩张的最大右可消像。

首先，我们将证明映射 $w_j \mapsto b_j$ $(1 \leq j \leq k)$ 可扩展为同态$T_W \to R_{Q,\ W}$ 而且实际上是一个嵌入，从而由 B 生成的 $R_{Q,\ W}$ 的子幺半群构成 T_W 的一个同构副本。

命题 6.5. $\langle B\rangle_{R_{Q,W}} \cong \langle W\rangle_{K_Q} = T_W$.

证明. 首先，请注意，如果

$$w_{j_1}\cdots w_{j_m} = w_{l_1}\cdots w_{l_r}$$

在 K_Q 中对某些 $w_{j_1},\ldots,w_{j_m}, w_{l_1},\cdots,w_{l_r} \in W$ 成立，则在 $R_{Q,W}$ 中有

$$b_{j_1}\cdots b_{j_m}t = tw_{j_1}\cdots w_{j_m} = tw_{l_1}\cdots w_{l_r} = b_{l_1}\cdots b_{l_r}t,$$

根据 $R_{Q,W}$ 的右消去性质，这意味着 $b_{j_1}\cdots b_{j_m} = b_{l_1}\cdots b_{l_r}$。因此，映射 $w_j \mapsto b_j$ $(1 \leq j \leq k)$ 自然扩张为良定义的同态 $T_W \to R_{Q,W}$，其定义为

$$w_{j_1}\cdots w_{j_m} \mapsto b_{j_1}\cdots b_{j_m}.$$

接下来要证明所考虑的同态是单射，即 $b_{j_1}\cdots b_{j_m} = b_{l_1}\cdots b_{l_r}$ 蕴含 $w_{j_1}\cdots w_{j_m} = w_{l_1}\cdots w_{l_r}$ 在 T_W 中成立。因此，假设 $b_{j_1}\cdots b_{j_m} = b_{l_1}\cdots b_{l_r}$ 在 $R_{Q,W}$ 中成立。令 $G_{Q,W}$ 为 $R_{Q,W}$ 的最大群像，并令 $\eta\colon R_{Q,W} \to G_{Q,W}$ 为相应的典范同态。于是，作为一个群，$G_{Q,W}$ 由与 $R_{Q,W}$ 相同的表示定义（尤其是由相同的生成元集合定义）。应用 η 后，我们得到 $b_{j_1}\cdots b_{j_m} = b_{l_1}\cdots b_{l_r}$ 在 $G_{Q,W}$ 中成立。然而，$G_{Q,W}$ 的定义关系意味着，对所有 $1 \leq j \leq k$，有

$$b_j = tw_jt^{-1}. \tag{6.2}$$

因此，在 $G_{Q,\ W}$ 中，我们有

$$(tw_{j_1}t^{-1})\cdots(tw_{j_m}t^{-1}) = (tw_{l_1}t^{-1})\cdots(tw_{l_r}t^{-1}),$$

这立即推出 $w_{j_1}\cdots w_{j_m} = w_{l_1}\cdots w_{l_r}$ 在 $G_{Q,\ W}$ 中成立。

另一方面，请注意，在 $G_{Q,\ W}$ 的群表示中，关系 (6.2) 使生成元 b_j $(1 \leq j \leq k)$ 成为冗余的，即生成元 b_j 可以连同这些关系（实际上是群论上等价的关系 $tw_j = b_jt$）一起通过 Tietze变换从表示中消去。因此，群 $G_{Q,\ W}$ 由 $\mathrm{Gp}\langle A,\ t \mid r_i = 1\,(i \in I)\rangle$ 表示，故 $G_{Q,\ W} = K_{\overline{Q}} * FG(t) = G_Q$。根据群的自由积的正规形定理 [28, 定理 IV.1.2], ，我们得出所需结论：$w_{j_1}\cdots w_{j_m} = w_{l_1}\cdots w_{l_r}$ 在 K_Q 中成立，因而也在 T_W 中成立。□

定理 *6.3* 的证明。 对于右消去幺半群 P，其逆包 $IH(P)$ 是由 P 上的所有部分单射构成的对称逆幺半群 $\mathcal{I}_P$ 的逆子幺半群，由右平移 ρ_q：$x \mapsto xq\,(q, x \in P)$ 生成。由于假设 P 是右消去的，任意 ρ_q 都是从 P 到其主左理想 Pq 的单射。半群理论中有一个众所周知的结论（例如见 [8, 定理 1.22]）： $IH(P)$ 的右单位幺半群与 P 同构，且由所有满足 r 是 Q 的右单位的平移 ρ_r 构成；因此，每个右消去幺半群都可实现为某个逆幺半群的右单位幺半群。

为简便起见，记 $M = M_{Q,W}$ 和 $R = R_{Q,W}$。我们的目标是证明，存在一个从 M 的右单位到 $IH(R)$ 的右单位的同构；根据上一段的说明，后者构成一个与 R 同构的幺半群。逆包 $IH(R)$（作为逆幺半群）由 ρ_a, ρ_b $(a \in A,\ b \in B)$ 和 ρ_t 生成，它们分别对应于 R 的生成元。它们全都是 $IH(R)$ 中的右单位，并且所有 $\rho_a, a \in A$ 都可逆，即是 R 上的置换，其中对所有 $a \in A$，$\rho_{a^{-1}}$ 是 ρ_a 的逆映射。显然，对于 $A \cup B \cup \{t\}$ 上的任意字 w，若 w 表示元素 $s \in R$，那么在 $IH(R)$ 中，字 w 表示 ρ_s。因此，对于任意 $i \in I$，我们有 $\rho_{r_i} = \rho_1 = \mathrm{id}_R$；从这个意义上说，$IH(R)$ 满足关系 $r_i = 1$（按照前文所述的 $IH(R)$ 的生成元与 R 之间的对应关系）。此外，对于任意 $w_j \in W$，必有 $\rho_t\rho_{w_j} = \rho_{b_j}\rho_t$。由于 $IH(R)$ 是对称逆幺半群 $\mathcal{I}_R$ 的子幺半群，后一个等式意味着

$$\rho_{b_j} = \rho_{b_j}\rho_t\rho_t^{-1} = \rho_t\rho_{w_j}\rho_t^{-1}.$$

该关系表明，字 tw_jt^{-1} 表示 $IH(R)$的一个右单位，因此 $IH(R)$满足所有关系 $tw_jt^{-1}tw_j^{-1}t^{-1} = 1$。我们刚刚证明，在映射 $a \mapsto \underline{\rho_a}$ $(a \in A)$，$t \mapsto \rho_t$下， M 的所有定义关系在 $IH(R)$中都成立。因此，该映射可扩展为

一个同态 $\mu : M \to IH(R)$。此外， $\mu \restriction_{\mathrm{RU}(M)}$ 将 M 的右单位映到 $IH(R)$的右单位上，因为前面展示的等式表明， $IH(R)$的所有生成元 ρ_b,$b \in B$ 都是冗余的。在证明的余下部分，我们将论证映射 $\mu \restriction_{\mathrm{RU}(M)}$必定是单射。

为此，只需证明存在一个幺半群同态 $\nu\colon R \to \mathrm{RU}(M)$，使得 $\nu\mu = \nu\left(\mu \restriction_{\mathrm{RU}(M)}\right)$ 是 R 与其在 $IH(R)$ 中的副本之间的同构。（由于 $\mu \restriction_{\mathrm{RU}(M)}$ 的定义域与 ν 的陪域一致，因此最终得出的结论—— $\nu\mu$ 是一个同构，因而也是一个双射——将意味着 ν 和 $\mu \restriction_{\mathrm{RU}(M)}$ 都必须是单射。）注意， $A \cup \{t\} \cup \{tw_j t^{-1} : 1 \leq j \leq k\}$ 构成了 $\mathrm{RU}(M)$ 的一个生成集，因为 M 的关系词的任何其他前缀，都可以利用 [13, 推论 3.2], 表示成这些字的乘积。考虑 $A \cup \{t\}$ 上的恒等映射以及 $b_j \mapsto tw_j t^{-1}$、 $1 \leq j \leq k$。这个映射记作 ν_0，它将 R 的每个生成元映射到 $\mathrm{RU}(M)$ 的生成集中的一个元素。由于关系 $r_i = 1$ 只涉及 A 中的字母，而这些字母在 M中表示可逆元素，因此所有这些关系在 $\mathrm{RU}(M)$ 中都成立。此外，对于所有 $1 \leq j \leq k$，我们有

$$(b_j\nu_0)(t\nu_0) = tw_j t^{-1}t = tw_j = (t\nu_0)(w_j\nu_0),$$

其中 $w_j\nu_0$ 是对 w_j 中的每个字母分别应用 ν_0 的简写。这里的第二个等式成立，是因为在 M 中，字 $tw_j t^{-1}t$ 表示 M 的一个右单位，因为它是某个关系词的前缀，所以 [13, 推论 3.2] 再次适用。因此我们得出， R 的所有定义关系在 $\mathrm{RU}(M)$ 中也成立，这里所说的成立是指这些幺半群的生成集之间的对应关系 ν_0；因此，根据引理 5.7， ν_0 可扩展为一个同态 ν : $R \to \mathrm{RU}(M)$。注意， $\nu\mu$ 限制在 R 的生成元上时，恰好给出 R 的生成元与 $IH(R)$ 的右单位之间的标准对应关系。因此，$\nu\mu$ 是一个同构，证毕。□

推论 6.6. 如果 K_Q 是一个有限呈示的群（即 $|Q|$ 有限时），那么 $\mathrm{RU}(M_{Q,W})$ 是有限 *RC*-呈示的。

推论 6.7。 存在一个有限呈示的 E-酉特殊逆幺半群 M，具有以下性质：

(a) 右单位的子幺半群 $\mathrm{RU}(M)$ M 是有限 *RC*-呈示的；(b) U的单位群(M)不是有限呈示的，因此，$\mathrm{RU}(M)$作为幺半群也不是有限呈示的。

证明。根据 [17, 定理 6.3(vi)]，如果 $\mathrm{RU}(M_{Q,W})$ 作为幺半群是有限呈示的，那么群 K_Q 和幺半群 T_W 都必须是有限呈示的。同样地，由同一定理的第 (v) 项可知，$M_{Q,W}$的单位群同构于 $U(T_W) * K_Q$，其中$U(T_W)$表示 T_W的单位群（它是 K_Q的一个子群）。如 [17,第 7.3], 小节所示，如果我们取 W使得 $W^{-1} = W$，那么我们就有 T_W与 H_W重合，即 K_Q 中由 W生成的子群。因此，我们可以选择 Q 和 W，使得 K_Q 是一个有限呈示群，而其子群 H_W 是有限生成的但不是有限呈示的。对于这样的 Q、W选择，我们有 $\mathrm{RU}(M_{Q,W})$ 是有限 RC-呈示的。另一方面，$U(\mathrm{RU}(M_{Q,W})) = U(M_{Q,W}) = K_Q * H_W$不是有限呈示的，这一点如 [17, 定理 6.3(vi)], 的证明中所述，源于 H_W 是 $K_Q * H_W$的一个收缩。此外，正如已经指出的， H_W 的非有限可表示性意味着 $\mathrm{RU}(M_{Q,W})$ 作为幺半群不是有限呈示的。□

推论 6.8。 存在一个有限 *RC* 表示幺半群，其单位群并非有限呈示的。

注意，根据 [11, 命题 4.2(i)], ，右消去幺半群中单位群的补集总是一个理想。因此，前面的推论与 [39,命题 3.1], 形成鲜明对比；该结果表明，如果 U 有限呈示的幺半群 M 的单位群补集是一个理想，那么 U 也必然是有限呈示的。

致谢。我们感谢 Nik Ruˇskuc 的有益交流，以及他对促成定理 3.18 证明的相关思想所作出的重要贡献。

References

[1] S. I. Adjan，《群与半群的定义关系及算法问题》（俄文），*Trudy Mat. Inst. Steklov.* **85** 1966 123 ( )，第[2] S. I. Adyan、G. U. Oganesyan，《关于具有一个关系的半群的字问题与可除性问题》（俄文），*Mat. Zametki* **41** (1987年)，412–421。[3] V. Y. Belyaev，《递归定义的逆半群嵌入有限呈示半群》（俄文），*Sibirsk. Mat. Zh.* **25** (1984年)，50–54。[4] M. R. Bridson、A. Haefliger，*Metric Spaces of Non-Positive Curvature*，施普林格，柏林、海德堡，1999年。[5] A. J. Cain，*Presentations of Subsemigroups of Groups*，博士论文，圣安德鲁斯大学，2005年。[6] A. J. Cain、E. F. Robertson、N. Ruˇskuc，《有限 Rees 指数子半群的可消去表示与马尔采夫表示及其扩张》，*J. Austral. Math. Soc.* **84** (2008年)，39–61。[7] C. M. Campbell、E. F. Robertson、N. Ruˇskuc、R. M. Thomas，《半群的 Reidemeister-Schreier 型重写》，*Semigroup Forum* **51** (1995年)，47–62。[8] A. H. Clifford、G. B. Preston，*The Algebraic Theory of Semigroups*，*Vol. I & II*，Mathematical Surveys 第7卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1961年和1967年。[9] P. de la Harpe，*Topics in Geometric Group Theory*，芝加哥大学出版社，2000年。[10] I. Dolinka、R. D. Gray，《单关系群的前缀成员问题新结果》，*Trans. Amer. Math. Soc.* **374** 2021 4309 4358 ( )，–。[11] I. Dolinka、R. D. Gray，《群的前缀幺半群与特殊逆幺半群的右单位》，*Forum of Mathematics Sigma* **11** 2023 97, 19 ( )，文章 e，第[12] E. Ghys、P. de la Harpe，《作为几何对象的无限群》，载于：*Ergodic theory symbolic dynamics and hyperbolic spaces*（编者：T. Bedford、M. Keane、C. Series），第–页，牛津大学出版社，299 314, 1991。[13] R. D. Gray，《通过单关系群的直角阿廷子群证明单关系逆幺半群的字问题不可判定》，*Invent. Math.* **219** (2020年)，987–1008。[14] R. D. Gray、M. Kambites，《作用于半度量空间的群与幺半群的拟等距》，*Trans. Amer. Math. Soc.* **365** 2013 555 578 ( )，–。[15] R. D. Gray、M. Kambites，《有限呈示特殊逆幺半群的极大子群》，*J. Eur. Math. Soc.* 2212 04204 (即将出版)，arXiv: 。[16] R. D. Gray、M. Kambites，《 E-单位且 R_1-单射的特殊逆幺半群的子群》，*Math. Z.* **311** (2025)，文章编号# 23，共32页。[17] R. D. Gray、N. Ruˇskuc，《特殊逆幺半群和单关系逆幺半群的单位群》，*J. Inst. Math. Jussieu* **23** 2024 1875 1918 ( )，–。[18] R. D. Gray、B. Steinberg，《幺半群的拓扑有限性性质。第二部分：特殊幺半群、单关系幺半群、合并自由积与 HNN 扩张》，*Documenta Math.* **29** (2024年)，511–560。[19] V. S. Guba，《关于具有一个定义关系的半群的字问题与字可除性问题之间的关系》（俄文），*Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* **61** (6)（1997年），27–58。[20] J. M. Howie，*Fundamentals of Semigroup Theory*，London Math. Soc. 专著第12卷，克拉伦登出版社，牛津，1995年。[21] S. V. Ivanov、S. W. Margolis、J. C. Meakin，《关于单关系逆幺半群与单关系群》，*J. Pure Appl. Algebra* **159** 2001 83 111 ( )，–。[22] A. Jaikin-Zapirain、M. Linton，《单关系群的强 Atiyah 猜想与 L¨uck 逼近猜想》，*Math. Ann.* **376** (2020年)，1741–1793。[23] A. Jaikin-Zapirain、M. Linton，《关于单关系群及其群代数的相干性》，*Ann. Math.* **201** 2025 909 959 ( )，–。[24] G. Lallement，《关于由单个关系表示的幺半群》，*J. Algebra* **32** (1974年)，370–388。[25] M. V. Lawson，*Inverse Semigroups: The Theory of Partial Symmetries*，世界科学出版社，新加坡，1998年。[26] L. Louder、H. Wilton，《单关系群的负浸入》，*Duke Math. J.* **171** (2022年)，547–594。[27] L. Louder、H. Wilton，《一致负浸入与单关系群的相干性》，*Invent. Math.* **236** 2024 673 712 ( )，–。[28] R. C. Lyndon、P. E. Schupp，*Combinatorial Group Theory*，施普林格出版社，柏林，1977年。[29] W. Magnus，《具有一个定义关系的离散群。（自由定理）》，( )，–。[30] W. Magnus，《具有一个定义关系的群的恒等问题》，*Math. Ann.* **106** (1932年)，295–307。[31] G. S. Makanin，《有限定义半群中的恒等问题》（俄文），*Dokl. Akad. Nauk SSSR* **171** 1966 285 287 ( )，–。

[32] J. Meakin, 《群与半群：联系与对比》，载于： *Groups St Andrews 2005, Vol. 2*，第357–400页，London Math. Soc. Lecture Note Ser. 第340卷，剑桥大学出版社，剑桥，2007年。[33] W. D. Munn, 《自由逆半群》， *Proc. London Math. Soc. (3)* **29** (1974年)，385–404。[34] V. L. Murskiĭ, 《具有可枚举定义关系集的半群同构嵌入有限呈示半群》（俄文）， *Mat. Zametki* **1** (1967年)，217–224。[35] C.-F. Nyberg Brodda, 《单关系幺半群的字问题：综述》， *Semigroup Forum* **103** (2021年)，297–355。[36] M. Petrich, *Inverse Semigroups*，Wiley，1984年。[37] S. J. Pride、F. Otto, 《对于重写系统，拓扑有限性条件 FDT 与 FHT 并不等价》， *J. London Math. Soc. (2)* **69** (2004年)，363–382。[38] N. Ruškuc, *Semigroup Presentations*，博士论文，圣安德鲁斯大学，1995年。[39] N. Ruškuc, 《幺半群子群的表示》， *J. Algebra* **220** (1999年)，365–380。[40] H. E. Scheiblich, 《自由逆半群》， *Proc. Amer. Math. Soc.* **38** (1973年)，1–7。[41] J.-P. Serre, *Trees*，施普林格出版社，柏林、海德堡，1980年。[42] B. Steinberg, 《逆半群与正则半群的拓扑方法》， *Pacific J. Math.* **208** (2003年)，367–396。[43] J. B. Stephen, 《逆半群的呈示》， *J. Pure Appl. Algebra* **63** (1990年)，81–112。[44] L. Zhang, 《Adjan 定理的一个简短证明》， *Proc. Amer. Math. Soc.* **116** (1992年)，1–3。[45] L. Zhang, 《将重写方法应用于特殊幺半群》， *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **112**(1992年)，495–505。