arXiv:2512.15593v1 [math.GN] 17 Dec 2025

同时序列紧致性

SIRIO RESTEGHINI 和 CESARE STRAFFELINI

Abstract. 如果存在指标集 ω 的一个无限子集 H，使得所有序列限制在 H 上时都收敛，则称一组序列同时收敛。我们讨论同一序列紧空间或不同序列紧空间中序列的同时收敛；将不同空间情形的结果与同一空间情形的结果联系起来；证明在权不超过 $\mathfrak{s}$ 的空间中，少于 $\mathfrak{s}$ 个序列可以同时收敛，而在一般情形下，少于 $\mathfrak{h}$ 个序列可以同时收敛；我们在豪斯多夫空间的背景下对这些结果作了略微推广；最后考察其最优性。

1. 引言与预备结果

给定一个拓扑空间 X，以及一个序列 $x = \langle x_n : n < \omega \rangle$，其中各点属于 X，且指标集 ω 是最小的无限序数。若对 X 中 x_∞ 的每个开邻域 U，都存在一个自然数 $n_U < \omega$，使得对所有 $n > n_U$ 都有 $x_n \in U$，则称 x 收敛到某个点 $x_\infty \in X$。若 ω 的一个无限子集为 H，则称 x 沿着 H 收敛，当且仅当子序列 $x \restriction H = \langle x_n : n \in H \rangle$ 收敛。

我们的目标是研究以下问题：给定若干个序列（它们的取值可以属于不同的拓扑空间），能否找到 ω 的一个无限子集 H，使得所有这些序列沿 H 收敛？我们希望得到的答案可能同时取决于序列的数量以及所考察空间的拓扑性质。

令 $[\omega]^\omega$ 表示 ω 的所有无限子集所构成的集合。对于 $[\omega]^\omega$ 中的两个元素 H_0 和 H_1，如果它们的对称差是有限集（即它们仅在有限多个元素上不同），我们记作 $H_0 =^* H_1$；如果存在 $H' \subseteq H_1$ 使得 $H_0 =^* H'$，则记作 $H_0 \subseteq^* H_1$。

如果 $H_0 =^* H_1$，那么 $x \restriction H_0$ 收敛当且仅当 $x \restriction H_1$ 收敛。另一方面，如果 $H_0 \subseteq^* H_1$，那么若 $x \restriction H_1$ 收敛，则 $x \restriction H_0$ 收敛（但反之不一定成立）。

定义 1.1. 若 λ 是一个基数，空间 X 称为 λ-同时序列紧致（简称 λ-ssc），如果对于任意给定的取值于X的 λ 个序列，都能找到 $H \in [\omega]^\omega$，使得这些序列中的每一个都沿着 H收敛。

注意，如果 $\lambda \leqslant \kappa$ 且空间 X 是 κ-同时序列紧致的，那么 X 是 λ-同时序列紧致的。此外，“1-同时序列紧致”的定义与序列紧致性的标准定义一致。

Date:2025年12月18日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 03E17，54A25（主要分类）54D10，54D30，54D55（次要分类）。*Key words and phrases.* 连续统的基数特征，序列紧致性，基数界。

序列紧致性已经蕴含 $\aleph_0$-同时序列紧致性，这一事实可以通过对角化论证证明。为求完整起见，我们在下文给出证明。

引理 1.2。 拓扑空间是序列紧的，当且仅当它是 $\aleph_0$-*ssc*。

证明。 首先，假设 X 是 $\aleph_0$-ssc。那么它是 1-ssc，因此是序列紧的。

现在，假设 X 是序列紧的。设 x^k 是取值于 X的序列，其中 $k < \omega$。由序列紧致性，存在 $H_0 \in [\omega]^\omega$ ，使得 $x^0 \restriction H_0$收敛。接下来，考虑序列 $x^1 \restriction H_1$。由于 X 是序列紧的，因此存在 $H_1 \subseteq H_0$ 属于 $[\omega]^\omega$ ，使得 $x^1 \restriction H_1$ 收敛。根据前面的评注，我们可以向 H_1 添加有限多个元素而不失去收敛性，因此假设 H_0 和 H_1 具有相同的最小元素。

用归纳法证明。假设我们有集合 H_i ，其中 $i < k$ ，使得 $H_{i+1} \subseteq H_i$，并且 H_i 和 H_{i+1} 在前 $i + 1$ 个元素上相同，且每个子序列$x^i \restriction H_i$ 都收敛。考虑 $x^k \restriction H_{k-1}$。由于 X 是序列紧的，因此存在 $H_k \subseteq H_{k-1}$ ，使得 $x^k \restriction H_k$ 收敛。我们可以假设 H_{k-1} 和H_k 在前 k 个元素上相同。

令 $H := \bigcap_{k<\omega} H_k$。这个集合是无限的，因为对于所有 $k < \omega$ ， H_k 的前 k 个元素都属于 H。由于对于所有 $k < \omega$ 都有 $H \subseteq H_k$ ，每个序列 $x^k \restriction H$ 都收敛，正如所要求的那样。□

本文结构如下。在第 2 节中，我们推广 Andreas Blass 在 [Bla10], 中的一个结果，并给出我们的第一个主要结果：

定理 2.7. 若 $\lambda < \mathfrak{s}$，则任何满足 $w(X) < \mathfrak{s}$ 的序列紧空间 X 都是 λ-*ssc*。

这里， $\mathfrak{s}$ 表示分裂数。

在第 3 节中，我们考察豪斯多夫空间的情形。我们定义一个称为可数豪斯多夫权 （cHw）的基数不变量，用它代替权，以改进定理 2.7：

定理 3.5. 若 $\lambda < \mathfrak{s}$，则任何满足$\mathrm{cHw}(X) < \mathfrak{s}$ 的序列紧豪斯多夫空间 X 都是 λ-*ssc*。

在第 4 节中，我们讨论不同拓扑空间中的序列问题。在此，我们将第 2 节中的一般结果以及第 3 节中关于豪斯多夫空间的具体结果推广到这一新情境，并表明只要所有序列都来自性质相近的空间，这些结果基本上仍然成立。

最后，在第5节中，我们证明以下结果，该结果不依赖于对空间的基数不变量施加任何限制：

定理 5.2. 若 $\lambda < \mathfrak{h}$，则任意序列紧空间 X 都是 λ-*ssc*。

这里， $\mathfrak{h}$ 表示分配数。最后，我们提出一些关于本论文部分结果最优性的进一步问题。

2. Results based on the Splitting Number

引理 1.2 给出了序列紧空间所具有的同时序列紧性的程度下界。现在我们转而探讨如何求得上界；与下界不同，上界将取决于该空间的其他拓扑性质。事实上，在一个空间只有一个元素这种极其简单的情况下，很容易证明，对于所有基数 λ，该空间都是 λ-ssc。

定义 2.1. 如果拓扑空间 X 中存在两个元素 a和 b，使得 $\{a\}$ 的闭包与 $\{b\}$ 的闭包不相交，那么我们就称该空间“非平凡到足以区分两个点”（下文简称非平凡）。

对于非平凡空间 X，使得 X 成为 λ-ssc 的 λ 可能取值确实存在一个上界。这个上界由分裂数 $\mathfrak{s}$ 给出。

定义 2.2. 如果对于每个 $A \in [\omega]^\omega$，都存在某个 $S \in \mathcal{S}$，使得 $A \cap S$和 $A - S$都是无限集，则称族 $\mathcal{S} \subseteq [\omega]^\omega$ 为分裂族 。分裂数 $\mathfrak{s}$ 定义为分裂族的最小基数。

这成立 $\aleph_1 \leqslant \mathfrak{s} \leqslant 2^{\aleph_0}$，并且相对于 ZFC，$\aleph_1 < \mathfrak{s} < 2^{\aleph_0}$ 是一致的。关于分裂数的更多信息，感兴趣的读者可参阅 Andreas Blass 的手册章节 [Bla10]。其中还可以找到“离散空间 $\{0,1\}$ 不是 $\mathfrak{s}$-ssc”的证明；显而易见，该证明也可以改编，用来证明看似更强的引理 2.3。

引理 2.3。*如果 X 是一个非平凡拓扑空间，则 X 不是 $\mathfrak{s}$-ssc。*

证明。取 a 和 b 属于 X，使得 $\{a\}$ 和 $\{b\}$ 的闭包不相交。

令 $\mathcal{S} = \langle S_\alpha : \alpha < \mathfrak{s}\rangle$ 为一个势为 $\mathfrak{s}$ 的分裂族。对于 $\alpha < \mathfrak{s}$，令 x^α 为

$$x^\alpha_n := \begin{cases} a \text{ if } n \in S_\alpha; \\ b \text{ if } n \notin S_\alpha. \end{cases}$$

由于 $\mathcal{S}$ 是一个分裂族，对于每个 $H \in [\omega]^\omega$，存在 $\alpha < \mathfrak{s}$，使得 $H \cap S_\alpha$ 和 $H - S_\alpha$ 都是无限的。因此，序列 $x^\alpha \restriction H$ 无穷多次取值为 a 和 b，所以它不可能收敛，因为它频繁地位于 a 的某个邻域之外（即 $\{b\}$ 的闭包的补集），并且位于 b 的某个邻域之外（即 $\{a\}$ 的闭包的补集）。

因此，存在一个族 $\langle x^\alpha : \alpha < \mathfrak{s}\rangle$，其势为 $\mathfrak{s}$，由取值于 X 的序列组成，并且不存在一个 $H \in [\omega]^\omega$，使得所有序列都沿其收敛，所以 X 不是 $\mathfrak{s}$-ssc，证毕。□

因此，对于非平凡空间，我们所能期望的最佳结果是它们对于 $\lambda < \mathfrak{s}$ 为 λ-ssc。正如 [Bla10], 中所证明的，对于离散空间 $\{0,1\}$，这一结论成立。现在我们将用自己的记号和定义证明这一事实。

引理 2.4. *若 $\lambda < \mathfrak{s}$，则离散空间 $\{0,1\}$ 是 λ-ssc。*

证明。设 $\lambda < \mathfrak{s}$，并设 x^α 是一个取值于 $\{0,1\}$ 的序列，其中 $\alpha < \lambda$。

对于序数 $\alpha < \lambda$，令 $A_\alpha := \{n \in \omega : x^\alpha_n = 1\}$ 和 $B_\alpha := \{n \in \omega : x^\alpha_n = 0\}$。若 A_α 是无限的，令 $S_\alpha := A_\alpha$；否则令 $S_\alpha := B_\alpha$。现在考虑族$\mathcal{F} := \{S_\alpha : \alpha < \lambda\} \subseteq [\omega]^\omega$。由于 $\lambda < \mathfrak{s}$，$\mathcal{F}$ 不可能是分裂族，因此存在某个 $H \in [\omega]^\omega$，使得对于所有 $\alpha < \lambda$，要么 $H \cap S_\alpha$，要么 $H - S_\alpha$ 是有限的。

这意味着，对于所有 $\alpha < \lambda$，$H \cap A_\alpha$ 或 $H \cap B_\alpha$ 中至少有一个是有限的。如果 $H \cap A_\alpha$ 是有限的，那么 $x^\alpha \restriction H$ 收敛到 0；如果 $H \cap B_\alpha$ 是有限的，那么 $x^\alpha \restriction H$ 收敛到 1。□

这个证明利用了空间 $\{0,1\}$ 的某些特殊性质，因此无法轻易推广到所有非平凡的序列紧空间。

在前面引用的章节 [Bla10], Blass 还证明了以下引理 2.5。

引理 2.5。 如果 $\lambda < \mathfrak{s}$，紧单位区间 $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ 是 λ-*ssc*。

我们不打算证明引理 2.5，因为它将是定理 2.7 的推论。不过，我们可以注意到，Blass 的证明实际上证明了比引理 2.5 更强的结论：完全相同的论证适用于任意可分度量空间的任意紧子集。

定理 2.7 甚至比这更强，因为它意味着任意度量空间的任意紧子集对于 $\lambda < \mathfrak{s}$ 都是 λ-ssc。我们来回顾一个重要的拓扑概念。

定义 2.6。 给定一个拓扑空间 X，其权定义为

$$w(X) := \aleph_0 + \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ is a basis for the topology on } X\}.$$

定理 2.7。 若 $\lambda < \mathfrak{s}$，则任何具有 $w(X) < \mathfrak{s}$ 的序列紧空间 X 都是 λ-*ssc*。

证明。 设 $\lambda < \mathfrak{s}$，并考虑 λ 个序列 x^α，它们对应于 $\alpha < \lambda$，且取值于 X。

设 $\mathcal{B}$ 是 X 上拓扑的一个基，且 $|\mathcal{B}| < \mathfrak{s}$。设 $\kappa := |\mathcal{B}|$。取 $\mathcal{B}$ 的一个枚举 $\langle B^\beta : \beta < \kappa\rangle$。对于所有 $\alpha < \lambda$ 和 $\beta < \kappa$，定义

$$y_n^{\alpha,\beta} := \begin{cases} 1 & \text{if } x_n^\alpha \in B^\beta; \\ 0 & \text{if } x_n^\alpha \notin B^\beta. \end{cases}$$

集合 $\{y^{\alpha,\beta} : \alpha < \lambda,\ \beta < \kappa\}$ 是一个由 $\lambda\kappa$ 个序列组成的集合，这些序列取值于 $\{0,1\}$。因此，由于 $\lambda\kappa < \mathfrak{s}$，根据引理 2.4，存在某个 $H \in [\omega]^\omega$，使得 $y^{\alpha,\,\beta} \restriction H$ 对所有 $\alpha < \lambda$ 和 $\beta < \kappa$ 都收敛。我们要证明，对所有 $\alpha < \lambda$，$x^\alpha \restriction H$ 都收敛。

固定 $\alpha < \lambda$。由于 X 是序列紧的，因此存在 $H' \in [\omega]^\omega$，使得 $H' \subseteq H$，并且序列 $x^\alpha \restriction H'$ 收敛到某个 x^α_∞。对于所有 $\beta < \kappa$，如果 $x^\alpha_\infty \in B^\beta$，那么序列 $x^\alpha \restriction H'$ 从某一点起始终处于 B^β内，因此 $y^{\alpha,\,\beta} \restriction H'$收敛到 1。所以，由于我们知道 $y^{\alpha,\,\beta} \restriction H$ 收敛，且 $H' \subseteq H$，序列$y^{\alpha,\,\beta} \restriction H$ 也收敛到 1。这意味着 $X^\alpha \restriction H$ 最终位于 x^α_∞的每个开邻域内，因此它收敛到 x^α_∞，如所需。□

与定理 2.7 的证明类似的证明表明，对于权小于 $\mathfrak{s}$的紧空间，λ-ssc 对$\lambda < \mathfrak{s}$ 也有相同的结果。请注意，一般而言，拓扑紧致性与序列紧致性之间不存在直接关联。

定理 2.8。 每个紧空间 X 在 $w(X) < \mathfrak{s}$ 下，对于所有 $\lambda < \mathfrak{s}$都是 λ-*ssc*。

证明。 令 λ、x^α、$\mathcal{B}$、κ、$y^{\alpha,\,\beta}$ 和 H 如定理 2.7 的证明中所设。我们的目标是像定理 2.7 的证明中一样，证明对于所有 $\alpha < \lambda$，$x^\alpha \restriction H$ 收敛。

反设对于某个 $\alpha < \lambda$，$x^\alpha \restriction H$ 不收敛。这意味着对于所有 $x \in X$，存在一个 $\beta(x) < \kappa$，使得 $x \in B^{\beta(x)}$，但序列$x^\alpha \restriction H$ 有无穷多个项位于 $B^{\beta(x)}$之外，因此序列 $y^{\alpha,\,\beta(x)} \restriction H$ 有无穷多个项为 0；所以由于它收敛，它必然收敛到 0。

但现在，$\bigcup_{x\in X} B^{\beta(x)}$ 是 X的一个开覆盖，因此我们可以取出一个有限子覆盖，记为 $X = B^{\beta(x_1)} \cup \ldots \cup B^{\beta(x_k)}$，其中某个 $\{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq X$ 满足此条件。由于 $y^{\alpha,\,\beta(x)} \restriction H$对所有 $x \in X$都收敛到 0，序列 $x^\alpha \restriction H$ 最终会落在每个 $B^{\beta(x)}$之外，因此最终也会落在 $B^{\beta(x_1)} \cup \ldots \cup B^{\beta(x_k)}$之外，也就是说 X，矛盾。□

由于 $1 < \mathfrak{s}$，作为定理 2.8 的推论，我们重新得到以下推论 2.9。这是一个著名的结果，例如可以在 Eric Van Douwen 的手册章节 [Van84] 中找到。请注意，定理 2.8 是对它的直接推广。

推论 2.9。 每个紧空间 X 若满足 $w(X) < \mathfrak{s}$，则都是序列紧的。

定理 2.7 推广了分析中的若干经典结果，因此有望应用于实际应用中。例如，下面的推论 2.10 扩展了巴拿赫–布尔巴基–阿劳格鲁定理，表明对于较小的泛函族，同时弱-$\star$ 序列紧致性成立。

推论 2.10。 设 $\mathbb{E}$ 为可分赋范向量空间。若 $\lambda < \mathfrak{s}$，则其拓扑对偶的单位球 $\mathbb{E}'$ 是 λ-同时弱-$\star$ 序列紧的。

3. Hausdorff Spaces

现在我们将注意力转向豪斯多夫空间，旨在利用拓扑空间的另一种基数不变量，改进定理 2.7。

如果 X 是一个拓扑空间且 $Y \subseteq X$ 是其子集，我们用 $\mathcal{L}(Y)$ 表示 Y 在 X 的拓扑中的极限点集合，即所有满足以下条件的点 $x_\infty \in X$的集合：存在 Y 中的一个收敛于 x_∞的序列。该集合可能不同于 Y的序列闭包 $\mathrm{SeqCl}(Y)$；我们将其定义为包含 Y的最小序列闭超集，因为 $\mathcal{L}(Y)$ 可能不是序列闭集。

定义 3.1。 设 X 为一个拓扑空间，$Y \subseteq X$。Y的一个序列分离极限覆盖是 $\mathcal{L}(Y)$的开子集族 $\mathcal{C}_Y$，满足：对于每个 $p \in \mathcal{L}(Y)$ 以及每个满足 $q \neq p$ 的 $q \in X$，存在满足 $p \in U$ 且 $q \notin \mathrm{SeqCl}(U)$的 $U \in \mathcal{C}_Y$。

定义 3.2。 豪斯多夫空间 X的可数豪斯多夫权记为 $\mathrm{cHw}(X)$，是满足以下条件的最小无限基数 κ：每个可数子集 $Y \subseteq X$都存在一个序列分离极限覆盖 $\mathcal{C}_Y$，使得 $|\mathcal{C}_Y| \leqslant \kappa$。

如果 X 不是豪斯多夫空间，那么对于某些可数的 $Y \subseteq X$，可能不存在序列分离极限覆盖，因此 $\mathrm{cHw}(X)$ 可能未定义。相反，对于 X 豪斯多夫空间，其可数豪斯多夫权总是有定义的，并且不超过 $w(X)$，如下文引理 3.3 所示。

引理 3.3。 对于每个豪斯多夫空间 X，都有 $\mathrm{cHw}(X) \leqslant w(X)$。

证明。 如果 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个基，且 $|\mathcal{B}| = w(X)$，并且 $Y \subseteq X$ 可数，那么这个族

$$\{U \cap \mathcal{L}(Y) : U \in \mathcal{B}\}$$

是 Y 的一个序列分离极限覆盖，其基数至多为 $w(X)$。 □

Angelo Bella 向我们指出了一个有趣的结论：虽然拓扑空间的权不受空间基数的限制（即使该空间是豪斯多夫空间也如此），但我们可以为可数豪斯多夫权证明一个不等式：

引理 3.4. 对于 X 拓扑豪斯多夫空间，有 $\mathrm{cHw}(X) \leqslant |X|$。

证明。 令 $Y \subseteq X$ 为可数集。为了证明该引理，只需证明 Y 存在一个势至多为 $|X|$ 的序列分离极限覆盖。对于每个 $p \neq q$

在 X 中，利用 Hausdorff 性质，固定开子集 $U_p^q \subseteq X$ 和 $U_q^p \subseteq X$，使得 $p \in U_p^q$、$q \in U_q^p$ 和 $U_p^q \cap U_q^p = \emptyset$。现在令

$$\mathcal{C} := \{U_p^q \cap \mathcal{L}(Y) : p \in \mathcal{L}(Y), q \in X, p \neq q\}.$$

由于 $\mathrm{SeqCl}(U_p^q \cap \mathcal{L}(Y)) \subseteq \mathcal{L}(Y) - U_q^p$，这是 Y 的序列分离极限覆盖。此外，所需的 $|\mathcal{C}| \leqslant |X|^2 = |X|$ 也成立。□

现在我们陈述对豪斯多夫空间的定理 2.7 的改进。

定理 3.5。 如果 $\lambda < \mathfrak{s}$，则任意序列紧豪斯多夫空间 X *with* $\mathrm{cHw}(X) < \mathfrak{s}$ 都是 λ-*ssc*。

证明。 对于每个 $\alpha < \lambda$，令 $x^\alpha = \langle x_n^\alpha : n < \omega \rangle$ 为取值于 X 中的一个序列，并令 $\mathcal{C}_\alpha$ 为可数集 $\{x_n^\alpha : n < \omega\}$ 的一个序列分离极限覆盖，使得 $|\mathcal{C}_\alpha| \leqslant \mathrm{cHw}(X)$。对于每个 $\alpha < \lambda$ 和 $U \in \mathcal{C}_\alpha$，我们定义一个序列 $s^{\alpha,U}$，其取值于 $\{0,1\}$，定义如下：

$$s_n^{\alpha,U} = \begin{cases} 1 & \text{if } x_n^\alpha \in U; \\ 0 & \text{if } x_n^\alpha \notin U. \end{cases}$$

注意，由于对于每个 $\alpha < \lambda$，$\lambda < \mathfrak{s}$ 和 $|\mathcal{C}_\alpha| \leqslant \mathrm{cHw}(X) < \mathfrak{s}$，满足 $\alpha < \lambda$ 和 $U \in \mathcal{C}_\alpha$ 的有序对 $\langle \alpha, U \rangle$ 的集合势小于 $\mathfrak{s}$。因此，根据引理 2.4，存在 $H \in [\omega]^\omega$，使得对于每个 $\alpha < \lambda$ 和 $U \in \mathcal{C}_\alpha$，序列 $s^{\alpha,U} \restriction H$ 收敛。现在我们要证明，对于每个 $\alpha < \lambda$，序列 $x^\alpha \restriction H$ 都收敛。

固定 $\alpha < \lambda$。由于 X 是序列紧的，存在子集 $B, B' \subseteq H$，使得 $x^\alpha \restriction B$ 和 $x^\alpha \restriction B'$ 都分别收敛到某些点 x_B^α 和 $x_{B'}^\alpha$。反设 $x_B^\alpha \neq x_{B'}^\alpha$ 成立。那么，根据序列分离极限覆盖的定义，存在 $V \in \mathcal{C}_\alpha$，使得 $x_B^\alpha \in V$ 且 $x_{B'}^\alpha \notin \mathrm{SeqCl}(V)$。

我们知道 $s^{\alpha,V} \restriction H$ 收敛，并且由于 $x_B^\alpha \in V$，我们知道 $s^{\alpha,V} \restriction H$ 必定收敛到 1。因此，$s^{\alpha,V} \restriction B'$ 也收敛到 1，所以对于无穷多个 $n \in B'$，有 $x_n^\alpha \in V$，这与 $x_{B'}^\alpha \notin \mathrm{SeqCl}(V)$ 矛盾。由此可得，对于上述任意选择的 B 和 B'，都有 $x_B^\alpha = x_{B'}^\alpha$，因此我们可以将 x_B^α 简记为 x_∞^α。

注意，对于每个 $H' \subseteq H$，都存在 $H'' \subseteq H'$，使得 $x^\alpha \restriction H''$ 收敛；我们已经证明它必定收敛到 x_∞^α。接下来我们使用一个在任意拓扑空间中都成立的结果，有时称为乌雷松性质：序列 x 收敛到点 p，当且仅当 x 的每个子序列都有一个进一步的子序列收敛到 p。将此结果应用于当前情形，可得 $x^\alpha \restriction H$ 收敛到 x_∞^α，从而证明了该命题。□

我们可以进一步细化定理 3.5，引入以下定义：

定义 3.6. 如果豪斯多夫空间 X 存在一个可数子集 $Y \subseteq X$，使得 Y 的每个序列分离覆盖的基数至少为 $\mathrm{cHw}(X)$，则称该空间达到其可数豪斯多夫权。

定理 3.7. 设 X 是一个序列紧豪斯多夫空间，满足 $\mathrm{cHw}(X) = \mathfrak{s}$，且未达到其可数豪斯多夫权。那么，对于所有 $\lambda < \mathrm{cof}(\mathfrak{s})$，$X$ 都是 λ-*ssc*。

证明。 证明与定理 3.5 的证明完全相同，只是现在，满足 $\alpha < \lambda$ 且 $U \in \mathcal{C}_\alpha$ 的有序对集合 $\langle \alpha, U \rangle$ 的势小于 $\mathfrak{s}$，这仅仅是因为 $\lambda <$ 上确界 $(\mathfrak{s})$ 且 $|\mathcal{C}_\alpha| < \mathrm{cHw}(X) = \mathfrak{s}$ 对所有 $\alpha < \lambda$ 都成立。□

请注意，对于豪斯多夫空间，引理 3.3 保证了定理 3.5 的假设确实是定理 2.7 假设的一个弱化。为了证明这是一项有意义的改进，我们利用第 4 节的一些结果，给出一个 cHw(X) $< \mathfrak{s} \leqslant w(X)$ 的例子。

命题 3.8. 设 X' 是一个带有 $|X'| = \kappa \geqslant \aleph_0$的离散拓扑空间，并设 $X = X' \cup \{\Omega\}$ 是 X'的亚历山德罗夫紧化。那么，$\mathrm{cHw}(X) = \aleph_0$且 $w(X) = \kappa$。特别地，若 $\kappa \geqslant \mathfrak{s}$，则有 $cHw(X) < \mathfrak{s} \leqslant w(X)$。

证明。由于 X' 中的每个点都是开集，显然 $w(X') = \kappa$，而引理 4.2 得出 $w(X) = \kappa$。由于 X' 是由 κ个点组成的不交并，定理 4.13 得出 cHw(X) $\leqslant \aleph_0$。根据定义 3.2，cHw(X) $\geqslant \aleph_0$，因此命题得证。□

4. 不同空间中的序列

本节中，我们考察一个看似更一般的情形：序列可能属于不同的拓扑空间。事实上，在 Blass 对引理 2.5 的证明中，他并未假设所有序列都位于同一个区间 $[0,1]$; 他只要求每个序列都属于 $\mathbb{R}$的某个紧子集。这里我们将说明，在某种意义上，这两种情形是等价的，因此关于不同空间中序列的所有结果都可由关于同一空间中序列的定理推得。

定义 4.1. 若 λ 是一个基数，则拓扑空间族 $\mathcal{F}$ 称为 λ-ssc，若对于给定的λ个序列（每个序列的取值都在 $\mathcal{F}$中的某个拓扑空间内），存在 $H \in [\omega]^\omega$，使得每个所考虑的序列都沿着 H 收敛。

注意，族 $\mathcal{F}$ 是 λ-ssc，当且仅当每个满足 $|\mathcal{G}| \leqslant \lambda$的子族 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ 都是 λ-ssc。这使我们在族 $\mathcal{F}$ 是真类的情况下，可以将讨论限制在集合族上。这也说明了本节余下部分中某些记号滥用是合理的，例如从定理 4.4（要求 $\mathcal{F}$ 是一个集合）推得推论 4.5（讨论真类）。

让我们回顾一个著名的拓扑构造，后面还会多次用到。给定一个非紧致拓扑空间 X'，取一个不属于 X' 的 Ω，并定义

$$X := X' \cup \{\Omega\}.$$

考虑 X 上的拓扑，其中开集是满足以下条件的集合：要么等于对某个 $A \subseteq X'$ 开集所对应的 A，要么等于对某个 $K \subseteq X'$ 紧集所对应的 $X - K$。赋予此拓扑的空间 X 是紧致的，并满足以下性质：

引理 4.2。 $w(X) = w(X')$。

这个空间 X 被称为 X'的亚历山德罗夫紧化。关于这一标准拓扑构造的更多信息，以及上述结果的证明，我们请读者参阅 Ryszard Engelking 关于一般拓扑学的经典著作 [Eng89]。接下来的引理 4.3 对于阐述我们的结果具有基础性的重要意义。

我们注意到，在此处以及后文中，我们所说的是某些空间的不交并。形式上，如果 $\mathcal{F} = \langle Y_\alpha : \alpha < \mu \rangle$ 是一个空间序列（甚至仅仅是一个空间族；借助选择公理，我们可以对其良序化），其中的空间不必彼此不同，则 $\mathcal{F}$ 中所有空间的不交并定义为集合

$$\bigcup_{\alpha<\mu}(\{\alpha\} \times Y_\alpha),$$

其中的拓扑是通过对每个 $\alpha < \mu$ 取 $\{\alpha\} \times Y_\alpha$ 上的拓扑生成的，使其通过自然双射 $\langle \alpha, y\rangle \mapsto y$ 与 Y_α 同胚。

引理 4.3。设 $\mathcal{F}$ 是一个序列紧拓扑空间的无限族，令 X' 为 $\mathcal{F}$ 中所有空间的不交并，并令 $X = X' \cup \{\Omega\}$ 为 X' 的亚历山德罗夫紧化。那么， X 是序列紧的。

证明。利用选择公理，将 $\mathcal{F}$ 排序为 $\langle Y_\alpha : \alpha < \mu\rangle$。设 x 是一个取值于 X 的序列。我们需要证明存在 $H \in [\omega]^\omega$，使得 $x \restriction H$ 收敛。

对每个 $\alpha < \mu$，令 $H_\alpha := \{n < \omega : x_n \in \{\alpha\} \times Y_\alpha\}$。此外，也令 $H_\Omega := \{n < \omega : x_n = \Omega\}$。假设存在某个 $\alpha_0 < \mu$，使得 H_{α_0} 是无限的。那么，$x \restriction H_{\alpha_0}$ 是一个取值于 $\{\alpha_0\} \times Y_{\alpha_0}$ 的序列，也就是说，它与 Y_{α_0} 同构，因此是序列紧的。因此， $x \restriction H_{\alpha_0}$ 有一个收敛子序列，所以 x 也有一个收敛子序列。同样，如果 H_Ω 是无限的，那么 x 有一个恒等于 Ω 的子序列，因此该子序列收敛。

为完成证明，假设对所有 $\alpha < \mu$， H_α 都是有限的，并且 H_Ω 也是有限的。我们来证明 x 收敛到 Ω。任取紧子集 $K \subseteq X'$，并令

$$\mathcal{U} := \{K \cap (\{\alpha\} \times Y_\alpha) : \alpha < \mu\}.$$

注意， $\mathcal{U}$ 是紧集 K 的一个开覆盖，而且 $\mathcal{U}$ 中的元素两两不交。因此， $\mathcal{U}$ 是有限的，于是集合

$$\mathcal{F}_K := \{\alpha < \mu : K \cap (\{\alpha\} \times Y_\alpha) \neq \emptyset\}$$

是有限的，并且 $H_K := \bigcup_{\alpha \in \mathcal{F}_K} H_\alpha$ 是有限的。因此，对每个 $n > \max H_K$，都有 $x_n \in X - K$。由于 K 的选取是任意的，而且 Ω 的所有开邻域都具有 $X - K$ 的形式，其中 K 紧致，这就证明了 x 收敛到 Ω。□

定理 4.4。设 $\mathcal{F}$ 是一个由序列紧拓扑空间组成的无限族， X' 是 $\mathcal{F}$ 中所有空间的不交并，并且 $X = X' \cup \{\Omega\}$ 是 X' 的亚历山德罗夫紧化。假设 X 是 λ-*ssc*。那么，族 $\mathcal{F}$ 是 λ-*ssc*。

证明。对于 $\alpha < \lambda$，令 $X^\alpha \in \mathcal{F}$，并设 x^α 是一个取值于 X^α 的序列。考虑对于 $\alpha < \lambda$ 的序列 y^α，其定义简单地为 $y^\alpha_n := \langle \alpha, x^\alpha_n\rangle \in X$。这些是 X 中的 λ 个序列，因此存在 $H \in [\omega]^\omega$，使得每个 $y^\alpha \restriction H$ 都收敛。我们将证明，对于 $\alpha < \lambda$， $x^\alpha \restriction H$ 收敛。

序列 $y^\alpha \restriction H$ 从不取值 Ω，因此如果它在 X 中收敛，就意味着它已经在 X' 上的拓扑中收敛。由于 y^α 取值于 $\{\alpha\} \times X^\alpha$，序列 $y^\alpha \restriction H$ 在那里收敛，因此序列 $x^\alpha \restriction H$ 在 X^α 中收敛。□

作为引理 4.3 和定理 4.4 的推论，我们得到引理 1.2 和 2.3 的一些简单推广。

推论 4.5. 所有序列紧空间构成的族是 $\aleph_0$-*ssc*。

推论 4.6. 所有序列紧空间构成的族不是 $\mathfrak{s}$-*ssc*。

作为定理 2.7 的推广，人们或许可以证明：“如果$\lambda < \mathfrak{s}$，则权小于 $\mathfrak{s}$ 的所有序列紧空间构成的族是 λ-ssc”。

无论如何，这一点无法从定理 2.7 和 4.4 推出；而且——截至写下这句话时——作者仍不知道它是否能仅在 ZFC 中证明。我们可以直接从定理 2.7 和 4.4 得到的推论是引理 4.7。

引理 4.7。 固定某个基数 $\kappa < \mathfrak{s}$。那么，如果 $\lambda < \mathfrak{s}$，所有权不大于 κ 的序列紧拓扑空间组成的族是 λ-*ssc*。

证明。 对于 $\alpha < \lambda$，设 X^α 是一个满足 $w(X^\alpha) < \kappa$ 的序列紧集，并设x^α 是一个取值于 X^α 的序列。令 $\mathcal{F} := \{X^\alpha : \alpha < \lambda\}$，并且令 X 为 $\mathcal{F}$中所有空间的不交并的亚历山德罗夫紧化。

引理 4.2 和 4.3，结合定理 2.7，可得 X 是 λ-ssc；由定理 4.4 可知，族 $\mathcal{F}$ 是 λ-ssc。□

假设 $\mathfrak{s}$具有正则性，即可得到所需的更强结论。

引理 4.8。 假设 $\mathfrak{s}$ 是正则的。若 $\lambda < \mathfrak{s}$，则所有权严格小于 $\mathfrak{s}$ 的序列紧拓扑空间所构成的族是 λ-*ssc*。

证明。 对于 $\alpha < \lambda$，设 X^α 是一个满足 $w(X^\alpha) < \mathfrak{s}$ 的序列紧空间。则$\{w(X^\alpha) : \alpha < \lambda\}$ 是一个基数集，其中的基数均小于 $\mathfrak{s}$，且其势小于 $\mathfrak{s}$。由于 $\mathfrak{s}$ 是正则的，$\kappa := \sup\{w(X^\alpha) : \alpha < \lambda\} < \mathfrak{s}$。结论由引理 4.7 得出。□

给定一个拓扑空间 X，其序列细化记作 seq(X)，它是一个拓扑空间，其底集与 X 相同，且其闭集恰好是 X的序列闭集。不难验证， X 中的序列关于 X 的拓扑收敛到某个值，当且仅当它在 seq(X)的拓扑中收敛到同一个值。这意味着，空间 X 是序列紧（或更一般地说，是 λ-ssc），当且仅当 seq(X)是序列紧的（分别是 λ-ssc）。

此外，由于 seq(X)的拓扑是X的拓扑的细化，因此若 X 是豪斯多夫空间，则 seq(X) 也是豪斯多夫空间。seq(X) 细化 X 的拓扑这一事实还可推出:

引理 4.9. 若 X 是序列紧豪斯多夫空间，

$$\mathrm{cHw}(\mathrm{seq}(X)) \leqslant \mathrm{cHw}(X).$$

现在我们引入一种类似于亚历山德罗夫紧化的概念。

定义 4.10. 设 X' 是一个非序列紧的拓扑空间，且 $\Omega \notin X'$。定义 $X := X' \cup \{\Omega\}$。考虑 X 上的拓扑，其中开集是以下集合：要么等于某个 $A \subseteq$seq(X') 开集的 A，要么等于某个序列紧的 $K \subseteq X'$ 的 $X - K$。我们称赋予此拓扑的空间 X 为 X' 的序列 *Aleksandroff* 紧化 。

引理 4.11. 设 X' 是一个非序列紧的拓扑空间。那么， X' 的序列 *Aleksandroff* 紧化 X 是序列紧的。

证明. 设 x 是一个取值于 X的序列，并假设它没有任何取值于 X' 且在 X'中收敛的子序列。设 $K \subseteq X'$ 是序列紧的。若存在 $H \in [\omega]^\omega$ 使得 $x \restriction H$ 取值于 K，则 $x \restriction H$ 有一个收敛子序列，这与我们对 x的假设矛盾。因此， x最终落在 $X - K$中。由于这对每个这样的 K都成立，所以 x 最终落在 X中 Ω 的每个开邻域内，因而收敛到 Ω。□

借助引理 4.11，我们可以证明序列 Aleksandroff 紧化情形下定理 4.4 的完全类似结果:

定理 4.12. 设 $\mathcal{F}$ 是一族序列紧空间，X' 是 $\mathcal{F}$ 中所有空间的不交并，且 $X = X' \cup \{\Omega\}$ 是 X' 的序列 *Aleksandroff* 紧化。假设 X 是 λ-*ssc*。那么，族 $\mathcal{F}$ 是 λ-*ssc*。

证明。证明与定理 4.4 的证明完全相同。特别要注意，

$$\operatorname{seq}(\bigcup_{\alpha<\mu}\{\alpha\}\times Y_\alpha) = \bigcup_{\alpha<\mu}\{\alpha\}\times \operatorname{seq}(Y_\alpha). \qquad \square$$

接下来，我们要将定理 4.12 应用于具有有界可数豪斯多夫权的豪斯多夫空间，以展示引理 4.7 和 4.8 的一些变体，即引理 4.14 和 4.15。为此，我们必须证明由豪斯多夫空间的序列细化构成的不交并的序列亚历山德罗夫紧化，其可数豪斯多夫权具有一个上界。请注意，如果我们直接使用亚历山德罗夫紧化，就无法保证所得的紧化是豪斯多夫的。

定理 4.13。设 $\mathcal{F} = \{Y_\alpha : \alpha < \mu\}$ 是一个序列紧豪斯多夫空间的无限族，X' 是 $\mathcal{F}$ 中所有空间的不交并，且 $X = X' \cup \{\Omega\}$ 是 X' 的序列亚历山德罗夫紧化。那么，X 是一个序列紧豪斯多夫空间，并且

$$\operatorname{cHw}(X) \leqslant \sup_{\alpha<\mu} \operatorname{cHw}(Y_\alpha).$$

证明。首先，注意到根据引理 4.11，X 是序列紧的。接下来，我们将证明 X 是豪斯多夫的。设 $p, q \in X$。若 $\Omega \notin \{p, q\}$，容易证明它们可以被分离：若它们属于同一个 $\{\alpha\}\times Y_\alpha$，则由 $\{\alpha\}\times Y_\alpha$ 的 Hausdorff 性质可知；若它们不属于同一个，则 $p \in \{\alpha\}\times Y_\alpha$ 和 $q \in \{\beta\}\times Y_\beta$，于是 $\{\alpha\}\times Y_\alpha$ 和 $\{\beta\}\times Y_\beta$ 是 p 和 q 的不交开邻域。否则，设对于某个 $\alpha < \mu$ 和 $q = \Omega$，有 $p \in \{\alpha\}\times Y_\alpha$。由于 $\operatorname{seq}(Y_\alpha)$ 是序列紧的，因此 $X - \{\alpha\}\times Y_\alpha$ 是 X 中 Ω 的一个开邻域，且与 $\{\alpha\}\times Y_\alpha$ 不相交；而 $\{\alpha\}\times Y_\alpha$ 是 X 中 p 的一个开邻域。

接下来，我们证明 $\operatorname{cHw}(X) \leqslant \sup_{\alpha<\mu}\operatorname{cHw}(Y_\alpha)$。令 $Z \subseteq X$ 为可数集，并且对每个 $\alpha < \mu$，我们取满足 $\{\alpha\}\times Z_\alpha = Z \cap (\{\alpha\}\times Y_\alpha)$ 的 $Z_\alpha \subseteq Y_\alpha$。对每个 $\alpha < \mu$，现在定义 $\mathcal{C}_{Z_\alpha}$ 如下：

- 空集，若 $Z_\alpha = \emptyset$；
- 针对 $Z_\alpha \subseteq \operatorname{seq}(Y_\alpha)$ 的序列分离极限覆盖，若 $Z_\alpha \neq \emptyset$。

此外，现在我们可以定义

$$\mathcal{C}_Z^0 := \{\mathcal{L}(Z) - (\{\alpha\}\times Y_\alpha) : \alpha < \mu\};$$

$$\mathcal{C}_Z := \mathcal{C}_Z^0 \cup \bigcup_{\alpha<\mu}\big\{\{\alpha\}\times V : V \in \mathcal{C}_{Z_\alpha}\big\}.$$

显然，$|\mathcal{C}_Z| \leqslant |\mathcal{C}_Z^0| + \sup_{\alpha<\mu}\operatorname{cHw}(\operatorname{seq}(Y_\alpha))$。此外，由于 Z 是可数的，除可数多个 $\alpha < \mu$ 外，$\mathcal{L}(Z) - (\{\alpha\}\times Y_\alpha)$ 对每个 $\alpha < \mu$ 都等于 $L(Z)$，因此 $|\mathcal{C}_Z^0| \leqslant \aleph_0$。这就证明了 $|\mathcal{C}_Z| \leqslant \aleph_0 + \sup_{\alpha<\mu}\operatorname{cHw}(\operatorname{seq}(Y_\alpha)) = \sup_{\alpha<\mu}\operatorname{cHw}(\operatorname{seq}(Y_\alpha))$。

根据引理 4.9，要证明该命题，我们只需证明 $\mathcal{C}_Z$ 是 $Z \subseteq X$ 的序列分离极限覆盖。设 $p \in \mathcal{L}(Z)$，并设 $q \in X - \{p\}$。我们需要证明存在 $U \in \mathcal{C}_Z$，使得 $p \in U$ 且 $q \notin \operatorname{SeqCl}(U)$。如果存在 $\alpha < \mu$ 使得 $q \in \{\alpha\}\times Y_\alpha$ 且 $p \notin \{\alpha\}\times Y_\alpha$，那么我们可以选择 $U = X - \{\alpha\}\times Y_\alpha$。反之，如果有 $q = \Omega$，那么我们固定 α 使得 $p \in \{\alpha\}\times Y_\alpha$，并且可以选择任意满足 $V \in \mathcal{C}_{Z_\alpha}$ 且 $p \in U$ 的 $U = \{\alpha\}\times V$。最后，考虑存在 $\alpha < \mu$ 使得 $p,\ q \in \{\alpha\}\times Y_\alpha$ 的情况，在这种情况下我们

利用 $\mathcal{C}_{Z_\alpha}$ 是 $Z_\alpha \subseteq \mathrm{seq}(Y_\alpha)$ 的序列分离极限覆盖这一事实，选择一个满足 $V \in \mathcal{C}_{Z_\alpha}$、$p \in U$ 且 $q \notin \mathrm{SeqCl}(U)$ 的 $U = \{\alpha\} \times V$。□

引理 4.14. 固定某个基数 $\kappa < \mathfrak{s}$。那么，如果 $\lambda < \mathfrak{s}$，所有满足 $\mathrm{cHw}(X) \leqslant \kappa$ 的序列紧致豪斯多夫空间组成的族 X 是 λ-*ssc*。

证明。对于 $\alpha < \lambda$，设 X^α 是一个序列紧致豪斯多夫空间，$\mathrm{cHw}(X^\alpha) < \kappa$，并设 x^α 是一个取值于 X^α 的序列。令 X 为 $\mathcal{F}$ 中所有空间的不交并的序列 Aleksandroff 紧化：$= \{\mathrm{seq}(X^\alpha) : \alpha < \lambda\}$。

由定理 4.13 和 3.5 可得 X 是 λ-ssc，因为 $\mathrm{cHw}(X) \leqslant \kappa\lambda < \mathfrak{s}$。定理 4.12 蕴含 $\mathcal{F}$ 是 λ-ssc，因此 $\{(X^\alpha) : \alpha < \lambda\}$ 也为 λ-ssc。□

引理 4.15. 假设 $\mathfrak{s}$ 是正则的。如果 $\lambda < \mathfrak{s}$，所有满足 $\mathrm{cHw}(X) < \mathfrak{s}$ 的序列紧致豪斯多夫空间组成的族 X 是 λ-*ssc*。

证明。对于 $\alpha < \lambda$，设 X^α 是一个序列紧空间，$\mathrm{cHw}(X^\alpha) < \mathfrak{s}$。那么$\{\mathrm{cHw}(X^\alpha) : \alpha < \lambda\}$ 是一个由小于 $\mathfrak{s}$ 的基数组成、势小于 $\mathfrak{s}$ 的集合；因此，由于 $\mathfrak{s}$ 是正则的，$\kappa := \sup\{w(X^\alpha) : \alpha < \lambda\} < \mathfrak{s}$。结论现在由引理 4.14 得出。□

最后，通过考察是否达到可数豪斯多夫权，我们可以进一步强化关于豪斯多夫空间的结果。

定理 4.16。设 $\mathcal{F} = \{Y_\alpha : \alpha < \mu\}$ 是一个序列紧豪斯多夫空间的无限族，X' 是 $\mathcal{F}$ 中所有空间的不交并，而 $X = X' \cup \{\Omega\}$ 是 X' 的序列 *Aleksandroff* 紧化。假设：

$$\mathrm{cHw}(X) = \sup_{\alpha<\mu} \mathrm{cHw}(Y_\alpha) \geqslant \mu.$$

此外，假设 $\mathrm{cof}(\mathrm{cHw}(X)) > \aleph_0$。最后，假设对于每个 $\alpha < \mu$，要么 $\mathrm{cHw}(Y_\alpha) <$cHw(X)，要么 Y_α 未达到其可数豪斯多夫权。那么，X 未达到其可数豪斯多夫权。

证明。任取一个可数子集 $Z \subseteq X$，并按照定理 4.13 证明中的方法，为 $\alpha < \mu$ 构造 $\mathcal{C}_Z$ 和 $\mathcal{C}_{Z_\alpha}$。令 $\Lambda := \{\alpha < \mu\colon C_{Z_\alpha} \neq \emptyset\}$，并注意到 Λ 是可数的。此外，我们有：

$$|\mathcal{C}_Z| \leqslant \aleph_0 + \sup_{\alpha\in\Lambda} |\mathcal{C}_{Z_\alpha}|$$

由于每个 $|\mathcal{C}_{Z_\alpha}|$ 都严格小于 cHw(X)，这要么是因为 $\mathrm{cHw}(Y_\alpha) <$ cHw(X)，要么是因为 Y_α 未达到其可数豪斯多夫权，因此我们得到 $|\mathcal{C}_Z|$ 被一列严格小于 cHw(X)的基数的上确界所界定。由于 cof(cHw(X)) $> \aleph_0$，结论得证。□

引理 4.14 的对应结论如下：

引理 4.17。设 λ 是一个基数，$\lambda <$上确界($\mathfrak{s}$)。所有满足以下条件之一的序列紧豪斯多夫空间组成的族：其可数豪斯多夫权严格小于 $\mathfrak{s}$，或其可数豪斯多夫权等于 $\mathfrak{s}$ 但未达到，是 λ-*ssc*。

证明。在整个证明中，我们假设 $\lambda > \aleph_0$，因为情形 $\lambda \leqslant \aleph_0$ 已由推论 4.5 覆盖。对于 $\alpha < \lambda$，设 X^α 是一个序列紧豪斯多夫空间，并设 x^α 是一个取值于 X^α 的序列。假设对每个 $\alpha < \lambda$，要么 $\mathrm{cHw}(X^\alpha) < \mathfrak{s}$，要么 $\mathrm{cHw}(X^\alpha) = \mathfrak{s}$，且 X^α 未达到其可数豪斯多夫权。令 X 为由 $\mathcal{F}$ 中所有空间的不交并的序列 Aleksandroff 紧化：$= \{\mathrm{seq}(X^\alpha) : \alpha < \lambda\}$。

定理 4.13 得出 cHw(X) $\leqslant \mathfrak{s}$。若 cHw(X) $< \mathfrak{s}$，则根据定理 3.5， X 是 λ-ssc。反之，若 cHw(X) $= \mathfrak{s}$，定理 4.16 和 3.7 仍可推出 X 是 λ-ssc。无论哪种情况，定理 4.12 都意味着 $\mathcal{F}$ 是 λ-ssc，因此 $\{(X^\alpha) : \alpha < \lambda\}$ 也是 λ-ssc。□

5. Results based on the Distributivity Number

定理 2.7 及其类似结果给出的答案并未完全解决我们的问题，因为我们希望所有拓扑空间都具有同时序列紧致性，而不仅仅是那些具有某种有界权特征的空间。本节将解决这一问题，但我们需要将下界从分裂数 $\mathfrak{s}$ 降至分配数 $\mathfrak{h}$。

定义 5.1. 如果集合 $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ 向下封闭，即对于所有 $H \in \mathcal{A}$ 以及所有满足 $H' \subseteq H$ 的 $H' \in [\omega]^\omega$，都有 $H' \in \mathcal{A}$，则称其为开集。类似地，如果集合 $\mathcal{D} \subseteq [\omega]^\omega$ 与每个开集都有交集，也就是说，对于所有 $H \in [\omega]^\omega$，都存在某个$H' \in \mathcal{D}$ 使得 $H' \subseteq H$，则称其为稠密。于是，分配数 $\mathfrak{h}$ 定义为：与 $[\omega]^\omega$ 的交集为空的稠密开子集族的最小基数。

它成立 $\aleph_1 \leqslant \mathfrak{h} \leqslant 2^{\aleph_0}$，并且相对于 ZFC，$\aleph_1 < \mathfrak{h} < 2^{\aleph_0}$ 是一致的。关于分配数的更多信息，我们再次参阅 [Bla10]。

定理 5.2. 如果 $\lambda < \mathfrak{h}$，那么任意序列紧空间 X 都是 λ-*ssc*。

证明。 考虑取值于 X 的序列 x^α，对于 $\alpha < \lambda$，并定义

$$\mathcal{D}_\alpha := \{H \in [\omega]^\omega : \ x^\alpha \restriction H \text{ converges}\}.$$

如果 $x^\alpha \restriction H$ 收敛且 $H' \in [\omega]^\omega$ 满足 $H' \subseteq H$，那么 $x^\alpha \restriction H'$ 收敛；并且对于所有 $H \in [\omega]^\omega$，存在某个 $H' \subseteq H$ 满足 $H' \in [\omega]^\omega$，且使得 $x^\alpha \restriction H'$收敛，因为 X 是序列紧的。 $\mathcal{D}_\alpha$ 是稠密开集，因此由于 $\lambda < \mathfrak{h}$，存在某个 $H \in [\omega]^\omega$，使得对于所有 $\alpha < \lambda$都有 $H \in \mathcal{D}_\alpha$，于是 $x^\alpha \restriction H$ 对 $\alpha < \lambda$收敛。□

作为定理 5.2 和定理 4.4 的推论，我们还可得到以下结果：

推论 5.3. 如果 $\lambda < \mathfrak{h}$，所有序列紧空间组成的族是 λ-*ssc*。

由定理 5.2 和引理 2.3 可知 $\mathfrak{h} \leqslant \mathfrak{s}$，这是一个已知的不等式（见[Bla10]）。这也为在假设 $\mathfrak{h} = \mathfrak{s}$ 的情况下解决该问题提供了完整答案。

推论 5.4. 如果 $\mathfrak{h} = \mathfrak{s}$，一个非平凡的序列紧空间是 λ-*ssc* 当且仅当 $\lambda < \mathfrak{s}$。

借助定理 5.2 和引理 2.3，我们还可以看到，正如下面的引理 5.5 所示， $\mathfrak{h} \leqslant$ cof($\mathfrak{s}$)，这是另一个众所周知的不等式，也是对前述不等式的加强（而且确实是严格加强，正如 Alan Dow 和 Saharon Shelah 在 [DS18]中所示）。

引理 5.5. 成立 $\mathfrak{h} \leqslant$上确界($\mathfrak{s}$)。

证明。 对于 $\alpha < \mathfrak{s}$，令 x^α 为一个取值于 $\{0, 1\}$ 的序列，使得不存在$H \in [\omega]^\omega$ 能使所有序列 x^α 收敛。这些序列 x^α 由引理 2.3 可知存在。现在令 λ_β 为满足 $\beta <$ 上确界($\mathfrak{s}$) 的基数，且其上确界$\{\lambda_\beta$ 为: $\beta <$ 上确界($\mathfrak{s}$)$\} = \mathfrak{s}$。

根据引理 2.4，我们知道，对于 $\beta <$ cof($\mathfrak{s}$)，序列 x^α for $\alpha < \lambda_\beta$ 在一个公共集合上收敛。令 $\mathcal{D}_\beta$ 为所有满足 $x^\alpha \restriction H$ 对所有 $\alpha < \lambda_\beta$都收敛的 $H \in [\omega]^\omega$ 的集合：这是 $[\omega]^\omega$ 的一个稠密开子集。现在，若 cof($\mathfrak{s}$) $< \mathfrak{h}$，那么所有 $\mathcal{D}_\beta$ for $\beta <$cof($\mathfrak{s}$) 的交集非空（包含 H），因此，对所有 $\alpha < \mathfrak{s}$，序列 x^α 都在一个公共的 H 上收敛，这就产生了矛盾。□

我们的下一个目标是证明存在一个序列紧空间，它不是$\mathfrak{h}$-ssc。这显然可由 $\mathfrak{h}=\mathfrak{s}$ 得出，但我们要寻找一个 ZFC 证明。

引理 5.6. 设 $\mathcal{D}\subseteq[\omega]^\omega$ 是稠密开集。存在一个序列紧空间 X，以及一个取值于 X 的序列 x，使得 $\mathcal{D}=\{H\in[\omega]^\omega:\ x\restriction H \text{ 收敛}\}$。

证明。设 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{D}$ 的所有开子集构成的族，并令 $X:=\omega\cup\mathcal{L}$。

现在我们为 X' 赋予一个拓扑，定义如下。当且仅当对于所有 $H\in[\omega]^\omega$ 和满足 $H\in\ell$ 与 $H\subseteq C$ 的 $\ell\in\mathcal{L}$，都有 $\ell\in C$ 时，子集 $C\subseteq X'$ 是闭集。

我们来验证这确实是一个拓扑。显然，$\emptyset$ 和 X' 是闭集。设对所有 $\alpha<\kappa$，C_α 都是闭集。任取 κ，并证明 $C:=\bigcap_{\alpha<\kappa}C_\alpha$ 是闭集。若 $H\in[\omega]^\omega$ 和 $\ell\in\mathcal{L}$ 满足 $H\in\ell$，则假设 $H\subseteq C$。这意味着对所有 $\alpha<\kappa$ 都有 $H\subseteq C_\alpha$；因此，由于 C_α 是闭集，我们得到对所有 $\alpha<\kappa$ 都有 $\ell\in C_\alpha$，于是 $\ell\in C$，证毕。

最后，设 C_0 和 C_1 都是闭集，并证明 $C:=C_0\cup C_1$ 是闭集。假设 $H\in[\omega]^\omega$, $\ell\in\mathcal{L}$, $H\in\ell$, 且 $H\subseteq C$。现在定义 $H_0:=H\cap C_0$ 和$H_1:=H\cap C_1$。H_0 和 H_1 中至少有一个是 ω的无限子集；不失一般性，我们可以假设 $H_0\in[\omega]^\omega$。于是，由于 $H\in\ell$, $H_0\subseteq H$ 是无限的，且 $\mathcal{D}$是开集，我们得到 $H_0\in\ell$。由于 C_0 是闭集且 $H_0\subseteq C_0$，因此有 $\ell\in C_0\subseteq C$。

现在考虑取值于 X' 的序列 x，其定义为 $x_n:=n\in\omega$。根据我们在 X'上定义拓扑的方式，对于每个 $H\in[\omega]^\omega$，子序列$x\restriction H$ 收敛到 $\ell\in\mathcal{L}$ 当且仅当 $H\in\ell$。特别地，我们得到

$$\{H\in[\omega]^\omega : x\restriction H \text{ converges}\}=\bigcup_{\ell\in\mathcal{L}}\ell=\mathcal{D}.$$

现在令 $X:=X'\cup\{\Omega\}$ 为 X' 的亚历山德罗夫紧化。我们要证明 X 是序列紧的。设 y 是一个取值于 X 的序列，下面区分几种可能的情况。显然，如果 y 无穷多次取同一个值，那么 y 有一个收敛子列。因此，必要时通过取子列，我们可以假设 y 每个值至多取一次，且从不取值 Ω。进一步地，必要时通过取子列，我们还可以假设：若 $n<m<\omega$ 满足 $y_n\in\omega$ 和 $y_m\in\omega$，则 $y_n<y_m$。

如果 y 无穷多次取值于 ω，那么 $H:=\{n<\omega:\ y_n\in\omega\}\in[\omega]^\omega$。若令 $Z:=\{y_n\in\omega:\ n\in H\}$，则 $y\restriction H=x\restriction Z$。由于 $\mathcal{D}$ 是稠密的，存在 $Z'\in[\omega]^\omega$，使得 $Z'\subseteq Z$，且 $x\restriction Z'$ 收敛；若 $H':=\{n<\omega:\ y_n\in Z'\}$，则可得 $y\restriction H'=x\restriction Z'$ 收敛，因此 y 有一个收敛子列。

为完成 X的序列紧致性证明，假设 y 取值于 ω 的次数只有有限次。通过最终限制到一个子序列，我们可以假设 y 只取值于 $\mathcal{L}$，且从不两次取同一个值。不过，由于 $\mathcal{L}$ 上的相对拓扑是离散拓扑，我们知道$\mathcal{L}$ 的子集紧致，当且仅当它是有限集。因此，若 U 是 Ω 的一个开邻域，则序列 y 最终包含于 U中，故 y 收敛到 Ω，如所求。□

定理 5.7. 存在一个序列紧空间 X，它不是 $\mathfrak{h}$-*ssc*。

证明. 设 $\langle\mathcal{D}_\alpha:\alpha<\mathfrak{h}\rangle$ 是 $[\omega]^\omega$ 的一个稠密开集族，且其交集为空。对所有 $\alpha<\mathfrak{h}$，根据引理 5.6，我们可以找到一个序列紧的X^α 以及一个序列 x^α，其取值属于 X^α，并且 $\mathcal{D}_\alpha=\{H\in[\omega]^\omega:\ x^\alpha\restriction H \text{ 收敛}\}$。

由于交集 $\bigcap_{\alpha<\mathfrak{h}}\mathcal{D}_\alpha$ 为空，因此不存在 $H\in[\omega]^\omega$ 使得所有序列 x^α 都收敛。因此，所有序列紧空间构成的族

不是 $\mathfrak{h}$-ssc，因此根据定理 4.4，存在一个序列紧拓扑空间 X，它不是 $\mathfrak{h}$-ssc，正如我们所希望的那样。□

本文初稿完成后，我们通过 Michael Hrušák 的私人通信得知（对此我们深表感谢），定理 5.2 和 5.7 很容易被看出等价于一些结果，而这些结果的证明可见于 Petr Simon 的文章 [Sim93]。由于我们的证明更短、背景不同且采用了不同的技巧，我们认为仍有必要在此给出这些证明。

在引理 5.6 的证明中，我们可以令 $\mathcal{L}$ 为 $\mathcal{D}$ 的所有开子集所构成的族，且这些开子集对有限并封闭，并在此性质下极大。若如此，由定理 5.7 得到的序列紧空间 X not $\mathfrak{h}$-ssc 满足 $w(X) \leqslant 2^{\aleph_0}$。现在我们可以问，是否可能找到一个序列紧空间 X not $\mathfrak{h}$-ssc，使得 $w(X) = \mathfrak{s}$。我们认为，探究这是否可在 ZFC 中证明，以及它是否与假设 $\mathfrak{h} < \mathfrak{s} < 2^{\aleph_0}$ 同时相容，都很有意义。

一个更有趣的问题是：是否存在与 ZFC 相容的情形，使得所有权小于 $\mathfrak{s}$ 的序列紧空间组成的族不是 λ-ssc，其中某个 $\lambda < \mathfrak{s}$? 只有在 $\mathfrak{s}$ 是奇异基数（因此 $\mathfrak{h} < \mathfrak{s}$）的模型中，肯定的回答才有可能。

Acknowledgements

我们感谢 Angelo Bella 为本文的多个版本提供了宝贵意见。

第一作者感谢授予比萨大学数学系的 MIUR 卓越系项目，项目编号为 CUP I57G22000700001。

第二作者是意大利国家高等数学研究所（INdAM）下属代数、几何结构及其应用国家小组（GNSAGA）的成员。

References

[Blass10] A. Blass, *Combinatorial cardinal characteristics of the continuum.*载于：《集合论手册》（共3卷）。多德雷赫特：施普林格。395–489页（2010）。[DS18] A. Dow 和 S. Shelah, *On the cofinality of the splitting number.*《数学探索》，新系列，29卷，1期，382–395页（2018）。[Eng89] R. Engelking, *General topology. Rev. and compl. ed.* 纯数学 Sigma 丛书，第6卷。柏林：Heldermann 出版社（1989）。[Sim93] P. Simon, *Products of sequentially compact spaces.*的里雅斯特大学数学研究所学报，25卷，1–2期，447–450页（1993）。[Van84] E. van Douwen, *The integers and topology.*载于：《集合论拓扑学手册》。阿姆斯特丹－纽约－牛津：北荷兰出版社。111–167页（1984）。

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Largo Bruno Pontecorvo, 5, 56127Pisa, Italia*Email address*: sirio.resteghini@phd.unipi.it

Departament de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona, Gran Via de les Corts Catalanes, 585, 08007 Barcelona, Catalunya; Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Trento, Via Sommarive, 14, 38123 Povo (Trento), Italia
Email address: straffelini@ub.edu & cesare.straffelini@unitn.it